



HAL
open science

Analyse algébrique des systèmes de contrôle linéaires multidimensionnels

Alban Quadrat

► **To cite this version:**

Alban Quadrat. Analyse algébrique des systèmes de contrôle linéaires multidimensionnels. Mathématiques [math]. École des Ponts ParisTech, 1999. Français. NNT : 1999ENPC9921 . tel-04548960

HAL Id: tel-04548960

<https://enpc.hal.science/tel-04548960>

Submitted on 16 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 23940(3)



Thèse de Doctorat présentée par

Alban Quadrat

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité :

Mathématiques Appliquées

sujet :

**Analyse algébrique des systèmes de contrôle linéaires
multidimensionnels**



soutenue le 27 septembre 1999 devant le jury composé de :

M. J.C. Willems	Président et rapporteur
M. M. Fliess	Rapporteur
M. G. Le Vey	Rapporteur
M. J.-F. Pommaret	Directeur de thèse
M. M. Bronstein	Examineur
M. S. Diop	Examineur
M. C. Sabbah	Examineur



Thèse de Doctorat présentée par

Alban Quadrat

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Spécialité :

Mathématiques Appliquées

sujet :

**Analyse algébrique des systèmes de contrôle linéaires
multidimensionnels**

soutenue le 27 septembre 1999 devant le jury composé de :

M. J.C . Willems Président et rapporteur

M. M. Fliess Rapporteur

M. G. Le Vey Rapporteur

M. J.-F. Pommaret Directeur de thèse

M. M. Bronstein Examineur

M. S. Diop Examineur

M. C. Sabbah Examineur



“Une idée qui n’est pas dangereuse ne mérite pas d’être appelée une idée.”

Oscar Wilde, “Le déclin du mensonge” (1891).

A mon cousin Gregory.

Remerciements

Je remercie M. Fliess et J. C. Willems d'avoir spontanément accepté d'être rapporteurs de cette thèse. J'en suis d'autant plus touché que j'admire leur originalité, laquelle a su faire évoluer la théorie du contrôle aux cours de ces dernières années. Je suis reconnaissant à G. Le Vey de l'intérêt continu qu'il a porté à mon travail et d'avoir accepté d'être rapporteur. Je remercie aussi M. Bronstein et C. Sabbah pour l'intérêt qu'ils portent à ce travail en acceptant d'en être les examinateurs. Je tiens à remercier S. Diop qui me fait le plaisir de participer à ce jury, et avec qui, j'ai débuté dans cette voie aux cours de mon stage de DEA. Je remercie également U. Oberst d'avoir accepté un moment d'être rapporteur de cette thèse, mais qui, pour des raisons personnelles, n'a pu le faire.

Ma reconnaissance va à mon directeur de thèse, J. F. Pommaret, avec qui j'ai passé trois années intellectuellement riches. J'en retiens surtout son goût de la compréhension profonde des concepts, son regard esthétique sur les idées, sa culture, tant en mathématique qu'en physique, son enthousiasme et sa pédagogie.

Je voudrais remercier ici toutes les personnes qui m'ont donné la possibilité d'exposer mes travaux pendant ces trois années de thèse :

- S. Diop pour son invitation au séminaire du LSS/Supélec le 14 juillet,
- L. Baratchart et J.-P. Pomet de m'avoir invité du 07 au 09 juillet 1999 à l'INRIA de Sophia Antipolis et au séminaire MIAOU,
- C. Bonnet pour son invitation au séminaire SOSSO à l'INRIA de Rocquencourt, ainsi que pour nos discussions et son intérêt pour mon approche des problèmes de stabilisation robuste,
- J.J. Loiseau, G. Le Vey et F. Boyer pour leurs intérêts à mes travaux et pour leurs invitations pendant la semaine du 01/05 mars 1999 à l'IRCyN et à l'Ecole des Mines de Nantes,
- U. Oberst pour son invitation au mois de mai 1998 à l'Université de Innsbruck et pour ses encouragements continuels. Je le remercie particulièrement pour avoir été demandeur de quatre exposés sur la théorie de Riquier-Janet [124] au sein même où les bases de Groebner ont été découvertes,
- F. Bourquin pour m'avoir donné l'occasion de faire un poster au Workshop "Control of Fluids and Structures" à l'IHP,
- M. Fliess pour son invitation à la rencontre "Systèmes linéaires en automatique, anneaux et modules", du 17-21 novembre 1997 au CIRM.

Merci également à toutes les personnes avec qui j'ai eu l'occasion de parler, et en particulier, L. Baratchart, J. J. Loiseau, U. Oberst, J. C. Willems, C. Bonnet, J. -B. Pomet, H. K. Pillai, J. R. Partington, F. Pauer, S. Kleon, P. Rouchon et mes amis du CERMICS.

J'aimerais aussi remercier D. Lamberton de m'avoir accepté au sein de l'équipe des chargés de TD de l'Université de Marne-la-vallée pendant ces trois années.

Je voudrais remercier mes parents pour avoir toujours su établir un milieu très favorable pour les études et pour leurs encouragements à ce que, mes frères et moi, nous nous épanouissions dans les voies que nous avons choisies. Je remercie en particulier mon père pour avoir su nourrir ma passion pour les mathématiques et pour m'avoir toujours fait part de son expérience et de son jugement.

Pour finir ces quelques mots de remerciements, j'ai une pensée pour mon amie Céline qui a toujours su faire part d'une grande compréhension envers ma passion dévorante des mathématiques, et qui a su m'apporter son soutien et son dévouement. De plus, je la remercie pour son travail de relecture de cette thèse afin d'éliminer au maximum mes fautes de français et d'anglais que j'y ai parsemées.

Principales notations

X	variété différentielle de dimension n
$x = (x^1, \dots, x^n)$	coordonnées locales de X
T	fibré tangent de X
T^*	fibré cotangent de X
χ	covecteur de X
\otimes	produit tensoriel
S	produit symétrique
\wedge	produit extérieur
E, F	fibrés vectoriels sur X
$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$	multi-indice
$ \mu = \mu_1 + \dots + \mu_n$	longueur du multi-indice μ
$J_q(E)$	fibré des q -jets sur E
$(x, y_\mu^k, 1 \leq k \leq m, 0 \leq \mu \leq q)$	coordonnées locales de $J_q(E)$
$j_q(\xi)(x) = (x, \partial_\mu \xi(x), 0 \leq \mu \leq q)$	q -jet de la section ξ de E
R_q	système linéaire d'équations aux dérivées partielles (EDP)
$\rho_r(R_q) = R_{q+r}$	r -prolongation de R_q
$R_{q+r}^{(s)}$	projection de R_{q+r+s} sur $J_{q+r}(E)$
g_q	symbole de R_q
δ	application de Spencer
α_q^i	$i^{\text{ème}}$ caractère de R_q
\mathcal{D}	opérateur différentiel
$\tilde{\mathcal{D}}$	adjoint formel de \mathcal{D}
D_i	$i^{\text{ème}}$ opérateur de Spencer
A	anneau intègre
$K = Q(A)$	corps de quotient de A
M	A -module de présentation finie
$\text{rk}_A(M)$	rang du A -module M
∂_i	dérivation partielle
$s = \frac{d}{dt}$	dérivée ordinaire
K	corps différentiel muni des dérivations $\partial_1, \dots, \partial_m$ et contenant \mathbb{Q}
k	corps de constantes de K
$D = K[d_1, \dots, d_n]$	anneau des opérateurs différentiels
$\text{ann}(M)$	annulateur de M
$\text{cd}(M)$	codimension de M
$\text{char}(M)$	variété caractéristique de M
$d(M)$	dimension de M
$\text{dp}(M)$	dimension projective de M
ext	foncteur ext

$\text{spec}(A)$	spectre de A
$\text{supp}(M)$	support de M
$t(M)$	partie de torsion de M
tor	foncteur tor
$\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) > 0\}$	demi-plan complexe droit
$H_\infty(\mathbb{C}_+)$	algèbre de Hardy ∞ dans le demi-plan droit
$RH_\infty(\mathbb{C}_+)$	anneau des fonctions rationnelles réelles dans $H_\infty(\mathbb{C}_+)$
$H_2(\mathbb{C}_+)$	espace de Hardy dans le demi-plan droit
$\hat{f}(s)$	transformée de Laplace de f
$\mathcal{A}, \mathcal{A}(\beta), \mathcal{A}_{-\beta}$	algèbres de Callier-Desoer
$\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{A}}(\beta), \hat{\mathcal{A}}_{-\beta}$	algèbres de Callier-Desoer

Table des matières

	3
Remerciements	5
Principales notations	7
Chapitre 1. Introduction	11
1. Systèmes et modules	11
2. Résumé des différents résultats	16
3. Description des chapitres	32
Chapitre 2. Théorie des modules	35
1. Suites et diagrammes	35
2. Classification des modules	44
Chapitre 3. Algèbre homologique	67
1. Équivalence des modules	67
2. Foncteurs Ext et Tor	93
Chapitre 4. Théorie formelle des équations aux dérivées partielles	115
1. Fibrés, morphismes et suites exactes	115
2. Opérateurs différentiels	116
3. Cohomologie de Spencer	123
4. Suite de Janet - Suites de Spencer	132
5. Variété caractéristique	141
Chapitre 5. Identités de Bezout généralisées & Applications	143
1. Generalized Bezout identity	143
2. Applications	162
3. Appendice	175
Chapitre 6. Contrôlabilité des systèmes multidimensionnels	177
1. Introduction	179
2. Differential Modules	180
3. Parametrization	182
4. Localization	192
5. Conclusion	195
6. Appendix	196
7. Compléments	196
Chapitre 7. Problèmes d'élimination	203
1. Introduction	203
2. Formal Integrability Theory	204
3. Applications to Control Systems Theory	216
4. Conclusion	225

5. Compléments	225
Chapitre 8. Analyse algébrique des systèmes de contrôle multidimensionnels	229
1. Introduction	230
2. Algebraic Analysis	231
3. Applications to Control Theory	240
4. Conclusion	249
5. Exemples	249
Chapitre 9. Commande optimale des systèmes multidimensionnels	253
1. Introduction	253
2. Formal Tools	254
3. Optimal Control	259
4. Applications	268
5. Conclusion	272
6. Compléments	273
Chapitre 10. Aspects algébriques des problèmes de stabilisation	281
1. Introduction	281
2. Modules and Systems	282
3. Torsion-free modules and weakly primeness	285
4. Duality and formal parametrizations	291
5. Projective modules and vector bundles	297
6. Freeness and internal stability	302
7. Examples	310
8. Conclusion	314
Chapitre 11. Conclusion	315
1. Résumé et commentaires	315
2. Diverses perspectives	316
Bibliographie	319

CHAPITRE 1

Introduction

1. Systèmes et modules

Dans les années soixante, les travaux de B. Malgrange ont montré que la théorie algébrique des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) linéaires était liée à la théorie des modules [94, 96, 97]. Il semble toutefois que l'analogie entre les systèmes d'EDP et les systèmes polynomiaux ait été remarquée bien avant ces années-là et qu'elle ait déjà été exploitée dans les travaux de M. Janet [74, 75, 76, 77] dans les années vingt. Il est à noter, à ce sujet, que, suivant le conseil de P. Hadamard, M. Janet fut pour quelques temps un étudiant d'Hilbert auprès duquel il apprit les méthodes algébriques modernes telles que les syzygies. Cette théorie algébrique des systèmes d'EDP linéaires a été systématiquement développée dans les années soixante-dix, essentiellement par V.P. Palamodov [106], en Russie, et par l'école japonaise de M. Sato, en particulier par M. Kashiwara [85]. Cette dernière école a baptisé cette approche "*analyse algébrique*", mais elle est aussi communément appelée la théorie des *D-modules* (*D* pour différentiel). *L'étude formelle* des systèmes d'EDP a été développée, dans les mêmes années, par l'école américaine de D. Spencer, et en particulier, par D. Quillen et H. Goldschmidt [59, 60, 61, 128, 144]. Suivant les idées de D. Quillen, B. Malgrange a établi dans [96] des liens entre la théorie des *D-modules* et la théorie formelle des EDP. H. Goldschmidt utilisera aussi cette dualité opérateurs/modules dans un papier peu connu [62].

Le but de cette thèse est d'utiliser à la fois la théorie des *D-modules* et la théorie formelle des EDP pour l'étude des systèmes d'EDP, en particulier, pour les systèmes de contrôle. Nous nous intéresserons à la description des propriétés structurelles des systèmes de contrôle en termes intrinsèques à l'aide des *D-modules* et au développement des tests effectifs permettant de les vérifier à l'aide des opérateurs différentiels. Il est à noter que la complémentarité des opérateurs différentiels et des *D-modules* est très utile car certaines propriétés des systèmes sont plus faciles à comprendre en terme de modules, alors que d'autres le sont en terme d'opérateurs différentiels. Par exemple, le concept d'intégrabilité formelle est beaucoup plus simple du point de vue système alors que l'équivalence projective n'a vraiment de sens qu'au niveau des modules. Ainsi, nous utiliserons la dualité opérateurs différentiels/modules différentiels très souvent au cours de cette thèse, mais nous privilégierons toujours le langage le mieux adapté, surtout pour les applications et les exemples.

Notons que R.E. Kalman, un des fondateurs de la théorie du contrôle moderne, avait déjà développé une approche module pour la théorie du contrôle [84]. Cependant, l'approche de Kalman est différente de celle des *D-modules*. Le point de vue adopté ici est à rapprocher, dans son esprit, de l'approche géométrique de W.M. Wonham [162], car elles n'utilisent toutes deux que des objets intrinsèques (modules dans notre cas, espaces vectoriels dans le cas de Wonham). En effet, l'analyse algébrique des systèmes de contrôle développée dans cette thèse s'attache à une étude intrinsèque des systèmes, c'est-à-dire à une étude qui ne dépend pas de la représentation des systèmes. À notre connaissance, l'utilisation des idées de la géométrie algébrique pour l'étude des systèmes de contrôle, a été essentiellement développée par U. Oberst, M. Fliess et J.F. Pommaret (voir [38, 39, 41, 44, 45, 104, 113, 112, 116] ainsi que les références de ces papiers) depuis une dizaine d'années.

Essayons de faire comprendre pourquoi la théorie des modules peut être utile pour l'étude des systèmes de contrôle linéaires. De nombreuses classes de systèmes se modélisent par des matrices à coefficients dans un anneau intègre A . Citons quelques anneaux parmi les plus connus :

1. L'anneau $A = \mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$ des opérateurs différentiels linéaires scalaires à coefficients réels. Cet anneau est utilisé pour les systèmes de la forme de Kalman [82, 83, 84, 162]

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases}$$

ou pour les systèmes polynomiaux de la forme

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y + Q\left(\frac{d}{dt}\right)u = 0,$$

où P et Q sont des matrices à coefficients dans A [81, 152, 158, 159]. En utilisant la transformée de Laplace, on peut écrire les systèmes polynomiaux sous la forme équivalente

$$P(s)\hat{y} + Q(s)\hat{u} = 0,$$

où P et Q sont maintenant des matrices à coefficients dans l'anneau $\mathbb{R}[s]$ et \hat{y} et \hat{u} sont les transformées de Laplace de y et u .

EXEMPLE 1.1. Un exemple classique de système de Kalman est un circuit RLC. En effet, en utilisant la loi des noeuds, et en notant i le courant électrique, q la charge du condensateur, u la tension, R la résistance, C la capacité et L l'inductance, nous avons le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = i, \\ L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = u. \end{cases}$$

On peut alors réécrire ce système sous la forme d'un système de Kalman :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u.$$

EXEMPLE 1.2. Un exemple classique de système polynomial est l'oscillateur harmonique commandé par une force, du type,

$$m\ddot{y} + ky - u = 0,$$

où y est le déplacement, u la force, m la masse du système et k le coefficient de raideur du ressort.

2. L'anneau $A = \mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta_1, \dots, \delta_r]$ des opérateurs différentiels à retards constants ($\delta_i f(t) = f(t - t_i)$, $t_i \in \mathbb{R}$). De nombreux systèmes différentiels comportant des retards constants s'écrivent sous la forme

$$P\left(\frac{d}{dt}, \delta_1, \dots, \delta_r\right)y + Q\left(\frac{d}{dt}, \delta_1, \dots, \delta_r\right)u = 0,$$

où P et Q sont deux matrices à coefficients dans A , ou sous une forme de Kalman généralisée :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^k A_i x(t - t_i) + \sum_{i=0}^k B_i u(t - t_i), \\ y(t) = \sum_{i=0}^k C_i x(t - t_i) + \sum_{i=0}^k D_i u(t - t_i). \end{cases}$$

EXEMPLE 1.3. Le système de la forme $\dot{y} - \delta u = 0$ est couramment rencontré dans la littérature. En général, une transmission d'un signal dans un canal fait intervenir un retard. Le contrôle de certaines équations des ondes fait aussi intervenir de tels systèmes (voir [43, 44, 102]).

3. L'anneau $A = \mathbb{R}[\chi_1, \dots, \chi_n]$ des polynômes en χ_i est utilisé pour les systèmes multidimensionnels [18, 19, 46, 104, 133, 163]. Les systèmes multidimensionnels ont été introduits pour étudier les systèmes avec retards, certains systèmes distribués, les circuits électriques, les filtres ou les réseaux. Voir pour plus de détails le chapitre X de [81] et [18, 19]. Ces systèmes s'écrivent en général sous la forme

$$P(\chi_1, \dots, \chi_n) y + Q(\chi_1, \dots, \chi_n) u = 0,$$

ou plus généralement, sous la forme de $R(\chi_1, \dots, \chi_n) z = 0$, avec R une matrice à coefficients dans A et z un certain nombre d'inconnues.

EXEMPLE 1.4. Pour modéliser certains systèmes avec retards, on utilise souvent l'anneau $A = \mathbb{R}[s, z]$.

4. L'anneau $A = \mathbb{R}[d_1, \dots, d_n]$ des opérateurs différentiels linéaires à coefficients réels est utilisé pour modéliser certaines équations de la physique [26, 35, 116].

EXEMPLE 1.5. Citons par exemple les deux groupes des équations de Maxwell en électromagnétisme :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \end{cases}$$

Il existe bien d'autres exemples tels que les équations de l'élasticité linéaire, de l'hydrodynamique...

5. L'anneau $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$ des fonctions analytiques bornées dans le demi-plan droit. Cet anneau est aussi appelé *espace de Hardy* [28, 47, 51] et il a été introduit en théorie du contrôle par G. Zames [166, 167]. Cet anneau est utilisé pour modéliser certaines classes de systèmes distribués propres et stables [28, 148, 152]. L'anneau des fractions rationnelles réelles propres et stables RH_∞ est aussi très utilisé pour l'étude des systèmes propres et stables de dimension finie (voir par exemple [47, 101, 149]).

EXEMPLE 1.6. Considérons l'équation des ondes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial x}(0, t) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial x}(1, t) = u(t), \\ y(t) = \frac{\partial z}{\partial t}(1, t), \end{array} \right.$$

alors, en utilisant la transformée de Laplace, nous obtenons après quelques calculs

$$(1 - e^{-2s}) \hat{y}(s) - (1 + e^{-2s}) \hat{u}(s) = 0,$$

avec $(1 - e^{-2s}), (1 + e^{-2s}) \in H_\infty(\mathbb{C}_+)$.

6. Les algèbres de convolution de Callier-Desoer $\mathcal{A}, \mathcal{A}(\beta), \mathcal{A}_\beta, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{A}}(\beta), \hat{\mathcal{A}}_\beta$ [25, 28, 148] ou les anneaux $A = \mathbb{R}[s, e^{-s}]$ et $A = \mathcal{E}$ [20] sont utilisés pour les systèmes avec retards ou certaines classes de systèmes distribués.

Le point commun de tous ces exemples est la modélisation des systèmes de contrôle sous la forme

$$Rz = 0,$$

où R est une matrice rectangulaire (moins de colonnes que de lignes) à coefficients dans A et z un certain nombre d'inconnues. Par exemple, le système de Kalman peut s'écrire sous la forme $Rz = 0$, avec la matrice R , à coefficients dans $A = \mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$, suivante

$$R = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} I_n - A & -B & 0 \\ C & D & -I_p \end{pmatrix},$$

où I_n est la matrice unité $n \times n$ et $z = (x \ u \ y)^t$. L'exemple 1.6 s'écrit sous la forme de $Rz = 0$, avec $z = (\hat{y} \ \hat{u})^t$ et :

$$R = (1 - e^{-2s} \quad - (1 + e^{-2s})).$$

Remarquons que l'on utilise un anneau A et non un corps K pour modéliser des classes de systèmes. Deux raisons historiques peuvent expliquer ces choix. Les pionniers de l'automatique moderne s'étaient déjà rendus compte que si l'on utilise des fonctions de transfert du type

$$\hat{y} = \frac{n(s)}{d(s)} \hat{u}$$

pour décrire le système de contrôle

$$d\left(\frac{d}{dt}\right)y - n\left(\frac{d}{dt}\right)u = 0,$$

alors, une simplification dans la fonction de transfert $h(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ par un facteur commun entre le numérateur et le dénominateur, ayant un zéro à partie réelle positive, pouvait amener à des instabilités du système [6, 58]. La deuxième raison, remarquée pour la première fois par R. E.

Kalman dans les années soixante [82], est que toute simplification par un facteur commun entre le numérateur et le dénominateur de $h(s)$ a pour conséquence une perte de *contrôlabilité* du système, c'est-à-dire, la perte de la possibilité d'atteindre, dans l'espace d'état, tout point donné à partir d'un point initial. Pour ces deux raisons, si l'on dispose d'une matrice de transfert, i.e., une matrice à coefficients dans le corps de fraction $K = Q(A)$ de l'anneau A , on est très souvent amené à l'écrire comme provenant d'un système de contrôle défini par une matrice à coefficients dans l'anneau A , c-à-d, à trouver des factorisations (copremières ou non) de la matrice de transfert [25, 28, 30, 152].

En écrivant le système de contrôle sous la forme $Rz = 0$, avec R une matrice à coefficients dans l'anneau A , les propriétés structurelles des systèmes sont alors définies en terme de propriétés de certaines matrices. Par exemple :

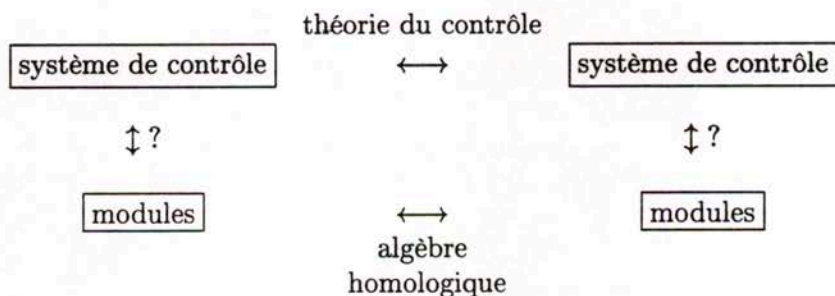
- la *contrôlabilité* des systèmes polynomiaux $P(\frac{d}{dt})y + Q(\frac{d}{dt})u = 0$ est équivalente au fait que la matrice $(P(\frac{d}{dt}) \quad Q(\frac{d}{dt}))$ est première à gauche, c-à-d, à l'existence de deux matrices X et Y , à coefficients dans $A = \mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$, telles que

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)X\left(\frac{d}{dt}\right) + Q\left(\frac{d}{dt}\right)Y\left(\frac{d}{dt}\right) = I,$$

où I est la matrice identité [81],

- les *pôles et les zéros* des systèmes polynomiaux sont les facteurs invariants de certaines matrices [81],
- l'*observabilité* des systèmes polynomiaux est liée à la primalité à droite de certaines matrices [81],
- les différents types de *primalités des systèmes n -dimensionnels*, définis par des matrices de rang générique maximal, sont liés à la dimension de la variété sur laquelle s'annulent tous les mineurs d'ordres maximaux [18, 19, 163, 164], ...

Ainsi, nous remarquons que les objets que nous avons à manipuler sont des matrices à coefficients dans un anneau et que l'on doit étudier certaines de leurs propriétés. Cependant, la théorie des modules est la théorie mathématique de l'algèbre linéaire sur un anneau. Nous sentons donc qu'il est intéressant de voir comment la théorie des modules et l'algèbre homologique permettent de reformuler de manière plus intrinsèque les propriétés structurelles des systèmes de contrôle. On aimerait ainsi pouvoir établir un *dictionnaire* entre la théorie des systèmes de contrôle et la théorie des modules, c-à-d entre les propriétés structurelles des systèmes de contrôle et les propriétés algébriques des modules. On peut donc se poser la question de savoir s'il existe une correspondance telle que celle représentée par la figure suivante.



C'est ce qui a été entrepris dans les publications [38, 39, 41, 44, 45, 104, 108, 109, 113, 112, 116, 117, 118, 119, 120, 121]. Une des originalités de cette thèse, par rapport aux travaux antérieurs, est l'utilisation assez systématique de l'algèbre homologique pour l'étude des systèmes. Nous verrons que ce nouvel outil permet de mieux comprendre les propriétés intrinsèques des systèmes et donne des tests effectifs permettant de les vérifier.

2. Résumé des différents résultats

2.1. Théorie des modules. Un des buts de la thèse est de comprendre les liens entre les propriétés algébriques des modules et les propriétés structurelles des systèmes de contrôle. Pour reconnaître ces propriétés algébriques, nous développons des tests effectifs. Une des originalités de cette thèse, par rapport aux travaux antérieurs, est l'utilisation systématique de l'algèbre homologique pour l'étude des systèmes.

Soit R une matrice à coefficients dans un anneau intègre A . On définit alors le A -morphisme

$$\begin{aligned} \cdot R : A^q &\longrightarrow A^p \\ z &\longrightarrow zR \end{aligned}$$

où les vecteurs de A^p et A^q sont des vecteurs lignes et l'on considère le A -module à gauche $M = \text{coker}(\cdot R) = A^p/A^q R$ de type fini. Si l'on note par y_i la classe dans M du vecteur e_i , où e_i est un vecteur de la base canonique de A^p , nous avons alors dans M les équations $Ry = 0$, ainsi que toutes leurs combinaisons A -linéaires. Nous avons les définitions des modules suivantes.

- DÉFINITION 2.1.
- M est libre si $M \cong A^r$ avec $r \in \mathbb{N}$.
 - M est projectif si $\exists N$ A -module et $r \in \mathbb{N}$ tel que $A^r \cong M \oplus N$.
 - M est réflexif si le A -morphisme $\epsilon : M \rightarrow \text{hom}_A(\text{hom}_A(M, A), A)$, défini par $\epsilon(m)(f) = f(m)$, $\forall m \in M, \forall f \in \text{hom}_A(M, A)$, est un isomorphisme.
 - On appelle partie de torsion d'un A -module M , le sous-module $t(M) = \{m \in M \mid \exists 0 \neq a \in A : am = 0\}$. Un élément m de $t(M)$ est appelé *élément de torsion*. M est dit *sans-torsion* si $t(M) = 0$ et de torsion si $t(M) = M$.

Nous avons la classification des modules suivante :

$$\text{libre} \subseteq \text{projectif} \subseteq \dots \subseteq \text{réflexif} \subseteq \text{sans-torsion}.$$

Si A est un anneau principal (tout idéal de A est engendré par un seul élément de A), tout A -module sans-torsion est libre.

Pour étudier les propriétés du A -module à gauche M , où A est un anneau noethérien, nous lui associons le A -module à droite $N = A^q/R A^p$, conoyau du A -morphisme R ., défini par

$$\begin{aligned} R : A^p &\longrightarrow A^q \\ z &\longrightarrow Rz, \end{aligned}$$

où les vecteurs de A^p et A^q sont maintenant vus comme des vecteurs colonnes. Ce module N joue un rôle-clé dans la recherche des propriétés algébriques de M . Nous démontrons alors le résultat délicat suivant qui sera important pour la suite.

THÉORÈME 2.1. *N est défini à une équivalence projective près, i.e., si on représente M sous une forme différente $M = A^{p'}/A^{q'} R'$, alors il existe deux A -modules projectifs P et P' tels que :*

$$N \oplus P' \cong N' \oplus P.$$

Pour étudier les propriétés de M , nous utilisons le foncteur ext . Le foncteur $\text{ext}_A(N, \cdot)$ représente les défauts d'exactitude de la transposée (duale) d'une résolution de N , c-à-d, si nous avons la *résolution libre* de N , i.e. une suite exacte de la forme

$$\dots \rightarrow A^{r_{i+1}} \xrightarrow{R_{i+1}} A^{r_i} \xrightarrow{R_i} A^{r_{i-1}} \rightarrow \dots \rightarrow A^{r_1} \xrightarrow{R_1} A^{r_0} \rightarrow N \rightarrow 0,$$

on peut considérer la suite tronquée

$$\dots \rightarrow A^{r_{i+1}} \xrightarrow{R_{i+1}} A^{r_i} \xrightarrow{R_i} A^{r_{i-1}} \rightarrow \dots \rightarrow A^{r_1} \xrightarrow{R_1} A^{r_0} \rightarrow 0,$$

et la transposer (application du foncteur $\text{hom}_A(\cdot, A)$) pour obtenir :

$$\dots \leftarrow A^{r_{i+1}} \xleftarrow{R_{i+1}} A^{r_i} \xleftarrow{R_i} A^{r_{i-1}} \leftarrow \dots \leftarrow A^{r_1} \xleftarrow{R_1} A^{r_0} \leftarrow 0.$$

Cette suite n'est pas exacte et ses défauts d'exactitude ne dépendent que de M et non de sa résolution. Nous les notons par :

- $\text{ext}_A^i(N, A) = \ker(\cdot R_{i+1})/\text{im}(\cdot R_i)$, $i \geq 1$,
- $\text{ext}_A^0(N, A) = \text{hom}_A(N, A)$.

Si l'on change la résolution libre du A -module M , nous obtenons un N' différent mais dans la même classe d'équivalence projective que N . Ceci implique que $\text{ext}_A^i(N, A) \cong \text{ext}_A^i(N', A)$, $i \geq 1$, car $\text{ext}_A^i(P, A) = 0$, $i \geq 1$, pour tout A -module projectif P . D'où, les $\text{ext}_A^i(N, A)$, $i \geq 1$, ne dépendent que de M et non de sa résolution. Nous montrons alors le théorème suivant qui donne des tests pour déterminer les propriétés du module M et unifie ces définitions.

PROPOSITION 2.1. *Soit A un anneau noethérien régulier, de dimension homologique globale $\text{dhg}(A) = n$, alors :*

- $t(M) \cong \text{ext}_A^1(N, A)$,
- M est un A -module sans-torsion ssi $\text{ext}_A^1(N, A) = 0$,
- M est un A -module réflexif ssi $\text{ext}_A^i(N, A) = 0$, $i = 1, 2$,
- M est un A -module projectif ssi $\text{ext}_A^i(N, A) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

2.2. Dualité opérateurs/modules. Soit un opérateur différentiel

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\mathcal{D}} & F \\ \xi(x) & \longmapsto & \eta(x) = \left(\sum_{0 \leq |\mu| \leq q} a_k^{\tau\mu}(x) \partial_\mu \right) \xi(x) \end{array}$$

où $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $|\mu| = \mu_1 + \dots + \mu_n$, et F_0 et F_1 sont des fibrés vectoriels triviaux sur X , dont les fibres ont pour dimensions l et m . Par analogie, si K est un corps différentiel, on introduit $D = K[d_1, \dots, d_n]$ l'anneau non commutatif des opérateurs différentiels scalaires à coefficients

dans K . Nous associons à l'opérateur \mathcal{D} le D -module à gauche $M = D^l/D^m\mathcal{D}$, où, par abus de notation, \mathcal{D} désigne la matrice $(\sum_{0 \leq |\mu| \leq q} a_k^{\tau\mu} d_\mu)$ avec $a_k^{\tau\mu} \in K$.

DÉFINITION 2.2. – Soient $\mathcal{D} : E \rightarrow F_0$, $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ deux opérateurs différentiels tels que $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D} = 0$. On dit que \mathcal{D}_1 engendre toutes les conditions de compatibilité de \mathcal{D} si $\mathcal{D}_1 \eta = 0$ représente toutes les conditions nécessaires à l'existence de $\xi \in F_0$ tel que $\mathcal{D}\xi = \eta$.

– On dit que la suite $E \xrightarrow{\mathcal{D}} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$ est formellement exacte en F_0 si \mathcal{D}_1 représente toutes les conditions de compatibilité de \mathcal{D} .

Nous avons alors la proposition suivante [96, 121].

PROPOSITION 2.2. Soit $\mathcal{D} : E \rightarrow F_0$ un opérateur différentiel et $\Theta = \ker \mathcal{D}$. A toute suite d'opérateurs formellement exacte

$$0 \longrightarrow \Theta \longrightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}_n} F_n \longrightarrow 0,$$

correspond la résolution libre du D -module à gauche M suivante :

$$0 \longleftarrow M \xleftarrow{\pi} D^m \xleftarrow{\mathcal{D}} D^{l_0} \xleftarrow{\mathcal{D}_1} \dots \xleftarrow{\mathcal{D}_n} D^{l_n} \longleftarrow 0.$$

La théorie formelle des équations aux dérivées partielles nous donne les moyens de déterminer, pour un opérateur involutif, une suite canonique de conditions de compatibilité de longueur au plus $n + 1$ (suite de Janet). De plus, on peut toujours modifier un opérateur pour le rendre involutif. Si l'on veut savoir si un $\text{ext}_D^i(M, D)$ est nul, nous devons considérer la suite duale de la résolution de M . Cependant, les D -morphisms $\mathcal{D}_i : D^{l_{i-1}} \rightarrow D^{l_i}$ n'ont pas d'interprétation en terme d'opérateurs. Pour y arriver, nous devons utiliser la dualité formelle des opérateurs différentiels qui permet de passer des D -modules à droite aux D -modules à gauche.

DÉFINITION 2.3. L'adjoint formel de $\mathcal{D} : E \rightarrow F$ est l'opérateur

$$\tilde{\mathcal{D}} : \tilde{F} = \wedge^n T^* \otimes F^* \longrightarrow \tilde{E} = \wedge^n T^* \otimes E^*,$$

défini par

$$\langle \mu, \mathcal{D}\xi \rangle = \langle \tilde{\mathcal{D}}\mu, \xi \rangle + d(\cdot),$$

où $d(\cdot)$ est une différentielle totale et T^* est le fibré cotangent de X .

De façon équivalente, l'adjoint $\tilde{\mathcal{D}}$ se calcule en utilisant les trois règles suivantes :

1. si A une matrice d'opérateurs d'ordre 0, alors $\tilde{A} = A^t$,
2. $\tilde{\partial}_i = -\partial_i$,
3. $\widetilde{P \circ Q} = \tilde{Q} \circ \tilde{P}$.

En particulier, nous avons la relation $\tilde{\tilde{\mathcal{D}}} = \mathcal{D}$. Il est essentiel de noter que l'adjoint d'un opérateur à coefficients variables n'est pas la simple transposition de la matrice correspondante (il ne faut pas oublier de dériver les coefficients).

Nous trouvons alors un algorithme pour déterminer si les $\text{ext}_D^i(M, D)$ sont nuls ou non. Ce test utilise seulement la recherche des conditions de compatibilité d'un opérateur et la dualité formelle.

Algorithme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 2 \\
 1 & & & & & & \\
 E & \xrightarrow{\mathcal{D}} & F & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & \dots & \xrightarrow{\mathcal{D}_{i-2}} & F_{i-2} & \xrightarrow{\mathcal{D}_{i-1}} & F_{i-1} & \xrightarrow{\mathcal{D}_i} & F_i \\
 & & & & & & 3 & & \tilde{F}_{i-2} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_{i-1}} & \tilde{F}_{i-1} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_i} & \tilde{F}_i \\
 & & & & & & 4 & & \tilde{F}'_{i-2} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}'_{i-1}} & & &
 \end{array}$$

Nous suivons les étapes $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$ qui nous donnent l'opérateur $\tilde{\mathcal{D}}'_{i-1}$, représentant les conditions de compatibilité de $\tilde{\mathcal{D}}_i$, et l'adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_{i-1}$ de \mathcal{D}_{i-1} . Nous les comparons alors ($>$ signifie "plus de conditions de compatibilité") :

- $\tilde{\mathcal{D}}'_{i-1} = \tilde{\mathcal{D}}_{i-1} \Rightarrow \text{ext}_D^i(M, D) = 0.$
- $\tilde{\mathcal{D}}'_{i-1} > \tilde{\mathcal{D}}_{i-1} \Rightarrow \text{ext}_D^i(M, D) \neq 0.$

Pour déterminer la nature algébrique d'un D -module M , nous devons calculer les $\text{ext}_D^i(N, D)$. Or, le D -module à gauche N_l correspondant au D -module à droite N est engendré par l'adjoint formel de \mathcal{D} , i.e. $N_l = D^m / D^l \tilde{\mathcal{D}}$. Nous obtenons alors, par exemple, le test du sans-torsion.

Sans-torsion :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \xrightarrow{\mathcal{D}'} & F' & 5 \\
 4 & E_{-1} & \xrightarrow{\mathcal{D}_{-1}} & E_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}} & F & 1 \\
 3 & \tilde{E}_{-1} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_{-1}} & \tilde{E}_0 & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}} & \tilde{F} & 2
 \end{array}$$

Nous suivons les étapes $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5$ et nous obtenons alors l'opérateur \mathcal{D}' représentant les conditions de compatibilité de \mathcal{D}_{-1} .

- $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \Rightarrow M$ est sans-torsion et \mathcal{D}_{-1} est une *paramétrisation* de \mathcal{D} .
- $\mathcal{D}' > \mathcal{D} \Rightarrow t(M) = \{\text{nouvelles équations de } \mathcal{D}' \text{ modulo } \mathcal{D} \xi = 0\}.$

Supposons que le D -module M est sans-torsion, i.e. $\text{ext}_D^1(N_l, D) = 0$. Nous pouvons alors vérifier que M est un D -module réflexif, en appliquant le test suivant.

Réflexif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \xrightarrow{\mathcal{D}'_{-1}} & & 5 \\
 4 & E_{-2} & \xrightarrow{\mathcal{D}_{-2}} & E_{-1} & \xrightarrow{\mathcal{D}_{-1}} & E_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}} & F & 1 \\
 3 & \tilde{E}_{-2} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_{-2}} & \tilde{E}_{-1} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_{-1}} & \tilde{E}_0 & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}} & \tilde{F} & 2
 \end{array}$$

Nous suivons les étapes $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5$ et nous obtenons alors l'opérateur \mathcal{D}'_{-1} représentant les conditions de compatibilité de \mathcal{D}_{-2} .

- $\mathcal{D}'_{-1} = \mathcal{D}_{-1} \Rightarrow M$ réflexif.
- $\mathcal{D}'_{-1} > \mathcal{D}_{-1} \Rightarrow M$ non réflexif.

Pour montrer qu'un D -module M est projectif, nous avons le test suivant :

Projectif :

i) cas général :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \xrightarrow{\mathcal{D}'_{-n+1}} & \xrightarrow{\mathcal{D}'_{-1}} & \xrightarrow{\mathcal{D}'} & \\ \dots & \longrightarrow & E_{-n} & \xrightarrow{\mathcal{D}_{-n}} & E_{-n+1} & \xrightarrow{\mathcal{D}_{-1}} & E & \xrightarrow{\mathcal{D}} & F \\ & & & \xrightarrow{\mathcal{D}_{-n+1}} & \dots & \xrightarrow{\mathcal{D}_{-1}} & & & \\ & & & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{D}}_{-n+1}} & \dots & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{D}}_{-1}} & \tilde{E} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}} & \tilde{F} \\ \dots & \longleftarrow & \tilde{E}_{-n} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_{-n}} & \tilde{E}_{-n+1} & & & & \end{array}$$

M est projectif $\Leftrightarrow \mathcal{D}'_{-i} = \mathcal{D}_{-i}, i = 0, \dots, n-1$.

ii) cas \mathcal{D} surjectif (pas de conditions de compatibilités) :

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\mathcal{P}} & \\ E & \xrightarrow{\mathcal{D}} & F \longrightarrow 0 \\ \tilde{E} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}} & \tilde{F} \longleftarrow 0 \end{array}$$

M est projectif $\Leftrightarrow \tilde{\mathcal{D}}$ injectif ($\tilde{\mathcal{D}}\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$)

$$\begin{array}{l} \Leftrightarrow \exists \tilde{\mathcal{P}} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{F}, \tilde{\mathcal{P}} \circ \tilde{\mathcal{D}} = \text{id}_{\tilde{F}} \\ \Leftrightarrow \exists \mathcal{P} : F \rightarrow E, \mathcal{D} \circ \mathcal{P} = \text{id}_F. \end{array}$$

Cas $n = 1 \Rightarrow D$ anneau principal $\Rightarrow M$ est D -module sans-torsion $\Leftrightarrow \tilde{\mathcal{D}}$ injectif.

Nous obtenons ainsi une classification des D -modules M , suivant le nombre de $\text{ext}_D^i(N, D)$ nul. Cette classification de Kashiwara/Palamodov montre qu'un D -module sans-torsion est paramétrisable, qu'un D -module réflexif admet une paramétrisation qui admet elle même une paramétrisation [85]...

THÉORÈME 2.2. Soit $\mathcal{D} : E \rightarrow F$ un opérateur différentiel, alors il existe r opérateurs $\mathcal{D}_{-i} : E_{-i} \rightarrow E_{-i+1}$ tels que la suite suivante est formellement exacte

$$E_{-r} \xrightarrow{\mathcal{D}_{-r}} E_{-r+1} \xrightarrow{\mathcal{D}_{-r+1}} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}_{-2}} E_{-1} \xrightarrow{\mathcal{D}_{-1}} E_0 \xrightarrow{\mathcal{D}} F,$$

ssi $\text{ext}_D^i(N, D) = 0, \forall i = 1, \dots, r$.

De plus, nous démontrons le résultat suivant [119].

THÉORÈME 2.3. Soit $\mathcal{D} : E \rightarrow F$ un opérateur différentiel définissant un D -module M sans-torsion. Alors, il existe une paramétrisation minimale $\mathcal{D}'_0 : E'_{-1} \rightarrow E$, c-à-d, une paramétrisation comportant un nombre minimal de fonctions arbitraires de n variables. Si \mathcal{D} est surjectif, alors ce nombre minimal de fonctions arbitraires de n variables est $m - l$.

Nous avons ainsi développé des tests effectifs permettant de déterminer la nature algébrique des D -modules M . Intéressons-nous maintenant aux applications pour les systèmes multidimensionnels.



2.3. Primalités des systèmes multidimensionnels et contrôlabilité. L'anneau $D = K[d_1, \dots, d_n]$ des opérateurs différentiels à coefficients dans un corps différentiel K est un cadre qui permet d'étudier à la fois deux types classiques de systèmes de contrôle :

- les systèmes de contrôle linéaire *différentiels* à coefficients constants ou *variables* :
 $D = K[\frac{d}{dt}]$ avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}(t)$...
- les systèmes de contrôle *n-dimensionnels* (systèmes discrets, systèmes avec retards) :
 $D = k[d_1, \dots, d_n] \cong k[\chi_1, \dots, \chi_n]$ avec $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} ,

mais aussi les systèmes d'équations aux dérivées partielles du type de ceux rencontrés en élasticité, en électromagnétisme ou en hydrodynamique.

De nombreuses notions de primalité matricielle ont été développées dans la littérature des systèmes de contrôle multidimensionnels. Si R est une matrice $q \times p$ ($q \leq p$), de rang générique maximal, à coefficients dans l'anneau $D = \mathbb{C}[\chi_1, \dots, \chi_n]$, on dit alors que R est :

- *première au sens des mineurs*, s'il n'existe pas de facteur commun entre tous les mineurs d'ordre q .
- *faiblement première au sens des zéros*, si les mineurs d'ordre q s'annulent tous seulement en un nombre fini de points,
- *première au sens des zéros*, s'il n'y a aucun zéro commun entre les mineurs d'ordre q ,

Oberst a montré qu'une matrice R est première au sens des zéros (resp. première au sens des mineurs) si et seulement si $M = D^p/D^q R$ est un D -module projectif (resp. sans-torsion) [104]. Wood, Rogers et Owens ont récemment montré dans [160] que ces trois définitions étaient des cas particuliers d'une chaîne de n notions de primalités différentes suivant la dimension sur laquelle tous les mineurs d'ordre q .

Tout d'abord, remarquons que $D = \mathbb{C}[d_1, \dots, d_n] \cong \mathbb{C}[\chi_1, \dots, \chi_n]$, et donc les tests développés précédemment pour reconnaître les $D = \mathbb{C}[d_1, \dots, d_n]$ -modules sans-torsions, réflexifs, et projectifs doivent être liés à la variété sur laquelle s'annulent tous les mineurs, dans le cas d'un opérateur surjectif (i.e. défini par une matrice de rang générique maximal). Pour cela, appelons $d(M)$ la dimension de la variété caractéristique du D -module M . Nous avons alors le théorème suivant dû à Kashiwara [85].

THÉORÈME 2.4. $d(M) = n - \min \{ i \mid \text{ext}_D^i(M, D) \neq 0 \}$.

Soit $\mathcal{D} : E \rightarrow F \rightarrow 0$ un opérateur surjectif, alors, nous avons $d(N) \leq n - 1$. Nous pouvons donc appliquer ce théorème à N . Appelons Ω le noyau de l'opérateur adjoint $\tilde{\mathcal{D}} : \tilde{F} \rightarrow \tilde{E}$. Par le théorème d'Hilbert-Serre, $d(N)$ est égal à la dimension de Ω . Nous obtenons alors [121] :

- $\dim \Omega = n - 1 \Leftrightarrow \text{ext}_D^0(N, D) = 0 \Leftrightarrow t(M) \neq 0$,
- $\dim \Omega = n - 2 \Leftrightarrow \text{ext}_D^i(N, D) = 0, i = 0, 1 \Leftrightarrow \exists \mathcal{D}_{-1} \Leftrightarrow M$ sans-torsion \Leftrightarrow primalité au sens des mineurs (D commutatif),
- $\dim \Omega = n - 3 \Leftrightarrow \text{ext}_D^i(N, D) = 0, i = 0, 1, 2 \Leftrightarrow \exists \mathcal{D}_{-1}, \mathcal{D}_{-2} \Leftrightarrow M$ réflexif,
- ...
- $\dim \Omega = 0 \Leftrightarrow \text{ext}_D^i(N, D) = 0, i = 0, \dots, n - 1 \Leftrightarrow \exists \mathcal{D}_{-i}, i = 1, \dots, n - 1 \Leftrightarrow$ primalité faible au sens des zéros (D commutatif),
- $\dim \Omega = -1 \Leftrightarrow N = 0 \Leftrightarrow \text{ext}_D^i(N, D) = 0, i = 0, \dots, n \Leftrightarrow M$ projectif $\Leftrightarrow \exists \mathcal{D}_{-i}, i = 1, \dots, n \Leftrightarrow$ primalité au sens des zéros (D commutatif).

Les trois différentes notions de primalités, précédemment définies, font donc bien parties d'une chaîne de n différentes notions de primalités, suivant le nombre de $\text{ext}_D^i(N, D)$ qui s'annulent.

Depuis un dizaine d'années, une notion de contrôlabilité des systèmes multidimensionnels a été développée essentiellement par Fliess, Oberst et Pommaret.

DÉFINITION 2.4. Un système de contrôle multidimensionnel, défini par un opérateur \mathcal{D} , est *contrôlable* si le D -module $M = D^m/D^l \mathcal{D}$ est sans-torsion.

Grâce au théorème 2.3, nous pouvons donc déterminer de manière effective une paramétrisation minimale \mathcal{D}_{-1} de \mathcal{D} , appelée *forme contrôleur* dans le cas où $n = 1$. Cette paramétrisation minimale est intéressante pour le concept de π -liberté, développé depuis quelques années par Mounier et Fliess pour les systèmes avec retards [44, 102]. Récemment, Pillai et Shankar ont montré dans [108] que cette notion de contrôlabilité était équivalente, pour des systèmes définis par des équations aux partielles à coefficients constants, à la notion de contrôlabilité donnée par Willems dans l'approche comportementale [158, 159].

2.4. Identités de Bezout généralisées et applications. Il est bien connu dans la littérature sur les systèmes polynomiaux que si

$$P(s)y + Q(s)u = 0, \quad s = \frac{d}{dt},$$

est contrôlable, i.e. $(P(s) \ Q(s))$ est une matrice première à gauche, alors il existe des matrices $X, Y, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{P}, \bar{Q}$ telles que nous avons *les identités de Bezout généralisées directes et inverses* [81]:

$$\begin{pmatrix} P(s) & Q(s) \\ \bar{X}(s) & \bar{Y}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s) & \bar{P}(s) \\ Y(s) & \bar{Q}(s) \end{pmatrix} = I, \quad \begin{pmatrix} X(s) & \bar{P}(s) \\ Y(s) & \bar{Q}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(s) & Q(s) \\ \bar{X}(s) & \bar{Y}(s) \end{pmatrix} = I.$$

Une question naturelle est de savoir dans quelle mesure ce résultat reste vrai pour les systèmes multidimensionnels définis par des opérateurs différentiels linéaires.

Nous prouvons le théorème suivant qui montre quelles identités de Bezout généralisées ou quelles parties existent, suivant la nature du D -module engendré par l'opérateur différentiel décrivant le système de contrôle. Nous montrons aussi que les identités de Bezout généralisées s'obtiennent en scindant la suite différentielle formée par le système et sa paramétrisation [118].

THÉORÈME 2.5. Soit $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ un opérateur surjectif à coefficients variables.

1. Si l'opérateur \mathcal{D}_1 engendre un D -module libre, alors il existe un fibré vectoriel E et des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$, $\mathcal{P}_1 : F_1 \rightarrow F_0$ et $\mathcal{P}_0 : F_0 \rightarrow E$ tels que nous avons les identités de Bezout directes et inverses:

$$\begin{aligned} - \begin{pmatrix} \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{P}_0 \end{pmatrix} \circ (\mathcal{P}_1 \ \mathcal{D}_0) &= \begin{pmatrix} \text{id}_{F_1} & 0 \\ 0 & \text{id}_E \end{pmatrix}, \\ - (\mathcal{P}_1 \ \mathcal{D}_0) \circ \begin{pmatrix} \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{P}_0 \end{pmatrix} &= \text{id}_{F_0}. \end{aligned}$$

Ces identités de Bezout généralisées sont équivalentes à scinder la suite formellement exacte suivante:

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \longrightarrow 0.$$

2. Si l'opérateur \mathcal{D}_1 engendre un D -module projectif, il existe alors un fibré vectoriel E et trois opérateurs différentiels $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$, $\mathcal{P}_1 : F_1 \rightarrow F_0$ et $\mathcal{P}_0 : F_0 \rightarrow E$ tels que nous avons la partie supérieure de l'identité de Bezout directe et l'identité de Bezout inverse :

$$- (\mathcal{D}_1) \circ (\mathcal{P}_1 \ \mathcal{D}_0) = (\text{id}_{F_1} \ 0),$$

$$- (\mathcal{P}_1 \ \mathcal{D}_0) \circ \begin{pmatrix} \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{P}_0 \end{pmatrix} = \text{id}_{F_0}.$$

L'identité de Bezout généralisée inverse est équivalente à scinder la suite formellement exacte suivante :

$$E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \longrightarrow 0.$$

3. Si l'opérateur \mathcal{D}_1 engendre un D -module sans-torsion, alors il existe un fibré vectoriel E et un opérateur différentiel $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$ tels que nous avons la partie supérieure droite de l'identité de Bezout généralisée directe :

$$- \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_0 = 0.$$

Nous avons la suite formellement exacte suivante :

$$E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_1 \longrightarrow 0.$$

Plus généralement, si l'opérateur \mathcal{D}_1 n'est pas surjectif, i.e. admet des conditions de compatibilité, nous montrons qu'il faut scinder la longue suite formellement exacte formée de l'opérateur \mathcal{D}_1 et de ses conditions de compatibilité. Il apparaît alors naturellement des inverses généralisés à la place d'inverses à droite ou à gauche.

2.4.1. *Placement de pôles.* Nous généralisons l'approche polynomiale du placement de pôles aux systèmes multidimensionnels. Cette approche a des fortes connexions avec certains résultats obtenus de façon indépendante par Pillai et Shankar [108].

Nous montrons tout d'abord que les propriétés d'aditivité des supports et des variétés caractéristiques permettent de généraliser les notions de pôles et zéros aux systèmes multidimensionnels [121, 161]. Ensuite, nous considérons un opérateur différentiel $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ correspondant au système de contrôle multidimensionnel et nous cherchons à déterminer un opérateur différentiel $\mathcal{C}_1 : F_0 \rightarrow G_1$ tel que le système

$$(1) \quad \begin{cases} \mathcal{D}_1 \eta = 0, \\ \mathcal{C}_1 \eta = 0, \end{cases}$$

possède des propriétés bien déterminées (variété caractéristique déterminée, équivalence à un système donné (modèle de référence)...). Nous obtenons les résultats suivants.

PROPOSITION 2.3. Soit \mathcal{D}_1 défini un système contrôlable tel que la suite $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$ soit localement exacte en F_0 , i.e. $\mathcal{D}_1 \eta = 0 \Leftrightarrow \exists \xi \in E$ tel que $\mathcal{D}_0 \xi = \eta$, où \mathcal{D}_0 est une paramétrisation de \mathcal{D}_1 . Alors, le système (1) est équivalent au système

$$\begin{cases} \mathcal{D}_0 \xi = \eta, \\ \mathcal{T}_0 \xi = 0, \end{cases}$$

où $\mathcal{T}_0 = \mathcal{C}_1 \circ \mathcal{D}_0 : E \rightarrow G_1$. Le système bouclé est donc entièrement déterminé par $\mathcal{T}_0 \xi = 0$.

Nous montrons alors le théorème suivant.

THÉORÈME 2.6. Soient $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ un opérateur définissant un D -module libre et $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$ une paramétrisation injective de \mathcal{D}_1 . Alors, pour tout opérateur $\mathcal{T}_0 : E \rightarrow G_1$, l'opérateur $\mathcal{C}_1 : F_0 \rightarrow G_1$ vérifiant

$$\mathcal{T}_0 = \mathcal{C}_1 \circ \mathcal{D}_0$$

est entièrement déterminé par

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{T}_0 \circ \mathcal{P}_0 + \mathcal{K}_1 \circ \mathcal{D}_1,$$

où \mathcal{P}_0 est un inverse à gauche de \mathcal{D}_0 et \mathcal{K}_1 est un opérateur quelconque de F_1 à G_1 .

De manière duale, si le contrôleur est supposé contrôlable, alors nous obtenons la proposition suivante.

PROPOSITION 2.4. Si \mathcal{C}_1 définit un système contrôlable tel que la suite $G_{-1} \xrightarrow{\mathcal{C}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{C}_1} G_0$ est localement exacte en F_0 , où \mathcal{C}_0 est une paramétrisation de \mathcal{C}_1 , alors le système (1) est équivalent à :

$$\begin{cases} \mathcal{C}_0 \gamma = \eta, \\ \mathcal{T}'_0 \gamma = 0, \end{cases}$$

où $\mathcal{T}'_0 = \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{C}_0 : G_{-1} \rightarrow F_1$. Le système bouclé est donc entièrement déterminé par $\mathcal{T}'_0 \gamma = 0$.

Nous montrons alors le théorème suivant.

THÉORÈME 2.7. Soient $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ un opérateur surjectif définissant un D -module projectif et $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$ une paramétrisation de \mathcal{D}_1 . Alors, pour tout opérateur $\mathcal{T}'_0 : G_{-1} \rightarrow F_1$, le contrôleur $\mathcal{C}_0 : G_{-1} \rightarrow F_0$ vérifiant

$$\mathcal{T}'_0 = \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{C}_0$$

est entièrement déterminé par

$$\mathcal{C}_0 = \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{T}'_0 + \mathcal{D}_0 \circ \mathcal{K}_{-1},$$

où \mathcal{P}_1 est un inverse à droite de \mathcal{D}_1 et \mathcal{K}_{-1} est un opérateur quelconque de G_{-1} à E .

Puisque que tout système linéaire contrôlable, défini par des équations différentielles à coefficients variables, engendre un D -module projectif et libre, nous retrouvons de façon plus intrinsèque les paramétrisations classiques des contrôleurs polynomiaux.

2.4.2. Forme canonique de Brunovsky. Nous montrons que le noyau du premier opérateur de Spencer $\mathcal{D}_1 : J_q(E) \rightarrow C_1$, défini par

$$(\eta(x)^k)_{1 \leq k \leq m} \longrightarrow \left(\frac{d}{dt} \eta_i^k(x) - \eta_{i+1}^k(x) = \zeta_i^k(x) \right)_{0 \leq i \leq q-1, 1 \leq k \leq m},$$

et représentant les conditions de compatibilité de l'opérateur injectif $j_q : E \rightarrow J_q(E)$,

$$(\xi^k)_{1 \leq k \leq m} \longrightarrow \left(\frac{d^i}{dt^i} \xi^k(x) = \eta_i^k(x) \right)_{0 \leq i \leq q, 1 \leq k \leq m},$$

est exactement la forme canonique de Brunovsky [23].

Nous avons donné précédemment un test effectif pour obtenir une paramétrisation injective \mathcal{D}_0 d'un opérateur différentiel $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$, définissant un système contrôlable. Nous montrons alors que l'opérateur $\mathcal{C}_1 : F_0 \rightarrow J_q(E)$, défini par $\mathcal{C}_1 = j_q \circ \mathcal{P}_0 + \mathcal{K}_1 \circ \mathcal{D}_1$, avec \mathcal{P}_0 un inverse à gauche de j_q et où $\mathcal{K}_1 : F_1 \rightarrow J_q(E)$ est un opérateur quelconque, permet de passer du système

$\mathcal{D}_1 \eta = 0$ à sa forme canonique de Brunovsky. En utilisant le degré de liberté \mathcal{K}_1 , nous pouvons alors obtenir explicitement le changement de générateurs d'ordre le plus bas, transformant le système contrôlable en sa forme de Brunovsky. Plus généralement, nous montrons que tout système multidimensionnel définissant un D -module libre peut être écrit sous la forme du premier opérateur de Spencer D_1 [144] à l'aide de \mathcal{C}_1 .

2.5. Commande optimale des systèmes multidimensionnels. Nous montrons comment utiliser les propriétés intrinsèques des systèmes (contrôlabilité, projectivité,...) dans l'étude des problèmes variationnels, où le système de contrôle est considéré comme une contrainte différentielle. Notons qu'au même moment et de manière indépendante, Pillai et Willems ont étudié ce problème dans [109] et ils ont obtenus certains résultats similaires. Plus précisément, le problème considéré est celui de minimiser l'intégrale

$$\int L(\eta_q) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

sous la contrainte différentielle linéaire $\mathcal{D}_1 \eta = 0$, où $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ est un opérateur différentiel,

$$L(\eta_q) = \frac{1}{2} \eta_q^t R \eta_q$$

est un Lagrangien ($\eta_q(x) = (\partial_\mu \eta(x), 0 \leq |\mu| \leq q)^t$), avec R une matrice réelle symétrique. Nous devons donc considérer la variation

$$\delta \int (L(\eta_q) - \lambda \mathcal{D}_1 \eta) dx = \int (\mathcal{B} \eta - \tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda) \delta \eta dx + \dots,$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange, $\tilde{\mathcal{D}}_1$ est l'adjoint formel de \mathcal{D}_1 et $\mathcal{B} : F_0 \rightarrow \tilde{F}_0$ est l'opérateur auto-adjoint défini par :

$$\mathcal{B} \eta = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq q} (-1)^{|\alpha|} d_\alpha \left(\frac{\partial L(\eta_q)}{\partial \eta_\alpha^k} \right) = \mu.$$

Nous avons alors le théorème suivant [120].

THÉORÈME 2.8. *Le système optimal est défini par :*

$$(2) \quad \begin{cases} \mathcal{D}_1 \eta = 0, \\ \mathcal{B} \eta - \tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = 0. \end{cases}$$

Si nous notons par $\tilde{\mathcal{D}}_0 : \tilde{F}_0 \rightarrow \tilde{E}$ l'opérateur représentant les conditions de compatibilités de $\tilde{\mathcal{D}}_1$, nous avons en particulier $\tilde{\mathcal{D}}_0 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = 0$, d'où on déduit de la deuxième équation de (2) la nouvelle équation $(\tilde{\mathcal{D}}_0 \circ \mathcal{B}) \eta = 0$. Nous avons ainsi éliminé les multiplicateurs de Lagrange [120].

THÉORÈME 2.9. *Si la suite $\tilde{E} \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_0} \tilde{F}_0 \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} \tilde{F}_1$ est localement exacte en \tilde{F}_0 , i.e., $\tilde{\mathcal{D}}_0 \mu = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \tilde{F}_1$ tel que $\tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = \mu$, alors le système optimal (2) est équivalent au système*

$$(3) \quad \begin{cases} \mathcal{D}_1 \eta = 0, \\ (\tilde{\mathcal{D}}_0 \circ \mathcal{B}) \eta = 0, \end{cases}$$

qui ne comporte plus que la variable dépendante η . Nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 \\ \tilde{\mathcal{D}}_0 \circ \mathcal{B} & \swarrow & \downarrow \mathcal{B} & & \\ \tilde{E} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_0} & \tilde{F}_0 & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} & \tilde{F}_1. \end{array}$$

Finalement, si \mathcal{D}_1 est contrôlable, alors il existe une paramétrisation \mathcal{D}_0 de l'opérateur \mathcal{D}_1 . En substituant $\mathcal{D}_1 \eta = 0$ par $\mathcal{D}_0 \xi = \eta$ dans (3), nous obtenons le théorème suivant [120].

THÉORÈME 2.10. Si \mathcal{D}_1 est contrôlable et si la suite $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$ est localement exacte en F_0 , i.e., $\mathcal{D}_1 \eta = 0 \Leftrightarrow \exists \xi \in E$ tel que $\mathcal{D}_0 \xi = \eta$, alors le système (3) est équivalent au système :

$$(4) \quad \begin{cases} \mathcal{D}_0 \xi = \eta, \\ (\tilde{\mathcal{D}}_0 \circ \mathcal{B} \circ \mathcal{D}_0) \xi = 0. \end{cases}$$

Nous avons alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\mathcal{D}_0} & F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 \\ \mathcal{A} \downarrow & & \downarrow \mathcal{B} & & \\ \tilde{E} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_0} & \tilde{F}_0 & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} & \tilde{F}_1. \end{array}$$

où l'on a introduit l'opérateur auto-adjoint $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{D}}_0 \circ \mathcal{B} \circ \mathcal{D}_0$.

De façon équivalente, si l'on substitue la paramétrisation $\mathcal{D}_0 \xi = \eta$ dans la contrainte différentielle $\mathcal{D}_1 \eta = 0$ et dans le Lagrangien $L(\eta_q)$, nous obtenons alors un problème variationnel sans contrainte, d'ordre supérieur, dont la solution est donnée par le système (4). Dans le cas stationnaire avec $n = 1$, si nous trouvons une *factorisation spectrale* de l'opérateur \mathcal{A} sous la forme de $\mathcal{A} = \tilde{S} \circ S$, où $S : E \rightarrow E'$ est un opérateur différentiel carré correspondant à la partie stable de \mathcal{A} , alors à l'aide des différents résultats sur le placement de pôles, nous obtenons le contrôleur stabilisant et optimal sous la forme de $\mathcal{C}_1 = S \circ \mathcal{P}_0 + \mathcal{K}_1 \circ \mathcal{D}_1$, où \mathcal{P}_0 est un inverse à gauche de \mathcal{D}_0 et $\mathcal{K}_1 : F_1 \rightarrow E'$ est un opérateur quelconque.

COROLLAIRE 2.1. Si \mathcal{D}_1 engendre un D -module projectif, alors il existe un opérateur \mathcal{D}_0 tel que les suites $\tilde{E} \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_0} \tilde{F}_0 \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} \tilde{F}_1$ et $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$ sont localement exactes en \tilde{F}_0 et F_0 . On a alors les équivalences suivantes :

$$(2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4).$$

Ces équivalences sont vraies pour tout système linéaire contrôlable défini par des équations différentielles à coefficients dépendant du temps.

Si l'opérateur \mathcal{D}_1 est surjectif, i.e. sans conditions de compatibilité, alors \mathcal{D}_1 engendre un D -module projectif ssi il existe un inverse à gauche \mathcal{P}_1 de \mathcal{D}_1 , ou de façon équivalente si $\tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = \text{id}_{\tilde{F}_1}$. En appliquant $\tilde{\mathcal{P}}_1$ à gauche de la deuxième équation de (2), nous déduisons λ explicitement en fonction de η sans avoir à intégrer [120].

PROPOSITION 2.5. Si \mathcal{D}_1 est un opérateur surjectif, engendrant un D -module projectif et \mathcal{P}_1 un inverse à gauche de \mathcal{D}_1 , on peut alors déterminer explicitement, et sans intégrations, les multiplicateurs de Lagrange λ en fonction de η par :

$$\lambda = (\tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \mathcal{B}) \eta.$$

Finalement, si l'opérateur B est inversible, nous obtenons le théorème suivant.

THÉORÈME 2.11. *Si B est un opérateur inversible, alors le système optimal est donné par*

$$(5) \quad \begin{cases} (\mathcal{D}_1 \circ B^{-1} \circ \tilde{\mathcal{D}}_1)\lambda = 0, \\ (B^{-1} \circ \tilde{\mathcal{D}}_1)\lambda = \eta. \end{cases}$$

Nous avons alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 \\ B \downarrow \uparrow B^{-1} & & \uparrow C \\ \tilde{F}_0 & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} & \tilde{F}_1. \end{array}$$

où l'on a introduit l'opérateur auto-adjoint $C = \mathcal{D}_1 \circ B^{-1} \circ \tilde{\mathcal{D}}_1$.

Nous montrons alors que les méthodes développées précédemment, basées sur les suites différentielles et la dualité des opérateurs différentiels, sont liées à celles utilisées en physique: il y a une dualité au sens de Poincaré entre la suite différentielle donnant la géométrie (e.g. déplacements \rightarrow déformations \rightarrow conditions de compatibilité) et suite différentielle duale donnant la physique (e.g. forces \leftarrow contraintes \leftarrow fonction d'Airy), ces deux suites différentielles étant liées par les lois de comportement.

2.6. Aspects algébriques des problèmes de stabilisation.

2.6.1. Primalité faible et foncteur tor.

DÉFINITION 2.5. Soient A un anneau intègre et $K = Q(A)$ son corps de fractions. Une matrice $R \in A^{q \times p}$ d'éléments de A ($q \leq p$), de rang maximal, est *faiblement première à gauche* si :

$$\forall y \in K^q, yR \in A^p \Rightarrow y \in A^p.$$

Nous montrons alors la proposition suivante [126].

PROPOSITION 2.6. *Nous avons les propositions équivalentes suivantes :*

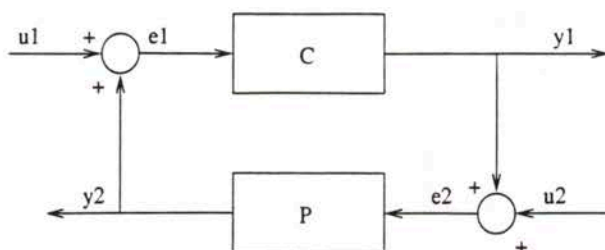
1. la matrice R est faiblement première à gauche,
2. le A -module $M = A^p/A^q R$ est sans-torsion,
3. $\text{tor}_1^A(K/A, M) = 0$.

Ainsi, le concept de primalité faible est exactement, dans le cas des matrices de rang maximal, la caractérisation des modules sans-torsion en terme de l'annulation du $\text{tor}_1^A(K/A, M) = 0$. Plus généralement, nous montrons que pour tout A -module M de type-fini sur un anneau noetherien A , nous avons :

$$t(M) \cong \text{tor}_1^A(K/A) \cong \text{ext}_A^1(N, A).$$

2.6.2. *Stabilisation interne des systèmes à paramètres distribués.* Suivant les idées de Vidya-sagar [148, 149, 150, 156] et de Desoer [29, 30], nous introduisons un anneau A des systèmes propres et stables. Nous avons les exemples suivants d'anneaux A souvent rencontrés dans la littérature :

- l'algèbre de Hardy $H_\infty(D)$, dans un domaine D de \mathbb{C} (e.g. $D = \mathbb{C}_+ = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > 0\}$),
- l'algèbre RH_∞ des fractions réelles propres et stables,
- les algèbres de Banach de Callier-Desoer $\mathcal{A}, \mathcal{A}(\beta), \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{A}}(\beta)$...

FIG. 1. *Système bouclé*

Tout d'abord, nous montrons qu'un élément de torsion sur un anneau de systèmes propres et stables A correspond à une simplification pôles/zéros instables ou impropres dans la matrice de transfert correspondante [126]. Considérons ensuite le système bouclé défini par la figure 1.

Nous avons alors les équations suivantes :

$$\begin{cases} e_1 = u_1 + P e_2, \\ e_2 = u_2 + C e_1, \\ y_1 = e_2 - u_2, \\ y_2 = e_1 - u_1. \end{cases}$$

Soient $P = R_p'^{-1} R_p'' \in K^{q \times (p-q)}$ et $C = R_c'^{-1} R_c'' \in K^{(p-q) \times q}$, où les coefficients des matrices R_p', R_p'', R_c' et R_c'' sont dans A , alors les équations du système bouclé s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} R_p' e_1 - R_p'' e_2 - R_p' u_1 = 0, \\ -R_c'' e_1 + R_c' e_2 - R_c' u_2 = 0, \\ y_1 - e_2 + u_2 = 0, \\ y_2 - e_1 + u_1 = 0. \end{cases}$$

Définissons les matrices $R_s = \begin{pmatrix} R_p' & -R_p'' & -R_p' & 0 \\ -R_c'' & R_c' & 0 & -R_c' \end{pmatrix}$, $R_p = (R_p' \quad -R_p'')$, $R_c = (-R_c'' \quad R_c')$ et

$$R = \begin{pmatrix} R_p' & -R_p'' & -R_p' & 0 & 0 & 0 \\ -R_c'' & R_c' & 0 & -R_c' & 0 & 0 \\ 0 & -I_{p-q} & 0 & I_{p-q} & I_{p-q} & 0 \\ -I_q & 0 & I_q & 0 & 0 & I_q \end{pmatrix},$$

et les A -modules $M_p = A^p/A^q R_p$, $M_c = A^p/A^{(p-q)} R_c$, $M_s = A^{2p}/A^p R_s$ et $M = A^{3p}/A^{2p} R$.

LEMME 2.1. *Avec les notations précédentes, nous avons :*

$$M = M_s \cong M_p \oplus M_c.$$

Nous avons alors les définitions suivantes.

DÉFINITION 2.6. - Le système M est dit *bien posé* si les composantes de vecteurs u_1 et u_2 forment une famille A -linéairement indépendante.

– Supposons que M soit bien posé, alors M est stable de manière interne ou A -stable si :

$$\begin{pmatrix} R'_p & -R''_p \\ -R''_c & R'_c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R'_p & 0 \\ 0 & R'_c \end{pmatrix} \in A^{p \times p}.$$

En utilisant la caractérisation des modules sans-torsion à l'aide de $\text{tor}_1^A(K/A, M) = 0$, nous obtenons la proposition suivante.

PROPOSITION 2.7. Soient M_p et M_c deux A -modules sans-torsion tels que M est bien posé, alors M est stable de manière interne ssi :

$$\begin{pmatrix} R_p \\ R_c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} R'_p & -R''_p \\ -R''_c & R'_c \end{pmatrix}^{-1} \in A^{p \times p}.$$

Nous avons alors le théorème suivant [126].

THÉORÈME 2.12. Supposons que M_p et M_c soient deux A -modules sans-torsion tels que M est bien posé. Alors, M_p est stabilisable de manière interne par un A -module M_c sans-torsion ssi A -module libre.

Dans le cas où M a de la torsion, nous avons alors la proposition suivante [126].

PROPOSITION 2.8. Si M a de la torsion, nous avons alors une condition nécessaire de stabilisation interne est donnée par :

$$M/t(M) \cong M_p/t(M_p) \oplus M_c/t(M_c) \cong A^p.$$

Donc, $M_p/t(M_p)$ et $M_c/t(M_c)$ doivent être des A -modules projectifs.

2.6.3. Paramétrisation de contrôleurs propres stabilisants. Nous montrons la proposition suivante [126].

PROPOSITION 2.9. Soit M un A -module libre de rang m , défini par la résolution libre $0 \rightarrow A^q \xrightarrow{R} A^p \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$. Alors, $m = p - q$ et il existe trois matrices R_{-1} , S_{-1} et S telles que nous avons la suite exacte scindée suivante :

$$0 \rightarrow A^q \xrightarrow{R} A^p \xrightarrow{R_{-1}} A^m \rightarrow 0.$$

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{S} & \xleftarrow{S_{-1}} \\ & & \end{array}$$

Nous avons alors les identités généralisées de Bezout suivantes :

1. $(S \ R_{-1}) \circ \begin{pmatrix} R \\ S_{-1} \end{pmatrix} = I_p,$
2. $\begin{pmatrix} R \\ S_{-1} \end{pmatrix} \circ (S \ R_{-1}) = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}.$

On peut alors utiliser les propositions 2.8 et 2.9 pour répondre à la question ouverte posée en 1982 par Vidyasagar, Schneider et Francis, à savoir quand un système stabilisable admet des identités de Bezout généralisées ainsi que son contrôleur stabilisant. Si un système M_p est stabilisable par un contrôleur M_c , alors nous avons $M/t(M) \cong A^p$ et $M/t(M)$ admet donc des identités de Bezout généralisées. Cependant, si $t(M) \cong t(M_p) \oplus t(M_c) \neq 0$, alors au moins un des deux modules M_p ou M_c aura de la torsion et n'admettra donc pas des identités de Bezout généralisées à cause de la proposition 2.9. Si $t(M) = 0$, alors M_p et M_c sont deux A -modules

sans-torsion, et grâce au théorème 2.12, M_p et M_c sont libres et donc admettent tous deux des identités de Bezout généralisées.

Les relèvements S et S_1 de la proposition 2.9 ne sont pas uniques et on peut tous les paramétriser [126].

PROPOSITION 2.10. Soit M un A -module libre de rang m , défini par la résolution libre $0 \rightarrow A^q \xrightarrow{R} A^p \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$. Alors, nous avons la suite exacte scindée suivante

$$0 \rightarrow A^q \begin{array}{c} \xrightarrow{R} \\ \xleftarrow{S'} \end{array} A^p \begin{array}{c} \xrightarrow{R_{-1}} \\ \xleftarrow{S'_{-1}} \end{array} A^m \rightarrow 0,$$

avec

$$\begin{cases} S'_{-1} = S_{-1} + K \circ R, \\ S' = S - R_{-1} \circ K, \end{cases}$$

où $K : A^m \rightarrow A^q$ est un A -morphisme quelconque. En particulier, nous avons les identités généralisées de Bezout suivantes :

1. $(S' \ R_{-1}) \circ \begin{pmatrix} R \\ S'_{-1} \end{pmatrix} = I_p,$
2. $\begin{pmatrix} R \\ S'_{-1} \end{pmatrix} \circ (S' \ R_{-1}) = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}.$

En utilisant la proposition précédente et le théorème 2.12, nous obtenons une version intrinsèque de la paramétrisation de Youla [126].

COROLLAIRE 2.2. Soit M_p un A -module libre défini par la présentation $0 \rightarrow A^q \xrightarrow{R} A^p \xrightarrow{\pi} M_p \rightarrow 0$, alors le A -module $M_c(K)$ défini par la présentation finie suivante

$$0 \rightarrow A^m \xrightarrow{S'_{-1}} A^p \xrightarrow{\pi'} M_c(K) \rightarrow 0,$$

stabilise de manière interne le système M_p et l'application

$$\begin{array}{ccc} A^{(p-q) \times p} & \rightarrow & \text{Mod}(A) \\ K & \mapsto & M_c(K) \end{array}$$

est la paramétrisation de tous les contrôleurs propres stabilisant le système M_p .

2.7. Conclusion. Nous pouvons résumer quelques uns des résultats précédents sous la forme des tableaux suivants.

Modules	$\text{ext}_D^i(N, D)$	Paramétrisation	$d(N)$	Primalité
avec torsion	$\text{ext}_D^1(N, D) \cong t(M) \neq 0$	\emptyset	$n - 1$	\emptyset
sans-torsion	$\text{ext}_D^1(N, D) = 0$	\mathcal{D}_{-1}	$n - 2$	au sens des mineurs
réflexif	$\text{ext}_D^i(N, D) = 0, 1 \leq i \leq 2$	$\mathcal{D}_{-i}, 1 \leq i \leq 2$	$n - 3$	

	$\text{ext}_D^i(N, D) = 0, 1 \leq i \leq n - 1$	$\mathcal{D}_{-i}, 1 \leq i \leq n - 1$	0	faible au sens des zéros
projectif	$\text{ext}_D^i(N, D) = 0, 1 \leq i \leq n$	$\mathcal{D}_{-i}, 1 \leq i \leq n$	-1	au sens des zéros
libre		\mathcal{D}_{-1} injectif		

Modules	Propriétés structurelles	Commande optimale	Stabilisation interne
avec torsion	élément autonome		simplifications pôles/zéros instables ou impropres
sans-torsion	contrôlabilité	problème sans contrainte	primalité faible
réflexif			
	.	.	.
	.	.	.
projectif	identité de Bezout généralisée inverse	Calcul de λ sans intégrations	CN à la stabilisation interne ($t(M) \neq 0$)
libre	identités de Bezout généralisées directes et inverses		identités de Bezout généralisées, CNS à la stabilisation interne ($t(M) = 0$), paramétrisation des contrôleurs stabilisants

3. Description des chapitres

La plus grande partie de cette thèse est consacrée à l'étude des propriétés des systèmes, définis par les classes 1 à 4 précédemment définies, appelés systèmes de contrôle multidimensionnels linéaires. On peut remarquer que toutes ces classes sont un cas particulier de l'anneau des opérateurs différentiels $D = K[d_1, \dots, d_n]$, où K est un corps différentiel. Ainsi, on est naturellement amené à utiliser la théorie des D -modules pour l'étude des systèmes de contrôle.

Après quelques rappels sur les suites exactes, les suites scindées et la chasse dans les diagrammes, le premier chapitre montre comment on peut associer un A -module à gauche M à tout système de la forme $Rz = 0$, où R est une matrice à coefficients dans l'anneau A , et en particulier, un D -module M à tout système d'EDP linéaire défini par un nombre fini d'équations à un nombre fini d'inconnues. Utilisant alors les propriétés des modules définies en algèbre homologique, on a une classification naturelle des systèmes suivant les propriétés du D -module M correspondant (libre, stablement libre, projectif, réflexif, sans-torsion...). Nous rappelons dans le premier chapitre toutes ces diverses définitions de modules, ainsi que leurs propriétés. Nous avons essayé d'illustrer au maximum ce chapitre par des exemples qui pourront être utiles par la suite. Ce chapitre pourra être omis en première lecture par toute personne connaissant ces résultats.

Dans le second chapitre, nous montrons pourquoi l'objet algébrique représenté par le A -module M est plus intéressant que la matrice R qui sert à le définir. Nous remarquons tout d'abord que deux systèmes décrits de manière différente (nombre d'équations, nombre d'inconnues) peuvent définir un même système (par exemple, un système de Kalman et un système polynomial équivalent). Dans l'approche des modules, cela signifie que les deux systèmes définissent des modules isomorphes. Ainsi, l'objet intrinsèque est le A -module M et non la matrice R qui en donne une présentation particulière. En utilisant cette notion d'équivalence des systèmes et quelques techniques d'algèbre homologique, on étudie alors les liens entre deux présentations différentes d'un même système.

De plus, nous montrons comment associer à tout A -module M , défini par une matrice R , le A -module N défini par la transposée de la matrice R . Ce A -module N dépend de manière importante de la matrice R , mais nous montrons que deux A -modules N et N' , définis par la transposée de deux matrices R et R' définissant le même module M , sont *projectivement équivalents* (nous donnons une preuve de ce résultat qui semble connu mais dont nous n'avons pas trouvé démonstration dans la littérature). Les techniques d'algèbre homologique utilisées par la suite ne dépendant pas de l'équivalence projective, on en déduit alors que les propriétés algébriques du A -module M , démontrées en utilisant le module N , ne dépendent que de M et non d'un choix particulier de R .

Finalement, en partant de la définition de la *primalité faible* des matrices utilisée en théorie du contrôle, on montre comment l'introduction des foncteurs tor et ext permet à la fois de revoir ce concept, mais aussi de donner des tests effectifs pour vérifier cette propriété. Nous relierons ces deux caractérisations de la primalité faible et nous montrons que la primalité faible est équivalente à l'absence de torsion dans le module engendré par la matrice. Nous donnons alors un unique diagramme expliquant clairement les positions relatives de ces trois caractérisations de la primalité faible les unes par rapport aux autres (ce diagramme nous semble non classique car nous ne l'avons pas jamais rencontré dans les livres d'algèbre homologique).

Le troisième chapitre présente succinctement la théorie formelle des équations aux dérivées partielles développée par D. Spencer et son école [59, 60, 61, 128, 144]. En particulier, nous nous plaçons dans le cadre des systèmes linéaires, seul cadre utilisé par la suite. Nous expliquons, à l'aide d'exemples, les concepts d'intégrabilité formelle, de systèmes involutifs, de suite de conditions de compatibilité, de suites de Janet et de Spencer. Ces techniques nous seront très utiles dans la suite pour développer des tests effectifs permettant de vérifier certaines propriétés structurelles des systèmes d'EDP ou des D -modules associés.

Le chapitre suivant s'intéresse à l'existence d'*identité de Bezout généralisée* pour les systèmes de contrôle multidimensionnels, définis par des D -modules ou des opérateurs différentiels. Cette identité de Bezout joue un rôle important en théorie du contrôle dans des problèmes de réalisation, de stabilisation ou de placement de pôles. Nous montrons, en particulier, l'existence d'une telle identité pour des modules libres définis par des opérateurs surjectifs. Si le système de contrôle ne définit qu'un module projectif, nous avons alors seulement la partie supérieure de cette identité matricielle. Finalement, si le système n'engendre qu'un D -module sans-torsion, i.e. contrôlable, alors nous n'avons que la partie supérieure droite de cette identité. Nous montrons alors que l'identité de Bezout généralisée n'est en fait rien d'autre qu'une suite courte scindée formée par l'opérateur définissant le système et sa paramétrisation. De nombreux exemples illustrent cette approche. Nous utilisons alors cette identité de Bezout généralisée pour étudier le *placement de pôles* et la *forme canonique de Brunovsky*.

Dans le chapitre V, nous montrons comment la *dualité* formelle des opérateurs différentiels, l'intégrabilité formelle et les suites différentielles, ainsi que les techniques de *localisation* des D -modules, permettent de vérifier la contrôlabilité des systèmes multidimensionnels et de donner des paramétrisations de ces systèmes. On caractérise ici la contrôlabilité des systèmes multidimensionnels en terme d'absence d'éléments de torsion dans le module associé au système de contrôle. Il est à noter que Fliess a montré dans [40] que pour les systèmes de contrôle, définis par des EDO linéaires à coefficients constants, l'absence de torsion du module M est équivalente à la contrôlabilité en terme comportementale ("behaviour"), défini par Willems dans [158, 159]. Ce résultat a été récemment étendu par Pillai et Shankar aux systèmes de contrôle définis par des EDP linéaires à coefficients constants [108]. Nous rappelons que les techniques de localisation des modules, utilisées pour la première fois, à notre connaissance, en théorie du contrôle par U. Oberst et M. Fliess [104, 41], permettent de donner un cadre algébrique à la notion de matrice de transfert. Nous montrons en particulier que les paramétrisations obtenues pour les systèmes contrôlables grâce à la localisation ont un nombre minimal de fonctions arbitraires contrairement aux paramétrisations obtenues par l'étude de l'annulation du $\text{ext}_D^1(N, D)$. Nous montrons comment la vérification de l'annulation du $\text{ext}_D^1(N, D)$ peut être décrite uniquement à l'aide d'opérateurs différentiels et de la dualité formelle. Nous montrons alors que les paramétrisations obtenues par localisation sont en général moins bonnes au sens de la classification de Palamodov-Kashiwara des D -modules, du fait que ces paramétrisations ne sont pas en général paramétrisables à leur tour.

Le chapitre suivant développe quelques techniques d'élimination différentielle pour l'étude des systèmes de contrôle multidimensionnels à coefficients indéterminés. Cette étude des problèmes d'élimination différentielle, faite dans le cadre de la théorie formelle des EDP, est proche, dans son esprit, de celle développée par A. Seidenberg [137] dans le cadre de l'algèbre différentielle [87, 132]. De plus, elle s'inspire des idées que J. Douglas avait développées dans l'étude du calcul

inverse des variations [31] dans le cadre de la théorie de Ch. Riquier et M. Janet [74, 75, 76, 130, 131]. En particulier, nous nous intéressons aux systèmes linéaires à coefficients variables et nous montrons que le degré de généralité des solutions d'un tel système dépend de certaines relations différentielles que les coefficients sont amenés à satisfaire ou non. Nous représentons ces conditions différentielles sous la forme d'un *arbre de conditions d'intégrabilité*. Nous montrons alors que les propriétés structurelles des systèmes de contrôle linéaires à coefficients indéterminés, ou les systèmes obtenues par linéarisation générique de systèmes non-linéaires, font intervenir des arbres de conditions d'intégrabilité.

Le chapitre VII a pour but de montrer comment l'analyse algébrique permet de reformuler et de résoudre certains problèmes de la théorie des systèmes de contrôle multidimensionnels. Nous décrivons tout d'abord la dualité entre les opérateurs différentiels et les D -modules. Nous montrons alors comment cette dualité opérateurs/modules et certains résultats trouvés par M. Kashiwara dans sa thèse [85] permettent de donner une classification naturelle des systèmes suivant les propriétés des modules associés et de les vérifier de manière effective. Nous montrons que cette classification suit exactement celle obtenue en utilisant les différents types de primalités des systèmes n -dimensionnels, définis en termes de la dimension de la variété algébrique sur laquelle s'annulent tous les mineurs maximaux de matrice de rang générique maximal R , définissant le système [18, 19, 163, 168]. Notons que J. Wood, E. Rogers et D. Owens ont obtenu dans [160] des résultats assez proches de ceux que nous développons ici. De plus, à l'aide de treillis de modules et du concept de variété caractéristique des D -modules (ou du support), nous donnons alors une caractérisation des différentes notions de pôles et zéros rencontrées dans la littérature. Ces résultats sur les pôles et zéros s'inspirent grandement des travaux de H. Bourlès et M. Fliess [17] et ont de fortes connexions avec le récent papier [161].

L'avant dernier chapitre s'intéresse à des problèmes de commande optimale pour les systèmes multidimensionnels. En particulier, nous montrons comment utiliser la paramétrisation des systèmes contrôlables pour écrire le système optimal d'un problème variationnel avec contraintes sous la forme d'un problème variationnel sans contraintes. Notons que H. Pillai et J.C. Willems ont obtenu dans [109] des résultats similaires pour les systèmes de contrôle régis par des EDP à coefficients constants. Si le système de contrôle est défini par un opérateur différentiel surjectif et s'il engendre un D -module projectif, nous montrons alors que nous pouvons déterminer explicitement, sans aucune intégration, les multiplicateurs de Lagrange en fonction des variables du système. Finalement, nous montrons comment certains problèmes variationnels, rencontrés en élasticité ou en électromagnétisme, peuvent être reformulés à l'aide des suites différentielles, de la dualité formelle des opérateurs différentiels et des lois de comportement.

Finalement, le dernier chapitre montre comment utiliser la théorie des modules et l'algèbre homologique pour reformuler de manière plus intrinsèque les problèmes de stabilisation interne [25, 28, 30, 47, 143, 150, 151, 152, 153, 154, 155], la primalité faible [47, 143], les identités de Bezout généralisées [81, 152] et la paramétrisation de Youla tous les contrôleurs stabilisants [152, 165], pour des systèmes définis sur un anneau A de systèmes propres et stables (RH_∞) ou une algèbre A de Banach (H_∞ , algèbres de Callier-Desoer, algèbres de convolution $L_1 \oplus \mathbb{C}\delta$, $l_1 + \mathbb{C}\delta\dots$). Nous développerons dans de futurs travaux les liens existant entre les problèmes de stabilisation robuste et la théorie des modules de Banach (modules sur des algèbres de Banach) développés dans [66, 67, 68, 69].

CHAPITRE 2

Théorie des modules

Les résultats ci-dessous ont été rassemblés de façon à fournir le matériel minimum nécessaire à la compréhension du chapitre suivant qui présente des résultats beaucoup plus délicats et importants d'algèbre homologique. Ces résultats seront utilisés pour la première fois, à notre connaissance, en théorie du contrôle, dans les chapitres ultérieurs.

1. Suites et diagrammes

Cette section rappelle quelques définitions et résultats sur les suites exactes, les suites scindées, la chasse dans les diagrammes, les catégories et les foncteurs. Le lecteur initié aux bases de l'algèbre homologique pourra passer directement à la section suivante sur la théorie des modules et la classification des systèmes.

1.1. Suites exactes. Soit $f : M \rightarrow N$ un morphisme de A -modules. Nous notons $\ker f = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$, $\operatorname{im} f = \{n \in N \mid \exists m \in M, n = f(m)\}$, $\operatorname{coim} f = M/\ker f$ et $\operatorname{coker} f = N/\operatorname{im} f$. On rappelle que f est un *monomorphisme* si $\ker f = 0$, un *épimorphisme* si $\operatorname{coker} f = 0$ et un *isomorphisme* si $\ker f = 0 = \operatorname{coker} f$.

DÉFINITION 1.1. – Un *complexe* $P = (P_i, d_i)$ est une suite de A -modules P_i et de A -morphisms $d_i : P_i \rightarrow P_{i-1}$ vérifiant $d_i \circ d_{i+1} = 0$ ou, de façon équivalente, $\operatorname{im} d_{i+1} \subseteq \ker d_i$. Nous le notons par :

$$P : \dots \rightarrow P_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \rightarrow \dots$$

On appelle d_i la $i^{\text{ème}}$ *différentielle* du complexe P , $Z_i = \ker d_i$ le $i^{\text{ème}}$ module de *cycles* de P et $B_i = \operatorname{im} d_{i+1}$ le $i^{\text{ème}}$ module de *bords* de P .

- Le $i^{\text{ème}}$ A -module d'*homologie* du complexe P est défini par $H_i(P) = \ker d_i / \operatorname{im} d_{i+1}$.
- Un complexe P est *exact* si $H_i(P) = 0$, $\forall i$, c-à-d $\operatorname{im} d_{i+1} = \ker d_i$, $\forall i$.

Ainsi, la suite exacte $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M$ signifie que f est un monomorphisme et la suite exacte $M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ signifie que g est un épimorphisme. La suite exacte courte $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ signifie alors que f est injectif, g surjectif et $\operatorname{im} f = \ker g$. On peut alors identifier M' à un sous-module de M et M'' au module quotient M/M' .

EXEMPLE 1.1. Considérons l'anneau $A = \mathbb{R}[\chi_1, \chi_2]$ des polynômes en χ_1 et χ_2 , à coefficients dans \mathbb{R} , et la suite de morphismes suivante

$$(6) \quad 0 \rightarrow A \xrightarrow{f} A^2 \xrightarrow{g} A \rightarrow 0,$$

où f et g sont définis par $f(a) = a(\chi_1\chi_2 + 1 \ \chi_1)$, $a \in A$ et

$$g(a \ b) = (a \ b) \begin{pmatrix} -\chi_1 \\ \chi_1\chi_2 + 1 \end{pmatrix} = -a\chi_1 + b(\chi_1\chi_2 + 1), \quad (a \ b) \in A^2.$$

On vérifie que $g \circ f = 0 \Rightarrow \operatorname{im} f \subseteq \ker g$. Ce complexe est une suite exacte car nous avons $\ker g = \{(a \ b) \in A^2 \mid a\chi_1 = b(\chi_1\chi_2 + 1)\}$ et, puisque χ_1 (resp. $\chi_1\chi_2 + 1$) n'est pas un multiple

de $\chi_1\chi_2 + 1$ (resp. χ_1), nous avons alors, grâce au lemme de Gauss [78, 90, 135],

$$\begin{cases} \chi_1\chi_2 + 1 \mid a \\ \chi_1 \mid b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c(\chi_1\chi_2 + 1), \\ b = c\chi_1, \end{cases} \quad c \in A,$$

ce qui se réécrit sous la forme de $(a \ b) = f(c) \Rightarrow \ker g \subseteq \text{im } f$, d'où l'égalité. De plus, le morphisme f est injectif car $f(a) = 0$ est équivalent à $a(\chi_1\chi_2 + 1) = 0$ et $a\chi_1 = 0$, ce qui implique $a = 0$, car A est un anneau intègre. Nous avons aussi $g(a\chi_2 \ a) = a$, $\forall a \in A$, donc g est surjectif.

REMARQUE 1.1. Par la suite, il apparaîtra plus clairement pourquoi nous utilisons des vecteurs lignes de A^2 et pourquoi nous les plaçons à gauche des matrices.

EXEMPLE 1.2. Soit $f : M \rightarrow N$ un morphisme de A -modules. Une condition nécessaire et suffisante pour que le système linéaire

$$(7) \quad f(m) = n$$

admette une solution $m \in M$, pour un second membre n donné dans N , est $n \in \text{im } f$. Or, nous avons la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \ker f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} \text{coker } f \longrightarrow 0,$$

appelée suite ker-coker, et donc $n \in \text{im } f \Leftrightarrow \pi(n) = 0$. De plus, si nous avons la suite exacte $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$, du fait que $\ker g = \text{im } f$, la condition nécessaire et suffisante devient alors $g(n) = 0$. La solution m n'est pas unique en général, puisque l'on peut lui ajouter tout m' élément vérifiant $f(m') = 0$, c-à-d tout élément m' de $\ker f$. Dans l'exemple 1.1, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $a \in A$ vérifiant

$$\begin{cases} a(\chi_1\chi_2 + 1) = b, \\ a\chi_1 = c, \end{cases}$$

est $b\chi_1 - c(\chi_1\chi_2 + 1) = 0$. La solution a est alors unique puisque f est un monomorphisme.

EXEMPLE 1.3. Soit $f : M \rightarrow N$ un morphisme de A -modules, alors des suites exactes suivantes $0 \rightarrow \ker f \rightarrow M \rightarrow \text{coim } f \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow \ker f \rightarrow M \rightarrow \text{im } f \rightarrow 0$, nous déduisons l'isomorphisme :

$$(8) \quad \text{coim } f \cong \text{im } f.$$

Supposons maintenant que la suite $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ soit exacte, i.e. $\ker g = \text{im } f$, alors des deux suites exactes $0 \rightarrow \text{im } f \rightarrow M \rightarrow \text{coker } f \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow \ker g \rightarrow M \rightarrow \text{im } g \rightarrow 0$, nous obtenons :

$$(9) \quad \text{coker } f \cong \text{im } g.$$

LEMME 1.1. Soient $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow M'' \xrightarrow{h} N \xrightarrow{k} N'' \rightarrow 0$ deux suites exactes, alors la suite $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{h \circ g} N \xrightarrow{k} N'' \rightarrow 0$ est exacte.

La preuve est évidente et elle est laissée au lecteur.

DÉFINITION 1.2. Les diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ g \downarrow & & \downarrow k \\ P & \xrightarrow{h} & Q \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ h \searrow & & \downarrow g \\ & & P \end{array}$$

sont *commutatifs* si nous avons respectivement $k \circ f = h \circ g$ et $g \circ f = h$.

1.2. Suites scindées.

PROPOSITION 1.1. Si $f : M \rightarrow N$ et $g : P \rightarrow M$ sont des A -morphisms de A -modules tels que $f \circ g = 0$, alors il existe un unique A -morphisme $h : P \rightarrow \ker f$ vérifiant $g = i \circ h$ avec $i : \ker f \rightarrow M$, et nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \ker f & \xrightarrow{i} & M \xrightarrow{f} N \\ & & h \uparrow & & \parallel \\ & & P & \xrightarrow{g} & M. \end{array}$$

PREUVE. Nous déduisons de $f \circ g = 0$ que $\text{im } g \subseteq \ker f$, c-à-d $\forall p \in P, g(p) \in \ker f$. Définissons l'application $h : P \rightarrow \ker f$ par $h(p) = g(p), \forall p \in P$. \square

PROPOSITION 1.2. Si $f : M \rightarrow N$ et $g : N \rightarrow P$ sont des A -morphisms de A -modules tels que $g \circ f = 0$, alors il existe un unique A -morphisme $h : \text{coker } f \rightarrow P$ vérifiant $g = h \circ \pi$ avec $\pi : N \rightarrow \text{coker } f$, et nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{\pi} & \text{coker } f \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow h \\ & & N & \xrightarrow{g} & P. \end{array}$$

PREUVE. On peut définir l'application $h : \text{coker } f \rightarrow P$ par $h(c) = g(n)$ où $c = \pi(n)$. Cette application h ne dépend pas de l'antécédent n choisi pour c . En effet, soient n et $n' \in N$ tels que $\pi(n) = c = \pi(n')$, alors $n - n' \in \text{im } f$ et donc $g(n - n') = 0$, c-à-d $g(n) = g(n')$. \square

COROLLAIRE 1.1. Soit $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules.

1. Si $u : M \rightarrow M$ est un A -morphisme tel que $g \circ u = 0$, alors il existe un unique A -morphisme $k : M \rightarrow M'$ tel que $u = f \circ k$.
2. Si $v : M \rightarrow M$ est un A -morphisme tel que $v \circ f = 0$, alors il existe un unique A -morphisme $h : M'' \rightarrow M$ tel que $v = h \circ g$.

PREUVE. Supposons $g \circ u = 0$, alors, par la proposition 1.1, il existe un unique A -morphisme $j : M \rightarrow \ker g$ tel que $u = i \circ j$. Puisque $\ker g = \text{im } f$ et que f est un monomorphisme, alors pour tout $m \in M$, il existe un unique $m' \in M'$ tel que $j(m) = f(m')$. Définissons alors l'application $k : M \rightarrow M'$ par $k(m) = m', \forall m \in M$. Nous avons donc $u = i \circ f \circ k$, c-à-d $u = f \circ k$. Le morphisme k est unique car si $u = f \circ k = f \circ k'$, alors $f \circ (k - k') = 0 \Rightarrow k = k'$, car f est un monomorphisme. Supposons maintenant que $v \circ f = 0$, donc, par la proposition 1.2, il existe un unique A -morphisme $h : \text{coker } f \rightarrow M$ tel que $v = h \circ g$. En utilisant (9) et le fait que g est un épimorphisme, nous avons alors $\text{coker } f = M''$. Donc, il existe un A -morphisme $h : M'' \rightarrow M$ tel

que $v = h \circ g$. Le morphisme h est unique car si $v = h \circ g = h' \circ g$, alors $(h - h') \circ g = 0 \Rightarrow h = h'$, car g est un épimorphisme. \square

EXEMPLE 1.4. Reprenons l'exemple 1.1 et définissons le morphisme $u : A^2 \rightarrow A^2$ par :

$$u(a \ b) = (a \ b) \begin{pmatrix} \chi_1 \chi_2 + 1 & \chi_1 \\ -\chi_1 \chi_2^2 - \chi_2 & -\chi_1 \chi_2 \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors $g \circ u = 0$, donc, d'après le corollaire 1.1, il existe un unique $k : A^2 \rightarrow A$ vérifiant $u = f \circ k$. On vérifie aisément que $k(a \ b) = a - b\chi_2$ car nous avons la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\chi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \chi_2 + 1 & \chi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1 \chi_2 + 1 & \chi_1 \\ -\chi_1 \chi_2^2 - \chi_2 & -\chi_1 \chi_2 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, considérons le morphisme $v : A^2 \rightarrow A^2$ défini par :

$$v(a \ b) = (a \ b) \begin{pmatrix} -\chi_1 \chi_2 & -\chi_1 \\ \chi_1 \chi_2^2 + \chi_2 & \chi_1 \chi_2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors $v \circ f = 0$, donc, d'après le corollaire 1.1, il existe un unique $h : A \rightarrow A^2$ vérifiant $v = h \circ g$. On vérifie aisément que $h(a) = a(\chi_2 \ 1)$ car nous avons la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} -\chi_1 \\ \chi_1 \chi_2 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\chi_1 \chi_2 & -\chi_1 \\ \chi_1 \chi_2^2 + \chi_2 & \chi_1 \chi_2 + 1 \end{pmatrix}.$$

La notion de *suites scindées* sera cruciale pour la suite. Rappelons les définitions équivalentes.

DÉFINITION 1.3. Soit $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules. Nous dirons que cette suite est une *suite exacte scindée* si l'une des trois propositions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. il existe un A -morphisme $h : M'' \rightarrow M$ tel que $g \circ h = \text{id}_{M''}$,
2. il existe un A -morphisme $k : M \rightarrow M'$ tel que $k \circ f = \text{id}_{M'}$,
3. il existe $\phi = \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} : M \rightarrow M' \oplus M''$ et $\psi = (f \ h) : M' \oplus M'' \rightarrow M$ tels que ϕ et ψ sont des isomorphismes et $\phi \circ \psi = \text{id}_{M' \oplus M''}$, $\psi \circ \phi = \text{id}_M$,
4. $M \cong M' \oplus M''$.

Nous notons alors la suite scindée par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \xleftarrow{k} & & \xleftarrow{h} & & \end{array}$$

PREUVE. Montrons que $1 \Rightarrow 2$. Définissons le morphisme $u : M \rightarrow M$ par $u = \text{id}_M - h \circ g$. Nous avons alors $g \circ u = g - (g \circ h) \circ g = 0$ donc, d'après le corollaire 1.1, il existe un unique morphisme $k : M \rightarrow M'$ tel que $u = f \circ k$, c-à-d $h \circ g + f \circ k = \text{id}_M$. On en déduit $f = (h \circ g + f \circ k) \circ f = f \circ k \circ f$, d'où $f \circ (k \circ f - \text{id}_{M'}) = 0$, et donc $k \circ f = \text{id}_{M'}$, puisque f est un monomorphisme. Montrons $2 \Rightarrow 3$. Définissons le morphisme $v : M \rightarrow M$ par $v = \text{id}_M - f \circ k$. Nous avons alors $v \circ f = f - f \circ (k \circ f) = 0$ donc, d'après le corollaire 1.1, il existe un unique

morphisme $h : M'' \rightarrow M$ tel que $v = h \circ g$, c-à-d $f \circ k + h \circ g = \text{id}_M$. Nous pouvons réécrire cette dernière identité sous la forme matricielle suivante

$$(10) \quad (f \ h) \circ \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} = \text{id}_M,$$

d'où $\psi \circ \phi = \text{id}_M$. On déduit de l'identité (10) que $g = g \circ h \circ g$, d'où $(\text{id}_{M''} - g \circ h) \circ g = 0$, et donc $g \circ h = \text{id}_{M''}$, puisque g est un épimorphisme. Nous venons de montrer en particulier que $2 \Rightarrow 1$. Nous avons aussi $h = f \circ k \circ h + h \circ g \circ h$ et $h = h \circ g \circ h$, d'où $f \circ (k \circ h) = 0$, et donc $k \circ h = 0$, puisque f est un monomorphisme. Nous avons alors

$$(11) \quad \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} \circ (f \ h) = \begin{pmatrix} \text{id}_{M'} & 0 \\ 0 & \text{id}_{M''} \end{pmatrix},$$

c-à-d $\phi \circ \psi = \text{id}_{M' \oplus M''}$, d'où 3. Les points 3 et 4 sont trivialement équivalents. Montrons que $3 \Rightarrow 1$. Nous avons (11), d'où $k \circ f = \text{id}_{M'}$ et $g \circ h = \text{id}_{M''}$. \square

EXEMPLE 1.5. Considérons l'anneau $A = \mathbb{R}[\chi_1, \chi_2]$ et la suite exacte (6) de l'exemple 1.1. La suite exacte (6) est une suite scindée car, si $h : A \rightarrow A^2$ est le morphisme défini par $a \rightarrow a(\chi_2 - 1)$, nous avons alors $g \circ h = \text{id}_A$ et donc la suite exacte (6) se scinde d'après la définition 1.3. D'après la démonstration des équivalences de la définition 1.3, pour calculer explicitement le morphisme $k : A^2 \rightarrow A$ vérifiant $k \circ f = \text{id}_A$, nous devons considérer le morphisme $u : A^2 \rightarrow A^2$ défini par $u = \text{id}_{A^2} - h \circ g$ et trouver le facteur k tel que $u = f \circ k$. On vérifie aisément que $u = \text{id}_{A^2} - h \circ g$ est exactement le morphisme u défini à l'exemple 1.4 et donc que le morphisme k est celui trouvé dans l'exemple 1.4. De même, si l'on part du morphisme k défini dans l'exemple 1.4, alors $v = \text{id}_{A^2} - f \circ k$ est celui de l'exemple 1.4 et donc le morphisme $h : A \rightarrow A^2$, précédemment défini, vérifie $g \circ h = \text{id}_A$. Les relations (10) et (11) donnent alors respectivement :

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{pmatrix} 1 & -\chi_1 \\ -\chi_2 & \chi_1\chi_2 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1\chi_2 + 1 & \chi_1 \\ \chi_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ & \bullet \begin{pmatrix} \chi_1\chi_2 + 1 & \chi_1 \\ \chi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\chi_1 \\ -\chi_2 & \chi_1\chi_2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.3. Chasses dans les diagrammes. Très souvent en algèbre homologique, on doit raisonner dans des diagrammes (voir par exemple les propositions 1.1 et 1.2). On dira alors que l'on *chasse dans les diagrammes* ("diagram chasing").

LEMME 1.2. *Supposons que le diagramme de A -modules suivant*

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow h' & & \downarrow h \\ N' & \xrightarrow{f'} & N, \end{array}$$

soit commutatif. Alors, il existe un unique homomorphisme $u : \ker h' \rightarrow \ker h$ et un unique homomorphisme $u' : \text{coker } h' \rightarrow \text{coker } h$ tels que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 0 & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \ker h' & \xrightarrow{u} & \ker h \\
 \downarrow i' & & \downarrow i \\
 M' & \xrightarrow{f} & M \\
 \downarrow h' & & \downarrow h \\
 N' & \xrightarrow{f'} & N \\
 \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\
 \text{coker } h' & \xrightarrow{u'} & \text{coker } h. \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0
 \end{array}$$

PREUVE. Il suffit de remarquer que $f \circ i' : \ker h' \rightarrow M$ vérifie $h \circ (f \circ i') = (h \circ f) \circ i' = (f' \circ h') \circ i' = f' \circ (h' \circ i') = 0$ et de lui appliquer la proposition 1.1. Il existe alors le morphisme $u : \ker h' \rightarrow \ker h$ satisfaisant $i \circ u = f \circ i'$. De même, le morphisme $\pi \circ f' : N' \rightarrow \text{coker } h$ vérifie $(\pi \circ f') \circ h' = \pi \circ (f' \circ h') = \pi \circ (h \circ f) = (\pi \circ h) \circ f = 0$ et nous pouvons lui appliquer la proposition 1.2. Nous obtenons alors le morphisme $u' : \text{coker } h' \rightarrow \text{coker } h$ défini par $u'(c') = (\pi \circ f')(n')$ avec $c' = \pi'(n')$, satisfaisant $\pi \circ f' = u' \circ \pi'$. \square

LEMME 1.3. *Supposons que le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccccccc}
 M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow h' & & \downarrow h & & \downarrow h'' & & \\
 0 \longrightarrow & N' & \xrightarrow{f'} & N & \xrightarrow{g'} & N'' &
 \end{array}$$

soit commutatif et que ses suites horizontales soient exactes, alors nous avons le diagramme commutatif exact suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & & 0 & & 0 & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \ker h' & \xrightarrow{u} & \ker h & \xrightarrow{v} & \ker h'' & & \\
 \downarrow i' & & \downarrow i & & \downarrow i'' & & \\
 M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow h' & & \downarrow h & & \downarrow h'' & & \\
 0 \longrightarrow & N' & \xrightarrow{f'} & N & \xrightarrow{g'} & N'' & \\
 \downarrow \pi' & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi'' & & \\
 \text{coker } h' & \xrightarrow{u'} & \text{coker } h & \xrightarrow{v'} & \text{coker } h'' & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

et il existe un unique homomorphisme $\delta : \ker h'' \rightarrow \text{coker } h$ tel que nous avons la suite exacte suivante :

$$(14) \quad \ker h' \xrightarrow{u} \ker h \xrightarrow{v} \ker h'' \xrightarrow{\delta} \text{coker } h' \xrightarrow{u'} \text{coker } h \xrightarrow{v'} \text{coker } h''$$

PREUVE. Nous donnons juste la définition de δ , le reste étant facile à démontrer (voir par exemple [13]). En appliquant le lemme 1.2 au diagramme (12), nous obtenons le diagramme commutatif (13), où les suites verticales et les deux suites centrales sont exactes. Soit $k'' \in \ker h'' \subseteq M''$. Puisque g est un épimorphisme, il existe $m \in M$ tel que $i''(k'') = g(m)$. Donc $(g' \circ h)(m) = (h'' \circ g)(m) = (h'' \circ i'')(k'') = 0 \Rightarrow h(m) \in \ker g' = \text{im } f'$, donc il existe un unique $n' \in N'$ tel que $f'(n') = h(m)$, puisque f' est un monomorphisme. Nous avons alors $\pi'(n') \in \text{coker } h'$ et nous pouvons définir $\delta : \ker h'' \rightarrow \text{coker } h'$ par $\delta(k'') = \pi'(n')$. L'application δ est bien définie car elle est indépendante de l'antécédant m choisi pour $i''(k'')$. En effet, supposons que $g(m_1) = i''(k'') = g(m_2)$ avec $k'' \in \ker h''$, alors $m_1 - m_2 \in \ker g = \text{im } f$, donc il existe un élément $m' \in M'$ tel que $m_1 - m_2 = f(m')$ et il existe $n'_1, n'_2 \in N'$ tels que $f'(n'_1) = h(m_1)$ et $f'(n'_2) = h(m_2) \Rightarrow f'(n'_1 - n'_2) = h(m_1 - m_2) = (h \circ f)(m') = (f' \circ h')(m') \Rightarrow n'_2 - n'_1 - h'(m') \in \ker f' = 0 \Rightarrow n'_2 - n'_1 = h'(m')$ et donc $\pi'(n'_2 - n'_1) = (\pi' \circ h')(m') = 0 \Rightarrow \pi'(n'_2) = \pi'(n'_1) = \delta(k'')$. \square

Le lemme ci-dessus est couramment appelé le *lemme du serpent*.

LEMME 1.4. Soit le diagramme commutatif exact (12).

- Si f est un monomorphisme, alors u est un monomorphisme.
- Si g' est un épimorphisme, alors v' est un épimorphisme.
- Si f est un monomorphisme et g' est un épimorphisme, alors nous avons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \ker h' \xrightarrow{u} \ker h \xrightarrow{v} \ker h'' \xrightarrow{\delta} \text{coker } h' \xrightarrow{u'} \text{coker } h \xrightarrow{v'} \text{coker } h'' \longrightarrow 0.$$

PREUVE. Supposons que f soit un monomorphisme, alors $u(k') = 0 \Rightarrow (i \circ u)(k') = 0 = (f \circ i')(k') \Rightarrow i'(k') = 0$ car f est un monomorphisme, et donc $k' = 0$ car i' est aussi un monomorphisme. Supposons maintenant que g' soit un épimorphisme, alors pour $p'' \in \text{coker } h''$, il existe $n'' \in N''$ tel que $\pi''(n'') = p''$ et donc, puisque g' est un épimorphisme, il existe $n \in N$ tel que $n'' = g'(n)$. Nous avons alors $\pi(n) \in \text{coker } h$ tel que $v'(\pi(n)) = (v' \circ \pi)(n) = (\pi'' \circ g')(n) = \pi''(n'') = p''$, donc v' est un épimorphisme. \square

PROPOSITION 1.3. Soient $P = (P_i, d_i)$ un complexe de A -modules et $M_i = \text{coker } d_{i+1}$. Nous avons alors les suites exactes suivantes pour tout i :

1. $0 \longrightarrow H_i(P) \longrightarrow M_i \xrightarrow{\tau_i} \text{im } d_i \longrightarrow 0,$
2. $0 \longrightarrow H_i(P) \longrightarrow M_i \xrightarrow{\kappa_i} \ker d_{i-1} \longrightarrow H_{i-1}(P) \longrightarrow 0,$
3. $0 \longrightarrow H_i(P) \longrightarrow M_i \longrightarrow P_{i-1} \longrightarrow M_{i-1} \longrightarrow 0.$

PREUVE. Nous avons la diagramme commutatif exact suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{im } d_{i+1} & \xrightarrow{j_i} & P_i & \xrightarrow{\pi_i} & M_i \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow j'_i & & \parallel & & \downarrow \tau_i \\
 0 & \longrightarrow & \text{ker } d_i & \xrightarrow{j''_i} & P_i & \xrightarrow{d_i} & \text{im } d_i \longrightarrow 0, \\
 & & \downarrow \pi'_i & & \downarrow & & \\
 & & H_i(P) & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

où $\tau_i : M_i \rightarrow \text{im } d_i$ est le morphisme défini par $\forall m_i \in M_i, \tau_i(m_i) = d_i(p_i)$, avec $p_i \in P_i$ tel que $\pi_i(p_i) = m_i$. Ce morphisme est bien défini et ne dépend pas de l'antécédent p_i de m_i choisi car, si p'_i est un autre antécédent de m_i , nous avons alors $\pi_i(p_i) = m_i = \pi_i(p'_i) \Rightarrow p_i - p'_i \in \text{ker } \pi_i = \text{im } j_i$, et donc il existe $l_{i+1} \in \text{im } d_{i+1}$ tel que $p_i - p'_i = j_i(l_{i+1}) \Rightarrow d_i(p_i - p'_i) = (d_i \circ j_i)(l_{i+1}) = (d_i \circ (j''_i \circ j'_i))(l_{i+1}) = ((d_i \circ j''_i) \circ j'_i)(l_{i+1}) = 0 \Rightarrow d_i(p_i) = d_i(p'_i) = \tau_i(m_i)$. On applique alors le lemme du serpent à ce diagramme et nous obtenons $\text{ker } \tau_i \cong H_i(P)$ et $\text{coker } \tau_i = 0$, d'où la suite exacte $0 \rightarrow H_i(P) \rightarrow M_i \xrightarrow{\tau_i} \text{im } d_i \rightarrow 0$. De plus, on peut appliquer le lemme 1.1

à la suite exacte précédente et à la suite exacte $0 \rightarrow \text{im } d_i \xrightarrow{j'_{i-1}} \text{ker } d_{i-1} \rightarrow H_{i-1}(P) \rightarrow 0$ (resp. $0 \rightarrow \text{im } d_i \rightarrow P_{i-1} \rightarrow M_{i-1} \rightarrow 0$) pour obtenir la suite exacte $0 \rightarrow H_i(P) \rightarrow M_i \xrightarrow{\kappa_i} \text{ker } d_{i-1} \rightarrow H_{i-1}(P) \rightarrow 0$ avec $\kappa_i = j'_{i-1} \circ \tau_i$ (resp. $0 \rightarrow H_i(P) \rightarrow M_i \rightarrow P_{i-1} \rightarrow M_{i-1} \rightarrow 0$). \square

1.4. Catégories et foncteurs.

DÉFINITION 1.4. Une *catégorie* C est la donnée :

- d'une famille $\text{Ob}(C)$ d'objets de C ,
- Pour tout couple $X, Y \in \text{Ob}(C)$, la donnée d'une famille $\text{hom}_C(X, Y)$ de morphismes de X dans Y ,
- Pour tout triplet $X, Y, Z \in \text{Ob}(C)$, il existe une application

$$\begin{array}{ccc}
 \circ : \text{hom}_C(X, Y) \times \text{hom}_C(Y, Z) & \longrightarrow & \text{hom}_C(X, Z) \\
 (f, g) & \longrightarrow & g \circ f
 \end{array}$$

telle que \circ est associative et, pour tout $X \in \text{Ob}(C)$, il existe un morphisme identité $\text{id}_X \in \text{hom}_C(X, X)$ vérifiant $\forall f \in \text{hom}_C(X, Y), g \in \text{hom}_C(Y, X) : f \circ \text{id}_X = f, \text{id}_X \circ g = g$.

EXEMPLE 1.6. Soit A un anneau commutatif, alors l'ensemble des A -modules et des A -morphisms de A -modules dans les A -modules forment une catégorie, notée $\text{Mod}(A)$. L'ensemble des \mathbb{C} -espaces de Banach avec les applications linéaires continues forme la catégorie des espaces de Banach, notée $\text{Ban}(\mathbb{C})$.

DÉFINITION 1.5. C' est une *sous-catégorie* de C si $\text{Ob}(C') \subseteq \text{Ob}(C)$ et $\text{hom}_{C'}(X, Y) \subseteq \text{hom}_C(X, Y)$. On appelle *catégorie opposée* C^{op} de C , la catégorie formée par les mêmes objets $\text{Ob}(C)$ de C et les morphismes $\text{hom}_{C^{\text{op}}}(X, Y) = \text{hom}_C(Y, X)$.

DÉFINITION 1.6. Soient C et C' deux catégories, on appelle *foncteur covariant* $F : C \rightarrow C'$ la donnée

1. d'une application :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ob}(C) & \longrightarrow & \text{Ob}(C') \\ X & \longrightarrow & F(X), \end{array}$$

2. d'une application $\text{hom}_C(X, Y) \longrightarrow \text{hom}_{C'}(F(X), F(Y))$ telle que :

- $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$,
- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

Un foncteur $F : C \rightarrow C'$ est dit *contravariant* s'il est covariant pour $C^{\text{op}} \rightarrow C'^{\text{op}}$, c-à-d $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

EXEMPLE 1.7. - Soient A un anneau commutatif et N un A -module, alors

$$\begin{array}{ccc} \otimes_A N : \text{Mod}(A) & \longrightarrow & \text{Mod}(A) \\ M & \longrightarrow & M \otimes_A N \end{array}$$

est un foncteur covariant,

- Soient A un anneau commutatif et M un A -module, alors

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}_A(M, \cdot) : \text{Mod}(A) & \longrightarrow & \text{Mod}(A) \\ N & \longrightarrow & \text{hom}_A(M, N) \end{array}$$

est un foncteur covariant,

- Soient A un anneau commutatif et M un A -module, alors

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}_A(\cdot, M) : \text{Mod}(A) & \longrightarrow & \text{Mod}(A) \\ N & \longrightarrow & \text{hom}_A(N, M) \end{array}$$

est un foncteur contravariant.

2. Classification des modules

Le but de cette section est de montrer tout d'abord le lien existant entre la théorie des modules et l'étude d'un système inhomogène de la forme

$$(15) \quad Ry = u,$$

où R est une matrice $q \times p$ à coefficients dans un anneau intègre ($ab = 0, a \neq 0 \Rightarrow b = 0$), $y \in S^p$ une inconnue et $u \in S^q$ une donnée dans un A -module à gauche S . De nombreux exemples de tels systèmes existent dans la littérature :

- l'anneau des opérateurs différentiels $A = \mathbb{R}[d_1, \dots, d_n]$ et l'espace $S = \mathcal{D}'(\Omega)$ (resp. $C^\infty(\Omega), \mathcal{O}(\Omega)$) des distributions dans un ouvert Ω (resp. des fonctions infiniment différentiables, les fonctions analytiques),
- l'anneau $A = RH_\infty$ (resp. H_∞, \mathcal{A}) des fractions propres et stables (resp. l'anneau des fonctions analytiques bornées, l'algèbre de convolution de Callier-Desoer) et S l'ensemble des fonctions analytiques de carré intégrable H_2 (resp. H_2, L_p avec $1 \leq p \leq +\infty$).

L'analyse algébrique, développée à partir des années 60 par Malgrange, Spencer, Palamodov, Sato, Kashiwara [85, 106, 94, 96, 97, 98, 144], permet de découper la résolution du système (15) en un premier problème purement algébrique, puis en un second purement analytique. Ainsi, suivant les propriétés algébriques du A -module à gauche $M = A^p/A^q R$ (les vecteurs de A^p et ceux de A^q étant vus comme des vecteurs lignes) associées à la matrice R , ou suivant les propriétés analytiques, traduites en termes algébriques, du A -module à gauche S , on peut ou non résoudre le système inhomogène (15) pour toute matrice R (voir aussi [104, 105]).

Ensuite, la seconde finalité de ce chapitre est de donner une classification naturelle des systèmes suivant les propriétés algébriques de leur A -module $M = A^p/A^q R$ associé. Les chapitres suivants donneront soit les liens entre certaines propriétés des modules et celles des systèmes de contrôle, soit des tests effectifs permettant de les vérifier.

2.1. Résolutions libres. Soit R une matrice $q \times p$ à coefficients dans un anneau intègre A . Considérons alors le A -morphisme défini par

$$\begin{aligned} .R : A^q &\longrightarrow A^p \\ y &\longrightarrow yR, \end{aligned}$$

où les vecteurs de A^q et A^p sont des vecteurs lignes. Le A -module $\text{im} .R = A^q R$ est le A -module à gauche engendré par les lignes de la matrice R . Ce module est couramment utilisé en automatique (voir par exemple [101, 146]). Cependant, les géomètres algébristes lui préfèrent le conoyau du morphisme $.R$, c-à-d le A -module à gauche $M = \text{coker} .R = A^p/A^q R$. L'un des buts de ce chapitre et des suivants est de montrer pourquoi il est préférable d'utiliser M au lieu de $A^q R$.

EXEMPLE 2.1. Considérons le système multidimensionnel suivant :

$$(16) \quad (\chi_1 \chi_2 + 1) y - \chi_1 u = 0.$$

Nous avons alors $R = (\chi_1 \chi_2 + 1 \quad -\chi_1)$, le $A = \mathbb{R}[\chi_1, \chi_2]$ -module à gauche

$$M = A^2/A(\chi_1 \chi_2 + 1 \quad -\chi_1),$$

et la suite exacte suivante

$$(17) \quad A \xrightarrow{.R} A^2 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

où π est le A -morphisme qui associe à tout élément de A^2 sa classe dans M . Soient $\{e_1 = (1\ 0), e_2 = (0\ 1)\}$ la base canonique de A^2 , $y = \pi(e_1)$ la classe de e_1 dans M et $u = \pi(e_2)$ celle de e_2 . Nous avons alors, pour tout $a \in A$, $A R \ni a(\chi_1\chi_2 + 1 - \chi_1) = a(\chi_1\chi_2 + 1)e_1 - a\chi_1 e_2$, donc sa classe dans M est nulle, c-à-d, nous avons dans M l'équation suivante :

$$a(\chi_1\chi_2 + 1)y - a\chi_1 u = 0, \quad a \in A.$$

DÉFINITION 2.1. Un A -module M est de *type fini* s'il existe une suite exacte

$$A^p \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0,$$

avec $p \in \mathbb{N}$, ou de façon équivalente, s'il existe une famille $\{y_1, \dots, y_p\}$ dans M tel que tout élément de M s'écrit comme une combinaison linéaire des y_i à coefficients dans A .

Les deux caractérisations ci-dessus sont équivalentes. En effet, s'il existe un tel ϕ , alors pour tout $m \in M$, il existe $(a_1, \dots, a_p) \in A^p$ tel que $m = \phi(\sum_{i=1}^p a_i e_i) = \sum_{i=1}^p a_i \phi(e_i)$, où $\{e_1, \dots, e_p\}$ est la base canonique de A^p . Notons $y_i = \phi(e_i)$, alors $\forall m \in M, \exists (a_1, \dots, a_p) \in A^p$ tel que $m = \sum_{i=1}^p a_i y_i$, donc tout élément de M s'écrit comme une combinaison linéaire des y_i à coefficients dans A . Réciproquement, s'il existe une famille d'éléments $\{y_1, \dots, y_p\}$ de M tel que tout élément m de M s'écrit comme une combinaison linéaire des y_i à coefficients dans A , nous pouvons alors définir le morphisme $\phi : A^p \longrightarrow M$ par $\phi(e_i) = y_i$, où $\{e_1, \dots, e_p\}$ est une base de A^p et ϕ est un épimorphisme.

EXEMPLE 2.2. Le A -module M défini à l'exemple 2.1 est de type fini car nous avons la suite exacte (17), ou de façon équivalente, tout élément de M s'écrit comme une combinaison linéaire de y et u , à coefficients dans $A = \mathbb{R}[\chi_1, \chi_2]$.

DÉFINITION 2.2. Un A -module M est *noethérien* si tout sous A -module de M est de type fini. Un anneau A est noethérien si A est noethérien en tant que A -module, c-à-d si tout idéal de A est de type fini.

- EXEMPLE 2.3. 1. Les corps et les anneaux *principaux* sont noethériens. On rappelle qu'un anneau est dit principal si tout ses idéaux sont engendrés par un seul élément de l'anneau.
 2. L'anneau $\Lambda[\chi_1, \dots, \chi_n]$ des polynômes en χ_i , à coefficients dans un anneau noethérien Λ , est noethérien. Cela résulte du théorème de la base de Hilbert (voir par exemple [135]).
 3. Le quotient d'un anneau noethérien est noethérien. Par exemple $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 5) \cong \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ est noethérien.

PROPOSITION 2.1. *Un A -module M de type fini sur un anneau noethérien A est un A -module noethérien.*

Voir [135] pour une preuve.

DÉFINITION 2.3. Un A -module M est *libre* s'il est isomorphe à une puissance de A . De plus, si M est de type fini, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M \cong A^p$ et on dit que M est un A -module libre de *rang* p . On écrit alors $\text{rk}_A(M) = p$.

Ainsi, si M est un A -module libre de rang p , il existe alors un isomorphisme ϕ de A^p dans M et $\forall m \in M, \exists! (a_1, \dots, a_n) \in A^p$ tel que $m = \sum_{i=1}^n a_i y_i$ avec $y_i = \phi(e_i)$, où $\{e_1, \dots, e_p\}$ est la base canonique de A^p . La famille $\{y_1, \dots, y_p\}$ est donc la base du A -module M .

PROPOSITION 2.2. *Tout A -module M est isomorphe au quotient d'un A -module libre.*

PREUVE. Prenons un sous-ensemble L de M engendrant M (on peut prendre $L = M$). Soit F le A -module libre engendré par L et soit le morphisme $\phi : F \rightarrow M$ défini par $\phi(m) = m \in M$. Puisque L génère M , ϕ est un épimorphisme et donc, grâce à (8), nous avons :

$$F/\ker \phi = \text{coim } \phi \cong \text{im } \phi = M.$$

□

DÉFINITION 2.4. On dit qu'un A -module M est de *présentation finie* s'il existe $p, q \in \mathbb{N}$ telle que la suite exacte suivante est exacte :

$$(18) \quad A^q \xrightarrow{\psi} A^p \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0$$

REMARQUE 2.1. Tout A -module M admet un présentation $F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, avec F_0 et F_1 des A -modules libres. En effet, par la proposition 2.2, tout A -module M est quotient d'un A -module libre F_0 , i.e. $M = F_0/L_1$. Nous avons alors la suite exacte $0 \rightarrow L_1 \xrightarrow{i} F_0 \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0$. Or, L_1 est quotient d'un A -module libre F_1 , c-à-d $L_1 = F_1/L_2$, ou encore nous avons la suite exacte $F_1 \xrightarrow{\rho} L_1 \rightarrow 0$. Grâce au lemme 1.1, nous avons alors la suite exacte suivante :

$$F_1 \xrightarrow{\psi=i \circ \rho} F_0 \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0.$$

Cette présentation n'est une présentation finie que si F_0 et F_1 sont des A -modules libres de types finis, c-à-d $F_0 \cong A^p$ et $F_1 \cong A^q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. Ainsi, M de présentation finie signifie que M est isomorphe au quotient d'un module libre de type fini par un sous-module de type fini.

EXEMPLE 2.4. Nous avons vu à l'exemple 2.1 que le A -module $M = A^2/A(\chi_1\chi_2 + 1 - \chi_1)$ admet la présentation finie suivante :

$$A \xrightarrow{\cdot R} A^2 \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0.$$

Un système défini par une matrice R engendre donc un A -module M de présentation finie.

PROPOSITION 2.3. Si $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ est une suite exacte avec M un A -module de présentation finie et M' un A -module de type fini, alors M'' est un A -module de présentation finie.

PREUVE. M est un A -module de présentation finie, donc il existe un A -module libre de type fini F et un sous-module de type fini L tel que $M = F/L$ (voir la remarque 2.1). De plus, M' étant un sous-module de type fini de M , il existe L' un sous-module de type fini de F contenant L tel que $M' = L'/L$. Donc, $M'' = M/M' = F/L'$, ce qui signifie que M'' est de présentation finie. □

PROPOSITION 2.4. Un A -module M , défini par la présentation finie suivante

$$A^q \xrightarrow{\cdot R} A^p \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0,$$

est un A -module libre de rang m , ssi il existe une $p \times m$ matrice R_{-1} telle que nous avons la suite exacte suivante :

$$(19) \quad A^q \xrightarrow{\cdot R} A^p \xrightarrow{\cdot R_{-1}} A^m \rightarrow 0.$$

PREUVE. Si M est un A -module libre de rang m , alors il existe un isomorphisme $\phi : M \rightarrow A^m$. Nous obtenons alors un épimorphisme $\phi \circ \pi : A^p \rightarrow A^m$ et nous appelons R_{-1} la matrice associée à ce morphisme dans les bases canoniques de A^p et de A^m . D'où, nous obtenons la suite exacte (19). Réciproquement, supposons que nous ayons la suite exacte (19), nous avons alors le diagramme commutatif exact suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A^q R & \xrightarrow{\cdot R} & A^p & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & & & \\ 0 & \longrightarrow & A^q R & \xrightarrow{\cdot R} & A^p & \xrightarrow{\cdot R_{-1}} & A^m & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

d'où, en utilisant (9) et le fait que $\cdot R_{-1}$ est surjectif, nous avons alors $M = \text{coker } \cdot R \cong \text{im } \cdot R_{-1} \cong A^m$, et donc M est un A -module libre de rang m . \square

EXEMPLE 2.5. Reprenons le A -module M défini à l'exemple 2.4. Nous savons que la suite exacte (6) est une suite scindée, donc nous avons le diagramme commutatif exact suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & A^2 & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & A^2 & \xrightarrow{g} & A & \longrightarrow & 0, \\ & & & \xleftarrow{k} & & \xleftarrow{h} & & & \end{array}$$

d'où, d'après la proposition précédente, $M \cong A$. Nous pouvons déterminer explicitement une base du module M : le diagramme ci-dessus induit un morphisme $\phi : M \rightarrow A$, défini par $\phi(m) = g(n)$, avec $n \in A^2$ vérifiant $\pi(n) = m$. Le morphisme ϕ est bien défini car $\phi(m)$ ne dépend pas de l'antécédent n choisi de m . En effet, si $\pi(n) = m = \pi(n')$ alors $\pi(n - n') = 0 \Rightarrow n - n' \in \ker \pi = \text{im } f \Rightarrow \exists a \in A$ tel que $n - n' = f(a) \Rightarrow g(n - n') = (g \circ f)(a) = 0 \Rightarrow g(n) = g(n') = \phi(m)$.

Maintenant, nous avons

$$(\phi \circ (\pi \circ h))(a) = (g \circ h)(a) = a, \quad \forall a \in A$$

car $g \circ h = \text{id}_A$ (voir définition 1.3). De plus, pour tout $m = \pi(n)$, nous avons

$$((\pi \circ h) \circ \phi)(m) = (\pi \circ (h \circ g))(n) = (\pi \circ (\text{id}_{A^2} - f \circ k))(n) = \pi(n) - ((\pi \circ f) \circ k)(n) = m,$$

car $\text{id}_{A^2} = h \circ g + f \circ k$ (voir définition 1.3). D'où, $\phi^{-1} = \pi \circ h$. La base de M est alors $z = \phi^{-1}(1) = \chi_2 y + u$ et $\phi(y) = g(e_1) = -\chi_1$ et $\phi(u) = g(e_2) = \chi_1 \chi_2 + 1$ entraînent $y = -\chi_1 \phi^{-1}(1)$ et $u = (\chi_1 \chi_2 + 1) \phi^{-1}(1)$. Nous avons finalement :

$$\begin{cases} y = -\chi_1 z, \\ u = (\chi_1 \chi_2 + 1) z, \end{cases} \quad \text{et } z = \chi_2 y + u.$$

Si A est un anneau noethérien, la proposition suivante montre que l'on peut prolonger la suite exacte (18) vers la gauche.

PROPOSITION 2.5. Soient A un anneau noethérien et M un A -module à gauche de type fini. Alors il existe une suite exacte

$$(20) \quad \dots \longrightarrow A^{r_n} \xrightarrow{\cdot R_{n-1}} A^{r_{n-1}} \xrightarrow{\cdot R_{n-2}} \dots \xrightarrow{\cdot R_1} A^{r_1} \xrightarrow{\cdot R_0} A^{r_0} \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

appelée résolution libre de M , où $R_i \in A^{r_{i+1} \times r_i}$, et $\cdot R_i$ signifie que l'on agit avec R_i à droite sur des vecteurs lignes de $A^{r_{i+1}}$ pour obtenir des vecteurs lignes de A^{r_i} . Pour $i \geq 2$, le A -module $L_i = \ker \cdot R_{i-2}$ est appelé le $i^{\text{ème}}$ module de syzygie de M .

PREUVE. M est de type fini, donc il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow A^{r_0} \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0,$$

où L_1 est le noyau de ϕ . Soit $\{e_1, \dots, e_{r_0}\}$ la base canonique de A^{r_0} et $y_i = \phi(e_i)$, alors

$$L_1 = \{(a_1, \dots, a_{r_0}) \in A^{r_0} \mid \sum_{i=1}^{r_0} a_i y_i = 0\}$$

est le sous-module de A^{r_0} des relations des y_i . L'anneau A étant noethérien, L_1 est alors un A -module de type fini et il existe donc une famille de vecteurs $\{b_1, \dots, b_{r_1}\}$ de A^{r_0} engendrant L_1 . Soit R_0 la matrice $r_1 \times r_0$ formée des colonnes b_j , nous avons alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow L_2 \longrightarrow A^{r_1} \xrightarrow{\cdot R_0} A^{r_0} \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0,$$

où $\cdot R_0$ signifie que l'on multiplie un vecteur ligne de A^{r_1} à gauche de R_0 pour obtenir un vecteur ligne de A^{r_0} et L_2 est le noyau de $\cdot R_0$. On dit alors que M est défini par générateurs y_i et par relations :

$$\sum_{j=1}^{r_0} b_{ij} y_j = 0, \quad i = 1, \dots, r_1.$$

En continuant de même, nous obtenons finalement une résolution libre (20) de M . □

EXEMPLE 2.6. Considérons le système d'EDP suivant :

$$\begin{cases} d_{12} y = d_1 d_2 y = 0, \\ d_{22} y = d_2^2 y = 0. \end{cases}$$

Nous lui associons le $A = \mathbb{R}[d_1, d_2]$ -module à gauche $M = A/A^2 \begin{pmatrix} d_1 d_2 \\ d_2^2 \end{pmatrix}$. Nous avons alors la suite exacte suivante

$$A^2 \xrightarrow{\cdot R} A \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

où $R = \begin{pmatrix} d_1 d_2 \\ d_2^2 \end{pmatrix}$. Le noyau de $\cdot R$ est défini par les couples $(a \ b) \in A^2$ tels que :

$$a d_1 d_2 + b d_2^2 = 0 \Rightarrow (a d_1 + b d_2) d_2 = 0 \Rightarrow a d_1 = -b d_2.$$

Or, $d_1 \nmid d_2$, $d_2 \nmid d_1$, donc, grâce au lemme de Gauss [78, 90, 135], $d_2 \mid a$ et $d_1 \mid b$, d'où, il existe $c \in A$ tel que $(a \ b) = (d_2 c \ -d_1 c) = (d_2 \ -d_1) c$. Finalement, si l'on note $R_1 = (d_2 \ -d_1)$, nous obtenons alors la résolution libre du A -module M suivante

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot R_1} A^2 \xrightarrow{\cdot R} A \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

car :

$$a R_1 = 0 \Leftrightarrow a d_2 = 0 = a d_1 \Leftrightarrow a = 0.$$

2.2. Modules injectifs. Cette section donne une caractérisation algébrique des "bons" A -modules S dans lesquels on peut résoudre le système inhomogène (15), pour toute matrice R . Mais, tout d'abord, donnons quelques résultats sur la structure de $\text{hom}_A(M, N)$ des A -morphisms de M dans N .

PROPOSITION 2.6. *Soient deux A -modules à gauche M et N , alors l'ensemble des A -morphisms de M dans N est noté par $\text{hom}_A(M, N)$ et possède la structure de groupe abélien défini par $(f + g)(m) = f(m) + g(m), \forall m \in M, f, g \in \text{hom}_A(M, N)$. En général, $\text{hom}_A(M, N)$ n'a pas de structure de A -module à gauche. Cependant, si*

- A est un anneau commutatif, alors $\text{hom}_A(M, N)$ possède la structure de A -module à gauche définie par $a f(m) = f(am), \forall a \in A, m \in M$.
- $N = {}_A N_B$ est un $A - B$ bi-module, c-à-d N a la structure de A -module à gauche et de B -module à droite tel que $a(nb) = (an)b, \forall a \in A, b \in B, n \in N$, alors $\text{hom}_A(M, N)$ possède une structure de B -module à droite, définie par $(fb)(m) = f(m)b, \forall b \in B, m \in M, f \in \text{hom}_A(M, N)$.

PREUVE. En général, $\text{hom}_A(M, N)$ n'a pas de structure de A -module à gauche car si l'on définit $a f(m) = f(am)$, alors on aurait $(abf)(m) = f(abm)$ tandis que $a(bf)(m) = (bf)(am) = f(bam)$. Ainsi, si A est un anneau commutatif, alors $abm = bam$ et donc $\text{hom}_A(M, N)$ a une structure de A -module à gauche. Supposons maintenant que N soit un $A - B$ bi-module, alors $(fb)(am) = f(am)b = a f(m)b = a(fb)(m)$. \square

REMARQUE 2.2. De même, si M est un A -module à droite et $N = {}_B N_A$ est un $B - A$ bi-module, c-à-d, un B -module à gauche et un A -module à droite, vérifiant $(bn)a = b(na), \forall a \in A, b \in B, n \in N$, alors $\text{hom}_A(M, N)$ possède la structure de B -module à gauche définie par $f(ma) = f(m)a$ et $(bf)(m) = b(f(m)), \forall a \in A, b \in B, n \in N$.

Donnons une proposition qui, avec l'exemple suivant, permet de comprendre l'utilité de la théorie des modules pour la résolution du système (15).

PROPOSITION 2.7. *Soient M un A -module et $N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules. Alors, la suite suivante est exacte comme suite de groupes abéliens :*

$$(21) \quad 0 \rightarrow \text{hom}_A(N'', M) \xrightarrow{g^*} \text{hom}_A(N, M) \xrightarrow{f^*} \text{hom}_A(N', M).$$

PREUVE. L'application g^* (resp. f^*) est naturellement définie par $\forall \phi \in \text{hom}_A(N'', M) : g^*(\phi) = \phi \circ g \in \text{hom}_A(N, M)$ (resp. $\forall \psi \in \text{hom}_A(N, M) : f^*(\psi) = \psi \circ f \in \text{hom}_A(N', M)$). L'application g^* est injective car $g^*(\phi) = 0 = \phi \circ g$ et puisque g est un épimorphisme, nous avons alors $\forall n'' \in N'', \exists n \in N : n'' = g(n)$, d'où $\phi(n'') = g^*(\phi)(n) = 0$ et donc $\phi = 0$. Montrons que la suite formée par g^* et f^* est exacte en $\text{hom}_A(N, M)$. Nous avons tout d'abord $\forall \phi \in \text{hom}_A(N'', M) : (f^* \circ g^*)(\phi) = \phi \circ (g \circ f) = 0 \Rightarrow f^* \circ g^* = 0 \Rightarrow \text{im } g^* \subseteq \ker f^*$. Si $f^*(\psi) = 0 = \psi \circ f$, puisque la suite formée par f et g est exacte, alors en utilisant la proposition 1.2 et le fait que $\text{coker } f \cong N''$, il existe donc $\phi \in \text{hom}_A(N'', M)$ tel que $\psi = \phi \circ g$, c-à-d, $\psi = g^*(\phi)$, d'où le résultat. \square

Montrons sur l'exemple qui suit pourquoi les A -morphisms sont importants pour la résolution du système homogène $Ry = 0$ avec y dans un A -module S .

EXEMPLE 2.7. Considérons le système d'EDP suivant :

$$(d_1 d_2 + 1) y + d_1 u = 0.$$

À un changement d'algèbre près ($\mathbb{R}[\chi_1, \chi_2] \rightarrow \mathbb{R}[d_1, d_2]$), ce système correspond à l'exemple 2.1. Donc, nous avons la présentation finie du $A = \mathbb{R}[d_1, d_2]$ -module $M = A^2/A(d_1 d_2 + 1 \ d_1)$ suivante :

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{R} A^2 \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0.$$

Soient S un A -module de fonctions (par exemple $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ou analytiques $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$) et $f : A \rightarrow A^2$ le A -morphisme défini par $f(a) = a R$, alors, par la proposition 2.7, nous avons la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{hom}_A(M, S) \rightarrow \text{hom}_A(A^2, S) \xrightarrow{f^*} \text{hom}_A(A, S),$$

de A -modules à gauche puisque A est un anneau commutatif (voir proposition 2.6). Or, le morphisme $\sigma : \text{hom}_A(A^2, S) \rightarrow S^2$, défini par $\sigma(\phi) = (\phi(e_1) \ \phi(e_2))^t$, où $\{e_1, e_2\}$ est la base canonique de A^2 , est un isomorphisme. De même, $\sigma' : \text{hom}_A(A, S) \rightarrow S$, défini par $\sigma'(\psi) = \psi(1)$, est un isomorphisme et nous avons $(\sigma' \circ f^*)(\phi) = \sigma'(f^*(\phi)) = \sigma'(\phi \circ f) = \phi(f(1)) = \phi(d_1 d_2 + 1 \ d_1) = (d_1 d_2 + 1) \phi(e_1) + d_1 \phi(e_2) = (d_1 d_2 + 1 \ d_1) \sigma(\phi)$ et donc nous obtenons la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow \text{hom}_A(M, S) \rightarrow \begin{array}{ccc} \text{hom}_A(A^2, S) & \xrightarrow{f^*} & \text{hom}_A(A, S), \\ \parallel \sigma & & \parallel \sigma' \\ S^2 & \xrightarrow{R} & S \end{array}$$

où R signifie que l'on fait agir R à gauche des vecteurs colonnes de S^2 pour obtenir un élément de S . Nous obtenons finalement que $\text{hom}_A(M, S)$ est le noyau de l'opérateur $R : S^2 \rightarrow S$, c-à-d :

$$\text{hom}_A(M, S) \cong \{(y \ u)^t \in S^2 \mid (d_1 d_2 + 1) y + d_1 u = 0\}.$$

Donnons un exemple dans lequel le morphisme f^* de la suite (21) n'est pas surjectif.

EXEMPLE 2.8. Soit $A = \mathbb{R}[s]$ et considérons la suite exacte :

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{s} A \rightarrow A/sA \rightarrow 0.$$

Appliquons-lui le foncteur $\text{hom}_A(\cdot, A)$ et, en raisonnant comme à l'exemple précédent, nous obtenons alors :

$$0 \rightarrow \text{hom}_A(A/sA, A) \rightarrow A \xrightarrow{s} A.$$

Puisque le morphisme $A \xrightarrow{s} A$ est toujours injectif, alors $\text{hom}_A(A/sA, A) = 0$. Cependant $A \xrightarrow{s} A$ n'est pas surjectif, donc le foncteur $\text{hom}_A(\cdot, A)$ n'est pas exact à droite, c-à-d ne transforme pas les monomorphismes en épimorphismes.

La proposition suivante donne une condition suffisante pour que f^* soit un épimorphisme.

PROPOSITION 2.8. Soit $0 \rightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. la suite exacte $0 \rightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \rightarrow 0$ est scindée,
2. la suite $0 \rightarrow \text{hom}_A(N'', M) \xrightarrow{g^*} \text{hom}_A(N, M) \xrightarrow{f^*} \text{hom}_A(N', M) \rightarrow 0$ est une suite exacte scindée de groupes, pour tout A -module M ,

3. la suite $0 \rightarrow \text{hom}_A(N'', M) \xrightarrow{g^*} \text{hom}_A(N, M) \xrightarrow{f^*} \text{hom}_A(N', M) \rightarrow 0$ est une suite exacte de groupes, pour tout A -module M .

PREUVE. Démontrons les équivalences de la proposition.

- Supposons 1. Il existe alors un A -morphisme $k : N \rightarrow N'$ tel que $k \circ f = \text{id}_{N'}$. Définissons l'application $k^* : \text{hom}_A(N', M) \rightarrow \text{hom}_A(N, M)$ par $k^*(\phi) = \phi \circ k$, alors $(f^* \circ k^*)(\phi) = f^*(k^*(\phi)) = f^*(\phi \circ k) = \phi \circ k \circ f = \phi, \forall \phi \in \text{hom}_A(N', M)$ et donc $f^* \circ k^* = \text{id}_{\text{hom}_A(N', M)}$. La relation $f^* \circ k^* = \text{id}_{\text{hom}_A(N', M)}$ implique que f^* est surjectif. En utilisant la proposition 2.7, la suite (21) est exacte, d'où 2 en utilisant le 1 de la définition 1.3.
- 2 implique trivialement 3.
- Supposons 3. Nous prenons $M = N'$ et nous remarquons que $\text{id}_{N'} \in \text{hom}_A(N', N')$. Puisque f^* est surjectif, il existe $k \in \text{hom}_A(N, N')$ tel que $f^*(k) = \text{id}_{N'}$, c-à-d $k \circ f = \text{id}_{N'}$. En utilisant le 2 de la proposition 1.3, nous obtenons 1.

□

EXEMPLE 2.9. Reprenons l'exemple 2.7. D'après l'exemple 2.5, la suite exacte

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{R} A^2 \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$$

est scindée. En lui appliquant $\text{hom}_A(\cdot, S)$ et en utilisant les résultats de l'exemple 2.7 et de la proposition 2.8, nous obtenons alors la suite exacte scindée de A -modules à gauche :

$$0 \rightarrow \text{hom}_A(M, S) \rightarrow S^2 \xrightarrow{R} S \rightarrow 0.$$

Le morphisme $R : S^2 \rightarrow S$, défini par $R(y \ u)^t = (d_1 d_2 + 1)y + d_1 u$, est alors surjectif et admet un inverse à droite P , défini par $Pz = (z \ -d_2 z)^t$.

DÉFINITION 2.5. Un A -module M est *injectif* si, pour tout monomorphisme $f : N' \rightarrow N$ et tout morphisme $g : N' \rightarrow M$, il existe un morphisme $h : N \rightarrow M$ tel que $g = h \circ f$. Nous avons alors le diagramme commutatif suivant :

$$(22) \quad \begin{array}{ccc} 0 \rightarrow N' & \xrightarrow{f} & N \\ & g \searrow & \downarrow h \\ & & M \end{array}$$

PROPOSITION 2.9. La somme directe d'un nombre fini de A -modules est un A -module injectif ssi chacun des termes est un A -module injectif.

Nous renvoyons à [79] pour une preuve.

COROLLAIRE 2.1. 1. Le A -module M est injectif ssi le foncteur $\text{hom}_A(\cdot, M)$ est exact, c-à-d, $\text{hom}_A(\cdot, M)$ transforme toute suite exacte $0 \rightarrow N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N'' \rightarrow 0$ en la suite exacte $0 \rightarrow \text{hom}_A(N'', M) \xrightarrow{v^*} \text{hom}_A(N, M) \xrightarrow{u^*} \text{hom}_A(N', M) \rightarrow 0$.

2. Un A -module M est injectif ssi M est facteur direct de tout module le contenant.

PREUVE. Démontrons ces deux autres caractérisations des modules injectifs.

1. Nous avons vu dans la proposition 2.7 que la suite $0 \rightarrow \text{hom}_A(N'', M) \xrightarrow{v^*} \text{hom}_A(N, M) \xrightarrow{u^*} \text{hom}_A(N', M)$ est exacte en $\text{hom}_A(N'', M)$ et en $\text{hom}_A(N, M)$. Montrons que u^* est un épimorphisme ssi M est un A -module injectif. Supposons que u^* soit un épimorphisme,

alors $\forall g \in \text{hom}_A(N', M) \exists h \in \text{hom}_A(N, M) : g = u^*(h) = h \circ u$ et nous avons le diagramme commutatif exact (22) avec $f = u$, d'où M est un A -module injectif. Réciproquement, si M est un A -module injectif, alors $\forall g \in \text{hom}_A(N', M) \exists h \in \text{hom}_A(N, M) : g = h \circ u = u^*(h)$, donc u^* est un épimorphisme.

2. Soient M un A -module injectif et N un A -module le contenant. Puisque M est un A -module injectif, alors le morphisme identité $i : M \rightarrow M$ se prolonge au A -module N , c-à-d, il existe un A -morphisme $k : N \rightarrow M$ tel que $i = k \circ j$. Nous avons alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & M \xrightarrow{j} N \\ & & i \downarrow \swarrow k \\ & & M \end{array}$$

Ainsi, grâce à la définition 1.3, la suite exacte $0 \rightarrow M \xrightarrow{j} N \xrightarrow{\pi} N/M \rightarrow 0$ se scinde et nous avons $N \cong M \oplus N/M$. Réciproquement, si M est facteur direct de tout module le contenant, alors si l'on prend tout A -module injectif I contenant le A -module M , nous avons $I \cong M \oplus I/M$. Alors, par la proposition 2.9, M et I/M sont des modules injectifs. \square

COROLLAIRE 2.2. Soient S un A -module injectif et un A -module M défini par la résolution libre

$$\dots \rightarrow A^{r_2} \xrightarrow{R_1} A^{r_1} \xrightarrow{R_0} A^{r_0} \rightarrow M \rightarrow 0,$$

avec $R_0 = R$. En appliquant $\text{hom}_A(\cdot, S)$ à cette résolution, nous obtenons alors la longue suite exacte :

$$\dots \leftarrow S^{r_2} \xleftarrow{R_1} S^{r_1} \xleftarrow{R_0} S^{r_0} \leftarrow \text{hom}_A(M, S) \leftarrow 0.$$

Ainsi, le système d'équations $Ry = u$, avec $y \in S^{r_0}$ et $u \in S^{r_1}$, admet une solution ssi u vérifie la condition $R_1 u = 0$. La solution du système est alors la somme d'une solution particulière y_0 et de tout élément y_1 solution de l'équation homogène $R_0 y_1 = 0$ (c-à-d $y_1 \in \text{hom}_A(M, S)$).

La preuve du corollaire utilise simplement la décomposition de la résolution libre de M en suites courtes exactes et le premier point du corollaire 2.1.

REMARQUE 2.3. Si S est un A -module injectif, la résolution du système inhomogène (15) devient alors seulement un problème algébrique : trouver le début de la résolution libre de M , c-à-d trouver R_1 .

EXEMPLE 2.10. Reprenons l'exemple 2.6. Nous avons montré que l'on peut associer au système

$$\begin{cases} d_1 d_2 y = 0, \\ d_2^2 y = 0. \end{cases}$$

un $A = \mathbb{R}[d_1, d_2]$ -module à gauche M , défini par la résolution libre suivante :

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{R_1} A^2 \xrightarrow{R} A \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0.$$

Soit S un $A = \mathbb{R}[d_1, d_2]$ -module injectif, alors par application de $\text{hom}_A(\cdot, S)$ à la résolution libre de M , nous obtenons la suite exacte :

$$0 \leftarrow S \xleftarrow{R_1} S^2 \xleftarrow{R} S \leftarrow \text{hom}_A(M, S) \leftarrow 0.$$

Donc, il existe une solution $y \in S$ au système $Ry = u$ ssi $u \in S^2$ vérifie $R_1 u = 0$.

PROPOSITION 2.10. Un A -module à gauche M est injectif ssi tout A -morphisme d'un idéal à gauche de A dans M se prolonge en un A -morphisme de A dans M .

Nous renvoyons à [89] pour une preuve utilisant le lemme de Zorn. Montrons maintenant la signification de la proposition précédente en termes d'équations.

PROPOSITION 2.11. Un A -module M est un module injectif sur un anneau noethérien A ssi pour tout idéal $I = (a_1, \dots, a_n)$, il existe une solution $u \in M$ du système $y_i = a_i u$, $i = 1, \dots, n$, avec $y_i \in M$ vérifiant les relations de I , i.e. si $\sum_{i=1}^n b_i a_i = 0$, avec $a_i \in A$, alors $\sum_{i=1}^n b_i y_i = 0$.

PREUVE. D'après la proposition 2.10, M est un A -module injectif ssi le morphisme de restriction $\text{hom}_A(A, M) \xrightarrow{i^*} \text{hom}_A(I, M)$ est surjectif, quel que soit l'idéal I . Soit $(a_i)_{i=1, \dots, n}$ un système de générateurs de l'idéal I , c-à-d $I = (a_1, \dots, a_n)$. Nous avons alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow A^n \xrightarrow{\sigma} I \longrightarrow 0,$$

où $\sigma(e_i) = a_i$, avec $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ la base canonique de A^n et $L = \ker \sigma$ le module des relations de I . Un A -morphisme $\psi \in \text{hom}_A(I, M)$ est équivalent à la donnée d'une famille $(y_i)_{i=1, \dots, n}$ d'éléments de M vérifiant toutes les relations de I , i.e. si $\sum_{i=1}^n b_i a_i = 0$, avec $b_i \in A$, alors $\sum_{i=1}^n b_i y_i = 0$. En effet, si $\psi(a_i) = y_i$ et $\sum_{i=1}^n b_i a_i = 0$, alors nous devons avoir $\psi(\sum_{i=1}^n b_i a_i) = 0 = \sum_{i=1}^n b_i \psi(a_i) = \sum_{i=1}^n b_i y_i$. Soient donc une telle famille $(y_i)_{i=1, \dots, n}$ et son A -morphisme $\psi \in \text{hom}_A(I, M)$ associé, défini par $\psi(a_i) = y_i$. La surjectivité de i^* , i.e. l'existence d'un $\phi \in \text{hom}_A(A, M)$ tel que $i^*(\phi) = \psi$ est équivalente à l'existence d'une solution $u \in M$ du système d'équations $y_i = a_i u$, $i = 1, \dots, n$, car $\psi = i^*(\phi) = \phi \circ i \Leftrightarrow y_i = \phi(a_i) = a_i \phi(1) = a_i u$, où $u = \phi(1)$. Ainsi, M est un A -module injectif ssi il existe une solution $u \in M$ à tout système $y_i = a_i u$, $i = 1, \dots, n$, avec y_i vérifiant les relations de I . \square

EXEMPLE 2.11. - Si A est un anneau (intègre), alors son corps de fraction $K = Q(A)$ est un A -module injectif.

- Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n et si $\mathcal{O}(\Omega)$ est l'anneau des fonctions analytiques réelles dans Ω , alors $\mathcal{D}'(\Omega)$ est un $\mathcal{O}(\Omega)$ -module injectif (voir [94, 95] pour plus de détails).

- Les distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ sur Ω , les fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sont des $\mathbb{C}[d_1, \dots, d_n]$ -modules injectifs (voir [36, 94, 95, 106, 104]).

DÉFINITION 2.6. Un A -module M est *divisible* si, pour tout $a \in A$, le morphisme $\delta_a : M \rightarrow M$ défini par $\delta_a(m) = am$ est surjectif ou, de façon équivalente, $\forall 0 \neq a \in A, \forall m' \in M, \exists m \in M$ tel que $m' = am$.

PROPOSITION 2.12. Tout A -module M injectif est divisible.

PREUVE. Soient $m' \in M$, $0 \neq a \in A$ et le morphisme $g : Aa \rightarrow M$ défini par $g(ra) = rm'$. Considérons le diagramme commutatif exact suivant :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & Aa & \xrightarrow{i} & A \\ & & g \searrow & & \downarrow h \\ & & & & M \end{array}$$

Puisque M est un A -module injectif, alors g se prolonge en un morphisme $h : A \rightarrow M$ tel que $g = h \circ i$. Appelons $m = h(1)$, alors nous avons $h(a) = ah(1) = am$ et $h(a) = (h \circ i)(a) = g(a) = m'$, d'où $am = m'$ et M est un A -module divisible. \square

EXEMPLE 2.12. Puisque $\mathcal{D}'(\Omega)$ est un $\mathcal{O}(\Omega)$ -module injectif, $\mathcal{D}'(\Omega)$ est un $\mathcal{O}(\Omega)$ -module divisible, i.e. pour tout $y \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, il existe $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $y = fu$. En d'autres termes, on peut toujours diviser une distribution par une fonction analytique [72].

COROLLAIRE 2.3. Un A -module M sur un anneau principal est injectif ssi il est divisible.

PREUVE. Nous avons déjà montré que tout module injectif est divisible. Supposons donc que M soit un A -module divisible. Puisque A est un anneau principal, tout idéal I de A s'écrit de la forme $I = Aa$ avec $a \in A$. Soit $g : Aa \rightarrow M$ un morphisme. Puisque M est un A -module divisible, il existe $m \in M$ tel que $g(a) = am$. Donc, le morphisme $h : A \rightarrow M$ défini par $h(r) = rm$ est un prolongement du morphisme $g : I \rightarrow M$ à A , d'où, M est un A -module injectif. \square

EXEMPLE 2.13. Si A est un anneau (intègre) principal, alors K/A est un A -module injectif car divisible. Par exemple, si $A = \mathbb{R}[s]$ alors $K = \mathbb{R}(s)$ et $K/A = \mathbb{R}(s)/\mathbb{R}[s]$ sont des A -modules injectifs. L'anneau $A = RH_\infty$ des fractions rationnelles stables et propres est un anneau principal [101], donc $K = \mathbb{R}(s)$ et $K/A = \mathbb{R}(s)/RH_\infty$ sont des A -modules injectifs.

2.3. Modules réflexifs. Nous avons vu que l'on pouvait associer à tout système d'équations $Ry = 0$, où R est une matrice à coefficients dans un anneau A , un A -module M . L'étude des propriétés algébriques de ce A -module M donne donc une classification naturelle des systèmes. Nous étudierons par la suite ces propriétés et nous montrerons dans les prochains chapitres le lien entre ces propriétés et celles des systèmes de contrôle.

DÉFINITION 2.7. Soit M un A -module à gauche, alors $\text{hom}_A(M, A)$ est un A -module à droite avec $(fa)(m) = f(m)a$, $\forall a \in A, m \in M, f \in \text{hom}_A(M, A)$. On note ce A -module à droite M^* et on l'appelle module dual de M .

DÉFINITION 2.8. Soit $f : M \rightarrow N$ un A -morphisme, alors le A -morphisme $f^* : N^* \rightarrow M^*$ défini par $f^*(\phi) = \phi \circ f$ est appelé *morphisme dual* ou *transposé* du morphisme f .

Nous avons $f^*(\phi)(m) = (\phi \circ f)(m) = \phi(f(m))$, $\forall m \in M, \phi \in N^*$, que nous pouvons réécrire avec des crochets de dualité :

$$(23) \quad \langle f^*(\phi), m \rangle = \langle \phi, f(m) \rangle .$$

EXEMPLE 2.14. Reprenons l'exemple 2.7, où nous avons un $A = \mathbb{R}[d_1, d_2]$ -module $M = A^2/AR$ avec $R = \begin{pmatrix} d_1d_2 + 1 & d_1 \end{pmatrix}$. En raisonnant de même qu'à l'exemple 2.7 avec $S = A$, nous obtenons alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{hom}_A(A, A) & \xleftarrow{f^*} & \text{hom}_A(A^2, A), \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xleftarrow{R} & A^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

où R est défini par $(a \ b)^t \rightarrow R(a \ b)^t = (d_1d_2 + 1)a + d_1b$.

DÉFINITION 2.9. Le A -module à gauche $\text{hom}_A(\text{hom}_A(M, A), A)$, noté par M^{**} , est appelé le *bi-dual* du A -module à gauche M et $f^{**} : M^{**} \rightarrow N^{**}$ est appelée le *bi-transposé* de f .

Pour tout A -module à gauche M , on définit le A -morphisme $\epsilon : M \rightarrow M^{**}$ par :

$$(24) \quad \epsilon(m)(f) = f(m), \quad \forall f \in \text{hom}_A(M, A).$$

Ce morphisme ϵ n'est en général ni injectif, ni surjectif et nous avons alors la suite exacte :

$$(25) \quad 0 \longrightarrow \ker \epsilon \longrightarrow M \xrightarrow{\epsilon} M^{**} \longrightarrow \text{coker } \epsilon \longrightarrow 0.$$

EXEMPLE 2.15. Soit le $A = \mathbb{R}[\chi_1, \chi_2]$ -module $M = A^2/AR$ avec $R = (\chi_1 \chi_2 \ \chi_1)$. Appelons $y = \pi((1 \ 0))$ et $u = \pi((0 \ 1))$, alors nous avons dans M l'équation suivante :

$$\chi_1 \chi_2 y + \chi_1 u = 0.$$

Le noyau de $\epsilon : M \rightarrow M^{**}$ est défini par $\ker \epsilon = \{m \in M \mid f(m) = 0, \forall f \in \text{hom}_A(M, A)\}$. L'élément $z = \chi_2 y + u \in M$ vérifie $\chi_1 z = 0$, donc $\chi_1 f(z) = f(\chi_1 z) = f(0) = 0, \forall f \in \text{hom}_A(M, A)$. Or, $\chi_1 \neq 0, f(z) \in A$ et A est un anneau intègre, donc $f(z) = 0, \forall f \in \text{hom}_A(M, A)$. D'où, $z \in \ker \epsilon$.

DÉFINITION 2.10. Un A -module M est *réflexif* si $M^{**} \cong M$.

PROPOSITION 2.13. Si F est un A -module à gauche libre de rang p , alors F^* (resp. F^{**}) est un A -module à droite (resp. à gauche) libre de rang p .

PREUVE. On vérifie aisément que si $\{e_1, \dots, e_p\}$ est une base de F , alors la famille $\{e^1, \dots, e^p\}$ de F^* , définie par

$$(26) \quad e^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

forme une base de F^* , appelée *base duale*. Nous avons alors $\forall f \in F^* : f = \sum_{i=1}^p e^i f(e_i)$. De même pour F^{**} , on montre sans problème que la famille $\{\epsilon(e_1), \dots, \epsilon(e_p)\}$ de F^{**} , avec ϵ défini par (24), i.e.,

$$\epsilon(e_i)(e^j) = e^j(e_i) = \delta_i^j,$$

forme une base de F^{**} et $\forall \sigma \in F^{**} : \sigma = \sum_{i=1}^p \sigma(e^i) \epsilon(e_i)$. □

COROLLAIRE 2.4. Si F est un A -module libre de type fini, alors F est réflexif.

PREUVE. Soient $\{e_1, \dots, e_p\}$ la base de F et $\{e^1, \dots, e^p\}$ la base duale de F^* . Soit $m = \sum_{i=1}^p a_i e_i \in \ker \epsilon$, alors $\epsilon(m)(\phi) = \phi(m) = 0, \forall \phi \in F^*$. Donc, si l'on choisit $\phi = e^i$, alors $\epsilon(m)(e^i) = e^i(m) = a_i = 0, i = 1, \dots, p$, donc $m = 0$ et ϵ est injectif. De plus, $\forall \sigma \in F^{**} : \sigma = \sum_{i=1}^p \sigma(e^i) \epsilon(e_i) = \epsilon(\sum_{i=1}^p \sigma(e^i) e_i)$, donc ϵ est surjectif. D'où, ϵ est un isomorphisme et F est réflexif. □

EXEMPLE 2.16. Le A -module à gauche M de l'exemple 2.7 est un A -module libre de rang 1, donc réflexif. Le A -module M , défini dans l'exemple 2.15, n'est pas réflexif car $\ker \epsilon \neq 0$.

DÉFINITION 2.11. Soient M un A -module à gauche et M^* son dual.

- On dit que $m \in M$ et $\phi \in M^*$ sont *orthogonaux* si $\langle \phi, m \rangle = \phi(m) = 0$.

- Soient I un sous-ensemble de M et J un sous-ensemble de M^* , alors I et J sont *orthogonaux* si $\langle \phi, m \rangle = \phi(m) = 0, \forall m \in I, \forall \phi \in J$. En particulier, un élément m de M est *orthogonal* à J si pour tout $\phi \in J, m$ et ϕ sont orthogonaux. De même, un élément $\phi \in M^*$ est *orthogonal* à I si pour tout $m \in I, m$ et ϕ sont orthogonaux.

EXEMPLE 2.17. L'élément $z = \chi_2 y + u$ de l'exemple 2.15 vérifie $\langle \phi, z \rangle = 0, \forall \phi \in M^*$, donc z est orthogonal à M^* . De façon générale, $\ker \epsilon$ est orthogonal à M^* .

PROPOSITION 2.14. Soient I une partie d'un A -module à gauche M et J une partie de M^* , alors :

- l'ensemble $I^\perp = \{\phi \in M^* \mid \langle \phi, m \rangle = 0, \forall m \in I\}$ a une structure de A -module à droite.
- l'ensemble $J^\perp = \{m \in M \mid \langle \phi, m \rangle = 0, \forall \phi \in J\}$ a une structure de A -module à gauche.

PREUVE. Soient ϕ et $\psi \in I^\perp, a, b \in A$, alors $\langle (\phi a + \psi b), m \rangle = (\phi a + \psi b)(m) = \phi(m)a + \psi(m)b = 0$, donc $\phi a + \psi b \in I^\perp$ et I^\perp a une structure de A -module à droite. Soient $m_1, m_2 \in J^\perp$, alors $\langle \phi, a m_1 + b m_2 \rangle = \phi(a m_1 + b m_2) = \phi(m_1)a + \phi(m_2)b = 0, \forall a, b \in A$, et donc J^\perp a une structure de A -module à gauche. \square

Donnons un corollaire des deux propositions 2.7 et 2.8.

COROLLAIRE 2.5. Soit la suite exacte de A -modules à gauche

$$(27) \quad 0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0,$$

alors nous avons :

- la suite de A -modules à droite $0 \longrightarrow N''^* \xrightarrow{g^*} N^* \xrightarrow{f^*} N'^* \longrightarrow 0$ est exacte,
- si la suite (27) est scindée, alors $0 \longrightarrow N''^* \xrightarrow{g^*} N^* \xrightarrow{f^*} N'^* \longrightarrow 0$ est une suite exacte scindée.

REMARQUE 2.4. Il est important de noter que le module dual M^* d'un A -module à gauche M défini par la présentation finie suivante,

$$(28) \quad F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

où F_0 et F_1 sont des A -modules libres de rangs finis, n'est pas le A -module à droite déterminé par le morphisme dual d_1^* . En effet, en appliquant le corollaire précédent à la suite exacte (28), nous obtenons la suite exacte

$$F_1^* \xleftarrow{d_1^*} F_0^* \longleftarrow M^* \longleftarrow 0.$$

Alors, en appelant N le A -module à droite engendré par d_1^* , nous avons la suite exacte

$$0 \longleftarrow N \longleftarrow F_1^* \xleftarrow{d_1^*} F_0^* \longleftarrow M^* \longleftarrow 0.$$

COROLLAIRE 2.6. Soit M' un sous-module d'un A -module M , alors nous avons :

$$(M/M')^* \cong (M')^\perp.$$

PREUVE. Nous avons la suite exacte $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} (M/M') \longrightarrow 0$ et, en lui appliquant le corollaire 2.5, nous obtenons la suite exacte $0 \longrightarrow (M/M')^* \xrightarrow{\pi^*} M^* \xrightarrow{i^*} (M')^*$, d'où $\ker i^* = \pi^*((M/M')^*) \cong (M/M')^*$, car π^* est un monomorphisme. Or, par définition, $\ker i^* = \{\phi \in M^* \mid \phi(i(m)) = 0, \forall m \in M'\} = (M')^\perp$, d'où le résultat. \square

EXEMPLE 2.18. Nous reprenons le $A = \mathbb{R}[d_1, d_2]$ -module $M = A^2/A(d_1d_2 + 1 \ d_1)$ défini par la présentation finie définie à l'exemple 2.7. En utilisant le corollaire 2.5 et l'exemple 2.14, nous avons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow M^* \longrightarrow (A^2)^* \xrightarrow{f^*} A^*.$$

De l'exemple 2.14, nous obtenons que M^* est le noyau du morphisme $R : A^2 \rightarrow A$ défini par

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longrightarrow (d_1d_2 + 1 \ d_1) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (d_1d_2 + 1)a + d_2b,$$

d'où, $M^* = \{(a \ b)^t \in A^2 \mid (d_1d_2 + 1)a + d_2b = 0\}$. Si l'on utilise alors le corollaire 2.6, nous obtenons $M^* = (A^2/AR)^* = (A(d_1d_2 + 1 \ d_1))^\perp$, d'où :

$$(A(d_1d_2 + 1 \ d_1))^\perp = \{(a \ b)^t \in A^2 \mid (d_1d_2 + 1)a + d_2b = 0\}.$$

PROPOSITION 2.15. Soient M' et M'' deux A -modules, alors $M = M' \oplus M''$ est un A -module réflexif ssi M' et M'' sont réflexifs.

PREUVE. Nous avons la suite exacte scindée $0 \rightarrow M' \rightarrow M = M' \oplus M'' \rightarrow M'' \rightarrow 0$ donc, en lui appliquant deux fois le corollaire 2.5, nous obtenons la suite exacte scindée $0 \rightarrow (M')^{**} \rightarrow M^{**} \rightarrow (M'')^{**} \rightarrow 0$. Nous avons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \epsilon_{M'} & & \downarrow \epsilon_M & & \downarrow \epsilon_{M''} & & \\ 0 & \longrightarrow & (M')^{**} & \longrightarrow & M^{**} & \longrightarrow & (M'')^{**} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Si M est réflexif, alors ϵ_M est un isomorphisme donc, en appliquant le lemme du serpent au diagramme ci-dessus, on obtient $\ker \epsilon_{M'} = 0 = \text{coker } \epsilon_{M''}$. En permutant M' et M'' , et en raisonnant de même, on obtient $\ker \epsilon_{M''} = 0 = \text{coker } \epsilon_{M'}$, d'où $\epsilon_{M'}$ et $\epsilon_{M''}$ sont des isomorphismes et donc M' et M'' sont des A -modules réflexifs. Réciproquement, si M' et M'' sont des A -modules réflexifs, alors en appliquant le lemme du serpent au diagramme ci-dessus et en utilisant le fait que $\epsilon_{M'}$ et $\epsilon_{M''}$ sont des isomorphismes, on obtient $\ker \epsilon_M = \text{coker } \epsilon_M = 0$, d'où M est réflexif. \square

2.4. Modules sans-torsion. Donnons tout d'abord la définition d'un *domaine d'Ore*.

DÉFINITION 2.12. Un anneau A possède la propriété d'*Ore à gauche* (resp, à droite) si, pour tout élément a et b de A , il existe r et s de A , dont au moins un des deux est non nul, vérifiant :

$$ra = sb \quad (\text{resp. } ar = bs).$$

EXEMPLE 2.19. - Tout anneau commutatif possède la propriété d'Ore à gauche et à droite.

- L'anneau $A = \mathbb{R}(t)[\frac{d}{dt}]$ des opérateurs différentiels à coefficients dans les fractions rationnelles en t est non-commutatif car $\frac{d}{dt}(t\frac{d}{dt}) = t\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} \neq t\frac{d}{dt}(\frac{d}{dt})$. Cependant, A possède la propriété d'Ore à gauche et à droite.

DÉFINITION 2.13. Soient M un A -module à gauche et A un domaine d'Ore à gauche, alors :

- $t(M) = \{m \in M \mid \exists 0 \neq a \in A : am = 0\}$ est un sous A -module de M , appelé *partie de torsion* du A -module M . Un élément $m \in t(M)$ est appelé *élément de torsion* de M .
- M est un A -module *sans-torsion* si $t(M) = 0$.
- Un A -module M est *de torsion* si $t(M) = M$.

PREUVE. Montrons que $t(M)$ est un sous A -module. Soient $m_1, m_2 \in t(M)$, alors il existe des éléments non nuls $a_1, a_2 \in A$ tels que $a_1 m_1 = 0$ et $a_2 m_2 = 0$. Puisque A est un domaine d'Ore à gauche, il existe r_1 et r_2 dans A tels que $r_1 a_1 = r_2 a_2$. Nous avons alors $r_1 a_1 (m_1 + m_2) = r_1 (a_1 m_1) + r_2 (a_2 m_2) = 0$ et donc $(m_1 + m_2) \in t(M)$. Soit m un élément de torsion vérifiant $a m = 0$. Pour $b \in A$, il existe r et s dans A vérifiant $r a = s b$, donc $a m = 0 \Rightarrow r a m = 0 \Rightarrow s b m = 0 \Rightarrow s(b m) = 0$. D'où, $b m$ est un élément de torsion pour tout $b \in A$. \square

REMARQUE 2.5. Si l'anneau A est un anneau commutatif, alors si m_1 et m_2 sont des éléments de torsion de M vérifiant $a_1 m_1 = 0$ et $a_2 m_2 = 0$, alors $a_1 a_2 (b_1 m_1 + b_2 m_2) = a_2 b_1 (a_1 m_1) + a_1 b_2 (a_2 m_2) = 0$, pour $b_1, b_2 \in A$, d'où, $t(M)$ est trivialement un sous-module de M .

EXEMPLE 2.20. Soit M le A -module défini dans l'exemple 2.15, alors $z = \chi_2 y + u$ vérifie $\chi_1 z = 0$, donc z est un élément de torsion de M .

REMARQUE 2.6. Soient A un anneau commutatif, M un A -module à gauche et le A -morphisme $\delta_a : M \rightarrow M$, défini par $\delta_a(m) = a m$, avec $0 \neq a \in A$. Alors, M est un A -module sans-torsion ssi δ_a est injectif pour tout $0 \neq a \in A$. Cette caractérisation des modules sans-torsion est duale de celle des modules divisibles (voir définition 2.6).

DÉFINITION 2.14. Soient M un A -module et $m \in M$, on appelle alors *annulateur* de m , l'idéal à gauche de A défini par $\text{ann}(m) = \{a \in A \mid a m = 0\}$. Par extension, on appelle annulateur d'un module M , l'idéal de A défini par $\text{ann}(M) = \{a \in A \mid a m = 0, \forall m \in M\}$.

EXEMPLE 2.21. Soit M le $A = \mathbb{R}[d_1, d_2]$ -module défini par $M = A^2/A^2 R$ où la matrice R est définie par:

$$R = \begin{pmatrix} d_1 & -d_2 \\ d_2 & d_1 \end{pmatrix}.$$

En appelant $y^1 = \pi(e_1)$ et $y^2 = \pi(e_2)$, nous avons alors les équations suivantes dans M :

$$\begin{cases} d_1 y^1 - d_2 y^2 = 0, \\ d_2 y^1 + d_1 y^2 = 0. \end{cases}$$

Par élimination, et en posant $d_i d_j = d_{ij}$, nous obtenons alors:

$$\begin{cases} (d_{11} + d_{22}) y^1 = 0, \\ (d_{11} + d_{22}) y^2 = 0, \end{cases}$$

c-à-d,

$$\begin{cases} \Delta y^1 = 0, \\ \Delta y^2 = 0, \end{cases}$$

où $\Delta = d_{11} + d_{22} = \det R$. Ainsi, $\text{ann}(M) = (d_{11} + d_{22}) = (d_1^2 + d_2^2)$.

La proposition et le corollaire seront importants pour la suite [78, 90, 135].

PROPOSITION 2.16. Soit A un anneau commutatif principal, alors tout sous-module M' d'un A -module libre M de type fini est libre.

COROLLAIRE 2.7. Soit A un anneau principal commutatif, alors un A -module à gauche M de type fini est sans-torsion ssi M est un A -module libre de rang fini.

Pour une preuve, voir par exemple [135].

PROPOSITION 2.17. *Soient A un domaine d'Ore à gauche et M un A -module à gauche, alors nous avons la suite exacte suivante :*

$$(29) \quad 0 \longrightarrow t(M) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/t(M) \longrightarrow 0$$

De plus, si A est un anneau principal et M un A -module de type fini, alors la suite exacte (29) se scinde et nous avons :

$$M \cong t(M) \oplus M/t(M).$$

PREUVE. Puisque $t(M)$ est un sous-module de M , nous avons la suite exacte (29). Pour le deuxième point, il suffit d'appliquer le corollaire 2.7 à la suite exacte (29), alors $M/t(M)$ est un A -module libre de rang fini. Soit $(n_i)_{i \in I}$ une base de $M/t(M)$ et soit $(m_i)_{i \in I}$ défini par $m_i \in M$ tel que $\pi(m_i) = n_i$. Alors, si l'on note par $h : M/t(M) \rightarrow M$ le morphisme défini par $h(n_i) = m_i$, nous avons alors $\pi \circ h = \text{id}_{M/t(M)}$ et, en utilisant la proposition 1.3, la suite exacte (29) est scindée, d'où $M \cong t(M) \oplus M/t(M)$. \square

PROPOSITION 2.18. *Supposons que A soit un domaine d'Ore à gauche et $M \cong M' \oplus M''$, alors nous avons :*

$$t(M) \cong t(M') \oplus t(M'').$$

La preuve de ce corollaire est simple et laissée au soin du lecteur (voir [15] pour une preuve).

PROPOSITION 2.19. *Soit A un domaine d'Ore à gauche. Alors, tout A -module à gauche M réflexif est sans-torsion.*

PREUVE. Supposons que M soit un A -module à gauche réflexif, qu'il existe $m \in M$ et $0 \neq a \in A$ tel que $am = 0$, alors pour tout $\phi \in M^*$, nous avons $\phi(am) = \phi(m)a = 0 \Rightarrow \phi(m) = 0$ car $\phi(m) \in A$ et A est un anneau intègre. Donc, $\phi(m) = 0, \forall \phi \in M^* \Rightarrow m \in \ker \epsilon$. Or, $\ker \epsilon = 0$, car M est réflexif, donc $m = 0$ et M est un A -module sans-torsion. \square

2.5. Modules projectifs. La notion de module projectif est centrale en algèbre homologique. Nous verrons par la suite que cette notion joue aussi un rôle important en théorie du contrôle.

PROPOSITION 2.20. *Soient M un A -module et $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ une suite exacte de A -modules. Alors, la suite suivante est exacte*

$$(30) \quad 0 \longrightarrow \text{hom}_A(M, N') \xrightarrow{f_*} \text{hom}_A(M, N) \xrightarrow{g_*} \text{hom}_A(M, N''),$$

où, f_* est défini par $f_*(\phi) = f \circ \phi \in \text{hom}_A(M, N)$, $\forall \phi \in \text{hom}_A(M, N')$ et de même pour g_* .

PREUVE. L'application f_* est injective car $f_*(\phi) = 0 = f \circ \phi$, et donc $f(\phi(m)) = 0, \forall m \in M$. Puisque f est un monomorphisme, nous avons alors $\phi(m) = 0, \forall m \in M \Rightarrow \phi = 0$. Montrons que la suite formée par f_* et g_* est exacte en $\text{hom}_A(M, N)$. Nous avons tout d'abord $\forall \phi \in \text{hom}_A(M, N''), (g_* \circ f_*)(\phi) = (g \circ f) \circ \phi = 0 \Rightarrow \text{im } f_* \subseteq \ker g_*$. Si $g_*(\psi) = 0 = g \circ \psi$, alors en utilisant la proposition 1.1 et le fait $\ker g \cong N'$, il existe donc $\phi \in \text{hom}_A(M, N')$ tel que $\psi = f \circ \phi = f_{star}(\phi)$. \square

L'exemple suivant montre qu'il existe des morphismes g_* qui ne sont pas des épimorphismes.

EXEMPLE 2.22. Soit $A = \mathbb{R}[s]$ et considérons la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{s} A \longrightarrow A/sA \longrightarrow 0,$$

où le morphisme $A \xrightarrow{s} A$, défini par $a \rightarrow as$, est injectif car A est un anneau intègre et donc, $as = 0 \Rightarrow a = 0$. Si nous appliquons le foncteur $\text{hom}_A(A/sA, \cdot)$ à cette suite exacte, nous obtenons alors :

$$0 \longrightarrow \text{hom}_A(A/sA, A) \longrightarrow \text{hom}_A(A/sA, A) \longrightarrow \text{hom}_A(A/sA, A/sA) \longrightarrow 0.$$

Or, $\forall f \in \text{hom}_A(A/sA, A)$, $sf(a) = f(sa) = 0 \Rightarrow f(a) = 0 \forall a \in A \Rightarrow f = 0$, d'où $\text{hom}_A(A/sA, A) = 0$. Cependant, $\text{hom}_A(A/sA, A/sA) \neq 0$ car il contient au moins $\text{id}_{A/sA}$, donc le foncteur $\text{hom}_A(A/sA, \cdot)$ n'est pas exact à droite.

La proposition suivante donne une condition suffisante pour que g_* soit un épimorphisme.

PROPOSITION 2.21. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- la suite exacte de A -modules $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$ est scindée,
- la suite $0 \longrightarrow \text{hom}_A(M, N') \xrightarrow{f_*} \text{hom}_A(M, N) \xrightarrow{g_*} \text{hom}_A(M, N'') \longrightarrow 0$ est une suite exacte scindée de groupes abéliens, pour tout A -module M ,
- la suite $0 \longrightarrow \text{hom}_A(M, N') \xrightarrow{f_*} \text{hom}_A(M, N) \xrightarrow{g_*} \text{hom}_A(M, N'') \longrightarrow 0$ est une suite exacte de groupes abéliens, pour tout A -module M .

PREUVE. Montrons les équivalences de la proposition.

- Supposons que nous ayons 1, alors il existe un A -morphisme $h : N'' \rightarrow N$ tel que $g \circ h = \text{id}_{N''}$. Définissons l'application $h_* : \text{hom}_A(M, N'') \rightarrow \text{hom}_A(M, N)$ par $h_*(\phi) = h \circ \phi$, alors $(g_* \circ h_*)(\phi) = g_*(h_*(\phi)) = g_*(h \circ \phi) = g \circ (h \circ \phi) = (g \circ h) \circ \phi = \phi$, $\forall \phi \in \text{hom}_A(M, N'')$, donc $g_* \circ h_* = \text{id}_{\text{hom}_A(M, N'')}$. D'où, en particulier, g_* est surjectif et, par la proposition 2.20, la suite (30) est exacte. D'après le 1 de la proposition 1.3, nous avons alors 2.
- 2 implique trivialement 3.
- Supposons 3. Prenons $M = N''$ et $\text{id}_{N''} \in \text{hom}_A(N'', N'')$. Puisque g_* est surjectif, il existe $h \in \text{hom}_A(N'', N)$ tel que $g_*(h) = \text{id}_{N''}$, i.e. $g \circ h = \text{id}_{N''}$. D'où 1 par la proposition 1.3. □

Ainsi, il existe des exemples de A -modules M pour lesquels le foncteur $\text{hom}_A(M, \cdot)$ n'est pas exact à droite, c-à-d ne transforme pas un épimorphisme en un épimorphisme.

DÉFINITION 2.15. Un A -module M est *projectif* si pour tout épimorphisme $g : N \rightarrow N''$ et tout morphisme $f : M \rightarrow N''$, il existe un morphisme $h : M \rightarrow N$ tel que $f = g \circ h$. Nous avons alors le diagramme commutatif suivant :

$$(31) \quad \begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{g} & N'' \longrightarrow 0 \\ & h \swarrow & \uparrow f \\ & & M \end{array}$$

EXEMPLE 2.23. Le A -module A est projectif car, si nous avons le diagramme commutatif,

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & M'' \longrightarrow 0, \\ & & \uparrow f \\ & & A \end{array}$$

nous pouvons alors définir $h : A \rightarrow M$ par $h(a) = am$, où m est un élément de M tel que $g(m) = f(1)$ (ceci est toujours possible car g est surjectif). Nous avons alors $(g \circ h)(a) = g(am) = ag(m) = af(1) = f(a), \forall a \in A$, d'où $g \circ h = f$.

PROPOSITION 2.22. *Le A -module $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ est projectif ssi tous les P_i sont des A -modules projectifs.*

Nous renvoyons à [78, 79, 135] pour une preuve.

EXEMPLE 2.24. Un A -module libre, de rang fini, est projectif car $F \cong A \oplus \dots \oplus A$ et le A -module A est projectif, d'où le résultat par la proposition 2.22. On peut aussi le démontrer directement : considérons le diagramme (31) et soit $\{e_1, \dots, e_p\}$ la base canonique de F . Alors, si l'on choisit des éléments m_i de M tels que $g(m_i) = f(e_i)$ (ce qui est toujours possible car g est surjectif), alors en définissant $h(e_i) = m_i$, nous avons $\forall n \in F, n = \sum_{i=1}^p a_i e_i \Rightarrow (g \circ h)(n) = g(\sum_{i=1}^p a_i m_i) = \sum_{i=1}^p a_i g(m_i) = \sum_{i=1}^p a_i f(e_i) = f(n)$ et donc $g \circ h = f$. D'où, F est un A -module projectif.

EXEMPLE 2.25. Le A -module M , défini dans l'exemple 2.1, est projectif car nous savons, grâce à l'exemple 1.4, qu'il existe un morphisme $k : A^2 \rightarrow A$ tel que $k \circ f = \text{id}_A$. Donc, la suite exacte (17) est scindée (définition 1.3), ce qui implique $A^2 \cong M \oplus A$, i.e. M est un A -module projectif.

PROPOSITION 2.23. *Soit $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules avec P un A -module projectif, alors cette suite exacte est scindée.*

PREUVE. Nous avons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & P \longrightarrow 0, \\ & & & & h \swarrow & & \parallel \text{id} \\ & & & & & & P \end{array}$$

où $h : P \rightarrow N$, vérifiant $g \circ h = \text{id}_P$, existe car P est un module projectif. La suite horizontale est donc une suite scindée. \square

EXEMPLE 2.26. Si A est un anneau principal, alors $M/t(M)$ est un A -module libre, d'après la proposition 2.7. Le module $M/t(M)$ est donc projectif et, d'après la proposition 2.23, la suite exacte $0 \rightarrow t(M) \rightarrow M \rightarrow M/t(M) \rightarrow 0$ est scindée. D'où, $M \cong t(M) \oplus M/t(M)$.

PROPOSITION 2.24. 1. *Un A -module M est projectif ssi le foncteur $\text{hom}_A(M, \cdot)$ est exact, c-à-d, si $\text{hom}_A(M, \cdot)$ transforme toute suite exacte $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ en la suite exacte $0 \rightarrow \text{hom}_A(M, N') \xrightarrow{f_*} \text{hom}_A(M, N) \xrightarrow{g_*} \text{hom}_A(M, N'') \rightarrow 0$.*

2. *Un A -module M est projectif ssi il existe un A -module libre F et un A -module P tel que : $F \cong M \oplus P$. Le A -module P est alors aussi projectif.*

PREUVE. Démontrons l'équivalence de ces deux autres caractérisations des modules projectifs.

1. Nous savons, grâce à la proposition 2.20, que la suite $0 \rightarrow \text{hom}_A(M, N') \xrightarrow{f_*} \text{hom}_A(M, N) \xrightarrow{g_*} \text{hom}_A(M, N'')$ est exacte en $\text{hom}_A(M, N')$ et en $\text{hom}_A(M, N)$. Montrons que g_* est un épimorphisme ssi M est un A -module projectif. Supposons que g_* soit un épimorphisme, alors $\forall f \in \text{hom}_A(M, N'') \exists h \in \text{hom}_A(M, N)$ tel que $f = g_*(h) = g \circ h$ et nous avons alors le diagramme commutatif exact (31). D'où, M est un A -module projectif. Réciproquement, si M est un A -module projectif, alors $\forall f \in \text{hom}_A(M, N'') \exists h \in \text{hom}_A(M, N)$ tel que $f = g \circ h = g_*(h)$ et donc g_* est un épimorphisme.
2. S'il existe un A -module libre F et un A -module P tel que $F \cong M \oplus P$, alors, par la proposition 2.22, et le fait que F est un A -module projectif, M et P sont des modules projectifs. Réciproquement, supposons que M soit projectif. Alors, par la proposition 2.2, le A -module M est quotient d'un module libre et nous avons la suite exacte suivante

$$(32) \quad 0 \rightarrow P \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0,$$

où F est un A -module libre. Puisque M est projectif, alors en utilisant la proposition 2.23, la suite exacte se scinde, d'où $F \cong M \oplus P$. □

PROPOSITION 2.25. *Soit M un A -module projectif à gauche de type fini, alors M^* est un A -module projectif à droite.*

PREUVE. Le A -module M est projectif, de type fini, donc il existe un A -module libre, de type fini F et un A -module P tels que $F \cong M \oplus P$. Donc, $F^* \cong M^* \oplus P^*$ et, par la proposition 2.13, F^* est un A -module à droite libre. Par la proposition 2.24, M^* est un A -module projectif à droite, de type fini. □

DÉFINITION 2.16. Un A -module M est *stablement libre* s'il existe un A -module libre F tel que $M \oplus F$ est un A -module libre.

EXEMPLE 2.27. Le A -module M de l'exemple 2.1 est stablement libre car nous avons montré dans l'exemple 2.25 que nous avons $A^2 \cong M \oplus A$.

Un A -module stablement libre est donc projectif et tout A -module libre est stablement libre (la somme de deux modules libres est libre). Donnons maintenant un corollaire qui va nous permettre de classer certains modules.

COROLLAIRE 2.8. *Un A -module M projectif de type fini est un A -module réflexif.*

PREUVE. Si M est un A -module projectif, de type fini, alors il existe un A -module libre, de type fini F et un A -module P tels que $F \cong M \oplus P$. Or, nous avons montré, dans le corollaire 2.4, qu'un A -module libre, de type fini, est réflexif. Donc, en utilisant la proposition 2.15, on en déduit que M est un A -module réflexif. □

Nous avons alors les inclusions suivantes de A -modules de types finis :

$$(33) \quad \text{libre} \subseteq \text{stablement libre} \subseteq \text{projectif} \subseteq \text{réflexif} \subseteq \text{sans-torsion}.$$

Pour terminer cette section sur la classification des modules, donnons l'énoncé du célèbre théorème de Quillen-Suslin, conjecturé dans les années 50 par Serre (voir [88, 152, 164] pour une preuve) et résolu en 1976.

THÉORÈME 2.1. *Un $A = k[\chi_1, \dots, \chi_n]$ -module M projectif de type fini est libre.*

2.6. Modules plats.

DÉFINITION 2.17. Soient N un A -module à droite et M un A -module à gauche, alors nous pouvons définir le groupe abélien $N \times M$ et considérer le sous-groupe L engendré par les éléments

- $(n + n', m) - (n, m) - (n', m)$,
- $(n, m + m') - (n, m) - (n, m')$,
- $(na, m) - (n, am)$,

avec $n, n' \in N, m, m' \in M$ et $a \in A$. On appelle *produit tensoriel* de N par M , le groupe abélien :

$$N \otimes_A M = (N \times M)/L.$$

EXEMPLE 2.28. Si l'on regarde A comme un A -module à droite, alors nous avons $A \otimes_A M \cong M$, pour tout A -module à gauche M . En effet, nous pouvons identifier $a \otimes m$ à $1 \otimes am$, pour tout $a \in A$ et $m \in M$.

REMARQUE 2.7. Le produit tensoriel $N \otimes_A M$ est un objet dit *universel* car il vérifie la propriété suivante: pour toute application bilinéaire $f : N \times M \rightarrow G$ dans un groupe abélien G (f bilinéaire voulant dire que $n \rightarrow f(n, m)$ et $m \rightarrow f(n, m)$ sont deux morphismes de groupes abéliens vérifiant $f(na, m) = f(n, am)$), il existe un unique morphisme de groupes abéliens $\tilde{f} : N \otimes_A M \rightarrow G$ satisfaisant $f(n, m) = \tilde{f}(n \otimes m)$ [57, 135].

PROPOSITION 2.26. *Soient N un A -module à droite et M un A -module à gauche, alors*

- *si A est un anneau commutatif, alors $N \otimes_A M$ a une structure de A -module à gauche, définie par $a(n \otimes m) = na \otimes m = n \otimes am$, $a \in A, m \in M$ et $n \in N$.*
- *si $N = {}_B N_A$ est un $B - A$ bimodule et $M = {}_A M_C$ est un $A - C$ bimodule, alors $N \otimes_A M$ possède une structure de $B - C$ -module à gauche, définie par $b(n \otimes m)c = bn \otimes mc$, pour tout $b \in B, c \in C, m \in M$ et $n \in N$.*

PROPOSITION 2.27. *Soient M un A -module à droite et $0 \rightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules à gauche. Alors, la suite suivante de groupes abéliens est exacte :*

$$M \otimes_A N' \xrightarrow{\text{id}_M \otimes f} M \otimes_A N \xrightarrow{\text{id}_M \otimes g} M \otimes_A N'' \rightarrow 0.$$

PREUVE. Le morphisme $\text{id}_M \otimes f$ est défini par $(\text{id}_M \otimes f)(m \otimes n') = m \otimes f(n'), \forall m \in M, \forall n' \in N'$. Montrons que $\text{id}_M \otimes g$ est un épimorphisme: tout $z \in M \otimes_A N''$ s'écrit sous la forme $\sum_{i=1}^r m_i \otimes n_i''$ avec $m_i \in M, n_i'' \in N''$. Puisque g est surjectif, il existe $n_i \in N$ tel que $n_i'' = g(n_i)$ et donc $\sum_{i=1}^r m_i \otimes n_i'' = (\text{id}_M \otimes g)(\sum_{i=1}^r m_i \otimes n_i)$, d'où $\text{id}_M \otimes g$ est surjectif. Montrons que la suite formée par $\text{id}_M \otimes f$ et $\text{id}_M \otimes g$ est exacte en $M \otimes_A N$. Nous avons $(\text{id}_M \otimes g) \circ (\text{id}_M \otimes f) = \text{id}_M \otimes (g \circ f) = 0$, donc $\text{im}(\text{id}_M \otimes f) \subseteq \ker(\text{id}_M \otimes g)$. Montrons l'inclusion inverse. Appelons $L = \text{coker}(\text{id}_M \otimes f)$ et $\pi : M \otimes_A N \rightarrow L$, alors en utilisant le point 3 de la proposition 1.3, nous obtenons la suite exacte $0 \rightarrow H(M \otimes_A N) \rightarrow L \xrightarrow{\gamma} M \otimes_A N'' \rightarrow 0$ avec γ défini par $\gamma(\pi(m \otimes n)) = m \otimes g(n)$. Ce morphisme est bien défini par la proposition 1.2.

Définissons $\gamma' : M \otimes_A N'' \rightarrow L$ par $\gamma'(m \otimes n'') = \pi(m \otimes n)$ avec $g(n) = n''$. Ce morphisme est bien défini car, si $g(n_1) = m = g(n_2)$, alors $n_1 - n_2 \in \ker g = \text{im } f$, donc il existe $l \in N$ tel que $n_1 - n_2 = f(l) \Rightarrow m \otimes n_1 - m \otimes n_2 = m \otimes (n_1 - n_2) = m \otimes f(l) = (\text{id}_M \otimes f)(m \otimes l) \Rightarrow \pi(m \otimes n_1) = \pi(m \otimes n_2)$. Nous avons alors $(\gamma' \circ \gamma)(\pi(m \otimes n)) = \gamma'(m \otimes g(n)) = \pi(m \otimes n) \Rightarrow \gamma' \circ \gamma = \text{id}_L$. D'où, γ est injectif, et donc $H(M \otimes N) = 0$. \square

EXEMPLE 2.29. Avec $A = \mathbb{R}[s]$, reconsidérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot s} A \longrightarrow A/sA \longrightarrow 0,$$

et appliquons-lui le foncteur $\cdot \otimes_A (A/sA)$. Nous obtenons alors :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A \otimes_A A/sA & \xrightarrow{\cdot s \otimes \text{id}_{(A/sA)}} & A \otimes_A A/sA & \longrightarrow & A/sA \otimes_A A/sA \longrightarrow 0. \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & A/sA & \xrightarrow{\cdot s} & A/sA & & \end{array}$$

Pendant le morphisme $A/sA \xrightarrow{\cdot s} A/sA$ est le morphisme nul car la multiplication par s est nulle dans A/sA et donc $\cdot s : A/sA \rightarrow A/sA$ n'est pas injectif.

DÉFINITION 2.18. Le A -module M à droite est *plat* si, pour tout monomorphisme $f : N' \rightarrow N$ de A -modules à gauche, le morphisme $\text{id}_M \otimes f : M \otimes_A N' \rightarrow M \otimes_A N$ est un monomorphisme de groupes abéliens.

COROLLAIRE 2.9. Un A -module M est plat ssi pour toute suite exacte $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$, la suite $0 \rightarrow M \otimes_A N' \rightarrow M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N'' \rightarrow 0$ est exacte, ou en d'autres termes, M est plat ssi le foncteur $M \otimes_A \cdot$ est exact.

La preuve est évidente.

EXEMPLE 2.30. Le A -module à droite A est un module plat car, pour toute suite exacte de A -modules $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$, nous avons alors la suite $0 \rightarrow A \otimes_A N' \rightarrow A \otimes_A N \rightarrow A \otimes_A N'' \rightarrow 0$ qui est exacte car $A \otimes_A N' \cong N'$, $A \otimes_A N \cong N$ et $A \otimes_A N'' \cong N''$.

En utilisant le fait que $M \otimes (\oplus_{i \in I} N_i) \cong \oplus_{i \in I} (M \otimes N_i)$, nous obtenons alors la proposition suivante (voir [13, 14] pour plus de détails).

PROPOSITION 2.28. $\oplus_{i \in I} M_i$ est un A -module plat ssi M_i est un A -module plat, $\forall i \in I$.

Puisque A est un A -module plat et que tout A -module libre est isomorphe à une puissance de A , nous obtenons que tout A -module libre est plat. De plus, tout A -module P projectif est plat car, il existe un A -module Q tel que $P \oplus Q \cong F$, où F est un A -module libre. En appliquant alors la proposition précédente, nous obtenons alors que P est un A -module plat. Nous avons alors la proposition suivante.

PROPOSITION 2.29. Tout A -module libre ou projectif est un A -module plat.

Nous venons de voir que tout A -module projectif est plat. Nous avons la réciproque suivante (voir [14] pour une preuve).

PROPOSITION 2.30. Un A -module M plat et de présentation finie est projectif.

Par la suite, comme nous utiliserons toujours des modules de présentation finie, cette proposition permet donc de se limiter à la classification des modules donnée par (33).

Nous avons la proposition suivante. Voir [14] pour une preuve.

PROPOSITION 2.31. *Un A -module à gauche M est plat ssi pour tout idéal I de A , le morphisme $\phi : I \otimes_A M \rightarrow M$, défini par $\phi(am) = am$ pour $a \in I$, est injectif.*

DÉFINITION 2.19. Soient S une partie multiplicativement stable d'un anneau commutatif A , c-à-d, un sous-ensemble de A contenant 1 et tel que $s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 s_2 \in S$ et M un A -module à gauche. Soient \sim la relation d'équivalence de $S \times M$, définie par $(s, m) \sim (s', m') \Leftrightarrow \exists t \in S, t(sm' - s'm) = 0$. Nous appelons localisé de M par rapport à S , le A -module :

$$S^{-1}M = (S \times M) / \sim.$$

Nous notons par $\frac{m}{s}$ la classe d'équivalence de (s, m) dans $S^{-1}M$.

Remarquons que $S^{-1}M$ est un $S^{-1}A = \{\frac{a}{s} \mid a \in A, s \in S\}$ -module et qu'il existe un A -morphisme $i_S : M \rightarrow S^{-1}M$, défini par $i_S(m) = \frac{m}{1}$. Un élément $m \in \ker i_S$ vérifie :

$$\frac{m}{s} = \frac{0}{1} \Leftrightarrow \exists t \in S, tm = 0.$$

D'où :

$$(34) \quad \ker i_S = \{m \in M \mid \exists t \in S, tm = 0\}.$$

Nous avons alors la proposition suivante.

PROPOSITION 2.32. *Avec les notations suivantes, nous avons :*

$$S^{-1}M \cong S^{-1}A \otimes_A M.$$

PREUVE. Nous avons un $S^{-1}A$ -morphisme $f : S^{-1}A \otimes_A M \rightarrow S^{-1}M$, défini par $f(\frac{a}{s} \otimes m) = \frac{am}{s}$ et le $S^{-1}A$ -morphisme $g : S^{-1}M \rightarrow S^{-1}A \otimes_A M$ défini par $g(\frac{m}{s}) = \frac{1}{s} \otimes m$. Ce dernier morphisme est bien défini car si $\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}$, alors il existe $t \in S$ tel que $t(sm' - s'm) = 0 \Rightarrow \frac{1}{tss'} \otimes tsm' = \frac{1}{tss'} \otimes ts'm \Rightarrow \frac{ts'}{tss'} \otimes m = \frac{ts}{tss'} \otimes m' \Rightarrow \frac{1}{s'} \otimes m' = \frac{1}{s} \otimes m$. Nous avons alors $f \circ g = \text{id}$ et $g \circ f = \text{id}$, d'où le résultat.

La proposition suivante nous donne des exemples de modules plats.

PROPOSITION 2.33. *Soit S une partie de A multiplicativement stable, alors $S^{-1}A$ est un A -module plat. En particulier, si A est un anneau intègre, alors le corps de fraction $K = Q(A) = \{ab^{-1} \mid a \in A, 0 \neq b \in A\}$ de A est un A -module plat.*

PREUVE. Il faut montrer que si $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M$ est une suite exacte, alors $0 \rightarrow S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}i} S^{-1}M$ est encore une suite exacte. Soit $\frac{m'}{s} \in S^{-1}M'$ vérifiant $S^{-1}i(\frac{m'}{s}) = \frac{m'}{s} = 0$, alors $\exists t \in S$ tel que $tm' = 0 \Rightarrow \frac{1}{t}tm' = m' = 0 \Rightarrow \frac{m'}{s} = 0$, d'où le résultat. En prenant $S = A \setminus \{0\}$, nous obtenons alors que K est un A -module plat.

EXEMPLE 2.31. D'après la proposition précédente, $\mathbb{R}(s)$ est un $\mathbb{R}[s]$ -module plat et $\mathbb{R}(s)$ est un RH_∞ -module plat.

DÉFINITION 2.20. Soit M un A -module, alors on appelle *rang* de M , que l'on note $\text{rk}_A(M)$, la dimension de l'espace vectoriel $Q \otimes_A M$.

PROPOSITION 2.34. Soit M un A -module, alors nous avons la suite exacte :

$$0 \rightarrow t(M) \rightarrow M \rightarrow K \otimes_A M \rightarrow (K/A) \otimes_A M \rightarrow 0.$$

PREUVE. Nous avons la suite exacte $0 \rightarrow A \rightarrow K \rightarrow K/A \rightarrow 0$, et par application de $\cdot \otimes_A M$ à cette suite exacte, nous obtenons la suite exacte

$$0 \rightarrow \ker i_A \rightarrow M \xrightarrow{i_A} K \otimes_A M \rightarrow (K/A) \otimes_A M \rightarrow 0.$$

Or, $\ker i_A = \{m \in M \mid \exists 0 \neq a \in A, am = 0\} = t(M)$, d'où le résultat.

On introduit en géométrie algébrique, les deux ensembles suivants pour un anneau A commutatif [88] :

- $\text{spec}(A) = \{\mathfrak{p} \text{ idéal premier propre de } A\}$,
- $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{spec}(A) \mid I \subset \mathfrak{p}\}$.

Soit $\mathfrak{p} \in \text{spec}(A)$, alors $S = A \setminus \mathfrak{p}$ est un ensemble multiplicatif de A et l'on note $M_{\mathfrak{p}} = S^{-1}M$.

DÉFINITION 2.21. Soient A un anneau commutatif et M un A -module, on appelle alors *support* de M l'ensemble de $\text{spec}(A)$ suivant :

$$\text{supp}(M) = \{\mathfrak{p} \in \text{spec}(A) \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

Nous avons alors la proposition suivante.

PROPOSITION 2.35. Soient A un anneau commutatif et M un A -module de type fini, alors :

$$\text{supp}(M) = \{\mathfrak{p} \in \text{spec}(A) \mid \text{ann}(M) \subset \mathfrak{p}\} = V(\text{ann}(M)).$$

PREUVE. Puisque M est un A -module de type fini, il existe une famille finie $\{y_1, \dots, y_p\}$ engendrant M , c-à-d, $M = \sum_{i=1}^p A y_i$. Maintenant, en utilisant (34), nous obtenons :

$$M_{\mathfrak{p}} = 0 \Leftrightarrow \exists t_i \in S = A \setminus \mathfrak{p} : t_i y_i = 0, \forall i = 1, \dots, p.$$

Posons $t = \prod_{i=1}^p t_i \in S$, alors $t \in \text{ann}(M)$ et $t \notin \mathfrak{p}$, donc $\text{ann}(M)$ n'est pas contenu dans \mathfrak{p} . Réciproquement, si $\text{ann}(M)$ n'est pas contenu dans \mathfrak{p} , alors il existe $t \in \text{ann}(M)$ et $t \in S = A \setminus \mathfrak{p}$, d'où $t y_i = 0, \forall i = 1, \dots, p$, d'où $M_{\mathfrak{p}} = 0$. \square

PROPOSITION 2.36. Soit $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules, avec A un anneau commutatif, alors nous avons :

$$\text{supp}(M) = \text{supp}(M') \cup \text{supp}(M'').$$

PREUVE. Soit $\mathfrak{p} \in \text{spec}(A)$, alors pour $S = A \setminus \mathfrak{p}$, le A -module $S^{-1}A$ est plat. Donc, nous avons la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow M'_{\mathfrak{p}} \rightarrow M_{\mathfrak{p}} \rightarrow M''_{\mathfrak{p}} \rightarrow 0.$$

D'où, on déduit que $M_{\mathfrak{p}} = 0 \Leftrightarrow M'_{\mathfrak{p}} = 0$ et $M''_{\mathfrak{p}} = 0$, ou de façon équivalente $M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \Leftrightarrow M'_{\mathfrak{p}} \neq 0$ ou $M''_{\mathfrak{p}} \neq 0$. D'où le résultat. \square

CHAPITRE 3

Algèbre homologique

1. Équivalence des modules

De nombreuses notions d'équivalence ont été développées pour les systèmes de contrôle linéaires depuis les travaux de Rosenbrock [134]. Citons parmi les plus importantes [9, 81]. L'idée sous-jacente à ces diverses notions d'équivalence est de comprendre quelles informations sur les systèmes sont préservées au cours du passage d'une forme à une autre (forme de Kalman, formes polynomiales, matrice de transfert...).

Nous avons montré au chapitre précédent que l'on peut associer un A -module M à toute matrice R à coefficients dans un anneau A . L'intérêt de travailler avec M plutôt qu'avec R est que les propriétés de M ne dépendent que du module et non de la matrice R . Nous verrons dans les chapitres suivants que les propriétés structurelles des systèmes, telles que la contrôlabilité ou l'observabilité, et même les relations existant entre les pôles et les zéros..., peuvent être définies en termes de propriétés de modules. Les techniques développées dans ce chapitre montrent que ces propriétés ne dépendent pas de la représentation choisie du système (ou de la résolution choisie du module), c-à-d, par exemple, ne dépendent pas du fait que le système est sous la forme de Kalman, sous différentes formes polynomiales ou sous toute autre forme. Ainsi, les outils homologiques, développés dans cette section, sont à la base d'une notion d'équivalence des systèmes de contrôle qui conserve les propriétés homologiques des systèmes, c-à-d leurs propriétés structurelles.

1.1. Résolutions projectives. Avant de parler d'équivalence, nous aurons besoin de quelques définitions et propriétés.

DÉFINITION 1.1. – Nous dirons que la suite exacte suivante de A -modules

$$\dots \longrightarrow P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} P_{i-2} \longrightarrow \dots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

est une *résolution à gauche* du A -module M . De plus, si les A -modules P_i sont projectifs (resp. libres ou plats), alors cette résolution est appelée *résolution projective* (resp. *libre* ou *plate*) du A -module M .

– Nous dirons que la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} I_0 \xrightarrow{d_0} I_1 \xrightarrow{d_1} I_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_i \xrightarrow{d_i} I_{i+1} \longrightarrow \dots$$

est une *résolution à droite* du A -module M . Si les A -modules I_i sont injectifs, alors cette résolution est appelée *résolution injective* du A -module M .

EXEMPLE 1.1. Considérons le système d'EDP suivant :

$$\begin{cases} d_1 y = 0, \\ d_2 y = 0, \\ d_3 y = 0. \end{cases}$$

Ce système définit un $A = \mathbb{R}[d_1, d_2, d_3]$ -module M ayant pour résolution libre, donc projective, la suite exacte suivante

$$(35) \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{.R_2} A^3 \xrightarrow{.R_1} A^3 \xrightarrow{.R_0} A \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

avec

$$R_0 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{pmatrix}, R_2 = (d_1 \ d_2 \ d_3).$$

Remarquons que cette résolution libre est la version algébrique de la suite d'opérateurs différentiels "grad-rot-div" dans \mathbb{R}^3 .

REMARQUE 1.1. Dans la suite, nous étudierons seulement les résolutions projectives. Cependant, des résultats duaux existent pour les résolutions injectives. Une des principales raisons de préférer les résolutions projectives aux résolutions injectives est qu'elles ne sont pas constructives en général.

PROPOSITION 1.1. *Tout A -module M admet une résolution projective.*

PREUVE. Le raisonnement est semblable à celui fait à la remarque 2.1 du chapitre précédent : par la proposition 2.2 du chapitre 2, tout A -module M est quotient d'un module libre et donc nous avons la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \ker \pi \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

où F_0 est un A -module libre. De plus, $\ker \pi$ est aussi un quotient d'un A -module libre F_1 , c-à-d nous avons la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker \pi & \xrightarrow{i} & F_0 & \xrightarrow{\pi} & M \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker d_1 & \xrightarrow{d_1} & \ker \pi & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

et donc, nous avons la suite exacte grâce au lemme 1.1 du chapitre 2 :

$$0 \longrightarrow \ker d_1 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{id_{d_1}} F_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0.$$

En continuant de même, on obtient finalement une résolution libre, donc projective, de M . \square

Une résolution projective, libre, plate ou injective d'un module M mesure de combien le module M est différent d'un module projectif libre, plat ou injectif. En effet, si M est par exemple un module projectif, nous avons alors la résolution projective triviale :

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} M \longrightarrow 0.$$

Ceci nous amène naturellement à la définition suivante.

DÉFINITION 1.2. On appelle *dimension projective* d'un A -module M et on note $dp_A(M)$ le plus petit nombre $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel qu'il existe une résolution projective de M de longueur n .

EXEMPLE 1.2. $dp_A(M) = 1$ signifie que M n'est pas un A -module projectif mais peut être exprimé comme un quotient de deux A -modules projectifs. Nous savons en effet qu'il existe une suite exacte $0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$, d'où $M = P_0/P_1$.

EXEMPLE 1.3. Tout système de contrôle SISO (single input-single output)

$$Py - Qu = 0, \quad P, Q \in A,$$

est de dimension projective au plus égale à un. En effet, le A -module M correspondant au système est défini par la résolution libre, donc projective, suivante

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot R} A^2 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

avec $R = (P - Q)$, d'où :

$$\text{dp}_A(M) \leq 1.$$

EXEMPLE 1.4. Toute matrice R , à coefficients dans un anneau A , de rang maximal, définit un A -module M de dimension projective inférieure ou égale à un. Nous avons en effet la résolution libre, donc projective, de M suivante :

$$0 \longrightarrow A^q \xrightarrow{\cdot R} A^p \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

DÉFINITION 1.3. On appelle *dimension homologique globale* d'un anneau A , et l'on note $\text{dhg}(A)$, le nombre $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ défini par $\sup_M(\text{dp}_A(M))$.

PROPOSITION 1.2. Soit A un anneau principal, alors $\text{dhg}(A) \leq 1$.

PREUVE. Soit M un A -module sur l'anneau principal A , alors nous pouvons toujours construire la suite exacte $0 \longrightarrow \ker \phi \longrightarrow F \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0$, où F est un A -module projectif et donc libre. Or, $\ker \phi \subseteq F$ et donc $\ker \phi$ est un A -module libre (corollaire 2.16 du chapitre 2) et donc projectif. D'où, $\text{dp}_A(M) \leq 1$ pour tout A -module, i.e. $\text{dhg}(A) \leq 1$. \square

Pour terminer, énonçons le *théorème des syzygies* de Hilbert (voir [139] pour une démonstration).

PROPOSITION 1.3. Si $A = \mathbb{C}[\chi_1, \dots, \chi_n]$, alors $\text{dhg}(A) = n$.

Une conséquence de cette proposition est que tout $A = \mathbb{C}[\chi_1, \dots, \chi_n]$ -module M de type fini admet au moins une résolution projective de longueur au plus n .

1.2. Equivalence des systèmes. La théorie des modules ne permet pas de dissocier deux modules isomorphes car ils sont considérés comme un même objet. Nous avons montré au précédent chapitre comment l'on pouvait associer un A -module M à toute matrice R à coefficients dans un anneau A . Ainsi, deux systèmes de contrôle, définis par deux matrices R et R' , sont *équivalents au sens des modules* si les deux A -modules M et M' sont isomorphes. Cette équivalence correspond à celle désirée en théorie du contrôle, comme nous le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE 1.5. Considérons le système polynomial suivant

$$(36) \quad \ddot{y} - 2\dot{y} - \dot{u} + u = 0,$$

et soit le $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$ -module à gauche M associé à ce système, défini par la résolution libre suivante

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot R} A^2 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

avec $R = (\frac{d^2}{dt^2} - 2\frac{d}{dt} \quad -\frac{d}{dt} + 1)$. Appelons $y = \pi(e_1)$ et $u = \pi(e_2)$, où $\{e_1, e_2\}$ est la base canonique de A^2 , nous avons alors dans M l'équation (36), ainsi que ses combinaisons linéaires sur $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$.

Soit un deuxième système sous la forme de Kalman, défini par :

$$(37) \quad \begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = 2x^2 + v, \\ z = -x^1 + x^2. \end{cases}$$

On lui associe le A -module M' , défini par la présentation suivante

$$0 \longrightarrow A^3 \xrightarrow{R'} A^4 \xrightarrow{\pi'} M \longrightarrow 0,$$

avec :

$$R' = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} - 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Appelons $x^1 = \pi'(e_1)$, $x^2 = \pi'(e_2)$, $v = \pi'(e_3)$ et $z = \pi'(e_4)$, où $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ est la base canonique de A^4 .

Considérons maintenant le morphisme $f : M \rightarrow M'$, défini par

$$\begin{cases} f(y) = z, \\ f(u) = v \end{cases}$$

Nous avons en effet $f(\ddot{y} - 2\dot{y} - \dot{u} + u) = f(0) = (\frac{d^2}{dt^2} - 2\frac{d}{dt})f(y) - (\frac{d}{dt} - 1)f(u) = (\frac{d^2}{dt^2} - 2\frac{d}{dt})z - (\frac{d}{dt} - 1)v$ et $(\frac{d^2}{dt^2} - 2\frac{d}{dt})z - (\frac{d}{dt} - 1)v = 0$, donc $f(0) = 0$ et f est bien un A -morphisme. Soit le A -morphisme $g : M' \rightarrow M$, défini par

$$\begin{cases} g(z) = y, \\ g(v) = u, \\ g(x^1) = \dot{y} - y - u, \\ g(x^2) = \dot{y} - u, \end{cases}$$

et on vérifie alors facilement que $g \circ f = \text{id}_M$ et $f \circ g = \text{id}_{M'}$. D'où, l'isomorphisme suivant :

$$M \cong M'.$$

Munis de cette équivalence, nous allons maintenant voir les différentes conséquences sur les matrices R et R' .

1.2.1. Morphismes de complexes et homotopies.

DÉFINITION 1.4. Soient $\dots \rightarrow P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \rightarrow \dots$ et $\dots \rightarrow P'_i \xrightarrow{d'_i} P'_{i-1} \rightarrow \dots$ deux complexes de A -modules, alors nous appelons *morphisme* de complexes $f : (P_i, d_i) \rightarrow (P'_i, d'_i)$ la donnée de A -morphisms $f_i : P_i \rightarrow P'_i$ telle que nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$(38) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & P'_{i+1} & \xrightarrow{d'_{i+1}} & P'_i & \xrightarrow{d'_i} & P'_{i-1} \longrightarrow \dots \\ & & \uparrow f_{i+1} & & \uparrow f_i & & \uparrow f_{i-1} \\ \dots & \longrightarrow & P_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & P_i & \xrightarrow{d_i} & P_{i-1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

c-à-d, $d'_i \circ f_i = f_{i-1} \circ d_i$, $\forall i$.

EXEMPLE 1.6. Avec les notations de l'exemple 1.5, nous avons le morphisme de complexe g suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\cdot \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} - 2 \frac{d}{dt} & -\frac{d}{dt} + 1 \end{pmatrix}} & A^2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \uparrow & & & & \uparrow \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} - 1 & -1 \\ \frac{d}{dt} & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 0 & \longrightarrow & A^3 & \xrightarrow{\cdot \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} - 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} & A^4 & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$



Si l'on appelle U (resp. U') la matrice associée au morphisme $A^4 \rightarrow A^2$ (resp. $A^3 \rightarrow A$) dans les bases canoniques, alors nous avons la relation matricielle $U' R = R' U$.

PROPOSITION 1.4. Soit $f : (P_i, d_i) \rightarrow (P'_i, d'_i)$ un morphisme de complexes, alors nous avons pour tout i :

- $f_i(\ker d_i) \subseteq \ker d'_i$,
- $f_i(\operatorname{im} d_{i+1}) \subseteq \operatorname{im} d'_{i+1}$,

ce qui induit un A -morphisme $H_i(f)$ des modules d'homologie de P dans ceux de P' , c-à-d, $H_i(f) : H_i(P) = \ker d_i / \operatorname{im} d_{i+1} \rightarrow H_i(P') = \ker d'_i / \operatorname{im} d'_{i+1}$.

PREUVE. Considérons la diagramme commutatif exact (38).

- Soit $k_i \in \ker d_i$, alors $(f_{i-1} \circ d_i)(k_i) = (d'_i \circ f_i)(k_i) = 0 \Rightarrow f_i(k_i) \in \ker d'_i$, d'où $f_i(\ker d_i) \subseteq \ker d'_i$.
- Soit $p_i \in \operatorname{im} d_{i+1} \Rightarrow \exists p_{i+1} \in P_{i+1}, p_i = d_{i+1}(p_{i+1}) \Rightarrow f_i(p_i) = (f_i \circ d_{i+1})(p_{i+1}) = (d'_{i+1} \circ f_{i+1})(p_{i+1})$. Donc, si l'on note $p'_i = f_i(p_i)$, alors $p'_i = d'_{i+1}(f_{i+1}(p_{i+1})) \in \operatorname{im} d'_{i+1}$.
- D'après ce qui précède, nous avons le diagramme commutatif exact suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \operatorname{im} d_{i+1} & \xrightarrow{j_i} & \ker d_i & \xrightarrow{\pi_i} & H_i(P) \longrightarrow 0 \\
 (39) & & \downarrow f_i & & \downarrow f_i & & \downarrow H_i(f) \\
 0 & \longrightarrow & \operatorname{im} d'_{i+1} & \xrightarrow{j'_i} & \ker d'_i & \xrightarrow{\pi'_i} & H_i(P') \longrightarrow 0,
 \end{array}$$

où j_i et j'_i sont les injections naturelles et $H_i(f)$ est le morphisme défini par $H_i(f)(h_i) = (\pi'_i \circ f_i)(k_i)$ avec $\pi_i(k_i) = h_i$. Ce morphisme est bien défini car il ne dépend pas du choix de l'antécédent k_i de h_i choisi: s'il existe $l_i \in \ker d_i$ tel que $\pi_i(k_i) = h_i = \pi_i(l_i)$, alors $k_i - l_i \in \ker \pi_i = \operatorname{im} d_{i+1}$ donc il existe $p_{i+1} \in \operatorname{im} d_{i+1}$ tel que $j_i(p_{i+1}) = k_i - l_i \Rightarrow (\pi'_i \circ f_i)(k_i - l_i) = (\pi'_i \circ j'_i \circ f_i)(p_{i+1}) = 0 \Rightarrow (\pi'_i \circ f_i)(k_i) = (\pi'_i \circ f_i)(l_i) = H_i(f)(k_i)$.

□

EXEMPLE 1.7. Le morphisme de complexe g de l'exemple 1.6 induit le morphisme $H(g) : M' = A^4/A^3 R' \rightarrow M = A^2/AR$, défini par :

$$H(g)(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 v + a_4 z) = \pi'((a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4) \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} - 1 & -1 \\ \frac{d}{dt} & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$$

$$= (a_1(\frac{d}{dt} - 1) + a_2 \frac{d}{dt} + a_4)y - (a_1 + a_2 - a_3)u,$$

c-à-d, nous avons :

$$\begin{cases} H(g)(x_1) = \dot{y} - y - u, \\ H(g)(x_2) = \dot{y} - u, \\ H(g)(x_3) = u, \\ H(g)(x_4) = y. \end{cases}$$

LEMME 1.1. Soient $f : P' = (P'_i, d'_i) \rightarrow P = (P_i, d_i)$ et $g : P = (P_i, d_i) \rightarrow P'' = (P''_i, d''_i)$ deux morphismes de complexes, alors nous avons :

- $H_i(g \circ f) = H_i(g) \circ H_i(f), \forall i,$
- $H_i(\text{id}_P) = \text{id}_{H_i(P)}, \forall i.$

PREUVE. Nous avons $H_i(f) : H_i(P') \rightarrow H_i(P)$ défini par $H_i(f)(h'_i) = (\pi_i \circ f_i)(p'_i)$ avec $\pi'_i(p'_i) = h'_i \in H_i(P')$ et ne dépendant pas de l'antécédent p'_i choisi de h'_i (voir la proposition 1.4). De même, nous avons $H_i(g) : H_i(P) \rightarrow H_i(P'')$ défini par $H_i(g)(h_i) = (\pi''_i \circ g_i)(p_i)$ avec $\pi''_i(p_i) = h_i$ et $H_i(g \circ f) : H_i(P') \rightarrow H_i(P'')$ défini par $H_i(g \circ f)(h'_i) = (\pi''_i \circ g_i \circ f_i)(p'_i)$ avec $\pi'_i(p'_i) = h'_i$ et ces morphismes ne dépendent pas des antécédents choisis. Maintenant, $(H_i(g) \circ H_i(f))(h'_i) = H_i(g)(H_i(f)(h'_i)) = H_i(g)((\pi_i \circ f_i)(p'_i)) = (\pi''_i \circ g_i)(f_i(p'_i)) = (\pi''_i \circ g_i \circ f_i)(p'_i) = H_i(g \circ f)(p'_i)$, d'où le résultat. Le deuxième point est évident. \square

DÉFINITION 1.5. - Un morphisme de complexe $f : (P_i, d_i) \rightarrow (P'_i, d'_i)$ est *homotopique* à zéro s'il existe des A -morphisms $s_i : P_i \rightarrow P'_{i+1}$ tels que $f_i = d'_{i+1} \circ s_i + s_{i-1} \circ d_i$, pour tout i . Le morphisme *gradué* de complexe $s : (P_i, d_i) \rightarrow (P'_{i+1}, d'_{i+1})$ est appelé *homotopie* et nous avons alors le diagramme suivant :

$$(40) \quad \begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & P'_{i+1} & \xrightarrow{d'_{i+1}} & P'_i & \xrightarrow{d'_i} & P'_{i-1} & \longrightarrow & \dots \\ & \nearrow s_{i-1} \uparrow f_{i+1} & & \nearrow s_i \uparrow f_i & & \nearrow s_{i-1} \uparrow f_{i-1} & & & \\ \dots & \longrightarrow & P_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & P_i & \xrightarrow{d_i} & P_{i-1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

- Deux morphismes de complexes $f, f' : (P_i, d_i) \rightarrow (P'_i, d'_i)$ sont *homotopes* si $f - f'$ est homotope à zéro, c-à-d $\exists s_i : P_i \rightarrow P'_{i+1}$ tel que $f_i - f'_i = d'_{i+1} \circ s_i + s_{i-1} \circ d_i, \forall i.$
- Un complexe (P_i, d_i) est *homotope* à zéro si le morphisme de complexe identité $\text{id}_P : (P_i, d_i) \rightarrow (P_i, d_i)$ et le morphisme de complexe 0 : $(P_i, d_i) \rightarrow (P_i, d_i)$ sont homotopes, c-à-d $\exists s_i : P_i \rightarrow P'_{i+1}$ tel que $\text{id}_{P_i} = d'_{i+1} \circ s_i + s_{i-1} \circ d_i, \forall i.$
- Un morphisme de complexe $f : (P_i, d_i) \rightarrow (P'_i, d'_i)$ est un *homotopisme* s'il existe un morphisme $f' : P' \rightarrow P$ tel que $f \circ f' - \text{id}_{P'}$ et $f' \circ f - \text{id}_P$ sont homotopes à zéro. Les complexes P et P' sont alors dits *homotopiquement équivalents*.

Remarquons que la relation " f est homotope à g " est une relation d'équivalence.

PROPOSITION 1.5. Soient deux morphismes de complexes $f, f' : (P_i, d_i) \rightarrow (P'_i, d'_i)$ homotopes, alors f et f' induisent le même morphisme d'homologie, c-à-d $H_i(f) = H_i(f') : H_i(P) = \ker d_i / \text{im } d_{i+1} \rightarrow H_i(P') = \ker d'_i / \text{im } d'_{i+1}, \forall i$.

PREUVE. Puisque f et f' sont homotopes, nous avons $f_i - f'_i = d'_{i+1} \circ s_i + s_{i-1} \circ d_i, \forall i$. Pour tout $h_i \in H_i(P)$, avec les mêmes notations utilisées ci-dessus, nous avons $H_i(f - f')(h_i) = (\pi'_i \circ (f_i - f'_i))(k_i)$ avec $k_i \in \ker d_i$ vérifiant $\pi_i(k_i) = h_i$, d'où $H_i(f - f')(h_i) = \pi'_i \circ (d'_{i+1} \circ s_i + s_{i-1} \circ d_i)(k_i) = (\pi'_i \circ d'_{i+1} \circ s_i)(k_i)$. Or $d'_{i+1}(s_i(k_i)) \in \text{im } d'_{i+1} \Rightarrow \pi'_i((d'_{i+1} \circ s_i)(k_i)) = 0$ dans $H_i(P')$. D'où $H_i(f - f') = 0 \Rightarrow H_i(f) = H_i(f')$. \square

Un exemple classique de suites homotopes est donné par les suites exactes scindées, comme nous le montre la proposition suivante.

PROPOSITION 1.6. Une suite exacte courte de A -modules

$$P : 0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

est scindée ssi le morphisme de complexe $\text{id}_P : P \rightarrow P$ est homotope à zéro, c-à-d la suite exacte P est homotope à zéro.

PREUVE. Dire que la suite exacte définie par P est scindée est équivalent à l'existence d'un morphisme $h : M'' \rightarrow M$ tel que $g \circ h = \text{id}_{M''}$ et donc, d'après la proposition 1.3, il existe $k : M \rightarrow M'$ tel que $k \circ f = \text{id}_{M'}$ et $f \circ k + h \circ g = \text{id}_M$ et nous avons alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' \rightarrow 0 \\ & & \text{id}_{M'} \parallel & \swarrow k & \parallel \text{id}_M \swarrow h & \parallel \text{id}_{M''} & \\ 0 & \rightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' \rightarrow 0. \end{array}$$

Donc le morphisme $\text{id}_P : P \rightarrow P$ est homotope à zéro. Réciproquement, si $\text{id}_P : P \rightarrow P$ est homotope à zéro, alors il existe des morphismes $k : M \rightarrow M'$ et $h : M'' \rightarrow M$ tels que $g \circ h = \text{id}_{M''}$, $k \circ f = \text{id}_{M'}$ et $f \circ k + h \circ g = \text{id}_M$ et donc la suite exacte définie par P est scindée. \square

EXEMPLE 1.8. La suite exacte P définie à l'exemple (6) est une suite scindée, donc le morphisme $\text{id}_P : P \rightarrow P$ est alors homotope à zéro.

Par extension, nous avons alors la définition suivante.

DÉFINITION 1.6. Nous dirons que le complexe de A -modules

$$P : \rightarrow P_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \rightarrow \dots$$

est scindé si le morphisme de complexe $\text{id}_P : P \rightarrow P$ est homotope à zéro, c-à-d s'il existe $s_i : P_i \rightarrow P_{i+1}$ pour tout i tel que $\text{id}_{P_i} = d_{i+1} \circ s_i + s_{i-1} \circ d_i, \forall i$. On dit alors que le morphisme gradué de complexe $s : P \rightarrow P$ est une homotopie contractante.

DÉFINITION 1.7. Un morphisme de complexe $f : P = (P_i, d_i) \rightarrow P' = (P'_i, d'_i)$ est appelé un homomorphisme si le morphisme $f_i : H_i(P) = \ker d_i / \text{im } d_i \rightarrow H_i(P') = \ker d'_i / \text{im } d'_i$ est un isomorphisme pour tout i .

PROPOSITION 1.7. Soient $P = (P_i, d_i)$ et $P' = (P'_i, d'_i)$ deux complexes homotopiquement équivalents, alors $H_i(P)$ et $H_i(P')$ sont isomorphes pour tout i , c-à-d il existe un homomorphisme de P dans P' .

PREUVE. Puisque P et P' sont homotopiquement équivalents, alors il existe deux morphismes de complexes $f : P \rightarrow P'$ et $g : P' \rightarrow P$ tels que $g \circ f$ est homotope à id_P et $f \circ g$ est homotope à $\text{id}_{P'}$. Donc, par la proposition 1.5, nous avons $H_i(g \circ f) = H_i(\text{id}_P) \Leftrightarrow H_i(g) \circ H_i(f) = \text{id}_{H_i(P)}$ ainsi que $H_i(f \circ g) = H_i(\text{id}_{P'}) \Leftrightarrow H_i(f) \circ H_i(g) = \text{id}_{H_i(P')}$, en utilisant le lemme 1.1. D'où le diagramme suivant

$$0 \longrightarrow H_i(P) \begin{array}{c} \xrightarrow{H_i(f)} \\ \xleftarrow{H_i(g)} \end{array} H_i(P') \longrightarrow 0,$$

et donc $H_i(P) \cong H_i(P')$ pour tout i , c-à-d f est un homomorphisme de P dans P' et g est un homomorphisme de P' dans P . \square

EXEMPLE 1.9. Nous verrons au prochain paragraphe deux exemples importants (exemples 2.5 et 2.10) d'homomorphismes de complexes.

1.3. Equivalence homotopique.

1.3.1. Equivalence des modules.

PROPOSITION 1.8. Soient (P_i, d_i) une résolution projective d'un A -module M et (P'_i, d'_i) une résolution projective d'un A -module N . Alors, tout A -morphisme $f : M \rightarrow N$ induit un morphisme de complexe de (P_i, d_i) dans (P'_i, d'_i) , unique à une homotopie près.

PREUVE. Soit $f : M \rightarrow N$ un A -morphisme, alors nous devons montrer l'existence d'un diagramme commutatif exact tel que celui ci-dessous

$$(41) \quad \begin{array}{cccccccccccc} P' : \dots & \longrightarrow & P'_{i+1} & \xrightarrow{d'_{i+1}} & P'_i & \xrightarrow{d'_i} & P'_{i-1} & \xrightarrow{d'_{i-1}} & \dots & \xrightarrow{d'_2} & P'_1 & \xrightarrow{d'_1} & P'_0 & \xrightarrow{d'_0} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow f_{i+1} & & \uparrow f_i & & \uparrow f_{i-1} & & & & \uparrow f_1 & & \uparrow f_0 & & \uparrow f & & \\ P : \dots & \longrightarrow & P_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & P_i & \xrightarrow{d_i} & P_{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & \dots & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & M & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

où les morphismes f_i satisfont $d'_i \circ f_i = f_{i-1} \circ d_i$, $\forall i \geq 0$, avec $f_{-1} = f$. Nous avons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} P'_0 & \xrightarrow{d'_0} & N \longrightarrow 0, \\ f_0 \swarrow & & \uparrow f \circ d_0 \\ & & P_0 \end{array}$$

où f_0 existe car P_0 est un A -module projectif et il vérifie $d'_0 \circ f_0 = f \circ d_0$. Nous avons alors $d'_0 \circ f_0 \circ d_1 = f \circ d_0 \circ d_1 = 0 \Rightarrow \text{im}(f_0 \circ d_1) \subseteq \ker d'_0 = \text{im} d'_1$. Nous avons donc le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} P'_1 & \xrightarrow{d'_1} & \text{im} d'_1 \longrightarrow 0, \\ f_1 \swarrow & & \uparrow f_0 \circ d_1 \\ & & P_1 \end{array}$$

où f_1 existe et vérifie $d'_1 \circ f_1 = f_0 \circ d_1$ car P_1 est un A -module projectif. En continuant de même, on trouve le diagramme commutatif exact (41). Supposons maintenant qu'il existe un autre A -morphisme $g_i : P_i \rightarrow P'_i$ vérifiant $d'_i \circ g_i = g_{i-1} \circ d_i$, $i \geq 0$, avec $g_{-1} = f$. Nous avons

alors $d'_0 \circ (f_0 - g_0) = (f - f) \circ d_0 = 0 \Rightarrow \text{im}(f_0 - g_0) \subseteq \ker d'_0 = \text{im } d'_1$ et nous avons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} P'_1 & \xrightarrow{d'_1} & \text{im } d'_1 \longrightarrow 0, \\ s_0 \swarrow & & \uparrow f_0 - g_0 \\ & & P_0 \end{array}$$

où s_0 existe et vérifie $f_0 - g_0 = d'_1 \circ s_0$ car P_0 est un A -module projectif. En posant $s_{-1} = 0 : M \rightarrow P'_0$, nous obtenons alors $f_0 - g_0 = d'_1 \circ s_0 + s_{-1} \circ d_0$. De plus, nous avons $d'_1 \circ (f_1 - g_1 - s_0 \circ d_1) = d'_1 \circ f_1 - d'_1 \circ g_1 - d'_1 \circ s_0 \circ d_1 = f_0 \circ d_1 - g_0 \circ d_1 - d'_1 \circ s_0 \circ d_1 = (f_0 - g_0 - d'_1 \circ s_0) \circ d_1 = 0$ car $f_0 - g_0 - d'_1 \circ s_0 = s_{-1} \circ d_0$ et donc $\text{im}(f_1 - g_1 - s_0 \circ d_1) \subseteq \ker d'_1 = \text{im } d'_2$. Nous avons alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} P'_2 & \xrightarrow{d'_2} & \text{im } d'_2 \longrightarrow 0, \\ s_1 \swarrow & & \uparrow f_1 - g_1 - s_0 \circ d_1 \\ & & P_1 \end{array}$$

où s_1 existe et vérifie $f_1 - g_1 = d'_2 \circ s_1 + s_0 \circ d_1$ car P_1 est un A -module projectif. En continuant de même, nous trouvons que f et g sont homotopes. \square

EXEMPLE 1.10. Considérons l'équation différentielle $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$ et le système

$$(42) \quad \begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = x^3, \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}^{n-1} = x^n, \\ \dot{x}^n = -a_1 x^n - \dots - a_n x^1. \end{cases}$$

Montrons comment la théorie des modules permet de parler de l'équivalence de ces deux systèmes. Soient $A = \mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$ l'anneau commutatif des opérateurs différentiels scalaires à coefficients constants et $0 \rightarrow A \xrightarrow{R} A \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$ une résolution libre du A -module à gauche $M = A/AR$ avec $R = (\frac{d}{dt})^n + a_1(\frac{d}{dt})^{n-1} + \dots + a_n$. Notons $y = \pi(1)$ alors, nous avons dans M l'équation $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$, ainsi que toutes ses combinaisons linéaires sur A . De même, soit $0 \rightarrow A^n \xrightarrow{R'} A^n \xrightarrow{\pi'} M' \rightarrow 0$ une résolution libre du A -module à gauche $M' = A^n/A^n R'$ avec :

$$R' = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{d}{dt} & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & \frac{d}{dt} + a_1 \end{pmatrix}.$$

Notons $x^i = \pi'(e_i)$ où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur ligne de la base canonique A^n , alors nous avons dans M' les équations (42) ainsi que toutes combinaisons A -linéaires de ces équations. L'élément y (resp. la famille $\{x^1, \dots, x^n\}$) est générateur de M (resp. génératrice de M'), donc pour définir un A -morphisme f de M dans M' (resp. un A -morphisme g de M' dans M), il nous suffit de

connaître $f(y)$ en fonction de $\{x^1, \dots, x^n\}$ (resp. $g(x^i)$, $i = 1, \dots, n$ en fonction de y). Ainsi, définissons le A -morphisme $f : M \rightarrow M'$ par $f(y) = x^1$. On vérifie bien que $f(Ry) = f(0) = 0$ et $f(Ry) = Rf(y) = Rx^1 = 0$. Définissons aussi le A -morphisme $g : M' \rightarrow M$ par :

$$\begin{cases} g(x^1) = y, \\ g(x^2) = \dot{y}, \\ g(x^3) = \ddot{y}, \\ \vdots \\ g(x^n) = y^{(n-1)}. \end{cases}$$

On vérifie bien que $g(\dot{x}^i - x^{i+1}) = 0 = (\frac{d}{dt})y^{(i)} - y^{(i+1)}$ pour $i = 1, \dots, n-1$ et $g(\dot{x}^n + a_1x^n + \dots + a_nx^1) = 0 = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny$. Nous avons alors $(g \circ f)(y) = g(x^1) = y$ et $(f \circ g)(x^i) = f(y^{(i)}) = x^i$, $\forall i = 1, \dots, n$ donc $g \circ f = \text{id}_M$, $f \circ g = \text{id}_{M'}$. Ainsi, nous avons

$$M' \cong M,$$

ce qui traduit, dans le langage de la théorie des modules, le fait que les deux systèmes sont équivalents.

Nous avons un A -morphisme $g : M' \rightarrow M$ donc, par la proposition 1.8, il existe un morphisme de complexe entre la résolution libre de M' et celle de M . Le A -module A^n étant un module projectif, il existe un morphisme g_0 rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\pi} & M \longrightarrow 0, \\ g_0 \swarrow & & \uparrow g \circ \pi' \\ & & A^n \end{array}$$

et pour le déterminer, on utilise la même méthode qu'à l'exemple 2.24 du chapitre 2 : nous avons

$$\begin{cases} (g \circ \pi')(e_1) = g(x^1) = y = \pi(1), \\ (g \circ \pi')(e_2) = \dot{y} = \pi(\frac{d}{dt}), \\ \vdots \\ (g \circ \pi')(e_n) = g(x^n) = y^{(n-1)} = \pi((\frac{d}{dt})^{(n-1)}), \end{cases}$$

et donc g_0 peut être défini par

$$\begin{cases} g_0(e_1) = 1, \\ g_0(e_2) = \frac{d}{dt}, \\ \vdots \\ g_0(e_n) = (\frac{d}{dt})^{n-1}. \end{cases}$$

Si nous appelons $U = (1 \ \frac{d}{dt} \ \dots \ (\frac{d}{dt})^{n-1})^t$, nous avons alors le diagramme commutatif exact suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\pi} & M \longrightarrow 0 \\ U \uparrow & & g \uparrow \\ A^n & \xrightarrow{\pi'} & M' \longrightarrow 0. \end{array}$$

Puisque A^n est un A -module projectif, nous savons qu'il existe un morphisme $g_1 : A^n \rightarrow A$, déterminé par la matrice U' dans la base canonique de A^n , qui rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\cdot R} & RA & \longrightarrow & 0, \\ & & g_1 \swarrow & & \uparrow \cdot R'U & & \\ & & & & A^n & & \end{array}$$

avec $R'U = (0 \dots 0 R)^t$. Nous devons donc résoudre $U'R = R'U$ et on montre facilement que ce morphisme est défini par $U' = (0 \dots 0 1)^t$.

De même, nous avons un A -morphisme $f : M \rightarrow M'$, alors, par la proposition 1.8, il existe un morphisme de complexe entre la résolution libre de M et celle de M' . Nous avons $(f \circ \pi)(1) = f(y) = x^1 = \pi'(e_1)$ et donc si l'on note $f_0 : A \rightarrow A^n$, défini par $f_0(1) = e_1$, alors nous avons le diagramme commutatif exact suivant :

$$\begin{array}{ccccc} A^n & \xrightarrow{\pi} & M' & \longrightarrow & 0. \\ f_0 \swarrow & & \uparrow f \circ \pi & & \\ & & A & & \end{array}$$

Le morphisme f_0 est décrit par la matrice $V' = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$ dans la base canonique de A . Puisque A est un A -module projectif, il existe un morphisme f_1 rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A^n & \xrightarrow{\cdot R'} & R'A^n & \longrightarrow & 0, \\ & & f_1 \swarrow & & \uparrow \cdot RV' & & \\ & & & & A & & \end{array}$$

avec $RV' = (R \ 0 \ \dots \ 0)$. Ce morphisme est unique car $\cdot R'$ est un monomorphisme et s'il est décrit par la matrice $V = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$ dans la base canonique de A , alors V doit vérifier la relation $V R' = R V'$, c-à-d les $b_i \in A$ doivent satisfaire le système suivant

$$\begin{cases} b_1 \frac{d}{dt} + b_n a_n = R, \\ -b_1 + b_2 \frac{d}{dt} + b_n a_{n-1} = 0, \\ \cdot \\ \cdot \\ -b_{n-2} + b_{n-1} \frac{d}{dt} + b_n a_2 = 0, \\ -b_{n-1} + b_n \left(\frac{d}{dt} + a_1 \right) = 0, \end{cases}$$

et nous obtenons $b_{n-1} = b_n \left(\frac{d}{dt} + a_1 \right) \Rightarrow b_{n-2} = b_n \left(\frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_2 \right) \Rightarrow b_{n-3} = b_n \left(\frac{d^3}{dt^3} + a_1 \frac{d^2}{dt^2} + a_2 \frac{d}{dt} + a_3 \right) \Rightarrow \dots \Rightarrow b_1 = b_n \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^{n-1} + a_1 \left(\frac{d}{dt} \right)^{n-2} + a_2 \left(\frac{d}{dt} \right)^{n-3} + \dots + a_{n-1} \right)$. En substituant b_1 dans la première équation du système, nous obtenons $b_n R = R \Rightarrow b_n = 1$ et donc

$$V = \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^{n-1} + a_1 \left(\frac{d}{dt} \right)^{n-2} + a_2 \left(\frac{d}{dt} \right)^{n-3} + \dots + a_{n-1} \quad \dots \quad \frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_2 \quad \frac{d}{dt} + a_1 \quad 1 \right).$$

Nous avons alors le diagramme commutatif exact suivant

$$(43) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\cdot R} & A & \xrightarrow{\pi} & M \longrightarrow 0 \\ & & \cdot U' \uparrow \downarrow \cdot V & & \cdot U \uparrow \downarrow \cdot V' & & g \uparrow \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & A^n & \xrightarrow{\cdot R'} & A^n & \xrightarrow{\pi'} & M' \longrightarrow 0 \end{array}$$

et nous avons les relations matricielles suivantes $U'R = R'U$ et $VR' = RV'$.

Remarquons finalement que nous pouvons traiter de manière identique le même système avec les a_i dépendant du temps. Nous avons montré dans l'exemple 1.5 qu'un même système, écrit sous la forme de Kalman ou sous une forme polynomial, détermine le même module et donc que ces deux formes sont deux résolutions libres différentes du même module.

EXEMPLE 1.11. Reprenons l'exemple 1.5. En raisonnant comme précédemment, nous obtenons le diagramme commutatif exact suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\cdot R} & A^2 & \xrightarrow{\pi} & M \longrightarrow 0, \\ & & \cdot U' \uparrow \downarrow \cdot V & & \cdot U \uparrow \downarrow \cdot V' & & g \uparrow \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & A^3 & \xrightarrow{\cdot R'} & A^4 & \xrightarrow{\pi'} & M' \longrightarrow 0 \end{array}$$

où les matrices U, U', V et V' peuvent être choisies comme ci-dessous :

$$U = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} - 1 & -1 \\ \frac{d}{dt} & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, U' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} -\frac{d}{dt} + 2 & \frac{d}{dt} - 1 & \frac{d^2}{dt^2} - 2\frac{d}{dt} \end{pmatrix}, V' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

REMARQUE 1.2. Nous venons de voir que si $f : M \rightarrow N$ est un morphisme entre deux A -modules, alors f induit un morphisme de complexes entre la résolution de M et celle de N . Mais réciproquement, la preuve de la proposition 1.8 nous montre bien que s'il existe $f_0 : P_0 \rightarrow P'_0$ tel que $\text{im}(f_0 \circ d_1) \subseteq \text{im} d'_1$, alors f_0 induit à la fois un morphisme de complexe mais aussi un morphisme entre M et N . Voir l'exemple 1.7.

COROLLAIRE 1.1. Soient (P_i, d_i) et (P'_i, d'_i) deux résolutions d'un même A -module M , alors il existe un homotopisme entre (P_i, d_i) et (P'_i, d'_i) .

PREUVE. En prenant l'identité $\text{id}_M : M \rightarrow M$ comme morphisme, nous obtenons, grâce à la proposition 1.8, l'existence de morphismes $f_i : P_i \rightarrow P'_i$ vérifiant $f_{i-1} \circ d_i = d'_i \circ f_i$, $i \geq 0$, avec $f_{-1} = \text{id}_M$. De même, il existe des morphismes $g_i : P'_i \rightarrow P_i$ vérifiant $g_{i-1} \circ d'_i = d_i \circ g_i$, $i \geq 0$, avec $g_{-1} = \text{id}_M$. D'où $(g_{i-1} \circ f_{i-1}) \circ d_i = g_{i-1} \circ d'_i \circ f_i = d_i \circ (g_i \circ f_i)$, alors le morphisme de complexe identité $\text{id} : (P_i, d_i) \rightarrow (P'_i, d'_i)$ et le morphisme de complexe $h : (P_i, d_i) \rightarrow (P_i, d_i)$, défini par $h_i = g_i \circ f_i$, sont homotopes grâce à la proposition 1.8, d'où il existe $s_i : P_i \rightarrow P_{i+1}$ tel que $\text{id}_{P_i} - g_i \circ f_i = d_{i+1} \circ s_i + s_{i-1} \circ d_i$, $i \geq 0$. De même, nous avons $d'_i \circ (f_i \circ g_i) = (f_{i-1} \circ d_i) \circ g_i = f_{i-1} \circ g_{i-1} \circ d'_i$, ceci implique que les deux morphismes de complexes $\text{id}_{P'} : P' \rightarrow P'$ et $k : P' \rightarrow P'$, défini par $k_i = f_i \circ g_i$, sont homotopes, d'où il existe $s'_i : P'_i \rightarrow P'_{i+1}$ tel que $\text{id}_{P'_i} - f_i \circ g_i = d'_{i+1} \circ s'_i + s'_{i-1} \circ d'_i$, $i \geq 0$. Ainsi, les deux résolutions (P_i, d_i) et (P'_i, d'_i) sont homotopiquement équivalentes. \square

EXEMPLE 1.12. Nous avons montré dans l'exemple 1.10 que $M' \cong M$. Ainsi, d'après le corollaire 1.1, il existe un homotopisme entre les deux résolutions libres de M et M' . En effet,

du diagramme (43) de l'exemple 1.10, on déduit le diagramme commutatif exact suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A^n & \xrightarrow{\cdot R'} & A^n & \longrightarrow & M' \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \cdot V & & \uparrow \cdot V' & & \uparrow f \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\cdot R} & A & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \cdot U' & & \uparrow \cdot U & & \uparrow g \\ 0 & \longrightarrow & A^n & \xrightarrow{\cdot R'} & A^n & \longrightarrow & M' \longrightarrow 0. \end{array}$$

qui, par composition, donne le diagramme commutatif exact suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A^n & \xrightarrow{\cdot R'} & A^n & \longrightarrow & M' \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \cdot (U'V) & & \uparrow \cdot (UV') & & \parallel \text{id}_{M'} \\ 0 & \longrightarrow & A^n & \xrightarrow{\cdot R'} & A^n & \longrightarrow & M' \longrightarrow 0, \end{array}$$

car $f \circ g = \text{id}_{M'}$ et où les matrices $U'V$ et UV' sont définies par

$$U'V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{d}{dt} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad UV' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_n & b_{n-1} & \dots & b_2 & b_1 \end{pmatrix},$$

avec $b_n = \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} + a_1 \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-2} + \dots + a_{n-1}$, \dots , $b_3 = \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + a_1 \left(\frac{d}{dt}\right) + a_2$, $b_2 = \left(\frac{d}{dt}\right) + a_1$ et $b_1 = 1$. En raisonnant de même qu'à la proposition 1.8 et au corollaire 1.1, et en remarquant que $\cdot R'$ est un monomorphisme, nous savons qu'il existe une unique matrice S telle que nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A^n & \xrightarrow{\cdot R'} & R'A^n \longrightarrow 0, \\ & & \cdot S \swarrow & & \uparrow \cdot (I_n - UV') \\ & & & & A^n \end{array}$$

où I_n est la matrice identité $n \times n$. Nous devons donc résoudre le système $SR' = I_n - UV'$ et un calcul élémentaire donne

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{d}{dt} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -\frac{d}{dt} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-3} & \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-4} & \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-5} & \dots & -1 & 0 \\ -\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-2} & \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-3} & \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-4} & \dots & -\frac{d}{dt} & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors la relation matricielle $I_n = UV' + SR'$. De plus, nous avons $(I_n - UV')R' = R'(I_n - UV') = R'SR' \Rightarrow (I_n - UV' - R'S)R' = 0 \Rightarrow I_n - UV' - R'S = 0$ puisque $\cdot R'$ est

un homomorphisme. Donc, nous avons la nouvelle relation matricielle $I_n = U'V + R'S$. Nous pouvons faire de même avec la résolution de M et nous obtenons

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\cdot R} & A & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \cdot VU' & & \uparrow \cdot V'U & & \parallel \text{id}_M & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\cdot R} & A & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

car $g \circ f = \text{id}_M$, où $V'U = 1$ et $VU' = 1$. D'où, les deux résolutions du A -module à gauche $M \cong M'$ sont homotopiquement équivalentes.

EXEMPLE 1.13. Nous reprenons l'exemple 1.5. En raisonnant de la même façon que précédemment, on montre que $I_2 = V'U$, $1 = VU'$, $I_4 = UV' + SR$ et $I_3 = U'V + RS$ avec $\cdot S : A^4 \rightarrow A^3$ défini par :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{d}{dt} + 1 \\ 1 & -1 & -\frac{d}{dt} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les deux résolutions libres du module M , définies à l'exemple 1.5, sont homotopiquement équivalentes.

1.3.2. *Equivalence sur un anneau principal.* Donnons quelques résultats sur l'équivalence des systèmes sur un anneau principal. Rappelons tout d'abord la situation bien connue en contrôle de l'anneau $A = \mathbb{R}[s]$. Nous renvoyons le lecteur à [5, 17, 50, 81] pour plus de détails.

Soit R une matrice $q \times p$ ($q \leq p$), de rang générique maximal et à coefficients dans $\mathbb{R}[s]$. Alors, par application des trois opérations élémentaires suivantes :

- échanger deux lignes ou deux colonnes,
- multiplier une ligne ou une colonne par une constante,
- additionner le produit d'une ligne (resp. colonne) par un polynôme à une autre ligne (resp. colonne),

nous obtenons une matrice R' équivalente à R et définie par

$$R' = U' R V',$$

où U' et V' sont deux matrices élémentaires (donc unimodulaires). Ainsi, on peut démontrer que, pour toute matrice R , il existe une matrice équivalente R' , appelée *forme de Smith* de R et définie par

$$R' = \begin{pmatrix} \text{diag}\{a_1(s), a_2(s), \dots, a_q(s)\} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

où les polynômes $a_r(s)$, appelés *facteurs invariants* de R , vérifient $a_r(s) \mid a_{r+1}(s)$, $1 \leq r \leq q$.

EXEMPLE 1.14. La matrice $R = \begin{pmatrix} s^2 + 1 & -1 & 1 \\ -1 & s^2 + 1 & -1 \end{pmatrix}$ a pour forme de Smith la matrice

$R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & 0 \end{pmatrix}$, car nous avons la relation matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^2 + 1 & -1 & 1 \\ -1 & s^2 + 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -s^2 - 2 \end{pmatrix},$$

avec U' et V' deux matrices élémentaires. Les facteurs invariants de R sont alors 1 et s^2 . Au niveau des modules, nous avons alors le diagramme commutatif exact suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A^2 & \xrightarrow{\cdot R} & A^3 & \xrightarrow{\pi} & M \longrightarrow 0 \\ & & \cdot U' \uparrow \downarrow \cdot U'^{-1} & & \cdot V'^{-1} \uparrow \downarrow \cdot V' & & \\ 0 & \longrightarrow & A^2 & \xrightarrow{\cdot R'} & A^3 & \xrightarrow{\pi'} & M' \longrightarrow 0 \end{array}$$

qui induit un isomorphisme entre M et M' . De plus, la structure diagonale de R' entraîne :

$$M' = A/A \oplus A/A s^2 \oplus A/A 0 = A/A s^2 \oplus A.$$

La proposition suivante montre que la notion de facteurs invariants existe pour tout anneau principal A .

PROPOSITION 1.9. *Soit M un A -module à gauche de type fini sur un anneau principal commutatif A , alors il existe deux entiers r, s et des éléments non inversibles a_1, \dots, a_r de A , vérifiant $a_{i+1} \in A a_i$, pour $i \geq 1$, tels que :*

$$M \cong \sum_{i=1}^r A/A a_i \oplus A^s.$$

Les nombres r et s , ainsi que l'ensemble des idéaux $A a_i$, sont uniquement définis par M .

Nous renvoyons à [15] pour une preuve.

REMARQUE 1.3. Grâce à la proposition précédente, deux modules sur un anneau principal A sont isomorphes ssi ils ont le même nombre r , les mêmes idéaux $A a_i$, $1 \leq i \leq r$ et le même nombre s . Si de plus, M est défini par une matrice R de rang maximal, alors $a_1 \dots a_k$ est le pgcd des mineurs $k \times k$ de R [15].

EXEMPLE 1.15. Considérons les systèmes équivalents $\ddot{y} - \dot{u} = 0$ et

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = 0, \\ \dot{x}^2 = x^1 + v. \end{cases}$$

En raisonnant comme à l'exemple 1.12, nous obtenons alors le diagramme commutatif exact suivant

$$(44) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\cdot R} & A^2 & \xrightarrow{\pi} & M \longrightarrow 0, \\ & & \cdot U' \uparrow \downarrow \cdot V & & \cdot U \uparrow \downarrow \cdot V' & & g \uparrow \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & A^2 & \xrightarrow{\cdot R'} & A^3 & \xrightarrow{\pi'} & M' \longrightarrow 0, \end{array}$$

avec $R = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} & -\frac{d}{dt} \end{pmatrix}$, $R' = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{d}{dt} & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f(y) = x^2, \\ f(u) = v \end{cases}$, $\begin{cases} g(x^1) = \dot{y} - u, \\ g(x^2) = y, \\ g(v) = u, \end{cases}$

$$U' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{dt} \end{pmatrix}, V' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que $g \circ f = \text{id}_M$ et $f \circ g = \text{id}_{M'}$, d'où $M \cong M'$. Ceci est bien en accord avec le fait que la forme de Smith de R est $\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et celle de R' est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où, $M \cong A/A \frac{d}{dt} \oplus A$ et $M' \cong A/A \oplus A/A \frac{d}{dt} \oplus A = A/A \frac{d}{dt} \oplus A$.

1.4. Théorème de la suite exacte d'homologie.

PROPOSITION 1.10. Soient $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules et (P'_i, d'_i) (resp. (P''_i, d''_i)) deux résolutions projectives de M' et M'' . Alors, il existe une résolution projective (P_i, d_i) de M vérifiant $P_i = P'_i \oplus P''_i$.

PREUVE. Nous pouvons construire le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow d'_0 & & \uparrow d_0 & & \uparrow d''_0 & \\ 0 & \longrightarrow & P'_0 & \xrightarrow{i_0} & P'_0 \oplus P''_0 & \xrightarrow{\pi_0} & P''_0 & \longrightarrow 0, \end{array}$$

car P''_0 est un A -module projectif, donc il existe $h_0 : P''_0 \rightarrow M$ tel que $g \circ h_0 = d''_0$. On peut alors définir $d_0 : P'_0 \oplus P''_0 \rightarrow M$ par $d_0(p'_0 + p''_0) = (f \circ d'_0)(p'_0) + h_0(p''_0)$. On vérifie que $g \circ d_0 = d''_0 \circ \pi_0$ et $f \circ d'_0 = d_0 \circ i_0$. Le A -morphisme d_0 est surjectif car, si $m \in M$, alors, puisque d''_0 est surjectif, il existe $p''_0 \in P''_0$ tel que $g(m) = d''_0(p''_0) = (g \circ h_0)(p''_0) \Rightarrow m - h_0(p''_0) \in \ker g = \text{im } f$, d'où il existe $m' \in M'$ tel que $m - h_0(p''_0) = f(m')$. Or, d'_0 est surjectif, donc il existe $p'_0 \in P'_0$ tel que $d'_0(p'_0) = m'$, et nous obtenons $m = (f \circ d'_0)(p'_0) + h_0(p''_0) = d_0(p'_0 + p''_0)$, ce qui prouve que d_0 est surjectif. En appliquant le lemme du serpent, on obtient que la suite $0 \rightarrow \ker d'_0 \rightarrow \ker d_0 \rightarrow \ker d''_0 \rightarrow 0$ est une suite exacte. Puisque $\ker d'_0 = \text{im } d'_1$ et $\ker d''_0 = \text{im } d''_1$ alors, nous avons le diagramme commutatif exact suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \ker d'_0 & \longrightarrow & \ker d_0 & \longrightarrow & \ker d''_0 & \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow d'_1 & & \uparrow d_1 & & \uparrow d''_1 & \\ 0 & \longrightarrow & P'_1 & \xrightarrow{i_1} & P'_1 \oplus P''_1 & \xrightarrow{\pi_1} & P''_1 & \longrightarrow 0, \end{array}$$

avec d_1 défini comme précédemment. Par récurrence, on obtient la proposition. \square

DÉFINITION 1.8. Une suite de complexe $(P_i, d_i) \xrightarrow{f} (P'_i, d'_i) \xrightarrow{g} (P''_i, d''_i)$ est dite *exacte* si la suite $P_n \xrightarrow{f_n} P'_n \xrightarrow{g_n} P''_n$ est exacte pour tout n .

Le théorème suivant est appelé le *théorème de la suite exacte d'homologie*. Nous verrons au prochain chapitre que ce théorème est important pour définir de manière intrinsèque toute propriété de modules définie à l'aide de foncteurs.

THÉOREME 1.1. Soit $0 \rightarrow (P'_i, d'_i) \xrightarrow{f} (P_i, d_i) \xrightarrow{g} (P''_i, d''_i) \rightarrow 0$ une suite exacte de complexes, alors il existe des morphismes $\delta_i : H_i(P'') \rightarrow H_{i-1}(P)$ tels que la suite

$$\dots \rightarrow H_i(P') \xrightarrow{H_i(f)} H_i(P) \xrightarrow{H_i(g)} H_i(P'') \xrightarrow{\delta_i} H_{i-1}(P') \xrightarrow{H_{i-1}(f)} H_{i-1}(P) \xrightarrow{H_{i-1}(g)} H_{i-1}(P'') \rightarrow \dots$$

est exacte pour tout i .

PREUVE. Nous avons le diagramme commutatif exact suivant pour tout i

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \rightarrow & \ker d'_{i+1} & \rightarrow & \ker d_{i+1} & \rightarrow & \ker d''_{i+1} & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow & P'_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & P_{i+1} & \xrightarrow{g_{i+1}} & P''_{i+1} & \rightarrow 0 \\ & \downarrow d'_{i+1} & & \downarrow d_{i+1} & & \downarrow d''_{i+1} & \\ 0 \rightarrow & P'_i & \xrightarrow{f_i} & P_i & \xrightarrow{g_i} & P''_i & \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & \text{coker } d'_{i+1} & \rightarrow & \text{coker } d_{i+1} & \rightarrow & \text{coker } d''_{i+1} & \rightarrow 0, \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

et donc, en lui appliquant le lemme du serpent, on obtient la suite exacte suivante pour tout i :

(45)

$$0 \rightarrow \ker d'_{i+1} \rightarrow \ker d_{i+1} \rightarrow \ker d''_{i+1} \xrightarrow{\delta} \text{coker } d'_{i+1} \rightarrow \text{coker } d_{i+1} \rightarrow \text{coker } d''_{i+1} \rightarrow 0.$$

En utilisant la suite exacte 2 de la proposition 1.3, nous obtenons le diagramme commutatif exact suivant où l'exactitude des deux suites horizontales centrales est donnée par la suite exacte (45) :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H_i(P') & \rightarrow & H_i(P) & \rightarrow & H_i(P'') \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{coker } d'_{i+1} & \rightarrow & \text{coker } d_{i+1} & \rightarrow & \text{coker } d''_{i+1} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \kappa'_i & & \downarrow \kappa_i & & \downarrow \kappa''_i \\ 0 \rightarrow & \ker d'_{i-1} & \rightarrow & \ker d_{i-1} & \rightarrow & \ker d''_{i-1} & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & H_{i-1}(P') & \rightarrow & H_{i-1}(P) & \rightarrow & H_{i-1}(P'') & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

En appliquant à ce diagramme le lemme du serpent, on obtient la suite exacte

$$H_i(P') \rightarrow H_i(P) \rightarrow H_i(P'') \xrightarrow{\delta_i} H_{i-1}(P') \rightarrow H_{i-1}(P) \rightarrow H_{i-1}(P'').$$

□

1.5. Equivalence projective. Le lemme suivant est appelé le *lemme de Schanuel*.

LEMME 1.2. Soient $0 \rightarrow L \rightarrow P \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow L' \rightarrow P' \xrightarrow{\phi'} M \rightarrow 0$ deux suites exactes avec P et P' deux A -modules projectifs. Alors nous avons

$$L \oplus P' \cong L'' \cong L' \oplus P,$$

où L'' est le noyau du morphisme $\psi : P \oplus P' \rightarrow M$, défini par $\psi(a, b) = \phi(a) - \phi'(b), \forall (a, b) \in P \oplus P'$.

PREUVE. Considérons le morphisme $\psi : P \oplus P' \rightarrow M$ défini par $\forall (a, b) \in P \oplus P' : \psi(a, b) = \phi(a) - \phi'(b)$. Si nous appelons L'' le noyau de ψ , nous avons alors le diagramme commutatif exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 & \rightarrow & L & \rightarrow & P & \xrightarrow{\phi} & M & \rightarrow & 0 & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & & \\ 0 & \rightarrow & L'' & \rightarrow & P \oplus P' & \xrightarrow{\psi} & M & \rightarrow & 0 & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 & \rightarrow & Q & \rightarrow & P' & \rightarrow & 0 & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & & \\ & & 0 & & 0 & & & & & \end{array}$$

Le conoyau Q du morphisme induit $L \rightarrow L''$ est isomorphe au A -module projectif P' , ce qui entraîne que la première suite exacte verticale se scinde. Nous avons alors $L'' \cong L \oplus P'$. En raisonnant de même avec ϕ' à la place de ϕ , on obtiendrait $L'' \cong L' \oplus P$, d'où le résultat. \square

La proposition suivante est une extension du lemme de Schanuel à de longues résolutions projectives. Elle se démontre de même que le lemme précédent, en utilisant une récurrence.

PROPOSITION 1.11. Soient

$$\begin{array}{l} \dots \rightarrow P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} P_{i-2} \rightarrow \dots \xrightarrow{d_1} P_0 \rightarrow M \rightarrow 0, \\ \parallel \\ \dots \rightarrow P'_i \xrightarrow{d'_i} P'_{i-1} \xrightarrow{d'_{i-1}} P'_{i-2} \rightarrow \dots \xrightarrow{d'_1} P'_0 \rightarrow M \rightarrow 0, \end{array}$$

deux résolutions projectives du même module M , nous avons alors :

$$\ker d_i \oplus P'_i \oplus P'_{i-1} \oplus \dots \oplus P'_0 \cong \ker d'_i \oplus P_i \oplus P_{i-1} \oplus \dots \oplus P_0.$$

En particulier, $\ker d_i$ est un A -module projectif ssi $\ker d'_i$ est un A -module projectif.

DÉFINITION 1.9. Soient M et N deux A -modules, alors nous dirons que M et N sont *projectivement équivalents* s'il existe deux A -modules projectifs P et Q tels que :

$$M \oplus P \cong N \oplus Q.$$

REMARQUE 1.4. La relation " M est projectivement équivalent à N " est une relation d'équivalence. Une résolution d'un A -module M n'est pas définie de façon unique mais est déterminée à une *équivalence projective* près, grâce à la proposition 1.11, c-à-d si $P = (P_i, d_i)$ et $P' = (P'_i, d'_i)$ sont deux résolutions de M , alors pour tout i , il existe des A -modules projectifs Q_i et Q'_i tels

que $\ker d_i \oplus Q'_i \cong \ker d'_i \oplus Q_i$. Toute résolution libre est en particulier une résolution projective puisque tout A -module libre est projectif. Donc, d'après le lemme 1.2, les modules de syzygies ne sont pas uniques mais sont déterminés à une équivalence projective près.

DÉFINITION 1.10. Soit un A -module à gauche M défini par

$$P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

alors on note par $N = \text{coker } d_1^*$ le A -module à droite défini par

$$(46) \quad P_0^* \xrightarrow{d_1^*} P_1^* \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

où d_1^* est l'opérateur transposé de d_1 , au sens de la définition 2.8 du chapitre 2.

Le théorème suivant sera, par la suite, d'une grande importance. Cependant, n'ayant pas trouvé dans la littérature de preuve de ce résultat, nous en proposons une.

THÉORÈME 1.2. Soit un A -module à gauche M défini par la résolution projective $P = (P_i, d_i)$, alors le A -module à droite $N = \text{coker } d_1^*$ ne dépend que de M à une équivalence projective près. En d'autres termes, si $P' = (P'_i, d'_i)$ est une autre résolution projective de M , alors il existe deux A -modules projectifs Q et Q' tels que :

$$\text{coker } d_1^* \oplus Q' \cong \text{coker } d_1'^* \oplus Q.$$

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant, tiré de [88].

LEMME 1.3. Soient $P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$ et $P'_1 \xrightarrow{d'_1} P'_0 \xrightarrow{d'_0} M \longrightarrow 0$ deux résolutions projectives de M et $\phi : M \rightarrow M$ un isomorphisme. Alors, il existe un isomorphisme $\alpha : P_1 \oplus P'_1 \rightarrow P_0 \oplus P'_0$ et un isomorphisme $\beta : P_1 \oplus P'_1 \oplus P_0 \oplus P'_0 \rightarrow P_1 \oplus P'_1 \oplus P_0 \oplus P'_0$ tel que nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} P_1 \oplus P'_0 \oplus P_0 \oplus P'_1 & \xrightarrow{(d_1 \oplus \text{id}_{P'_0}, 0)} & P_0 \oplus P'_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_1 \oplus P'_0 \oplus P_0 \oplus P'_1 & \xrightarrow{(0, \text{id}_{P_0} \oplus d'_1)} & P_0 \oplus P'_0 \end{array}$$

PREUVE. L'isomorphisme $\phi : M \rightarrow M$ induit un morphisme $\phi \circ d_0 : P_0 \rightarrow M$ et, puisque P_0 est un A -module projectif, il existe $\gamma_0 : P_0 \rightarrow P'_0$ tel que nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} P_0 & \xrightarrow{d_0} & M \longrightarrow 0 \\ \gamma_0 \downarrow & & \downarrow \phi \\ P'_0 & \xrightarrow{d'_0} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

c-à-d, $d'_0 \circ \gamma_0 = \phi \circ d_0$. En raisonnant de même avec ϕ^{-1} , on montre qu'il existe $\gamma'_0 : P'_0 \rightarrow P_0$ tel que $d_0 \circ \gamma'_0 = \phi^{-1} \circ d'_0$. Soient $\alpha', \alpha'' : P_0 \oplus P'_0 \rightarrow P_0 \oplus P'_0$ définis par $\alpha'(x, y) = (x, y - \gamma_0(x))$ et $\alpha''(x, y) = (x - \gamma'_0(y), y)$. Les morphismes α' et α'' sont de façon évidente des isomorphismes. Soit $\alpha = \alpha'^{-1} \circ \alpha''$, alors nous avons $(\phi \circ d_0, d'_0)(\alpha''(x, y)) = (\phi \circ d_0)(x) - (\phi \circ d_0 \circ \gamma'_0)(y) + d'_0(y) =$

$(\phi \circ d_0)(x) = (\phi \circ (d_0, 0))(x, y)$. De plus, $(\phi \circ d_0, d'_0)(\alpha'(x, y)) = (\phi \circ d_0)(x) + d'_0(y) - (d'_0 \circ \gamma_0)(x) = d'_0(y) = (0, d'_0)(x, y)$. Or, $(\phi \circ d_0, d'_0)(\alpha''(x, y)) = ((\phi \circ d_0, d'_0) \circ \alpha')(\alpha(x, y)) = (0, d'_0)(\alpha(x, y))$, d'où

$$\phi \circ (d_0, 0) = (0, d'_0) \circ \alpha,$$

et nous avons le diagramme commutatif exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker d_0 \oplus P'_0 & \longrightarrow & P_0 \oplus P'_0 & \xrightarrow{(d_0, 0)} & M \longrightarrow 0 \\ & & & & \alpha \downarrow & & \downarrow \phi \\ 0 & \longrightarrow & P_0 \oplus \ker d'_0 & \longrightarrow & P_0 \oplus P'_0 & \xrightarrow{(0, d'_0)} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

Puisque ϕ et α sont des isomorphismes, alors il existe un isomorphisme, noté encore $\alpha : \ker d_0 \oplus P'_0 \rightarrow P_0 \oplus \ker d'_0$. Maintenant, puisque $\ker d_0 = \text{im } d_1$ et $\ker d'_0 = \text{im } d'_1$, nous avons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} P_1 \oplus P'_0 & \xrightarrow{d_1 \oplus \text{id}_{P'_0}} & \text{im } d_1 \oplus P'_0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha \\ P_0 \oplus P'_1 & \xrightarrow{\text{id}_{P_0} \oplus d'_1} & P_0 \oplus \text{im } d'_1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

et en raisonnant de même avec $\text{im } d_1 \oplus P'_0$ que précédemment avec M , nous obtenons un isomorphisme $\beta : P_1 \oplus P'_0 \oplus P'_1 \oplus P_0 \rightarrow P_0 \oplus P'_1 \oplus P'_1 \oplus P_0$ tel que $(0, \text{id}_{P_0} \oplus d'_1) \circ \beta = \alpha \circ (d_1 \oplus \text{id}_{P'_0}, 0)$, d'où le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} P_1 \oplus P'_0 \oplus P'_1 \oplus P_0 & \xrightarrow{(d_1 \oplus \text{id}_{P'_0}, 0)} & P_0 \oplus P'_0 \\ \beta \downarrow & & \downarrow \alpha \\ P_0 \oplus P'_1 \oplus P'_1 \oplus P_0 & \xrightarrow{(0, \text{id}_{P_0} \oplus d'_1)} & P_0 \oplus P'_0 \end{array}$$

□

REMARQUE 1.5. Une conséquence directe de ce lemme est que :

$$\text{coker } (d_1 \oplus \text{id}_{P'_0}, 0)^* \cong \text{coker } (0, \text{id}_{P_0} \oplus d'_1)^*.$$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème.

PREUVE. Si $P = (P_i, d_i)$ et $P' = (P'_i, d'_i)$ sont deux résolutions projectives du A -module M , alors on peut supposer que nous avons le diagramme commutatif exact suivant :

$$(47) \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & P'_1 \oplus P_0 \oplus P'_0 & & P'_0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker(d_1 \oplus \text{id}_{P'_0}, 0) & \longrightarrow & P_1 \oplus P'_1 \oplus P_0 \oplus P'_0 & \xrightarrow{(d_1 \oplus \text{id}_{P'_0}, 0)} & P_0 \oplus P'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \ker d_1 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & & 0 & & 0 & \end{array}$$

Par le lemme 1.2, nous obtenons alors la suite exacte

$$(48) \quad 0 \longrightarrow Q' \longrightarrow P'_1 \oplus P_0 \oplus P'_0 \xrightarrow{(0, \text{id}_{P'_0})} P'_0 \longrightarrow 0$$

où Q' est le noyau du morphisme $\ker(d_1 \oplus \text{id}_{P'_0}, 0) \rightarrow \ker d_1$ induit par la projection $P'_1 \oplus P_0 \oplus P'_0 \rightarrow P_1$. Donc, $Q' \cong P'_1 \oplus P_0$ est un A -module projectif. Ceci est bien en accord avec le fait que puisque P'_0 est un A -module projectif, alors la suite (48) se scinde et donc $P'_1 \oplus P_0 \oplus P'_0 \cong P'_0 \oplus Q'$, d'où $Q' \cong P'_1 \oplus P_0$ est un A -module projectif. En appliquant au diagramme ci-dessus le foncteur $\text{hom}_A(\cdot, A)$, nous obtenons alors le diagramme commutatif exact suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longleftarrow & Q'^* & \longleftarrow & (P'_1 \oplus P_0 \oplus P'_0)^* & \longleftarrow & P_0^* & \longleftarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 & \longleftarrow & N'' & \longleftarrow & (P_1 \oplus P'_1 \oplus P_0 \oplus P'_0)^* & \xleftarrow{(d_1 \oplus \text{id}_{P'_0}, 0)^*} & (P_0 \oplus P'_0)^* & \longleftarrow M^* \longleftarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \parallel \\ 0 & \longleftarrow & N & \longleftarrow & P_1^* & \xleftarrow{d_1^*} & P_0^* & \longleftarrow M^* \longleftarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

où nous avons noté $N'' = \text{coker}(d_1 \oplus \text{id}_{P'_0}, 0)^*$ et $N = \text{coker} d_1$ et où la première suite horizontale est exacte car duale de la suite scindée (48) (proposition 2.25 du chapitre 2). Par le lemme 1.2,

nous avons alors la suite exacte $0 \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow Q'^* \rightarrow 0$ qui est une suite exacte scindée car Q'^* est un module projectif, d'où $N'' \cong N \oplus Q'^*$.

En raisonnant de même avec la deuxième résolution $F'_1 \xrightarrow{d'_1} F'_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ et en substituant la suite horizontale médiane du diagramme (47) par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker(0, d'_1 \oplus \text{id}_{P_0}) \longrightarrow P_1 \oplus P'_1 \oplus P_0 \oplus P'_0 \xrightarrow{(0, d'_1 \oplus \text{id}_{P_0})} P_0 \oplus P'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

nous obtenons alors $N''' \cong N' \oplus Q^*$, où $N' = \text{coker } d'_1$ et $N''' = \text{coker}(0, d'_1 \oplus \text{id}_{P_0})^*$. Or, $N'' \cong N'''$ grâce au lemme 1.3, d'où $N \oplus Q'^* \cong N' \oplus Q^*$, ou encore :

$$(49) \quad N \oplus P_0^* \oplus P_1^* \cong N' \oplus P_0^* \oplus P_1^*.$$

□

EXEMPLE 1.16. Considérons le système suivant

$$(50) \quad \begin{cases} d_1 y_1 = 0, \\ \frac{1}{2}(d_2 y_1 + d_1 y_2) = 0, \\ d_2 y_2 = 0. \end{cases}$$

correspondant en élasticité aux équations des petits déplacements rigides dans \mathbb{R}^2 . On peut montrer que le $A = \mathbb{R}[d_1, d_2]$ -module associé est défini par la résolution libre suivante (voir chapitre 9 pour plus de détails)

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{R_1} A^3 \xrightarrow{R_0} A^2 \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0,$$

avec

$$R_0 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ \frac{1}{2}d_2 & \frac{1}{2}d_1 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad R_1 = (d_2^2 \quad -2d_1d_2 \quad d_1^2).$$

En appelant $y_i = \pi(e_i)$, où $\{e_1, e_2\}$ est la base canonique de A^2 , nous avons alors les équations (50) dans M .

Considérons maintenant un second système d'équations :

$$(51) \quad \begin{cases} d_1 z^1 = 0, \\ d_2 z^1 - z^3 = 0, \\ d_1 z^3 = 0, \\ d_1 z^4 + z^3 = 0, \\ d_2 z^4 = 0, \\ d_2 z^3 = 0, \end{cases}$$

Nous verrons plus tard que ce système correspond à l'opérateur de Spencer du système (50). On peut vérifier que le A -module M' possède la résolution libre suivante

$$0 \rightarrow A^3 \xrightarrow{R'_1} A^6 \xrightarrow{R'_0} A^3 \xrightarrow{\pi'} M' \rightarrow 0,$$

avec

$$R'_0 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ d_2 & -1 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 \\ 0 & d_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad R'_1 = \begin{pmatrix} d_2 & -d_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 & -d_1 & -1 \\ 0 & 0 & -d_2 & 0 & 0 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Si l'on note $z_i = \pi'(e'_i)$, où $\{e'_1, \dots, e'_6\}$ est la base canonique de M' , nous avons alors les équations (51) dans M' .

Définissons le A -morphisme $f : M \rightarrow M'$ par

$$\begin{cases} f(y^1) = z^1, \\ f(y_2) = z^4, \end{cases}$$

et le A -morphisme $g : M' \rightarrow M$ par :

$$\begin{cases} g(z^1) = y^1, \\ g(z^4) = y^2, \\ g(z^3) = d_2 y^1. \end{cases}$$

Nous avons alors $g \circ f = \text{id}_M$ et $f \circ g = \text{id}_{M'}$, d'où :

$$M \cong M'.$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que nous avons alors le diagramme commutatif exact suivant

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{R_1} & A^3 & \xrightarrow{R_0} & A^2 & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \cdot V_2 \uparrow \downarrow \cdot U_2 & & \cdot V_1 \uparrow \downarrow \cdot U_1 & & \cdot V_0 \uparrow \downarrow \cdot U_0 & & g \uparrow \downarrow f & & \\ 0 & \longrightarrow & A^3 & \xrightarrow{R'_1} & A^6 & \xrightarrow{R'_0} & A^3 & \xrightarrow{\pi'} & M' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

avec

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, U_2 = (d_2 \quad -d_1 \quad -1),$$

et

$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2d_2 & -d_1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors $U_0 V_0 = I_2$, $U_1 V_1 = I_3$ et $U_2 V_2 = 1$. Nous avons aussi $I_6 = V_1 U_1 + S_1 R'_1$, $I_3 = V_0 U_0 + S_0 R'_0$ et $I_3 = V_2 U_2 + R'_1 S_1$ avec le A -morphisme $S_0 : A^3 \rightarrow A^6$, défini par

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $S_1 : A^6 \rightarrow A^3$, défini par :

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le théorème (1.2) donne alors

$$N \oplus A^8 \cong N' \oplus A^6,$$

où N est défini par $0 \leftarrow N \leftarrow A^3 \xleftarrow{R_0} A^2$ et N' par $0 \leftarrow N' \leftarrow A^6 \xleftarrow{R'_0} A^3$.

Le théorème 1.2 montre que N défini par (46) ne dépend que de M à une équivalence projective près. Dans le cas des systèmes de dimension projective plus petite ou égale à un, le théorème suivant montre dans ce cas-là que nous avons mieux.

THÉORÈME 1.3. *Soient un A -module M tel que $\text{dp}_A(M) \leq 1$ et $0 \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow P'_1 \xrightarrow{d'_1} P'_0 \xrightarrow{d'_0} M \rightarrow 0$ deux résolutions projectives de M , alors, si l'on note $N = \text{coker } d_1^*$ et $N' = \text{coker } d'_1^*$, nous avons :*

$$N \cong N'.$$

PREUVE. Soient $0 \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow P'_1 \xrightarrow{d'_1} P'_0 \xrightarrow{d'_0} M \rightarrow 0$ deux résolutions projectives de M , alors la suite exacte $0 \rightarrow P \xrightarrow{i} P_0 \oplus P'_0 \xrightarrow{d''_0} M \rightarrow 0$, avec $d''_0(p_0, p'_0) = d_0(p_0) - d'_0(p'_0)$ et $P = \ker d''_0$, est aussi résolution projective de M , grâce au fait que $\text{dp}_A(M) \leq 1$ et à la future proposition 2.13. Nous avons alors le diagramme exact suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & P'_0 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & P & \xrightarrow{i} & P_0 \oplus P'_0 & \xrightarrow{d''_0} & M \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & M \rightarrow 0, \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

où la deuxième suite exacte verticale est trivialement définie et où K est le noyau de l'épimorphisme $P \rightarrow P_1$ induit par cette deuxième suite verticale. Nous obtenons alors $K \cong P_0$. En

dualisant le diagramme précédent, nous obtenons le diagramme commutatif exact suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & 0 \longleftarrow & K^* & \longleftarrow & P_0'^* & \longleftarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 \longleftarrow & N'' \longleftarrow & P^* & \xleftarrow{i^*} & P_0^* \oplus P_0'^* & \xleftarrow{d_0''^*} & M^* \longleftarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 \longleftarrow & N \longleftarrow & P_1^* & \xleftarrow{d_1^*} & P_0^* & \xleftarrow{d_0^*} & M^* \longleftarrow 0, \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

où les deux suites verticales sont exactes car formées de modules projectifs, et $N = \text{coker } d_1^*$ et $N'' = \text{coker } i^*$. En appliquant le lemme du serpent, nous obtenons $N'' \cong N$. En raisonnant de même avec d_1' , on obtient $N'' \cong N'$, avec $N' = \text{coker } d_1'^*$. D'où, $N \cong N'$. \square

REMARQUE 1.6. Le théorème précédent s'applique à tout système de contrôle SISO, à tout système sur un anneau principal (e.g. $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}] \dots$), ou à un système défini par une matrice de rang générique maximal. Ce théorème montre que le A -module $N = \text{coker } d_1^*$ ne dépend que de M et pas du morphisme d_1 de la résolution choisie de M .

EXEMPLE 1.17. Reprenons l'exemple 1.5. Nous avons montré que $M \cong M'$ et donc, nous avons deux résolutions différentes du même module. Nous avons alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 0 \longleftarrow & N & \xleftarrow{\pi} & A & \xleftarrow{R} A^2 \\
 & & & V. \downarrow \uparrow U' & \\
 0 \longleftarrow & N' & \xleftarrow{\pi'} & A^3 & \xleftarrow{R'} A^4,
 \end{array}$$

qui induit deux morphismes $h : N \rightarrow N'$ et $k : N' \rightarrow N$. Soit $\{f_1, f_2, f_3\}$ une base canonique de A^3 et appelons $z_i = \pi(f_i)$, $i = 1, 2, 3$. De même, on appelle $z = \pi'(1)$. Alors, nous avons dans N les équations suivantes :

$$\begin{cases} z \left(\frac{d^2}{dt^2} - 2 \frac{d}{dt} \right) = 0, \\ z \left(-\frac{d}{dt} + 1 \right) = 0. \end{cases} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow N = 0.$$

Nous avons dans N' les équations ci-dessous :

$$\begin{cases} z_1 \frac{d}{dt} + z_3 = 0, \\ -z_1 + z_2 \left(\frac{d}{dt} - 2 \right) - z_3 = 0, \\ -z_2 = 0, \\ z_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow z_1 = z_2 = z_3 = 0 \Rightarrow N' = 0.$$

Finalement, nous obtenons $N = 0 = N'$.

EXEMPLE 1.18. Nous reprenons l'exemple 1.15. Nous avons alors le diagramme commutatif exact suivant :

$$(52) \quad \begin{array}{ccccc}
 0 \longleftarrow & N & \xleftarrow{p} & A & \xleftarrow{R} A^2 \\
 & & & U'. \downarrow \uparrow V. & \\
 0 \longleftarrow & N' & \xleftarrow{p'} & A^2 & \xleftarrow{R'} A^3.
 \end{array}$$

Dans le A -module N , nous avons l'équation suivante

$$z \left(\frac{d^2}{dt^2} - \frac{d}{dt} \right) = 0,$$

où $z = p(1)$, et dans le A -module N' , nous avons le système d'équations suivant

$$\begin{cases} z_1 \frac{d}{dt} - z_2 = 0, \\ z_2 \frac{d}{dt} = 0, \\ z_2 = 0, \end{cases}$$

où, $z_1 = p'(f_1)$, $z_2 = p'(f_2)$ et $\{f_1, f_2\}$ est la base canonique de A^2 . Les matrices V et U' induisent des morphismes $h : N \rightarrow N'$ et $k : N' \rightarrow N$ définis respectivement par $h(n) = p'(U'a)$ avec $p(a) = n$ et $k(n') = p(Vl)$ avec $p'(l) = n'$ (voir exemple 1.7). Nous obtenons alors $h(z) = p'(U') = z_1$ et

$$\begin{cases} k(z_1) = p(Vf_1) = z, \\ k(z_2) = p(Vf_2) = z \frac{d}{dt}. \end{cases}$$

Alors, on vérifie facilement que nous avons $k \circ h = \text{id}_N$ et $h \circ k = \text{id}_{N'}$, et donc $N \cong N'$.

2. Foncteurs Ext et Tor

Dans cette section et dans les suivantes, nous allons montrer comment la théorie des modules permet de donner une classification *intrinsèque* des différents types de *primalités* ainsi que des moyens effectifs pour les tester. En particulier, nous donnons une interprétation de la propriété matricielle (53), appelée *primalité faible*, en terme d'absence de torsion du module M associé à la matrice R . Nous verrons dans les chapitres 5 et 6 comment l'absence de torsion est liée à la contrôlabilité. Nous montrerons aussi comment les foncteurs tor et ext donnent des tests effectifs permettant de vérifier cette propriété.

2.1. Foncteur tor. L'idée d'introduire le foncteur tor en théorie du contrôle nous est venue de la lecture du papier [143]. Dans ce papier, Smith fait ressortir le fait que si l'anneau A est un anneau principal ou de Bezout, alors la propriété de primalité faible est équivalente à l'existence d'une identité de Bezout, mais que c'est faux dans le cas général et en particulier pour l'anneau $H_\infty(\mathbb{C}_+)$.

2.1.1. *Sur la route du tor.* Donnons la définition de primalité faible telle qu'on la rencontre dans la littérature [47, 143, 169].

DÉFINITION 2.1. Soient A un anneau intègre et R une matrice $q \times p$ d'éléments de A ($q \leq p$) de rang maximum. La matrice R est dite *faiblement première à gauche* si la propriété suivante est vérifiée

$$(53) \quad \forall y \in K^q, yR \in A^p \Rightarrow y \in A^q,$$

où $K = Q(A)$ désigne le corps de fractions de A .

EXEMPLE 2.1. Soient $A = \mathbb{R}[s]$ et $R = \begin{pmatrix} s(s+1) & -s \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients dans A et $K = Q(A) = \mathbb{R}(s)$. Cette matrice ne vérifie pas la propriété (53) car nous avons :

$$\frac{1}{s} \begin{pmatrix} s(s+1) & -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+1 & -1 \end{pmatrix} \in A^2, \frac{1}{s} \notin A.$$

Cette propriété est utilisée pour la stabilisation ou pour les factorisations copremières (cf e.g. [47, 143, 169]). Donnons-lui un sens en terme de propriété de modules. Nous supposons pour le moment que le rang de R est quelconque. Nous pouvons associer à la matrice R le A -module à gauche M défini par la présentation finie suivante :

$$(54) \quad 0 \longrightarrow L \longrightarrow A^q \xrightarrow{.R} A^p \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0.$$

Appliquons le foncteur $K \otimes_A \cdot$ à cette suite exacte, nous obtenons alors la suite exacte suivante car K est un A -module plat

$$0 \longrightarrow K \otimes_A L \longrightarrow K^q \xrightarrow{\text{id}_K \otimes .R} K^p \xrightarrow{\text{id}_K \otimes \pi} K \otimes_A M \longrightarrow 0,$$

où le K -morphisme $\text{id}_K \otimes \pi$ est simplement défini par :

$$(55) \quad z(\text{id}_K \otimes .R) = zR \in K^p, z \in K^q.$$

Nous obtenons alors, par passage aux quotients, le diagramme commutatif exact suivant,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & A^q & \xrightarrow{\cdot R} & A^p & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 (56) & & 0 & \longrightarrow & K \otimes_A L & \longrightarrow & K^q & \xrightarrow{\text{id}_K \otimes R} & K^p & \longrightarrow & K \otimes_A M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi'' & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & (K/A)^q & \longrightarrow & (K/A)^p & \longrightarrow & (K/A) \otimes_A M & \longrightarrow & 0, \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

et où l'on a noté par L' le noyau du morphisme induit sur K/A par $K^q \xrightarrow{\text{id}_K \otimes R} K^p$. Ce morphisme, que nous noterons pour l'instant par $\tau : (K/A)^q \rightarrow (K/A)^p$, est défini par

$$(57) \quad \forall z \in (K/A)^q : \tau(z) = \pi''(y(\text{id}_K \otimes R)) = \pi''(yR) \in (K/A)^p,$$

avec $y \in K^q$ satisfaisant $z = \pi'(y)$ et τ ne dépend pas de l'antécédent y de z choisi. Par le lemme du serpent, nous avons la suite exacte suivante :

$$(58) \quad 0 \longrightarrow L \longrightarrow K \otimes_A L \longrightarrow L' \xrightarrow{\delta} M \longrightarrow K \otimes_A M \longrightarrow (K/A) \otimes_A M \longrightarrow 0.$$

Cette suite est équivalente à

$$\begin{cases}
 0 \longrightarrow t(M) \longrightarrow M \longrightarrow K \otimes_A M \longrightarrow (K/A) \otimes_A M \longrightarrow 0, \\
 0 \longrightarrow L \longrightarrow K \otimes_A L \longrightarrow L' \longrightarrow t(M) \longrightarrow 0,
 \end{cases}$$

où $t(M)$ est la partie de torsion du module M .

Supposons maintenant que la matrice R ait un rang maximum, donc $L = 0$, ce qui implique que $K \otimes_A L = 0$. La suite exacte (58) devient alors :

$$0 \longrightarrow L' \xrightarrow{\delta} M \longrightarrow K \otimes_A M \longrightarrow (K/A) \otimes_A M \longrightarrow 0.$$

Nous avons donc :

$$L' \cong t(M).$$

Or, tout élément $0 \neq z \in L'$ vérifie qu'il existe $y \in K^q$ se projetant sur z (donc $y \notin A^q$) et vérifiant $\pi''(yR) = 0$, c-à-d, $yR \in A^p$. Nous obtenons alors la proposition suivante.

PROPOSITION 2.1. *Soit R une matrice de rang maximum. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :*

- R vérifie la propriété (53),
- le A -module à gauche déterminé par R est sans torsion, i.e. $t(M) = 0$.

EXEMPLE 2.2. Considérons la matrice $R = (s(s+1) - s)$ à coefficients dans $A = \mathbb{R}[s]$. Cette matrice correspond au système suivant :

$$s(s+1)y - su = 0.$$

Ce système a de la torsion car $z = (s+1)y - u$ vérifie $sz = 0$. Nous avons alors le diagramme commutatif exact suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\cdot R} & A^2 & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\text{id}_K \otimes R} & K^2 & \longrightarrow & K \otimes_A M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi'' & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & K/A & \longrightarrow & (K/A) \otimes_A M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

et donc $t(M) \cong L'$. En effet, l'élément $z = (s+1)y - u = \pi((s+1) - 1)$ étant un élément de torsion de M , son image dans $K \otimes_A M$ est nulle. Une petite chasse dans le diagramme nous montre que $(s+1) - 1$ est l'image d'un élément de K par P et nous vérifions bien que $\frac{1}{s}(s(s+1) - s) = (s+1) - 1$. Donc

$$\pi''\left(\frac{1}{s}(s(s+1) - s)\right) = \pi''((s+1) - 1) = (0 \ 0),$$

d'où :

$$L' = K\left(\frac{1}{s}\right).$$

La propriété (53) n'est donc pas vérifiée. Réciproquement, une chasse dans le diagramme montre que :

$$\delta\left(\frac{1}{s}\right) = (s+1)y + u.$$

L'exemple suivant est la version module d'un exemple de [1, 143]. Smith utilise cet exemple pour montrer qu'il y a des anneaux intègres A dans lesquels il existe des matrices n'ayant pas de facteurs communs dans les mineurs mais pour lesquelles la propriété (53) n'est pas vérifiée.

EXEMPLE 2.3. Nous prenons $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ et $R = (2 \ 1 + i\sqrt{5})$. On vérifie que le plus grand facteur commun entre 2 et $1 + i\sqrt{5}$ est 1. Cependant, il existe un élément de torsion $z = \pi((1 - i\sqrt{5} \ 3))$ dans le module M , déterminé par R , vérifiant $(1 + i\sqrt{5})z = 0$. On montre facilement que $k = \frac{1-i\sqrt{5}}{2} \in (K/A)$ satisfait

$$\left(\frac{1-i\sqrt{5}}{2}\right)(2 \ 1 + i\sqrt{5}) = (1 - i\sqrt{5} \ 3) \in A^2 \Rightarrow \pi''\left(\left(\frac{1-i\sqrt{5}}{2}\right)(2 \ 1 + i\sqrt{5})\right) = (0 \ 0),$$

d'où, $k \in L'$. De plus, une chasse au diagramme montre que $\delta\left(\frac{1-i\sqrt{5}}{2}\right) = z$.

2.1.2. *Tor et torsion.* Nous avons construit le diagramme commutatif exact (56) en passant aux quotients sur les suites verticales centrales. Mais on aurait très bien pu appliquer directement le foncteur $(K/A) \otimes_A \cdot$ à la suite (54) pour obtenir :

$$0 \longrightarrow (K/A) \otimes_A L \longrightarrow (K/A)^q \xrightarrow{\text{id}_{K/A} \otimes R} (K/A)^p \longrightarrow (K/A) \otimes_A M \longrightarrow 0,$$

où $\text{id}_{K/A} \otimes .R$ est défini par (57). Nous avons vu dans l'exemple 2.2 que, même si $L = 0$, le morphisme $\text{id}_{K/A} \otimes .R : (K/A)^q \rightarrow (K/A)^p$ n'est pas en général injectif et donc L' est différent de $(K/A) \otimes_A L$. Ainsi, le foncteur $X \otimes_A \cdot$, où X est un A -module, n'est pas exact à gauche. Pour étudier le noyau de $\text{id}_{K/A} \otimes .R$, nous sommes alors amenés à introduire le *foncteur tor*.

DÉFINITION 2.2. Soient M et N deux A -modules et

$$\dots \rightarrow P_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \dots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0,$$

une résolution projective du module M . Nous considérons la suite tronquée

$$\dots \rightarrow P_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \dots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \rightarrow 0,$$

alors les groupes d'homologie du complexe

$$(59) \quad \dots \rightarrow N \otimes_A P_i \xrightarrow{\text{id}_N \otimes d_i} N \otimes_A P_{i-1} \xrightarrow{\text{id}_N \otimes d_{i-1}} \dots \xrightarrow{\text{id}_N \otimes d_2} N \otimes_A P_1 \xrightarrow{\text{id}_N \otimes d_1} N \otimes_A P_0 \rightarrow 0,$$

ne dépendent pas de la résolution projective choisie de M .

PREUVE. Nous avons vu au corollaire 1.1 que deux résolutions projectives (P_i, d_i) et (P'_i, d'_i) d'un même module sont homotopiquement équivalentes, c-à-d il existe des A -morphisms $f_i : P_i \rightarrow P'_i$ et $g_i : P'_i \rightarrow P_i$ et des morphismes $s_i : P_i \rightarrow P'_{i+1}$ et $t_i : P'_i \rightarrow P_{i+1}$ tels que $\text{id}_{P_i} - g_i \circ f_i = d'_{i+1} \circ s_i + s_{i-1} \circ d_i$ et $\text{id}_{P'_i} - f_i \circ g_i = d_{i+1} \circ t_i + t_{i-1} \circ d'_i$ pour tout i . Donc, $\text{id}_N \otimes (g_i \circ f_i)$ (resp. $\text{id}_N \otimes (f_i \circ g_i)$) est homotope à $\text{id}_N \otimes \text{id}_{P_i}$ (resp. $\text{id}_N \otimes \text{id}_{P'_i}$) et, en utilisant la proposition 1.7, $H_i(\text{id}_N \otimes f_i) : H_i(N \otimes_A P) \rightarrow H_i(N \otimes_A P')$ est un isomorphisme d'homologie, d'inverse $H_i(\text{id}_N \otimes g_i) : H_i(N \otimes_A P') \rightarrow H_i(N \otimes_A P)$. \square

La proposition précédente justifie la définition suivante.

DÉFINITION 2.3. Nous notons par $\text{tor}_i^A(M, N) = H_i((N \otimes_A P_j, \text{id}_N \otimes d_j))$ le $i^{\text{ème}}$ groupe d'homologie du complexe (59). En particulier, nous avons toujours $\text{tor}_0^A(N, M) = N \otimes_A M$.

D'après ce qui précède, $\text{tor}_i^A(M, N)$ ne dépend pas de la résolution projective de M .

EXEMPLE 2.4. Soit un A -module à gauche M défini par la résolution libre suivante

$$0 \rightarrow A^q \xrightarrow{.R} A^p \rightarrow M \rightarrow 0,$$

alors, par application de $N \otimes_A \cdot$, nous obtenons le complexe suivant

$$0 \rightarrow N^q \xrightarrow{N \otimes .R} N^p \rightarrow N \otimes_A M \rightarrow 0,$$

qui est exacte sauf à gauche, i.e. $H(N^q) = \ker(N \otimes .R) = \text{tor}_1^A(M, N)$. En particulier, en reprenant les exemples 2.2 et 2.3, nous obtenons $\text{tor}_1^A(M, K) = K(\frac{1}{s})$ et $\text{tor}_1^A(M, K) = K(\frac{1-i\sqrt{5}}{2})$.

Donnons un exemple montrant que les $\text{tor}_i^A(N, M)$ ne dépendent pas de la résolution choisie pour le A -module M .

EXEMPLE 2.5. Reprenons l'exemple 2.2 (via un petit changement d'algèbre), où nous avons défini le système

$$(60) \quad \ddot{y} + \dot{y} - \dot{u} = 0,$$

et le $A = \mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$ -module à gauche M défini par la présentation finie

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot R} A^2 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

avec $R = (\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} - \frac{d}{dt})$. Soient maintenant le nouveau système défini par

$$(61) \quad \begin{cases} \dot{x}^1 + x^1 + v = 0, \\ \dot{x}^2 - x^1 - v = 0, \end{cases}$$

et M' le A -module à gauche associé à ce système, c-à-d défini par

$$0 \longrightarrow A^2 \xrightarrow{\cdot R'} A^3 \xrightarrow{\pi'} M' \longrightarrow 0,$$

avec

$$R' = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} + 1 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{d}{dt} & -1 \end{pmatrix}.$$

Appelons $\{e_1, e_2\}$ (resp. $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$) la base canonique de A^2 (resp. de A^3) et $y = \pi(e_1)$ et $u = \pi(e_2)$ (resp. $x^1 = \pi'(e'_1), x^2 = \pi'(e'_2)$ et $v = \pi'(e'_3)$), nous avons alors dans M (resp. M') l'équation (60) (resp. le système (61)). Définissons les morphismes $f : M \rightarrow M'$ par

$$\begin{cases} f(y) = x^2, \\ f(u) = v \end{cases}$$

et $g : M' \rightarrow M$ par

$$\begin{cases} g(x^1) = \dot{y} - u, \\ g(x^2) = y, \\ g(v) = u \end{cases}$$

On a alors $g \circ f = \text{id}_M$ et $f \circ g = \text{id}_{M'}$, d'où :

$$M \cong M'.$$

En s'inspirant de l'exemple 1.10, nous trouvons le diagramme commutatif exact suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\cdot R} & A^2 & \xrightarrow{\pi} & M \longrightarrow 0 \\ & & \cdot U' \uparrow \downarrow \cdot V & & \cdot U \uparrow \downarrow \cdot V' & & g \uparrow \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & A^2 & \xrightarrow{\cdot R'} & A^3 & \xrightarrow{\pi'} & M' \longrightarrow 0, \end{array}$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V = (1 \quad \frac{d}{dt} + 1), V' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par application du foncteur $(K/A) \otimes_A \cdot$ aux présentations finies de M et de M' , nous obtenons les complexes suivants :

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow (K/A) \xrightarrow{\text{id}_{K/A} \otimes R} (K/A)^2 \longrightarrow (K/A) \otimes_A M \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow (K/A)^2 \xrightarrow{\text{id}_{K/A} \otimes R'} (K/A)^3 \longrightarrow (K/A) \otimes_A M' \longrightarrow 0. \end{cases}$$

Les seuls défauts d'exactitude de ces complexes peuvent être l'absence d'injectivité de $1 \otimes R$ et de $1 \otimes R'$. Nous avons montré à l'exemple 2.2 que le défaut d'injectivité est donné par $H_1(P) = (K/A)(1/\frac{d}{dt})$. De même, on vérifie que $(1/\frac{d}{dt} \quad 1/\frac{d}{dt})(\text{id}_{K/A} \otimes R') = (0 \ 0 \ 0)$ et on montre

facilement que $(K/A)^2(1/\frac{d}{dt} \ 1/\frac{d}{dt}) = \ker(\text{id}_{K/A} \otimes .R') = H_1(P')$. Le diagramme (39) devient alors

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(\text{id}_{K/A} \otimes .R) & \longrightarrow & H_1(P) & \longrightarrow & 0 \\ & & \text{id}_{K/A} \otimes .U' \uparrow \downarrow \text{id}_{K/A} \otimes .V & & H(\text{id}_{K/A} \otimes .U') \uparrow \downarrow H(1 \otimes .V) & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker(\text{id}_{K/A} \otimes .R') & \longrightarrow & H_1(P') & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

et donc $H(\text{id}_{K/A} \otimes .U') = \text{id}_{K/A} \otimes .U'$ et $H(\text{id}_{K/A} \otimes .V) = \text{id}_{K/A} \otimes .V$. On a alors $(\text{id}_{K/A} \otimes .U') \circ (\text{id}_{K/A} \otimes .V)(1/\frac{d}{dt}) = (\text{id}_{K/A} \otimes .U')(1/\frac{d}{dt} \ 1/\frac{d}{dt}) = 1/\frac{d}{dt} \Rightarrow H(\text{id}_{K/A} \otimes .U') \circ H(\text{id}_{K/A} \otimes .V) = \text{id}_{H_1(P)}$, et $(\text{id}_{K/A} \otimes .V) \circ (\text{id}_{K/A} \otimes .U')(1/\frac{d}{dt} \ 1/\frac{d}{dt}) = (\text{id}_{K/A} \otimes .V)(1/\frac{d}{dt}) = (1/\frac{d}{dt} \ 1/\frac{d}{dt}) \Rightarrow H(\text{id}_{K/A} \otimes .V) \circ H(\text{id}_{K/A} \otimes .U') = \text{id}_{H_1(P')}$. Ainsi, nous obtenons :

$$H_1(P) \cong \text{tor}_1^A(M, K/A) \cong H_1(P').$$

PROPOSITION 2.2. Soient une suite exacte de A -modules $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ et N un A -module, alors nous avons la suite exacte :

$$(62) \quad \dots \rightarrow \text{tor}_2^A(N, M'') \xrightarrow{\delta_2} \text{tor}_1^A(N, M') \rightarrow \text{tor}_1^A(N, M) \rightarrow \text{tor}_1^A(N, M'') \\ \xrightarrow{\delta_1} N \otimes_A M' \rightarrow N \otimes_A M \rightarrow N \otimes_A M'' \rightarrow 0.$$

PREUVE. En appliquant la proposition 1.10, il existe deux morphismes de complexes $f : (P'_i, d'_i) \rightarrow (P_i, d_i)$ et $g : (P_i, d_i) \rightarrow (P''_i, d''_i)$ tels que la suite $0 \rightarrow P'_i \xrightarrow{f_i} P_i \xrightarrow{g_i} P''_i \rightarrow 0$ est exacte pour tout i . Puisque cette suite est une suite exacte de A -modules projectifs (donc plats), alors la suite $0 \rightarrow N \otimes_A P'_i \xrightarrow{\text{id}_N \otimes f_i} N \otimes_A P_i \xrightarrow{\text{id}_N \otimes g_i} N \otimes_A P''_i \rightarrow 0$ est exacte pour tout i . Donc, nous obtenons la suite exacte de complexes $0 \rightarrow (N \otimes_A P'_i, \text{id}_N \otimes d'_i) \xrightarrow{\text{id}_N \otimes f} (N \otimes_A P_i, \text{id}_N \otimes d_i) \xrightarrow{\text{id}_N \otimes g} (N \otimes_A P''_i, \text{id}_N \otimes d''_i) \rightarrow 0$. Nous pouvons alors utiliser la proposition 1.1 et nous obtenons la suite exacte (62). \square

PROPOSITION 2.3. Soit M un A -module, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. M est un A -module plat,
2. $\text{tor}_i^A(N, M) = 0$ pour tout A -module N et $i \geq 1$,
3. $\text{tor}_1^A(N, M) = 0$ pour tout A -module N .

PREUVE. Supposons que M soit un A -module plat, alors $M \otimes_A \cdot$ transforme une résolution projective de N en suite exacte, donc $\text{tor}_i^A(N, M) = 0$ pour tout $i \geq 1$. L'assertion 2 implique trivialement 3. Supposons que 3 soit vérifiée, alors pour tout idéal I de A , nous avons $\text{tor}_1^A(A/I, M) = 0$. Or, en appliquant $\cdot \otimes_A M$ à la suite exacte $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$, nous obtenons la suite exacte $\dots \rightarrow 0 = \text{tor}_1^A(A/I, M) \rightarrow I \otimes_A M \rightarrow M \rightarrow A/I \otimes_A M \rightarrow 0$ donc $\ker(I \otimes_A M \rightarrow M) = 0$, ce qui implique que M est un A -module plat (voir proposition 2.31 du chapitre 2). \square

EXEMPLE 2.6. Soit le $A = \mathbb{R}[s]$ -module M défini par

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{a} A \rightarrow M \rightarrow 0,$$

avec $0 \neq a \in A$. Par application de $\cdot \otimes_A N$, nous obtenons

$$0 = \text{tor}_1^A(M, A) \rightarrow \text{tor}_1^A(M, N) \rightarrow N \xrightarrow{a \cdot \text{id}_N} N \rightarrow M \otimes_A N \rightarrow 0,$$

car A est un A -module libre, donc plat. D'où, $\text{tor}_1^A(M, N) = \ker(a \otimes \text{id}_N) = \{n \in N \mid an = 0\}$. En particulier, si $a = s$ et $N = M$, alors $\text{tor}_1^A(M, M) = M$, d'où le résultat de l'exemple 2.29.

LEMME 2.1. *Soit un A -module M de torsion, alors $\text{tor}_1^A(K/A, M) \cong M$.*

PREUVE. Appliquons $\text{tor}^A(\cdot, M)$ à la suite exacte $0 \rightarrow A \rightarrow K \rightarrow K/A \rightarrow 0$, nous obtenons :

$$\dots \rightarrow \text{tor}_1^A(K, M) \rightarrow \text{tor}_1^A(K/A, M) \rightarrow M \rightarrow K \otimes_A M \rightarrow \dots$$

Or, K est un A -module plat, donc $\text{tor}_1^A(K, M) = 0$ et M étant un A -module de torsion, alors $K \otimes_A M = 0$, d'où $\text{tor}_1^A(K/A, M) \cong M$. \square

LEMME 2.2. *Soit M un A -module, alors nous avons $\text{tor}_n^A(K/A, M) = 0, \forall n \geq 2$.*

PREUVE. Appliquons $\text{tor}^A(\cdot, M)$ à la suite exacte $0 \rightarrow A \rightarrow K \rightarrow K/A \rightarrow 0$, nous obtenons :

$$\dots \rightarrow \text{tor}_{n+1}^A(K, M) \rightarrow \text{tor}_{n+1}^A(K/A, M) \rightarrow \text{tor}_n^A(A, M) \rightarrow \dots$$

Or A est un A -module libre, donc $\text{tor}_n^A(A, M) = 0, \forall n \geq 1$ et K est un A -module plat, donc $\text{tor}_n^A(K, M) = 0, \forall n \geq 1$, ce qui implique $\text{tor}_{n+1}^A(K/A, M) = 0, \forall n \geq 1$, d'où $\text{tor}_n^A(K/A, M) = 0, \forall n \geq 2$. \square

LEMME 2.3. *Soit M un A -module sans-torsion et de type fini, alors $\text{tor}_1^A(K/A, M) = 0$.*

PREUVE. Comme M est un A -module sans-torsion, nous pouvons le plonger dans le K -espace vectoriel $K \otimes_A M$ grâce à l'exactitude de la suite $0 \rightarrow M \rightarrow K \otimes_A M$. Remarquons que puisque $K \otimes_A M$ est un espace vectoriel de dimension finie, alors $K \otimes_A M \cong K^r$ pour un certain $r \in \mathbb{N}$ et donc $K \otimes_A M$ est un A -module plat. Nous avons alors la suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow K \otimes_A M \rightarrow (K \otimes_A M)/M \rightarrow 0$, à laquelle nous pouvons appliquer $\text{tor}^A(K/A, \cdot)$ pour obtenir :

$$\dots \rightarrow \text{tor}_2^A(K/A, (K \otimes_A M)/M) \rightarrow \text{tor}_1^A(K/A, M) \rightarrow \text{tor}_1^A(A, K \otimes_A M) \rightarrow \dots$$

Maintenant, grâce au lemme 2.3, nous avons $\text{tor}_2^A(K/A, (K \otimes_A M)/M) = 0$ et $\text{tor}_1^A(A, K \otimes_A M) = 0$ car $K \otimes_A M$ est un A -module plat, d'où $\text{tor}_1^A(K/A, M) = 0$. \square

Nous obtenons alors le résultat généralisant la propriété (53).

PROPOSITION 2.4. *Soit M un A -module, alors $t(M) \cong \text{tor}_1^A(K/A, M)$, où $t(M)$ désigne la partie de torsion du module M .*

PREUVE. Appliquons $\text{tor}^A(K/A, \cdot)$ à la suite exacte $0 \rightarrow t(M) \rightarrow M \rightarrow M/t(M) \rightarrow 0$, nous obtenons :

$$\dots \rightarrow \text{tor}_2^A(K/A, M/t(M)) \rightarrow \text{tor}_1^A(K/A, t(M)) \rightarrow \text{tor}_1^A(K/A, M) \rightarrow \text{tor}_1^A(K/A, M/t(M)) \rightarrow \dots$$

Nous avons alors $\text{tor}_2^A(K/A, M/t(M)) = 0$ grâce au lemme 2.2 et $\text{tor}_1^A(K/A, M/t(M)) = 0$ grâce au lemme 2.3, d'où $\text{tor}_1^A(K/A, t(M)) \cong \text{tor}_1^A(K/A, M)$. Le module $t(M)$ étant de torsion, alors $\text{tor}_1^A(K/A, t(M)) \cong t(M)$, d'où $\text{tor}_1^A(K/A, M) \cong t(M)$. \square

Remarquons que la proposition précédente explique la dénomination du foncteur tor .

EXEMPLE 2.7. En reprenant les exemples 2.2 et 2.3, nous obtenons alors $\text{tor}_1^A(K/A, M) = K(\frac{1}{3})$ pour le premier et $\text{tor}_1^A(K/A, M) = (K/A)(\frac{1+i\sqrt{5}}{2})$ pour le second.

2.2. Foncteur ext.

DÉFINITION 2.4. Soit un complexe de A -modules (resp. de groupes)

$$P : P_0 \xrightarrow{d_1} P_1 \xrightarrow{d_2} P_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow P_i \xrightarrow{d_{i+1}} P_{i+1} \longrightarrow \dots,$$

alors, le $i^{\text{ème}}$ A -module (groupe) de *cohomologie* de P est défini par $H^i(P) = \ker d_{i+1} / \text{im } d_i$.

REMARQUE 2.1. Il existe un *théorème de la suite exacte de cohomologie*, semblable au théorème 1.1, c-à-d si $0 \longrightarrow (P'_i, d'_i) \xrightarrow{f} (P_i, d_i) \xrightarrow{g} (P''_i, d''_i) \longrightarrow 0$ une suite exacte de complexes, alors il existe des morphismes $\delta^i : H^i(P'') \rightarrow H^{i+1}(P)$ tels que la suite

$$\dots \longrightarrow H^i(P') \xrightarrow{H^i(f)} H^i(P) \xrightarrow{H^i(g)} H^i(P'') \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(P') \xrightarrow{H^{i+1}(f)} H^{i+1}(P) \xrightarrow{H^{i+1}(g)} H^{i+1}(P'') \longrightarrow \dots$$

est exacte pour tout i .

PROPOSITION 2.5. Soient M et N deux A -modules et

$$\dots \longrightarrow P_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \dots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

une résolution projective du module M . Nous introduisons alors la suite tronquée

$$(63) \quad \dots \longrightarrow P_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \dots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0.$$

Les groupes de cohomologie du complexe dual de (63)

$$(64) \quad \dots \longleftarrow \text{hom}_A(P_{i-1}, N) \xleftarrow{d_{i-1}^*} \dots \xleftarrow{d_1^*} \text{hom}_A(P_0, N) \longleftarrow 0,$$

ne dépendent pas de la résolution projective de M choisie.

PREUVE. Nous avons vu au corollaire 1.1 que deux résolutions projectives (P_i, d_i) et (P'_i, d'_i) d'un même module sont homotopiquement équivalentes, c-à-d il existe des A -morphisms $f_i : P_i \rightarrow P'_i$ et $g_i : P'_i \rightarrow P_i$ et des morphismes $s_i : P_i \rightarrow P'_{i+1}$ et $t_i : P'_i \rightarrow P_{i+1}$ tels que $\text{id}_{P_i} - g_i \circ f_i = d'_{i+1} \circ s_i + s_{i-1} \circ d_i$ et $\text{id}_{P'_i} - f_i \circ g_i = d_{i+1} \circ t_i + t_{i-1} \circ d'_i$ pour tout i . Si l'on pose $f_i^* : \text{hom}_A(P'_i, N) \rightarrow \text{hom}_A(P_i, N)$, $g_i^* : \text{hom}_A(P_i, N) \rightarrow \text{hom}_A(P'_i, N)$, $s_i^* : \text{hom}_A(P'_{i+1}, N) \rightarrow \text{hom}_A(P_i, N)$ et $t_i^* : \text{hom}_A(P_{i+1}, N) \rightarrow \text{hom}_A(P'_i, N)$, nous avons alors $\text{id}_{\text{hom}_A(P_i, N)} - f_i^* \circ g_i^* = s_i^* \circ d'_{i+1}^* + d_i^* \circ s_{i-1}^*$ et $\text{id}_{\text{hom}_A(P'_i, N)} - g_i^* \circ f_i^* = t_i^* \circ d_{i+1}^* + d_i^* \circ t_{i-1}^*$. Donc, $f_i^* \circ g_i^*$ (resp. $g_i^* \circ f_i^*$) est homotope à $\text{id}_{\text{hom}_A(P_i, N)}$ (resp. $\text{id}_{\text{hom}_A(P'_i, N)}$), et, en utilisant la proposition 1.7, $H^i(f_i^*) : H^i(\text{hom}_A(P'_i, N)) \rightarrow H^i(\text{hom}_A(P_i, N))$ est un isomorphisme d'inverse $H^i(g_i^*) : H^i(\text{hom}_A(P_i, N)) \rightarrow H^i(\text{hom}_A(P'_i, N))$ et donc, nous avons un isomorphisme entre les défauts de cohomologie du complexe $(\text{hom}_A(P_i, N), d_i^*)$ et ceux du complexe $(\text{hom}_A(P'_i, N), d_i^*)$. Ainsi, $\text{ext}_A^i(M, N)$ ne dépendent pas de la présentation projective choisie pour M . \square

La proposition précédente justifie la définition suivante et donne la possibilité d'un calcul effectif en utilisant des résolutions libres.

DÉFINITION 2.5. Nous notons $\text{ext}_A^i(M, N) = H^i((\text{hom}_A(P_j, N), d_j^*))$ le $i^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie du complexe (64). En particulier, nous avons $\text{ext}_A^0(M, N) = \text{hom}_A(M, N)$.

REMARQUE 2.2. Nous avons vu à la proposition 2.6 que si P_i et N sont des A -modules à gauche, alors $\text{hom}_A(P_i, N)$ n'a pas en général de structure de A -module. Donc, $\text{ext}_A^i(M, N) = \ker d_{i+1}^*/\ker d_i^*$ n'a en général qu'une structure de groupe. Si A est un anneau commutatif (resp. N est un $A-B$ bimodule), alors $\text{ext}_A^i(M, N)$ est un A (resp. B)-module à gauche (resp. à droite). En particulier, $\text{ext}_A^i(M, A)$ est un A -module à droite du fait de la structure de module à droite de A .

EXEMPLE 2.8. Soit le $A = \mathbb{R}[s]$ -module à gauche $M = A/sA$ défini par la résolution libre suivante :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot s} A \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Par application de $\text{hom}_A(\cdot, A)$ à la suite exacte précédente, nous obtenons le complexe

$$0 \longrightarrow \text{hom}_A(M, A) \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot s} A \longrightarrow 0,$$

avec $\text{ext}_A^0(M, A) = 0$ grâce à la proposition 2.7, et $\text{ext}_A^1(M, A) = A/sA \neq 0$ qui traduit le défaut de surjectivité du morphisme $A \xrightarrow{\cdot s} A$.

EXEMPLE 2.9. Soit le $A = \mathbb{R}[d_1, d_2]$ -module M défini par $M = A/A^2 \begin{pmatrix} d_1 d_2 \\ d_2^2 \end{pmatrix}$. Nous avons alors une résolution libre suivante de M

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot R_1} A^2 \xrightarrow{\cdot R} A \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

avec $R = (d_1 d_2 \quad d_2^2)^t$ et $R_1 = (d_2 \quad -d_1)$. Par application de $\text{hom}_A(\cdot, A)$ à la suite exacte précédente, nous obtenons alors le complexe :

$$0 \longleftarrow A \xleftarrow{\cdot R_1} A^2 \xleftarrow{\cdot R} A \longleftarrow \text{hom}_A(M, A) \longleftarrow 0.$$

On a alors $\text{ext}_A^2(M, A) = A/R_1 A^2 \neq 0$, traduisant le fait que le morphisme $A \xleftarrow{\cdot R_1} A^2$ n'est pas surjectif. De plus, le noyau du morphisme R_1 est défini par $(a \ b) \in A^2$ tel que $d_2 a = d_1 b$. Puisque A est un anneau factoriel et que $d_1 \nmid d_2$ et $d_2 \nmid d_1$, nous avons alors $d_2 \mid b$ et $d_1 \mid a$, d'où :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} c, \quad c \in A.$$

Nous obtenons alors que $\ker R_1 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} A$, d'où :

$$\text{ext}_A^1(M, A) = \ker R_1 / \text{im } R = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} A / \begin{pmatrix} d_1 d_2 \\ d_2^2 \end{pmatrix} A.$$

Montrons sur un exemple précis que les défauts d'exactitude $\text{ext}_A^i(M, N)$ ne dépendent pas de la résolution choisie pour M .

EXEMPLE 2.10. Nous avons montré dans l'exemple 1.12 que les deux résolutions libres $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot R} A \longrightarrow M \longrightarrow 0$ et $0 \longrightarrow A^n \xrightarrow{\cdot R'} A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$ du A -module M étaient homotopiquement équivalentes. Par application de $\text{hom}_A(\cdot, A)$ aux deux résolutions de M , nous obtenons les deux complexes suivants

$$\begin{aligned} 0 \longleftarrow A &\xleftarrow{\cdot R} A \longleftarrow \text{hom}_A(M, A) \longleftarrow 0, \\ 0 \longleftarrow A^n &\xleftarrow{\cdot R'} A^n \longleftarrow \text{hom}_A(M, A) \longleftarrow 0, \end{aligned}$$

qui sont, grâce à la proposition 2.7, exacts sauf à gauche car R . et R' . ne sont pas surjectifs. Soient $H^1(P) = A/RA$ et $H^1(P') = A^n/R'A^n$ les deux A -modules à droite de cohomologie des complexes précédents. Le diagramme (39) devient alors

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & H^1(P) & \xleftarrow{\pi} & A & \xleftarrow{i} & RA \longleftarrow 0 \\ & & H(U') & \downarrow \uparrow & H(V) & U'. \downarrow \uparrow & V. U. \downarrow \uparrow & V'. \\ 0 & \longleftarrow & H^1(P') & \xleftarrow{\pi'} & A^n & \xleftarrow{i'} & R'A^n \longleftarrow 0, \end{array}$$

où les morphismes $H(U')$ et $H(V)$ sont définis comme suit :

- si l'on note par $t = \pi(1)$, alors $H(U')(ta) = \pi'(U'a) = \pi'((0 \dots 0 a)^t) = z_n a$, où $z_i = \pi'(f_i)$ avec $\{f_1, \dots, f_n\}$ la base canonique de A^n et $a \in A$.
- Nous avons $H(V)(z_i) = \pi(Vf_i) = t b_{n+1-i}$ avec $b_{n+1-i} = (\frac{d}{dt})^{n-i} + a_1 (\frac{d}{dt})^{n-i-1} + \dots + a_{n-i}$, pour $i = 2, \dots, n$ et $b_1 = 1$. Donc, puisque $\{z_1, \dots, z_n\}$ est une famille génératrice de $H^1(P')$, la connaissance des $H(V)(z_i)$ détermine entièrement $H(V)$.

Nous avons alors

$$(H(V) \circ H(U'))(ta) = H(V)(z_n a) = H(V)(z_n) a = ta,$$

pour tout $a \in A$, donc $H(V) \circ H(U') = \text{id}_{H^1(P)}$. Posons $z = \sum_{i=1}^n z_i c_i$ avec $c_i \in A$. Nous avons alors dans $H^1(P')$

$$(H(U') \circ H(V))(z) = H(U')\left(\sum_{i=1}^n H(V)(z_i) c_i\right) = H(U')\left(\sum_{i=1}^n t b_{n+1-i} c_i\right) = \sum_{i=1}^n z_n b_{n+1-i} c_i,$$

et donc

$$\begin{aligned} (I_n - H(U') \circ H(V))(z) &= \sum_{i=1}^n (z_i - z_n b_{n+1-i}) c_i \\ &= (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n) (I_n - U'V) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix} = (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n) R'S \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix} = 0, \end{aligned}$$

car $(z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n)R' = 0$ dans $H^1(P')$. D'où, $H(U') \circ H(V)(z) = \text{id}_{H^1(P')}$ et nous obtenons ainsi un isomorphisme entre les cohomologies $H^1(P)$ et $H^1(P')$ et donc :

$$H^1(P) \cong \text{ext}_A^1(M, A) \cong H^1(P').$$

PROPOSITION 2.6. Soient une suite exacte de A -modules $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ et N un A -module, alors nous avons la suite exacte :

$$(65) \quad 0 \rightarrow \text{hom}_A(M'', N) \xrightarrow{f^*} \text{hom}_A(M, N) \xrightarrow{g^*} \text{hom}_A(M', N) \xrightarrow{\delta^1} \text{ext}_A^1(M'', N) \\ \rightarrow \text{ext}_A^1(M, N) \rightarrow \text{ext}_A^1(M', N) \xrightarrow{\delta^2} \text{ext}_A^2(M'', N) \rightarrow \dots$$

PREUVE. En appliquant la proposition 1.10 à la suite $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$, il existe alors deux morphismes de complexes $f : (P'_i, d'_i) \rightarrow (P_i, d_i)$ et $g : (P_i, d_i) \rightarrow (P''_i, d''_i)$ tels que la suite $0 \rightarrow P'_i \xrightarrow{f_i} P_i \xrightarrow{g_i} P''_i \rightarrow 0$ est exacte pour tout i . Puisque cette suite est une suite exacte de A -modules projectifs, alors la suite $0 \rightarrow \text{hom}_A(P''_i, N) \xrightarrow{g_i^*} \text{hom}_A(P_i, N) \xrightarrow{f_i^*}$

$\text{hom}_A(P'_i, N) \rightarrow 0$ est exacte pour tout i . Donc, nous obtenons la suite exacte de complexes $0 \rightarrow (\text{hom}_A(P''_i, N), d''_i) \rightarrow (\text{hom}_A(P_i, N), d_i) \rightarrow (\text{hom}_A(P'_i, N), d'_i) \rightarrow 0$. Nous pouvons alors utiliser le théorème 1.1 et nous obtenons la suite exacte (65). \square

PROPOSITION 2.7. Soit M un A -module, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- M est un A -module projectif,
- $\text{ext}_A^i(M, N) = 0$ pour tout A -module N et $i \geq 1$,
- $\text{ext}_A^1(M, N) = 0$ pour tout A -module N .

PREUVE. Démontrons les équivalences.

- Supposons que M soit un module projectif, alors nous avons la résolution projective $0 \rightarrow M \rightarrow M \rightarrow 0$ et donc $\text{ext}_A^i(M, N) = 0$ pour $i \geq 1$ et pour tout A -module N .
- 2 implique 3 trivialement.
- Soit $0 \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules avec P un A -module projectif, alors en appliquant (65), nous obtenons la suite exacte $0 \rightarrow \text{hom}_A(M, N) \rightarrow \text{hom}_A(P, N) \rightarrow \text{hom}_A(Q, N) \rightarrow \text{ext}_A^1(M, N) = 0$. Donc, par la proposition 2.8, la suite $0 \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ est une suite exacte scindée et $P \cong M \oplus Q$. En appliquant la proposition 2.22, M est un A -module projectif. \square

EXEMPLE 2.11. Soit le A -module à gauche M défini par la résolution libre suivante :

$$(66) \quad 0 \rightarrow A^q \xrightarrow{R} A^p \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Alors, M est un A -module projectif \Leftrightarrow (66) est une suite exacte scindée, i.e. $A^p \cong M \oplus A^q \Leftrightarrow$ la suite

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \leftarrow & \text{hom}_A(A^q, N) & \xleftarrow{R} & \text{hom}_A(A^p, N) & \leftarrow & \text{hom}_A(M, N) \leftarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \leftarrow & N^q & \xleftarrow{R} & N^p & \leftarrow & \text{hom}_A(M, N) \leftarrow 0, \end{array}$$

obtenue par application de $\text{hom}_A(\cdot, N)$ à la suite (66), est exacte, i.e. $R : N^p \rightarrow N^q$ est surjectif, pour tout A -module $N \Leftrightarrow \text{ext}_A^1(M, N) = 0$ pour tout A -module N .

Nous allons voir que si $\text{dp}_A(M) \leq 1$, alors M est un A -module projectif ssi $\text{ext}_A^1(M, A) = 0$, c-à-d, il suffit de vérifier la proposition 2.7 seulement pour $N = A$.

PROPOSITION 2.8. Soient M un A -module tel que $\text{dp}_A(M) \leq 1$ et $0 \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$ une résolution projective de M , alors M est un A -module projectif ssi $N = \text{coker } d_1^* = \text{ext}_A^1(M, A) = 0$.

PREUVE. Si M est un A -module projectif, alors la suite exacte $0 \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$ est scindée et donc, d'après la proposition 2.5, nous avons la suite exacte

$$(67) \quad 0 \leftarrow P_1^* \xleftarrow{d_1^*} P_0^* \leftarrow M^* \leftarrow 0,$$

d'où $N = 0$. Réciproquement, si $N = 0$, alors nous avons la suite exacte (67). Puisque P_1 est un A -module projectif, alors, d'après la proposition 2.25, P_1^* est un A -module projectif et donc la suite (67) est une suite scindée. On en déduit que $P_0^* \cong P_1^* \oplus M^*$, donc d'après la proposition

2.22, M^* est un A -module projectif. Si on dualise (67), nous obtenons alors la suite exacte $0 \leftarrow P_0^{**} \leftarrow P_1^{**} \leftarrow M^{**} \leftarrow 0$. Nous avons alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \theta_{P_1} & & \downarrow \theta_{P_0} & & \downarrow \theta_M & & \\ 0 & \longrightarrow & P_1^{**} & \longrightarrow & P_0^{**} & \longrightarrow & M^{**} & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

où θ_{P_1} et θ_{P_0} sont des isomorphismes du fait que P_0 et P_1 sont deux A -modules projectifs. Le lemme du serpent donne alors $M \cong M^{**}$. Puisque M^* est un A -module projectif, alors il en est de même de $M^{**} \cong M$. \square

Nous avons déjà montré une telle situation à l'exemple 1.17. Donnons-en une autre.

EXEMPLE 2.12. Considérons le système SISO suivant,

$$(\chi_1^2 + \chi_1\chi_2 + 3)y - (\chi_1 + \chi_2)u = 0,$$

pris dans [30]. Le $A = \mathbb{R}[\chi_1, \chi_2]$ -module à gauche M correspondant est défini par la présentation finie suivante

$$(68) \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{R} A^2 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

avec $R = (\chi_1^2 + \chi_1\chi_2 + 3 \quad -(\chi_1 + \chi_2))$. Le A -module à droite N est alors défini par

$$0 \leftarrow N \leftarrow A \xleftarrow{R} A^2 \leftarrow M^* \leftarrow 0,$$

Or, $N = \text{ext}_A^1(M, A) = 0$ car la matrice R admet un inverse à droite, défini par

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ \chi_1 \end{pmatrix}.$$

D'où, M est un A -module projectif. Ceci est bien en accord avec le fait que la suite (68) est scindée et que nous avons alors $A^2 \cong M \oplus A$.

Donnons une caractérisation des modules réflexifs en terme d'annulation de ext .

PROPOSITION 2.9. Soit M un A -module défini par la présentation finie suivante $F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$ tel que le A -module $N = \text{coker } d_1^*$ est défini par la suite exacte suivante $0 \leftarrow N \leftarrow F_1^* \xleftarrow{d_1^*} F_0^* \xleftarrow{d_0^*} F_{-1}^* \xleftarrow{d_{-1}^*} F_{-2}^*$, où F_{-1} et F_{-2} sont des modules libres de type finis. Alors, nous avons :

1. $\ker d_{-1} = M^{**}$, avec $d_1 = (d_1^*)^*$,
2. on a la suite exacte suivante $0 \longrightarrow \text{ext}_A^1(N, A) \longrightarrow M \longrightarrow M^{**} \longrightarrow \text{ext}_A^2(N, A) \longrightarrow 0$,
3. M est un A -module réflexif ssi $\text{ext}_A^1(N, A) = 0 = \text{ext}_A^2(N, A)$.

PREUVE. Nous avons la suite exacte $0 \leftarrow N \leftarrow F_1^* \xleftarrow{d_1^*} F_0^* \leftarrow M^* \leftarrow 0$, ainsi que la suite exacte suivante $0 \leftarrow N \leftarrow F_1^* \xleftarrow{d_1^*} F_0^* \xleftarrow{d_0^*} F_{-1}^* \xleftarrow{d_{-1}^*} F_{-2}^*$. D'où, nous déduisons que $M^* = \ker d_1^* = \text{im } d_0^* \cong \text{coker } d_{-1}^*$. Nous avons alors la suite exacte $0 \leftarrow M^* \leftarrow F_{-1}^* \xleftarrow{d_{-1}^*} F_{-2}^*$, qui par application de $\text{hom}_A(\cdot, A)$ donne la suite exacte $0 \longrightarrow M^{**} \longrightarrow F_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} F_{-2}$, d'où $\ker d_{-1} = M^{**}$. Par application de $\text{hom}_A(\cdot, A)$ à la suite exacte $0 \leftarrow N \leftarrow F_1^* \xleftarrow{d_1^*} F_0^* \xleftarrow{d_0^*}$

$F_{-1}^* \xleftarrow{d_{-1}^*} F_{-2}^*$, nous obtenons le complexe suivant $0 \rightarrow N^* \rightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} F_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} F_{-2}$. En utilisant le 2 de la proposition 1.3, nous obtenons alors la suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{ext}_A^1(N, A) \rightarrow \text{coker } d_1 \rightarrow \ker d_{-1} \rightarrow \text{ext}_A^2(N, A) \rightarrow 0.$$

Puisque $M = \text{coker } d_1$ et $M^{**} = \ker d_{-1}$, nous obtenons alors 2. Finalement, si $\text{ext}_A^1(N, A) = 0 = \text{ext}_A^2(N, A)$, alors $M \cong M^{**}$ (ou $M^{**} = \ker d_{-1} = \text{im } d_0 = \text{coker } d_1 = M$) et M est réflexif. \square

EXEMPLE 2.13. Reprenons l'exemple précédent où nous avons montré que le module M est projectif. M doit donc être un A -module réflexif. Vérifions-le. Le A -module à droite N est défini par la résolution libre suivante $0 \leftarrow N \leftarrow A \xleftarrow{R} A^2 \xleftarrow{R_{-1}} A \leftarrow 0$ avec $R_{-1} = (\chi_1 + \chi_2 \chi_1^2 + \chi_1 \chi_2 + 3)^t$. Par dualité, nous obtenons la suite $0 \rightarrow A \xrightarrow{R} A^2 \xrightarrow{R_{-1}} A \rightarrow 0$ qui est exacte en A^2 , donc $\text{ext}_A^1(N, A) = 0$ et le morphisme $A^2 \xrightarrow{R_{-1}} A$ est surjectif car $S_{-1} = \frac{1}{3}(-\chi_1 \ 1)$ est un inverse à droite de R_{-1} . D'où, $\text{ext}_A^2(N, A) = 0$ et M est un A -module à gauche réflexif.

Donnons la proposition duale de la proposition 2.7.

PROPOSITION 2.10. *Soit M un A -module, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- N est un A -module injectif,
- $\text{ext}_A^i(M, N) = 0$ pour tout A -module M et $i \geq 1$.
- $\text{ext}_A^1(M, N) = 0$ pour tout A -module M .

PREUVE. La preuve est duale de la précédente. \square

EXEMPLE 2.14. Soit la résolution libre suivante du A -module M

$$\dots \rightarrow A^{r_n} \xrightarrow{R_{n-1}} A^{r_{n-1}} \xrightarrow{R_{n-2}} \dots \xrightarrow{R_1} A^{r_1} \xrightarrow{R_0} A^{r_0} \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Alors, par application de $\text{hom}_A(\cdot, N)$ à la suite exacte précédente, nous obtenons le complexe

$$\dots \leftarrow N^{r_n} \xleftarrow{R_{n-1}} N^{r_{n-1}} \xleftarrow{R_{n-2}} \dots \xleftarrow{R_1} N^{r_1} \xleftarrow{R_0} N^{r_0} \leftarrow \text{hom}_A(M, N) \leftarrow 0,$$

Ainsi, l'annulation de tous les $\text{ext}_A^i(M, N) = 0$ est équivalente soit à M A -module projectif, soit à N un A -module injectif.

PROPOSITION 2.11. *Soit la suite exacte de A -modules $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow$ avec P module projectif, alors nous avons pour tout A -module N :*

$$\text{ext}_A^i(M, N) \cong \text{ext}_A^{i+1}(Q, N), \quad i \geq 1.$$

PREUVE. Il suffit d'appliquer (65) à la suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow$ et nous obtenons :

$$\dots \rightarrow \text{ext}_A^i(P, N) \rightarrow \text{ext}_A^i(M, N) \xrightarrow{\delta_i} \text{ext}_A^{i+1}(Q, N) \rightarrow \text{ext}_A^{i+1}(P, N) \rightarrow \dots$$

Par la proposition 2.7, nous avons $\text{ext}_A^i(P, N) = \text{ext}_A^{i+1}(P, N) = 0$, d'où le résultat. \square

Donnons quelques résultats sur la dimension projective.

PROPOSITION 2.12. *Soient M un A -module et $n \in \mathbb{N}$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\text{dp}(M) \leq n$,

2. $\text{ext}_A^m(M, N) = 0$ pour tout A -module N et $m \geq n + 1$,
3. $\text{ext}_A^{n+1}(M, N) = 0$ pour tout A -module N .

PREUVE. Supposons 1 et soit $0 \rightarrow P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ une résolution projective de M de longueur n . Alors, en utilisant la proposition 2.11, nous obtenons que $\text{ext}_A^{n+1}(M, N) = \text{ext}_A^1(P_n, N) = 0$, car P_n est un A -module projectif, d'où 2. Trivialement, 2 implique 3. Supposons que 3 soit vérifiée et soit $0 \rightarrow \ker d_{n-1} \rightarrow P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, avec P_i projectifs, alors $0 = \text{ext}_A^{n+1}(M, N) \cong \text{ext}_A^1(\ker d_{n-1}, N)$ et donc, en utilisant la proposition 2.10, $\ker d_{n-1}$ est un A -module projectif, d'où 1. \square

PROPOSITION 2.13. Soit $0 \rightarrow L_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ une suite exacte, où les P_i sont des A -modules projectifs, alors $\text{pd}_A(M) \leq n$ ssi L_n est un A -module projectif.

PREUVE. Si L_n est un A -module projectif, alors $\text{dp}_A(M) \leq n$. Réciproquement, si $\text{dp}_A(M) \leq n$, il existe alors une résolution projective de longueur $m \leq n$, et par la proposition 1.11, L_n est un A -module projectif. \square

2.2.1. *Dualité Ext/Tor.* En poussant plus loin l'idée d'introduire le foncteur tor en théorie du contrôle, il vient naturellement une dualité entre les foncteurs tor et ext. Nous pensons que les résultats suivants doivent être connus mais nous n'en avons trouvé aucune trace dans la littérature classique d'algèbre homologique. En particulier, les diagrammes (73) et (76) seront d'une grande importance pour la suite.

Soient M et X deux A -modules, alors nous pouvons définir le morphisme

$$\sigma : M^* \otimes_A X \rightarrow \text{hom}_A(M, X)$$

par $\sigma(g^* \otimes x)(m) = g^*(m)x$ avec $g^* \in M^*$, $x \in X$ et $m \in M$.

PROPOSITION 2.14. Soient M un A -module à gauche projectif et de type fini et X un A -module à gauche, nous avons alors :

$$M^* \otimes_A X \cong \text{hom}_A(M, X).$$

En utilisant le foncteur de transposition $\text{hom}_A(\cdot, A)$, on peut associer au A -module à gauche M , défini par la présentation libre finie suivante

$$(69) \quad F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

le A -module à droite $N = \text{coker } d_1^*$, c-à-d défini par la présentation finie suivante :

$$(70) \quad 0 \leftarrow N \leftarrow F_1^* \xleftarrow{d_1^*} F_0^*.$$

Nous avons alors le théorème suivant.

THÉORÈME 2.1. Soient $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ une suite exacte de A -module, M le A -module à gauche défini par (69) et N le A -module à droite défini par (70). Alors, nous avons la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \text{hom}_A(N, X) \rightarrow \text{hom}_A(N, Y) \rightarrow \text{hom}_A(N, Z) \rightarrow X \otimes_A M \rightarrow Y \otimes_A M \rightarrow Z \otimes_A M \rightarrow 0.$$

En particulier, pour la suite exacte $0 \rightarrow A \rightarrow K \rightarrow K/A \rightarrow 0$, nous obtenons la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{hom}_A(N, A) \rightarrow \text{hom}_A(N, K) \rightarrow \text{hom}_A(N, K/A) \rightarrow M \rightarrow Q \otimes_A M \rightarrow K/A \otimes_A M \rightarrow 0,$$

équivalente à (58).

PREUVE. Soit $0 \rightarrow L \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ une présentation de M , nous avons alors la suite exacte $0 \leftarrow N \leftarrow F_0^* \leftarrow F_1^* \leftarrow M^* \leftarrow 0$. Appliquons $\text{hom}_A(\cdot, X)$ à cette suite, nous obtenons $0 \rightarrow \text{hom}_A(N, X) \rightarrow \text{hom}_A(F_0^*, X) \rightarrow \text{hom}_A(F_1^*, X)$, qui est exacte en $\text{hom}_A(F_0^*, X)$. Or, F_0 étant un A -module libre, nous avons la relation $\text{hom}_A(F_0^*, X) \cong X \otimes_A F_0$, d'où la suite $0 \rightarrow \text{hom}_A(N, X) \rightarrow X \otimes_A F_1 \rightarrow X \otimes_A F_0$ exacte en $X \otimes_A F_1$. On peut faire de même pour Y et Z . Maintenant, si l'on applique $X \otimes_A \cdot$ à la présentation de M , nous obtenons alors $0 \rightarrow X \otimes_A L \rightarrow X \otimes_A F_1 \rightarrow X \otimes_A F_0 \rightarrow X \otimes_A M \rightarrow 0$ qui est exacte sauf en $X \otimes_A F_0$. Cependant, nous avons démontré que le noyau de $X \otimes_A F_1 \rightarrow X \otimes_A F_0$ était $\text{hom}_A(N, X)$, d'où le diagramme commutatif exact suivant (les colonnes centrales sont exactes du fait de F_1 et F_0 sont des A -modules libres) :

$$(71) \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \text{hom}_A(N, X) & \rightarrow & X \otimes_A F_1 & \rightarrow & X \otimes_A F_0 \rightarrow X \otimes_A M \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \text{hom}_A(N, Y) & \rightarrow & Y \otimes_A F_1 & \rightarrow & Y \otimes_A F_0 \rightarrow Y \otimes_A M \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \text{hom}_A(N, Z) & \rightarrow & Z \otimes_A F_1 & \rightarrow & Z \otimes_A F_0 \rightarrow Z \otimes_A M \rightarrow 0, \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

Par le lemme du serpent, nous obtenons la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{hom}_A(N, X) \rightarrow \text{hom}_A(N, Y) \rightarrow \text{hom}_A(N, Z) \xrightarrow{\delta} X \otimes_A M \rightarrow Y \otimes_A M \rightarrow Z \otimes_A M \rightarrow 0,$$

ce qui conclut la preuve. \square

Nous avons alors le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.1. Soient M le A -module à gauche défini par (69), N le A -module à droite défini par (70) et $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules. Alors, nous avons la suite exacte suivante

$$(72) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \text{tor}_2^A(Z, M) & \rightarrow & \text{tor}_1^A(X, M) & \rightarrow & \text{tor}_1^A(Y, M) \rightarrow \text{tor}_1^A(Z, M) \xrightarrow{\kappa} \\ & & \text{ext}_A^1(N, X) & \rightarrow & \text{ext}_A^1(N, Y) & \rightarrow & \text{ext}_A^1(N, Z) \rightarrow \text{ext}_A^2(N, X) \rightarrow \dots \end{array}$$

provenant d'une chasse dans le diagramme commutatif exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \text{tor}_1^A(X, M) \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \text{tor}_1^A(Y, M) \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \text{tor}_1^A(Z, M) \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \longrightarrow & \text{hom}_A(N, X) & \longrightarrow & X \otimes_A F_1 & \longrightarrow & X \otimes_A F_0 & \longrightarrow & X \otimes_A M & \longrightarrow & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 (73) \quad 0 \longrightarrow & \text{hom}_A(N, Y) & \longrightarrow & Y \otimes_A F_1 & \longrightarrow & Y \otimes_A F_0 & \longrightarrow & Y \otimes_A M & \longrightarrow & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \longrightarrow & \text{hom}_A(N, Z) & \longrightarrow & Z \otimes_A F_1 & \longrightarrow & Z \otimes_A F_0 & \longrightarrow & Z \otimes_A M & \longrightarrow & 0, \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & \text{ext}_A^1(N, X) & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & \downarrow & & & & & & & & \\
 & \text{ext}_A^1(N, Y) & & & & & & & & \\
 & \downarrow & & & & & & & & \\
 & \text{ext}_A^1(N, Z) & & & & & & & & \\
 & \downarrow & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & \\
 & \downarrow & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & &
 \end{array}$$

PREUVE. On utilise simplement le diagramme commutatif exact (71) du théorème 2.1 et les suites exactes (65) et (62). Nous obtenons alors le diagramme commutatif exact désiré. Une chasse dans le diagramme (73) nous donne alors la suite exacte (72). \square

REMARQUE 2.3. Nous avons montré au chapitre précédent que $\text{tor}_i^A(X, M)$, $i \geq 0$, ne dépendait pas de la résolution choisie pour M , quel que soit le A -module X . Cependant, il semble moins évident que les $\text{ext}_A^i(N, X)$ ne dépendent pas de la résolution choisie pour M . Le théorème 1.2 prend alors ici tout son intérêt. En effet, si

$$F'_1 \xrightarrow{d'_1} F'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

est une autre résolution du module M et si l'on appelle $N' = \text{coker } d'_1$, alors le théorème 1.2 montre qu'il existe deux A -modules projectifs P et P' tels que

$$N \oplus P' \cong N' \oplus P.$$

D'où, $\text{ext}_A^i(N \oplus P', X) \cong \text{ext}_A^i(N' \oplus P, X)$. Or, $\text{ext}_A^i(N \oplus P', X) \cong \text{ext}_A^i(N, X) \oplus \text{ext}_A^i(P', X) = \text{ext}_A^i(N, X)$, $i \geq 1$, car P' est un module projectif et donc $\text{ext}_A^i(P', X) = 0$, $i \geq 1$. D'où

$$\text{ext}_A^i(N, X) \cong \text{ext}_A^i(N', X), \quad i \geq 1,$$

ce qui montre bien que $\text{ext}_A^i(N, X)$, $i \geq 1$, ne dépend que de M et non des résolutions de M .

PROPOSITION 2.15. Soient B une A -algèbre plate et M et N deux A -modules dont M de présentation finie, alors le A -morphisme

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A \text{hom}_A(M, N) & \xrightarrow{\varphi} & \text{hom}_B(B \otimes_A M, B \otimes_A M), \\ b \otimes f & \longrightarrow & g = \varphi(b \otimes f) \end{array}$$

avec $g(1 \otimes m) = b \otimes f(m)$, est un isomorphisme.

PROPOSITION 2.16. Soit un A -module M admettant une résolution libre

$$F : \dots \longrightarrow F_{i+1} \longrightarrow F_i \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

où les modules F_i sont de types finis, alors nous avons :

$$(74) \quad S^{-1} \text{ext}_A^i(M, \cdot) \cong \text{ext}_{S^{-1}A}^i(S^{-1}M, S^{-1}\cdot).$$

En particulier, si A est un anneau noethérien, alors (74) est vraie pour tout A -module M de type fini.

PREUVE. En appliquant $S^{-1}A \otimes_A \cdot$ à la résolution libre de M , nous obtenons, du fait que $S^{-1}A$ est un A -module plat, la résolution libre du $S^{-1}A$ -module $S^{-1}M$ suivante :

$$\dots \longrightarrow S^{-1}F_{i+1} \longrightarrow S^{-1}F_i \longrightarrow \dots \longrightarrow S^{-1}F_1 \longrightarrow S^{-1}F_0 \longrightarrow S^{-1}M \longrightarrow 0.$$

D'où, en utilisant le fait que $S^{-1}A$ est un A -module plat et la proposition précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned} S^{-1} \text{ext}_A^i(M, N) &= S^{-1}(H^i(\text{hom}_A(F, N))) \cong H^i(S^{-1}\text{hom}_A(F, N)) \\ &\cong H^i(\text{hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}F, S^{-1}N)) \\ &= \text{ext}_{S^{-1}A}^i(S^{-1}M, S^{-1}N). \end{aligned}$$

□

PROPOSITION 2.17. Soit un A -module M de type fini sur un anneau noethérien, alors les A -modules $\text{ext}_A^i(M, A)$ sont des modules à droite de torsion pour $i \geq 1$.

PREUVE. Soit F un A -module libre maximal inclus dans M , alors nous avons la suite exacte $0 \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow M/F \longrightarrow 0$, où M/F est un A -module de torsion. Nous pouvons lui appliquer (65) et nous obtenons les suites exactes

$$(75) \quad \begin{cases} 0 = \text{hom}_A(M/F, A) \longrightarrow \text{hom}_A(M, A) \longrightarrow \text{hom}_A(F, A) \longrightarrow \text{ext}_A^1(M/F, A) \longrightarrow \text{ext}_A^1(M, A) \\ \qquad \longrightarrow \text{ext}_A^1(F, A) = 0 \\ \dots 0 = \text{ext}_A^{i-1}(F, A) \xrightarrow{\delta_{i-1}} \text{ext}_A^i(M/F, A) \longrightarrow \text{ext}_A^i(M, A) \longrightarrow \text{ext}_A^i(F, A) = 0 \dots \end{cases}$$

Nous avons donc $\text{ext}_A^i(M, A) \cong \text{ext}_A^i(M/F, A)$ pour $i \geq 2$, donc, en appliquant le lemme 2.16 pour $S = A \setminus \{0\}$, nous obtenons pour $i \geq 2$, $\text{ext}_A^i(M, A) \otimes_A K \cong \text{ext}_A^i(M/F, A) \otimes_A K \cong \text{ext}_K^i((M/F) \otimes_A K, K) = 0$, car M/F étant un A -module de torsion, nous avons donc $(M/F) \otimes_A K = 0$. D'où, $\text{ext}_A^i(M, A) \otimes K = 0$ et donc $\text{ext}_A^i(M, A)$ est un A -module de torsion pour $i \geq 2$. De plus, nous pouvons localiser la première ligne de (75) par $S = A \setminus \{0\}$, et puisque $\text{ext}_A^1(M/F, A) \otimes_A K \cong \text{ext}_K^1((M/F) \otimes_A K, K) = 0$, car M/F est un A -module de torsion, donc $\text{ext}_A^1(M, A) \otimes_A K = 0$, ce qui entraîne que $\text{ext}_A^1(M, A)$ est un A -module à droite de torsion. □

EXEMPLE 2.15. Nous avons montré à l'exemple 2.2 que $\text{ext}_A^1(M, A) = A/sA$. Si l'on note par z la classe de 1 dans $\text{ext}_A^1(M, A)$, alors $zs = 0$ et donc $\text{ext}_A^1(M, A)$ est un A -module à droite de torsion. De même pour l'exemple 2.9, nous avons

$$\text{ext}_A^1(M, A) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} A / \begin{pmatrix} d_1 d_2 \\ d_2^2 \end{pmatrix} A,$$

et si l'on appelle z la classe de $(d_1 \ d_2)^t$ dans $\text{ext}_A^1(M, A)$, alors $z d_2 = 0$.

THÉORÈME 2.2. Soient A un anneau noethérien et M un A -module de présentation finie, alors nous avons le diagramme commutatif exact suivant :

(76)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \text{tor}_1^A(K/A, M) \\
 & & & & & & \downarrow \\
 0 \longrightarrow & \text{hom}_A(N, A) & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \longrightarrow & \text{hom}_A(N, K) & \longrightarrow & K \otimes_A F_1 & \longrightarrow & K \otimes_A F_0 & \longrightarrow & K \otimes_A M & \longrightarrow & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \longrightarrow & \text{hom}_A(N, K/A) & \longrightarrow & (K/A) \otimes_A F_1 & \longrightarrow & (K/A) \otimes_A F_0 & \longrightarrow & (K/A) \otimes_A M & \longrightarrow & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & \text{ext}_A^1(N, A) & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & \downarrow & & & & & & & & \\
 & 0 & & & & & & & &
 \end{array}$$

Nous avons alors :

(77)
$$t(M) \cong \text{tor}_1^A(M, K/A) \cong \text{ext}_A^1(N, A).$$

PREUVE. Nous appliquons la proposition 2.1 à la suite exacte $0 \rightarrow A \rightarrow K \rightarrow K/A \rightarrow 0$ et nous utilisons le fait que $\text{tor}_1^A(K, M) = 0$ et $\text{ext}_A^1(N, K) \cong K \otimes_A \text{ext}_A^1(N, A)$ puisque K est un A -module plat. De plus, nous savons que $\text{ext}_A^1(N, A)$ est un A -module de torsion, ce qui entraîne $\text{ext}_A^1(N, A) \otimes_A K = 0$. Nous obtenons ainsi le diagramme ci-dessus, d'où l'on déduit que $\text{ext}_A^1(N, A) \cong \text{tor}_1^A(K/A, M)$. Or, le noyau de $M \rightarrow K \otimes_A M$ est $t(M)$, d'où le résultat. \square

REMARQUE 2.4. Le diagramme commutatif exact (76) est d'une grande importance car il nous donne deux méthodes pour calculer la partie de torsion d'un A -module M : soit par le calcul du $\text{tor}_1^A(K/A, M)$, soit par celui de $\text{ext}_A^1(N, A)$.

COROLLAIRE 2.2. Soit M un A -module défini par $F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, où A est un anneau noethérien, et N le A -module défini par la suite exacte $0 \leftarrow N \leftarrow F_1^* \xleftarrow{d_1^*} F_0^* \xleftarrow{d_0^*} F_{-1}^*$. Nous avons alors :

$$M/t(M) \cong \text{im } d_0.$$

PREUVE. En utilisant le 1 de la proposition 1.3 du chapitre 2, nous obtenons la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \text{ext}_A^1(N, A) \rightarrow M \rightarrow \text{im } d_0 \rightarrow 0.$$

De plus, en utilisant le théorème 2.2 précédent, nous obtenons $t(M) \cong \text{ext}_A^1(N, A)$, d'où :

$$M/t(M) \cong \text{im } d_0.$$

□

Plusieurs exemples de calcul de $\text{ext}_A^1(N, A)$ seront donnés par la suite. Montrons sur l'exemple 2.2 que nous avons bien $t(M) \cong \text{ext}_A^1(N, A)$.

EXEMPLE 2.16. Nous reprenons l'exemple 2.2 traitant du système $\ddot{y} + \dot{y} - \dot{u} = 0$. Nous avons la présentation finie suivante du $A = \mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$ -module à gauche M

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} & -\frac{d}{dt} \end{pmatrix}} A^2 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

En dualisant, nous obtenons la présentation finie du A -module à droite N

$$0 \longleftarrow N \longleftarrow A \xleftarrow{\begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} & -\frac{d}{dt} \end{pmatrix}} A^2 \longleftarrow M^* \longleftarrow 0.$$

Soit $(a \ b)^t \in M^*$, nous avons alors $(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt})a - \frac{d}{dt}b = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}((\frac{d}{dt} + 1)a - b) = 0 \Rightarrow (\frac{d}{dt} + 1)a = b$, puisque A est un anneau intègre. Donc, tout élément $(a \ b)^t$ de M^* vérifie $(a \ (\frac{d}{dt} + 1)a)^t$ avec $a \in A$. Nous obtenons alors la résolution libre de N suivante :

$$0 \longleftarrow N \longleftarrow A \xleftarrow{\begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} & -\frac{d}{dt} \end{pmatrix}} A^2 \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{d}{dt} + 1 \end{pmatrix}} A \longleftarrow 0.$$

Par application de $\text{hom}_A(\cdot, A)$, nous obtenons le complexe suivant :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} & -\frac{d}{dt} \end{pmatrix}} A^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{d}{dt} + 1 \end{pmatrix}} A \longrightarrow 0.$$

Le noyau du deuxième morphisme est défini par $(a \ b) \in A^2$ tel que $-a = b(\frac{d}{dt} + 1)$ avec $b \in A$. D'où, la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} + 1 & -1 \end{pmatrix}} A^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{d}{dt} + 1 \end{pmatrix}} A \longrightarrow 0.$$

Nous obtenons alors :

$$\text{ext}_A^1(N, A) = A(\frac{d}{dt} + 1 \ -1) / A(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} \ -\frac{d}{dt}) \neq 0.$$

Appelons z la classe de $(\frac{d}{dt} + 1 \ -1)$ dans $\text{ext}_A^1(N, A)$, alors z vérifie $\frac{d}{dt}z = 0$. De plus, en utilisant le corollaire 2.2, nous obtenons $M/t(M) \cong A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{d}{dt} + 1 \end{pmatrix}$.

Donnons quelques propriétés spéciales à la dimension projective au plus égale à 1.

PROPOSITION 2.18. Soit R une $q \times p$ matrice à coefficients dans A , de rang maximal, et définissant un A -module M sans-torsion. Alors, toute matrice R' , obtenue en retirant des lignes à la matrice R , définit à son tour un A -module M' sans-torsion.

PREUVE. Le A -module M est défini par $0 \rightarrow A^q \xrightarrow{R} A^p \rightarrow M \rightarrow 0$ et le A -module M' , obtenu en retirant i lignes à la matrice R , est défini par $0 \rightarrow A^{q-i} \xrightarrow{R'} A^p \rightarrow M' \rightarrow 0$ avec $0 \leq i \leq q-1$. Nous avons alors le diagramme commutatif exact suivant

$$(78) \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A^{q-i} & \xrightarrow{R'} & A^p & \longrightarrow & M' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & A^q & \xrightarrow{R} & A^p & \longrightarrow & M \longrightarrow 0, \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & A^i & & 0 & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

En utilisant le lemme du serpent, i.e., le lemme 1.3 du chapitre 2, nous obtenons alors la suite exacte suivante :

$$(79) \quad 0 \rightarrow A^i \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow 0,$$

Par application de $(K/A) \otimes_A$ à cette suite exacte, on obtient la suite exacte (voir (62)) :

$$\dots \rightarrow \operatorname{tor}_1^A(K/A, A^i) \rightarrow \operatorname{tor}_1^A(K/A, M') \rightarrow \operatorname{tor}_1^A(K/A, M) \rightarrow \dots$$

Or, A^i est un A -module libre, donc $\operatorname{tor}_1^A(K/A, A^i) = 0$. Le A -module M est sans-torsion, donc $\operatorname{tor}_1^A(K/A, M) = 0$. D'où, $\operatorname{tor}_1^A(K/A, M') = 0$ et, en utilisant la proposition 2.4, M' est un A -module sans-torsion. \square

La proposition précédente n'est vraie que pour des matrices de rang maximal comme nous le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE 2.17. Si l'on considère la matrice, de rang égal à deux, correspondant au rotationnel

$$R = \begin{pmatrix} -d_2 & d_1 & 0 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ 0 & -d_3 & d_2 \end{pmatrix},$$

nous avons alors la résolution libre suivante :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}} A^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d_2 & d_1 & 0 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ 0 & -d_3 & d_2 \end{pmatrix}} A^3 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

On vérifie facilement que M est un $A = \mathbb{R}[d_1, d_2, d_3]$ -module sans-torsion. Cependant, si l'on retire une des trois lignes de R , par exemple la dernière, nous avons alors la résolution libre du A -module M' :

$$0 \longrightarrow A^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d_2 & d_1 & 0 \\ d_3 & 0 & -d_1 \end{pmatrix}} A^3 \xrightarrow{\pi} M' \longrightarrow 0.$$

Le module M' a de la torsion car $\text{tor}_A^1(K/A, M') \neq 0$. En effet, $(d_3 d_1^{-1} d_2 d_1^{-1}) \in K^2$ vérifie que

$$\begin{pmatrix} d_3 d_1^{-1} & d_2 d_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_2 & d_1 & 0 \\ d_3 & 0 & -d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d_3 & -d_2 \end{pmatrix},$$

et donc $\pi'((d_3 d_1^{-1} d_2 d_1^{-1})) \in \ker(\text{id}_{K/A} \otimes_A \cdot R) = \text{tor}_1^A(K/A, M)$, où $\pi' : K^2 \rightarrow (K/A)^2$. Ou, de façon équivalente, l'élément $z = \pi((d_3 \ 0 \ -d_1))$ vérifie l'équation $d_3 z = 0$.

PROPOSITION 2.19. *Soit R une $q \times p$ matrice à coefficients dans A , de rang maximal, et définissant un A -module M projectif. Alors, toute matrice R' , obtenue en retirant des lignes à la matrice R , définit à son tour un A -module M' projectif.*

PREUVE. En raisonnant de même que précédemment, on obtient le diagramme commutatif exact (78) et donc la suite exacte (79). Le A -module M étant projectif, alors, par la proposition 2.7, on a $\text{ext}_A^j(M, N) = 0, \forall j \geq 1$ et pour tout A -module N . En appliquant la suite exacte (65) à (79), nous obtenons pour $j \geq 1$:

$$\dots 0 = \text{ext}_A^j(A^i, N) \longrightarrow \text{ext}_A^j(M', N) \longrightarrow \text{ext}_A^j(M, N) \longrightarrow \text{ext}_A^{j+1}(A^i, N) = 0 \dots$$

D'où, $\text{ext}_A^j(M', N) \cong \text{ext}_A^j(M, N) = 0, \forall j \geq 1$, pour tout A -module N et donc M' est un A -module projectif. \square

REMARQUE 2.5. Il est important que la matrice R soit de rang maximal. Sinon, la proposition ci-dessus n'est plus vraie comme nous le montrera l'exemple 3.1.

CHAPITRE 4

Théorie formelle des équations aux dérivées partielles

Nous donnons dans ce chapitre quelques résultats sur l'étude formelle des opérateurs différentiels et des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) (voir [59, 60, 61, 97, 110, 113, 128, 144] pour plus de détails). Les techniques développées ici nous seront utiles dans les prochains chapitres pour calculer les résolutions libres des modules différentiels, les $\text{ext}_D^i(M, D)$, les suites scindées... Les méthodes homologiques utilisées dans ce chapitre sont directement inspirées de celles qui sont présentées dans le cadre purement algébrique du chapitre 2. On peut remarquer à cet égard que le pionnier de ces méthodes, D.C. Spencer, n'a jamais utilisé le point de vue des modules différentiels que l'on trouve seulement pour la première fois chez Malgrange [96] et Palamodov [106], puis chez Goldschmidt dans une référence peu connue [62].

1. Fibrés, morphismes et suites exactes

Soit X une variété différentielle de dimension n avec pour coordonnées locales $x = (x^1, \dots, x^n)$.

DÉFINITION 1.1. Un *fibré* vectoriel E sur X , de dimension m , est une famille d'espaces vectoriels E_x paramétrée par X , avec une structure de variété différentielle sur $E = \cup_{x \in X} E_x$ telle que, si $\pi : E \rightarrow X$ est la projection envoyant E_x sur x , alors pour tout $x_0 \in X$, il existe un ouvert U de X , contenant x_0 , et un difféomorphisme Φ tel que :

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \pi^{-1}(U) & \longrightarrow & U \times \mathbb{R}^m \\ E_x & \longrightarrow & x \times \mathbb{R}^m. \end{array}$$

On appelle alors X la *base* de E et E_x la *fibres* de E en x . Nous notons le fibré vectoriel et le faisceau des germes de sections par la même lettre E . Une section locale de E , sur un ouvert U de X , est une application $\xi : U \rightarrow E$ telle que :

$$(\pi \circ \xi)(x) = x, \forall x \in U.$$

DÉFINITION 1.2. Soient E et F deux fibrés vectoriels sur X , alors on appelle *morphisme* de fibrés vectoriels $\Phi : E \rightarrow F$, toute application Φ telle que $\Phi(E_x) \subset F_x$ et $\Phi_x : E_x \rightarrow F_x$ est une application linéaire.

Les familles d'espaces vectoriels $\ker \Phi = \cup_{x \in X} \ker \Phi_x$, $\text{im } \Phi = \cup_{x \in X} \text{im } \Phi_x$ et $\text{coker } \Phi = \cup_{x \in X} \text{coker } \Phi_x$ sont des fibrés vectoriels si et seulement si les applications linéaires Φ_x ont même rang, pour tout $x \in X$. Nous dirons dans ce cas que Φ est *de rang constant*.

DÉFINITION 1.3. Une suite de morphismes de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{\Phi} E \xrightarrow{\Psi} E'' \longrightarrow 0$$

est exacte si, pour tout $x \in X$, la suite d'espaces vectoriels suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow E'_x \xrightarrow{\Phi_x} E_x \xrightarrow{\Psi_x} E''_x \longrightarrow 0.$$

PROPOSITION 1.1. Soit $E' \xrightarrow{\Phi} E \xrightarrow{\Psi} E''$ une suite exacte de fibrés vectoriels, alors $\ker \Phi$ et $\text{coker } \Psi$ sont deux fibrés vectoriels.

PREUVE. Nous avons la suite exacte d'espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow \ker \Phi_x \longrightarrow E'_x \xrightarrow{\Phi_x} E_x \xrightarrow{\Psi_x} E''_x \longrightarrow \text{coker } \Psi_x \longrightarrow 0,$$

pour tout $x \in X$. Donc, nous avons $\dim \ker \Phi_x + \dim \text{coker } \Psi_x = \dim E'_x + \dim E''_x - \dim E_x$ qui est constant car E', E et E'' sont des fibrés vectoriels. Or, les fonctions $x \rightarrow \dim \ker \Phi_x$ et $x \rightarrow \dim \text{coker } \Psi_x$ sont semi-continues supérieurement, donc $\dim \ker \Phi_x$ et $\dim \text{coker } \Psi_x$ sont constants sur X , d'où $\ker \Phi$ et $\text{coker } \Psi$ sont des fibrés vectoriels. \square

Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ un multi-indice de longueur $|\mu| = \mu_1 + \dots + \mu_n$. Notons $\mu + 1_i = (\mu_1, \dots, \mu_i + 1, \dots, \mu_n)$ et :

$$\partial_\mu \xi(x) = \frac{\partial^{|\mu|} \xi(x)}{(\partial x^1)^{\mu_1} \dots (\partial x^n)^{\mu_n}}.$$

DÉFINITION 1.4. Le fibré des q -jets $J_q(E)$ de E est le fibré vectoriel dont la fibre au point $x \in X$ est le quotient des germes de sections de E en x par le sous-espace des germes qui s'annulent jusqu'à l'ordre q au point x , i.e., une fibre de $J_q(E)$ en x est obtenue par identification des germes de sections qui lui sont égales jusqu'à l'ordre q en x :

$$\forall f, g \in J_q(E) : f \sim g \Leftrightarrow \partial_\mu f(x) = \partial_\mu g(x), 0 \leq |\mu| \leq q.$$

Vu comme un fibré vectoriel $J_q(E)$ sur X , $J_q(E)$ a pour coordonnées locales (x^i, y_μ^k) , $0 \leq |\mu| \leq q$, notées simplement par (x, y_q) . La dimension de la fibre de $J_q(E)$ vaut $m(q+n)!/q!n!$.

Nous identifions $J_0(E)$ à E et notons par π la projection de $J_q(E)$ sur X . Si ξ est une section de E , sur un ouvert $U \subset X$, alors $j_q(\xi)(x) \in J_q(E)_x$ est la classe d'équivalence du germe de section ξ et π_{q-1}^q est la projection de $J_q(E)$ sur $J_{q-1}(E)$, envoyant $j_q(\xi)(x)$ sur $j_{q-1}(\xi)(x)$.

REMARQUE 1.1. Une section ξ_q de $J_q(E)$ est définie par $\xi_q : x \rightarrow (x^i, \xi_\mu^k(x)) = (x, \xi_q(x))$, alors qu'à toute section ξ de E correspond une section de $J_q(E)$ définie par $j_q(\xi) : x \rightarrow (x^i, \partial_\mu \xi^k(x)) = (x, \partial_q \xi(x))$.

2. Opérateurs différentiels

Notons par $T = T(X)$ le fibré tangent de X , $T^* = T^*(X)$ le fibré cotangent et \otimes, S, \wedge le produit tensoriel, symétrique et extérieur. Si (x, y_q) sont les coordonnées de $J_q(E)$, on peut montrer que les coordonnées de $S_q T^* \otimes E$ sont (x, y_μ) avec $|\mu| = q$ (voir [113] pour plus de détails), ce qui prouve facilement la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1. Nous avons la suite exacte :

$$(80) \quad 0 \longrightarrow S_q T^* \otimes E \xrightarrow{\varepsilon} J_q(E) \xrightarrow{\pi_{q-1}^q} J_{q-1}(E) \longrightarrow 0.$$

Notons que la dimension de la fibre de $S_q T^* \otimes E$ vaut $m(q+n-1)!/q!(n-1)!$.

Soient E et F deux fibrés vectoriels sur X et $\Phi : J_q(E) \rightarrow F$ un morphisme de fibrés vectoriels, nous avons alors le diagramme suivant

$$(81) \quad \begin{array}{ccc} & 0 & \\ & \downarrow & \\ & S_q T^* \otimes E & \\ & \downarrow \varepsilon & \searrow \sigma(\Phi) = \Phi \circ \varepsilon \\ J_q(E) & \xrightarrow{\Phi} & F, \\ & \downarrow \pi_{q-1}^q & \\ & J_{q-1}(E) & \\ & \downarrow & \\ & 0 & \end{array}$$

qui nous conduit naturellement à la définition suivante.

DÉFINITION 2.1. Le morphisme de fibrés vectoriels $\sigma(\Phi) : S_q T^* \otimes E \rightarrow F$, induit par le diagramme (81), est appelé le *symbole* de Φ .

EXEMPLE 2.1. On considère le morphisme de fibrés défini, en coordonnées locales, par

$$(82) \quad \begin{array}{ccc} \Phi : J_q(E) & \longrightarrow & F \\ (x, y_\mu^k) & \longmapsto & (x, a_k^{\tau\mu}(x) y_\mu^k), \end{array}$$

avec $0 \leq |\mu| \leq q, 1 \leq k \leq m$ et $1 \leq \tau \leq l$, et où nous sommes sur les indices muets. Le symbole du morphisme Φ est donc défini par :

$$\sigma(\Phi) : \begin{array}{ccc} S_q T^* \otimes E & \longrightarrow & F \\ (x, y_\nu^k) & \longmapsto & (x, a_k^{\tau\nu}(x) y_\nu^k), |\nu| = q. \end{array}$$

DÉFINITION 2.2. Un morphisme de faisceaux $\mathcal{D} : E \rightarrow F$ est appelé opérateur différentiel d'ordre q s'il existe un morphisme de fibrés vectoriels $\Phi : J_q(E) \rightarrow F$ tel que nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} J_q(E) & \xrightarrow{\Phi} & F \\ j_q \uparrow & \nearrow \mathcal{D} = \Phi \circ j_q & \\ E & & \end{array}$$

REMARQUE 2.1. Nous avons une correspondance bijective entre les opérateurs différentiels $\mathcal{D} : E \rightarrow F$ et les morphismes de fibrés vectoriels $\Phi : J_q(E) \rightarrow F$.

EXEMPLE 2.2. L'opérateur différentiel correspondant au morphisme Φ de fibrés vectoriels, défini par (82), est :

$$(83) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{D} : E & \longrightarrow & F \\ (x, \xi^k(x)) & \longmapsto & (x, a_k^{\tau\mu}(x) \partial_\mu \xi^k(x)). \end{array}$$

DÉFINITION 2.3. Le $r^{\text{ème}}$ prolongement $\rho_r(\Phi) : J_{q+r}(E) \rightarrow J_r(F)$ du morphisme de fibrés Φ est l'unique morphisme rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} J_{q+r}(E) & \xrightarrow{\rho_r(\Phi)} & J_r(F) \\ j_{q+r} \uparrow & & \uparrow j_r \\ E & \xrightarrow{\mathcal{D}} & F. \end{array}$$

Nous avons alors l'identité suivante :

$$(84) \quad \rho_r(\Phi) \circ j_{q+r} = j_r \circ \mathcal{D} = j_r \circ \Phi \circ j_q.$$

REMARQUE 2.2. D'après la définition ci-dessus, le $r^{\text{ème}}$ prolongement d'un morphisme de fibrés Φ s'obtient en substituant les jets par des dérivées (passer de Φ à \mathcal{D}) dans les coordonnées locales définissant Φ , en dérivant r fois les équations obtenues (calculer $j_r \circ \mathcal{D}$) et en resubstituant les dérivées par des jets (passer de l'opérateur $j_r \circ \mathcal{D} = \rho_r(\Phi) \circ j_{q+r}$ au morphisme de fibré $\rho_r(\Phi)$).

EXEMPLE 2.3. On considère le morphisme Φ défini par (82). Le premier prolongement de Φ est définie par

$$(85) \quad \rho_1(\Phi) : J_{q+1}(E) \longrightarrow J_1(F) \\ (x, y_{\mu+1}^k) \longmapsto (x, a_k^{\tau\mu}(x) y_\mu^k, a_k^{\tau\mu}(x) y_{\mu+1}^k + (\partial_i a_k^{\tau\mu}(x)) y_\mu^k),$$

avec $i = 1, \dots, n$ et $0 \leq |\mu| \leq q$.

REMARQUE 2.3. Dans le cas où $\Phi = \text{id}_q : J_q(E) \rightarrow J_q(E)$ est le morphisme identité de $J_q(E)$, alors le $r^{\text{ème}}$ prolongement $\rho_r(\Phi)$ est le monomorphisme rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & J_{q+r}(E) & \xrightarrow{\rho_r(\text{id}_q)} & J_r(J_q(E)) \\ & & j_{q+r} \uparrow & & \uparrow j_r \\ 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{j_q} & J_q(E) \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & 0 & & 0 \end{array}$$

Nous avons alors l'identité suivante :

$$(86) \quad \rho_r(\text{id}_q) \circ j_{q+r} = j_r \circ j_q.$$

Par la suite, nous identifierons $J_{q+r}(E)$ à son image dans $J_r(J_q(E))$.

PROPOSITION 2.2. Pour $q \geq 0$ et $r \geq 0$, nous avons :

$$J_{q+r}(E) = J_r(J_q(E)) \cap J_{r-1}(J_{q+1}(E)),$$

où les fibrés $J_{q+r}(E)$, $J_r(J_q(E))$ et $J_{r-1}(J_{q+1}(E))$ sont regardés comme des sous-fibrés de $J_1^{q+r}(E)$, où $J_1^{q+r}(E)$ désigne $J_1(J_1(\dots J_1(E) \dots))$ avec $q+r$ fois J_1 .

La proposition précédente se montre facilement par permutations des indices des jets (voir par exemple [113]). Le lecteur se fera une bonne idée de la démonstration en lisant l'exemple suivant.

EXEMPLE 2.4. Prenons $n = 1$ et $m = 1$. Nous avons :

1. $J_1^3(E) = J_1(J_1(J_1(E)))$ et les coordonnées de $J_1(E)$ (resp. $J_1(J_1(E))$) sont (x, y_0, y_1) (resp. $(x, y_{00}, y_{10}, y_{01}, y_{11})$), donc ceux de $J_1^3(E)$ sont $(x, y_{000}, y_{100}, y_{010}, y_{110}, y_{001}, y_{101}, y_{011}, y_{111})$.
2. Les coordonnées de $J_2(E)$ sont $(x, y_{00}, y_{01} = y_{10}, y_{11})$, donc les coordonnées de $J_1(J_2(E))$ sont $(x, y_{000}, y_{100}, y_{001} = y_{010}, y_{101} = y_{110}, y_{011}, y_{111})$.
3. $J_1(E)$ a pour coordonnées (x, y_0, y_1) , donc $(x, y_{000}, y_{010} = y_{100}, y_{110}, y_{001}, y_{011} = y_{101}, y_{111})$ sont les coordonnées de $J_2(J_1(E))$.

Les coordonnées de $J_3(E) = J_2(J_1(E)) \cap J_1(J_2(E))$ sont alors $(x, y_{000}, y_{001} = y_{010} = y_{001}, y_{101} = y_{110} = y_{011}, y_{111})$.

DÉFINITION 2.4. Nous définissons le morphisme de fibrés vectoriels $J_r(\Phi) : J_r(J_q(E)) \rightarrow J_r(F)$ comme le morphisme qui rend le diagramme ci-dessous commutatif :

$$\begin{array}{ccc} J_r(J_q(E)) & \xrightarrow{J_r(\Phi)} & J_r(F) \\ j_r \uparrow & & \uparrow j_r \\ J_q(E) & \xrightarrow{\Phi} & F. \end{array}$$

Nous avons la relation $J_r(\Phi) \circ j_r = j_r \circ \Phi$.

Nous avons le diagramme commutatif suivant

$$(87) \quad \begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_r T^* \otimes J_q(E) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \Phi} & S_r T^* \otimes F \\ \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon \\ J_r(J_q(E)) & \xrightarrow{J_r(\Phi)} & J_r(F), \end{array}$$

et donc, le symbole de $J_r(\Phi)$ est défini par $S_r T^* \otimes J_q(E) \xrightarrow{\epsilon' \circ (\text{id} \otimes \Phi)} J_r(F)$.

REMARQUE 2.4. Nous avons $J_{q+r}(E) \xrightarrow{\rho_r(\text{id}_k)} J_r(J_q(E)) \xrightarrow{J_r(\Phi)} J_r(F)$ et $J_{q+r}(E) \xrightarrow{\rho_r(\Phi)} J_r(F)$ et nous avons donc la relation suivante :

$$(88) \quad \rho_r(\Phi) = J_r(\Phi) \circ \rho_r(\text{id}_k).$$

Du diagramme (87), du point précédent et de (80), nous obtenons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{q+r} T^* \otimes E & \xrightarrow{\sigma_r(\Phi)} & S_r T^* \otimes F \\ \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon \\ J_{q+r}(E) & \xrightarrow{\rho_r(\Phi)} & J_r(F) \\ \downarrow \pi_{q+r-1}^{q+r} & & \downarrow \pi_{r-1}^r \\ J_{q+r-1}(E) & \xrightarrow{\rho_{r-1}(\Phi)} & J_{r-1}(F), \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

où

$$(89) \quad \sigma_r(\Phi) : S_{q+r} T^* \otimes E \rightarrow S_r T^* \otimes F,$$

est le morphisme induit par $\rho_r(\Phi)$ sur $S_{q+r} T^* \otimes E$. Nous avons en particulier $\sigma_0(\Phi) = \sigma(\Phi)$.

DÉFINITION 2.5. Un système linéaire d'équations aux dérivées partielles R_q d'ordre q sur E est une sous-variété fibrée de $J_q(E)$. Une solution de R_q est une section ξ de E sur un ouvert U de X telle que $j_q(\xi)(x) \in R_q$, pour tout $x \in U$.

Remarquons que si $\Phi : J_q(E) \rightarrow F$ est un morphisme de fibrés vectoriels de rang localement constant, alors le noyau de $\ker \Phi$ est le système d'équations différentielles associé à Φ et donc à

l'opérateur $\mathcal{D} = \Phi \circ j_q : E \rightarrow F$. Réciproquement, si nous avons une sous-variété fibrée R_q de $J_q(E)$, nous avons alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow R_q \longrightarrow J_q(E) \longrightarrow J_q(E)/R_q \longrightarrow 0,$$

et donc, R_q est le noyau d'un morphisme de fibrés vectoriels $\Phi : J_q(E) \rightarrow J_q(E)/R_q$.

EXEMPLE 2.5. Si $\Phi : J_q(E) \rightarrow F$ est défini par (82) et de rang localement constant, alors le système d'équations aux dérivées partielles R_q est donné par

$$(90) \quad a_k^{\tau\mu}(x) y_\mu^k = 0,$$

avec $0 \leq |\mu| \leq q$, $1 \leq k \leq m$ et $1 \leq \tau \leq l$. Une solution locale $\xi^k(x)$ de R_q , sur un ouvert $U \subset X$, satisfait le système d'EDP :

$$a_k^{\tau\mu}(x) \partial_\mu \xi_\mu^k(x) = 0, \quad \forall x \in U.$$

DÉFINITION 2.6. - Le $r^{\text{ème}}$ prolongement R_{q+r} du système R_q est définie par

$$R_{q+r} = J_r(R_q) \cap J_{q+r}(E),$$

où $J_r(R_q)$ est considéré comme un sous-ensemble de $J_r(J_q(E))$. Par convention, R_{q-r} sera la projection de R_q sur $J_{q-r}(E)$ pour $1 \leq r \leq q$.

- La projection du $s^{\text{ème}}$ prolongement $R_{q+r+s} = \rho_{r+s}(R_q)$ de R_{q+r} sur $J_{q+r}(E)$ est notée par $R_{q+r}^{(s)}$, c-à-d, nous avons $R_{q+r}^{(s)} = \pi_{q+r}^{q+r+s}(R_{q+r+s})$.

REMARQUE 2.5. Le système R_q est, par définition, un fibré vectoriel alors, qu'en général, R_{q+r} et $R_{q+r}^{(s)}$ ne sont que des familles d'espaces vectoriels.

Donnons deux exemples illustrant la remarque précédente.

EXEMPLE 2.6. Considérons le système R_2 suivant

$$\begin{cases} y_{22} + x^2 y_{11} = 0, \\ y_{12} = 0, \end{cases}$$

alors, son premier prolongement R_3 est définie par

$$\begin{cases} y_{222} + x^2 y_{112} + y_{11} = 0, \\ y_{122} = 0, \\ y_{112} = 0, \\ x^2 y_{111} = 0, \\ y_{22} + x^2 y_{11} = 0, \\ y_{12} = 0, \end{cases}$$

et R_3 n'est pas un fibré vectoriel car son rang varie selon que $x^2 \neq 0$ ou $x^2 = 0$.

EXEMPLE 2.7. Considérons le système R_2 suivant

$$\begin{cases} y_{22} + x^2 y_1 = 0, \\ y_{12} = 0, \end{cases}$$

alors $R_2^{(1)}$ est défini par

$$\begin{cases} y_{22} + x^2 y_{11} = 0, \\ y_{12} = 0, \\ x^2 y_{11} = 0, \end{cases}$$

et $R_2^{(1)}$ n'est pas un fibré vectoriel car son rang varie selon que $x^2 \neq 0$ ou $x^2 = 0$.

PROPOSITION 2.3. Soit R_q le noyau de $\Phi : J_q(E) \rightarrow F$, nous avons alors la suite exacte d'espaces vectoriels

$$(91) \quad 0 \longrightarrow R_{q+r} \longrightarrow J_{q+r}(E) \xrightarrow{\rho_r(\Phi)} J_r(F),$$

ou en d'autres termes, $R_{q+r} = J_r(R_q) \cap J_{q+r}(E)$ est le noyau de $\rho_r(\Phi)$.

Preuve Appliquons le foncteur $J_r(\cdot)$ à la suite exacte $0 \longrightarrow R_q \xrightarrow{\Phi} J_q(E) \longrightarrow F$, nous obtenons la suite exacte $0 \longrightarrow J_r(R_q) \longrightarrow J_r(J_q(E)) \xrightarrow{J_r(\Phi)} J_r(F)$. Nous avons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \ker \rho_r(\Phi) & \longrightarrow & J_{q+r}(E) & \xrightarrow{\rho_r(\Phi)} & J_r(F) \\ & & & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & J_r(R_q) & \longrightarrow & J_r(J_q(E)) & \xrightarrow{J_r(\Phi)} & J_r(F), \end{array}$$

et nous obtenons $\ker \rho_r(\Phi) = J_r(R_q) \cap J_{q+r}(E) = R_{q+r}$.

Maintenant, soit $\Phi : J_q(E) \rightarrow F$ un morphisme de fibrés alors, nous avons le diagramme commutatif exact suivant

$$(92) \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & g_{q+r} & \longrightarrow & S_{q+r}T^* \otimes E & \xrightarrow{\sigma_r(\Phi)} & S_rT^* \otimes F \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & R_{q+r} & \longrightarrow & J_{q+r}(E) & \xrightarrow{\rho_r(\Phi)} & J_r(F) \\ & & \downarrow \pi_{q+r-1}^{q+r} & & \downarrow \pi_{q+r-1}^{q+r} & & \downarrow \pi_{r-1}^r \\ 0 & \longrightarrow & R_{q+r-1} & \longrightarrow & J_{q+r-1}(E) & \xrightarrow{\rho_{r-1}(\Phi)} & J_{r-1}(F), \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

où, nous avons noté par g_{q+r} le noyau de $R_{q+r} \xrightarrow{\pi_{q+r-1}^{q+r}} R_{q+r-1}$, et nous avons donc :

$$(93) \quad g_{q+r} = \ker \sigma_r(\Phi).$$

DÉFINITION 2.7. On appelle le *symbole* de R_{q+r} , la famille d'espaces vectoriels de $S_{q+r}T^* \otimes E$, définie par $g_{q+r} = \ker \sigma_r(\Phi)$. Nous conviendrons que $g_{q-r} = S_{q-r}T^* \otimes E$, pour $1 \leq r \leq q$.



EXEMPLE 2.8. Le symbole g_{q+r} du système R_{q+r} , où R_q est défini par (90), est donné, en coordonnées locales, par le système

$$a_k^{\tau\mu} v_{\mu+\nu}^k = 0,$$

avec $|\nu| = r$, $|\mu| = q$ et $1 \leq k \leq m$.

REMARQUE 2.6. Le symbole g_{q+r} de R_{q+r} n'est pas en général un fibré vectoriel, mais seulement une famille d'espaces vectoriels sur X .

EXEMPLE 2.9. Soit le système d'EDP défini par :

$$R_2 \begin{cases} y_2 = 0, \\ x^2 y_1 + y = 0. \end{cases}$$

Ce système est bien un fibré vectoriel car nous pouvons résoudre la seconde équation par rapport à y et le système est alors de rang constant. Cependant, son symbole g_2 , défini par

$$g_2 \begin{cases} v_2 = 0, \\ x^2 v_1 = 0, \end{cases}$$

n'est pas un fibré vectoriel car son rang varie selon que $x^2 \neq 0$ ou $x^2 = 0$.

LEMME 2.1. Soit R_q un système d'équations aux dérivées partielles sur E . Si R_{q+r} est un fibré vectoriel, alors le $s^{\text{ème}}$ prolongement $(R_{q+r})_{+s} = \rho_s(R_{q+r})$ de R_{q+r} est le même que le $(r+s)^{\text{ème}}$ prolongement R_q .

DÉFINITION 2.8. Un système d'équations aux dérivées partielles R_q est *formellement intégrable* si R_{q+r} est un fibré vectoriel pour tout $r \geq 0$ et $\pi_{q+r}^{q+r+1} : R_{q+r+1} \rightarrow R_{q+r}$ est un épimorphisme, i.e. $R_{q+r}^{(1)} = R_{q+r}$, pour tout $r \geq 0$.

EXEMPLE 2.10. Soit le système défini par :

$$R_1 \begin{cases} y_1^1 = 0, \\ y_2^1 + y_1^2 = 0, \\ y_2^2 = 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement que

$$R_2 \begin{cases} y_{22}^1 = 0, \\ y_{12}^1 = 0, \\ y_{11}^1 = 0, \\ y_{22}^2 = 0, \\ y_{12}^2 = 0, \\ y_{11}^2 = 0, \\ y_1^1 = 0, \\ y_2^1 + y_1^2 = 0, \\ y_2^2 = 0, \end{cases}$$

d'où $g_2 = 0$ et $R_1^{(1)} = R_1$. Nous avons alors $R_{1+r}^{(1)} = R_{1+r}$, car tous les jets d'ordre supérieur ou égal à deux sont nuls. De plus, R_{1+r} est trivialement un fibré vectoriel, pour tout $r \geq 0$, d'où le système R_1 est formellement intégrable.

EXEMPLE 2.11. Tout système homogène R_q à coefficients constants est formellement intégrable.

Donnons un exemple d'un système non formellement intégrable.

EXEMPLE 2.12. Considérons le système suivant

$$R_2 \begin{cases} y_{22} - y_1 = 0, \\ y_{12} = 0, \end{cases}$$

et étudions l'intégrabilité formelle du système R_2 . Le premier prolongement du système donne :

$$R_3 \begin{cases} y_{222} - y_{12} = 0, \\ y_{122} - y_{11} = 0, \\ y_{122} = 0, \\ y_{112} = 0, \\ y_{22} - y_1 = 0, \\ y_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow R_3 \begin{cases} y_{222} - y_{12} = 0, \\ y_{122} = 0, \\ y_{112} = 0, \\ y_{22} - y_1 = 0, \\ y_{12} = 0, \\ y_{11} = 0. \end{cases}$$

La projection $R_2^{(1)} = \pi_2^3(R_3)$ de R_3 sur $J_2(E)$ est alors définie par

$$R_2^{(1)} \begin{cases} y_{22} - y_1 = 0, \\ y_{12} = 0, \\ y_{11} = 0, \end{cases}$$

qui est une sous-variété stricte de R_2 . D'où, le système R_2 n'est pas formellement intégrable.

3. Cohomologie de Spencer

DÉFINITION 3.1. Soit R_q un système d'EDP et g_q son symbole, alors l'opérateur de Spencer $\delta : \Lambda^s T^* \otimes g_{q+r+1} \rightarrow \Lambda^{s+1} T^* \otimes g_{q+r}$ est défini par

$$(\delta(\omega))_\nu^k = dx^i \wedge \omega_{\nu+1,i}^k,$$

où $\omega = (\omega_\mu^k)$ avec $\omega_\mu^k = v_{\mu,I}^k dx^I \in \Lambda^s T^* \otimes g_{q+r+1}$, $\mu = \nu + 1_i$, $dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_s}$, $i_1 < \dots < i_s$, $1 \leq k \leq m$ et $|\mu| = q + r$.

LEMME 3.1. Considérons la suite d'opérateurs

$$\Lambda^{s-1} T^* \otimes g_{q+r+1} \xrightarrow{\delta} \Lambda^s T^* \otimes g_{q+r} \xrightarrow{\delta} \Lambda^{s+1} T^* \otimes g_{q+r-1}$$

alors, nous avons $\delta \circ \delta = 0$ et l'on note par $H_{q+r}^s(g_q)$ le défaut de cohomologie en $\Lambda^s T^* \otimes g_{q+r}$.

PREUVE. Montrons tout d'abord que $\delta : \Lambda^s T^* \otimes g_{q+1} \rightarrow \Lambda^s T^* \otimes g_q$ est bien défini : le symbole de g_{q+1} est défini par les équations :

$$a_k^{\tau\mu} v_{\mu+1,i}^k = 0, \quad |\mu| = q.$$

Nous avons alors $a_k^{\tau\mu} ((\delta(w))_\mu^k) = dx^i \wedge (a_k^{\tau\mu} w_{\mu+1,i}^k) = 0$, donc $(\delta(w))_\mu^k \in \Lambda^s T^* \otimes g_q$. On montrerait de même pour g_{q+r+1} à la place de g_{q+1} . De plus, nous avons :

$$\begin{aligned} ((\delta \circ \delta)(w))_\mu^k &= dx^i \wedge (\delta(w))_{\mu+1,i}^k = dx^i \wedge dx^j \wedge \omega_{\mu+1,i+1,j}^k = v_{\mu+1,i+1,j}^k dx^i \wedge dx^j \wedge dx^I \\ &= v_{\mu+1,j+1,i}^k dx^j \wedge dx^i \wedge dx^I = -v_{\mu+1,i+1,j}^k dx^i \wedge dx^j \wedge dx^I = 0. \end{aligned}$$

□

En particulier, si l'on prend $R_q = J_q(E)$, nous avons alors $g_q = S_q T^* \otimes E$. La proposition suivante est importante pour la suite. Nous renvoyons à [113] pour une preuve.

PROPOSITION 3.1. *Nous avons la suite exacte suivante :*

(94)

$$\dots \rightarrow \Lambda^s T^* \otimes S_{q+r+1} T^* \otimes E \xrightarrow{\delta} \Lambda^{s+1} T^* \otimes S_{q+r} T^* \otimes E \xrightarrow{\delta} \Lambda^{s+2} T^* \otimes S_{q+r-1} T^* \otimes E \rightarrow \dots$$

DÉFINITION 3.2. Le symbole g_q d'un système R_q est dit *s-acyclique* si $H_{q+r}^1(g_q) = \dots = H_{q+r}^s(g_q) = 0, \forall r \geq 0$. Nous dirons que g_q est *involutif* si g_q est *n-acyclique*, de *type fini* s'il existe un entier r tel que $g_{q+r} = 0, \forall r \geq 0$.

PROPOSITION 3.2. *Tout symbole est 1-acyclique. En particulier, tout système R_q d'EDO a un symbole g_q involutif.*

PREUVE. Nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 0 & & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \rightarrow & g_{q+r+1} & \rightarrow & S_{q+r+1} T^* \otimes E & \xrightarrow{\sigma_{r+1}(\Phi)} & S_{r+1} T^* \otimes F_0 \\ & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ 0 \rightarrow & T^* \otimes g_{q+r} & \rightarrow & T^* \otimes S_{q+r} T^* \otimes E & \rightarrow & T^* \otimes S_r T^* \otimes F_0 \\ & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \\ 0 \rightarrow & \Lambda^2 T^* \otimes g_{q+r-1} & \rightarrow & \Lambda^2 T^* \otimes S_{q+r-1} T^* \otimes E & & \end{array}$$

où la première suite horizontale est exacte par définition de g_{q+r+1} et les deux dernières suites verticales sont exacte grâce à la proposition 3.1. Une petite chasse dans le diagramme montre alors que la première suite verticale est exacte, d'où le résultat.

PROPOSITION 3.3. *Si g_q est un symbole involutif et de type fini, alors $g_q = 0$.*

PREUVE. Puisque g_q est un symbole de type fini, il existe $r \geq 0$ tel que $g_{q+r} = 0$. De plus, puisque g_q est involutif, nous avons alors la suite exacte pour $r \geq 1$:

$$\dots \xrightarrow{\delta} \Lambda^{n-1} T^* \otimes g_{q+r} \xrightarrow{\delta} \Lambda^n T^* \otimes g_{q+r-1} \rightarrow 0.$$

D'où, $g_{q+r-1} = 0$. En raisonnant de même avec $g_{q+r-1} = 0$ à la place de g_{q+r} , nous obtenons alors $g_{q+r-2} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow g_q = 0$.

Soit $x = (x^1, \dots, x^n)$ un système de coordonnées locales de X . Nous munissons les multi-indices μ de longueur q , d'un ordre défini par :

$$\mu < \mu' \Leftrightarrow \exists l \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } \mu_i = \mu'_i, i = n, \dots, l+1 \text{ et } \mu_l < \mu'_l.$$

Cet ordre sur les multi-indices détermine un pré-ordre sur les v_μ^k de g_q par :

$$\mu < \mu' \Rightarrow v_\mu^k < v_{\mu'}^k.$$

On dit alors que v_μ^k est de *classe* $i > 1$ si $\mu_1 = \dots = \mu_{i-1} = 0$ et $\mu_i > 0$, de *classe 1* si $\mu_1 > 0$. Soit un v_μ^k de *classe* i , nous dirons alors que x^1, \dots, x^i sont ses *variables multiplicatives* et x^{i+1}, \dots, x^n ses *variables non-multiplicatives*. Par élimination, on peut toujours écrire le système d'équations définissant le symbole g_q sous la forme de β_q^n équations indépendantes comportant des v_ν^l de

classe n , β_q^{n-1} équations indépendantes comportant des v_ν^l de classe $n - 1$ sans v_ν^l de classe n , ..., β_q^1 équations indépendantes ne comportant que des v_ν^l de classe 1. Nous associons alors à ces équations des \bullet comme suit :

β_q^n équations de classe n	1	n
β_q^{n-1} équations de classe $n - 1$	1	$n - 1$	\bullet
....					
β_q^i équations de classe i	1	...	i	\bullet	\bullet
...					
β_q^1 équations de classe 1	1	\bullet	\bullet

Soit g_q^i l'espace vectoriel défini localement par $\sigma(\Phi)$ dans lequel on a annulé les v_μ^k de classe plus petite ou égale à i . Notons par $\sigma(\Phi)^i$ ce système d'équations définissant g_q^i . Nous avons alors :

$$\dim g_q^i = \frac{m(q+n-i-1)!}{q!(n-i-1)!} - \text{rk } \sigma(\Phi)^i = \frac{m(q+n-i-1)!}{q!(n-i-1)!} - (\beta_q^{i+1} + \dots + \beta_q^n).$$

Appelons :

$$(95) \quad \alpha_q^i = \dim g_q^{i-1} - \dim g_q^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

En substituant les valeurs des $\dim g_q^i$ dans l'expression précédente, nous obtenons alors :

$$(96) \quad \alpha_q^i + \beta_q^i = \frac{m(q+n-i-1)!}{(q-1)!(n-i)!}.$$

L'équation (96) entraîne en particulier :

$$0 \leq \alpha_q^i, \beta_q^i \leq \frac{m(q+n-i-1)!}{(q-1)!(n-i)!}.$$

En sommant les α_q^i définis par (95), et en utilisant le fait que $g_q^0 = g_q$ et $g_q^n = 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} \dim g_q^0 - \dim g_q^n &= \sum_{i=1}^n \alpha_q^i \quad \Rightarrow \quad \dim g_q = \sum_{i=1}^n \alpha_q^i, \\ \dim g_q^i - \dim g_q^n &= \sum_{j=i+1}^n \alpha_q^j \quad \Rightarrow \quad \dim g_q^i = \sum_{j=i+1}^n \alpha_q^j. \end{aligned}$$

THÉORÈME 3.1. *Le symbole g_q est involutif s'il existe un système de coordonnées appelé δ -régulier tel que l'une des deux propositions équivalentes est vérifiée :*

1. $\dim g_{q+1} = \alpha_q^1 + 2\alpha_q^2 + \dots + n\alpha_q^n$.
2. *Tout prolongement des équations de g_q par rapport aux variables non-multiplicatives (i.e. par aux \bullet) n'apporte aucune nouvelle équation autre que celles obtenues par prolongement par rapport aux variables multiplicatives.*

Nous avons alors :

$$\dim g_{q+r} = \sum_{i=1}^n \frac{(r+i-1)!}{r!(i-1)!} \alpha_q^i, \quad \forall r \geq 0.$$

PREUVE. Montrons seulement l'équivalence entre les points 1 et 2. Nous renvoyons le lecteur à [110] pour une preuve de l'équivalence de ces points avec l'involution. Supposons 2. Donc, le prolongement des équations du symbole g_q par rapport aux variables non-multiplicatives \bullet

n'apporte pas de nouvelles équations. D'où, g_{q+1} est défini par les $\beta_q^1 + 2\beta_q^2 + \dots + n\beta_q^n$ équations, obtenues en dérivant les équations de g_q par rapport aux variables multiplicatives. Or, les $v_{\mu+1}^k$, obtenus ainsi sont tous différents, donc les $\beta_q^1 + 2\beta_q^2 + \dots + n\beta_q^n$ équations sont indépendantes. En utilisant la relation (96) entre α_q^i et β_q^i , nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \dim g_{q+1} &= \dim S_{q+1}T^* \otimes E - (\beta_q^1 + 2\beta_q^2 + \dots + n\beta_q^n) \\ &= \frac{m(q+n)!}{(q+1)!(n-1)!} - (\beta_q^1 + 2\beta_q^2 + \dots + n\beta_q^n) \\ &= \frac{m(q+n)!}{(q+1)!(n-1)!} - \sum_{i=1}^n i \frac{m(q+n-i-1)!}{(q-1)!(n-i)!} + \sum_{i=1}^n i \alpha_q^i \\ &= \sum_{i=1}^n i \alpha_q^i, \end{aligned}$$

d'où, 1. Réciproquement, supposons 1. Le symbole g_{q+1} est défini par les équations $\beta_q^1 + 2\beta_q^2 + \dots + n\beta_q^n$ indépendantes, obtenues comme ci-dessus, plus éventuellement d'autres. Or, le calcul que nous venons de faire montre que $\dim g_{q+1} = \dim S_{q+1}T^* \otimes E - (\beta_q^1 + 2\beta_q^2 + \dots + n\beta_q^n)$. Donc, le prolongement des équations de g_q par rapport aux variables non-multiplicatives n'apporte pas de nouvelles équations, d'où, 2. \square

REMARQUE 3.1. Si le prolongement des équations de g_q par rapport aux variables non-multiplicatives apporte des nouvelles équations indépendantes des $\beta_q^1 + 2\beta_q^2 + \dots + n\beta_q^n$ premières, alors :

$$\begin{aligned} \dim g_{q+1} &\leq \dim S_{q+1}T^* \otimes E - (\beta_q^1 + 2\beta_q^2 + \dots + n\beta_q^n) \\ &\leq \alpha_q^1 + 2\alpha_q^2 + \dots + n\alpha_q^n. \end{aligned}$$

L'égalité n'est vraie que si g_q est involutif et si (x^1, \dots, x^n) est un système de coordonnées δ -régulier. Nous pouvons alors montrer que [110]:

$$0 \leq \alpha_n^q \leq \alpha_{n-1}^q \leq \dots \leq \alpha_1^q.$$

Remarquons que si g_q est involutif, alors g_{q+1} est alors défini par les $\beta_q^1 + 2\beta_q^2 + \dots + n\beta_q^n$ équations indépendantes, définies ci-dessus, dont β_q^n sont de classe n , $\beta_q^{n-1} + \beta_q^n$ de classe $n-1$, ... $\beta_q^1 + \dots + \beta_q^n$ de classe 1.

EXEMPLE 3.1. Considérons le symbole g_2 défini par les équations suivantes :

$$(97) \quad \begin{cases} v_{22}^2 = 0, \\ v_{22}^1 = 0, \\ v_{12}^2 + a(x^1)v_{11}^1 = 0, \\ v_{12}^1 = 0. \end{cases} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & \bullet \\ \hline 1 & \bullet \\ \hline \end{array}$$

Si l'on prolonge la troisième équation de (97) par rapport à la variable non-multiplicative x^2 de v_{12}^2 , nous obtenons $v_{122}^2 + a(x^1)v_{112}^1 = 0$. Or, le prolongement de la première équation par rapport à la variable multiplicative x^1 de v_{22}^2 donne $v_{122}^2 = 0$ et le prolongement de la dernière équation par rapport à x^1 , variable multiplicative de v_{12}^1 , donne $v_{112}^1 = 0$. Donc, le prolongement de la

deuxième équation par rapport à la variable non-multiplicative x^2 n'apporte pas une nouvelle équation. De même, le prolongement de la dernière équation par rapport à x^2 , variable non-multiplicative de v_{12}^1 , donne $v_{122}^1 = 0$, qui est égal au prolongement de $v_{22}^1 = 0$ par rapport à sa variable multiplicative x^1 . D'où, g_2 est involutif et $x = (x^1, x^2)$ est un système de coordonnées δ -régulier.

La dimension de $S_2T^* \otimes E$ est $3 \times 2 = 6$ et nous avons :

$$\begin{array}{ll} \{v_{22}^1, v_{22}^2\} & \text{classe 2} \\ \{v_{12}^1, v_{11}^1, v_{12}^2, v_{11}^2\} & \text{classe 1.} \end{array}$$

Donc, $\dim g_2^0 = \dim g_2 = 6 - 4 = 2$, et g_2^1 est obtenu par annulation des v_{μ}^k de classe 1 dans les équations définissant g_2 , i.e.

$$\begin{cases} v_{22}^2 = 0, \\ v_{11}^1 = 0. \end{cases}$$

D'où, $\dim g_2^1 = 2 - 2 = 0$ et donc $\alpha_2^1 = 2 - 0 = 2$. Finalement, $g_2^2 = 0$, d'où $\alpha_2^2 = 0 - 0 = 0$. Nous avons bien $\dim g_2 = \alpha_2^1 + \alpha_2^2$ et l'on vérifie facilement que les équations indépendantes donnant g_3 s'obtiennent toutes par prolongement des équations de (97) par rapport aux variables multiplicatives de g_2 et $\dim g_3 = \alpha_2^1 = 2$.

Si l'on permute maintenant x^1 et x^2 , nous obtenons le nouveau système :

$$R_2 \begin{cases} v_{11}^2 = 0 \\ v_{11}^1 = 0 \\ a(x^2) v_{22}^1 + v_{12}^2 = 0, \\ v_{12}^1 = 0. \end{cases} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \bullet \\ \hline 1 \bullet \\ \hline 1 \ 2 \\ \hline 1 \bullet \\ \hline \end{array}$$

Le prolongement de v_{12}^1 par rapport à sa variable non-multiplicative x^2 donne, après réduction, la nouvelle équation $v_{112}^2 = 0$. Donc, le système $x = (x^2, x^1)$ n'est pas δ -régulier. En procédant comme ci-dessus, nous obtenons $\alpha_2^1 = 1$ et $\alpha_2^2 = 1$, d'où $\dim g_3 = 2 < \alpha_2^1 + 2\alpha_2^2 = 3$.

EXEMPLE 3.2. Considérons le symbole

$$g_2 \begin{cases} v_{33} - a v_{11} = 0, \\ v_{23} = 0, \\ v_{22} - b v_{11} = 0, \\ v_{13} = 0, \\ v_{12} = 0. \end{cases} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \ 2 \ 3 \\ \hline 1 \ 2 \bullet \\ \hline 1 \ 2 \bullet \\ \hline 1 \bullet \bullet \\ \hline 1 \bullet \bullet \\ \hline \end{array}$$

Si l'on prolonge g_2 par rapport aux variables non-multiplicatives, c-à-d par rapport aux \bullet , nous obtenons deux nouvelles équations :

$$\begin{cases} a v_{111} = 0, \\ b v_{111} = 0. \end{cases}$$

Donc, si $a = b = 0$, alors g_2 est involutif et $x = (x^1, x^2, x^3)$ est un système de coordonnées δ -régulier. Si $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, nous obtenons $g_3 = 0$ et donc g_2 est de type fini. Pour savoir si g_2 est 2-acyclique, nous devons déterminer si $H_2^2(g_2) = 0$ est nulle dans la suite

$$\Lambda^2 T^* \otimes g_2 \xrightarrow{\delta} \Lambda^3 T^* \otimes T^*,$$

c-à-d, il faut savoir si δ est injectif. En effet, $H_{2+r}^2(g_2) = 0$ pour $r \geq 1$, car $g_{2+r} = 0, r \geq 1$. Nous avons

$$\delta(v_{\mu k, ij} dx^i \wedge dx^j)_\mu = (v_{\mu 3, 12} + v_{\mu 1, 23} + v_{\mu 2, 31}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0, |\mu| = 1,$$

d'où, en tenant compte des équations définissant g_2 , nous obtenons :

$$\begin{cases} v_{11,23} = 0, \\ v_{22,31} = 0, \\ v_{33,12} = 0, \\ a v_{11,12} = 0, \\ b v_{11,31} = 0. \end{cases}$$

Ainsi, δ est injectif ssi $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Dans ce cas, g_2 est 2-acyclique sans être involutif (3-acyclique), car sinon, en utilisant la proposition 3.3, nous aurions $g_2 = 0$. Si l'un des a ou b est non nul, alors g_2 n'est pas 2-acyclique mais $g_3 = 0$, donc g_3 est involutif.

PROPOSITION 3.4. *Tout symbole g_{q+r} devient involutif à partir d'un r assez grand.*

Nous renvoyons le lecteur à [110] pour une preuve.

THÉORÈME 3.2. *Soit R_q un système d'ordre q tel que R_{q+1} est un fibré vectoriel. Si g_q est 2-acyclique et si $\pi_q^{q+1} : R_{q+1} \rightarrow R_q$ est un épimorphisme, alors R_q est formellement intégrable.*

PREUVE. R_q est un fibré vectoriel, donc il existe un fibré vectoriel $F_0 = J_q(E)/R_q$ tel que nous avons la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow R_q \rightarrow J_q(E) \xrightarrow{\Phi} F_0 \rightarrow 0.$$

Nous avons alors la suite exacte

$$0 \rightarrow R_{q+1} \rightarrow J_{q+1}(E) \xrightarrow{\rho_1(\Phi)} J_1(F_0) \rightarrow F_1 \rightarrow 0,$$

où $F_1 = \text{coker } \rho_1(\Phi)$ est un fibré vectoriel car R_{q+1} est un fibré vectoriel (proposition 1.1). Puisque $\pi_q^{q+1} : R_{q+1} \rightarrow R_q$ est un épimorphisme, nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & g_{q+1} & \rightarrow & S_{q+1}T^* \otimes E & \xrightarrow{\sigma_1(\Phi)} & T^* \otimes F_0 & \rightarrow & F_1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & R_{q+1} & \rightarrow & J_{q+1}(E) & \xrightarrow{\rho_1(\Phi)} & J_1(F_0) & \rightarrow & F_1 & \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & R_q & \rightarrow & J_q(E) & \xrightarrow{\rho_{r-1}(\Phi)} & F_0 & \rightarrow & 0, \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

où les deux dernières suites horizontales sont exactes par définition. Une chasse dans le diagramme montre que le fait que π_q^{q+1} est un épimorphisme implique que la première suite horizontale est exacte en $T^* \otimes F_0$. Nous avons la suite exacte

$$(98) \quad 0 \rightarrow g_{q+1} \rightarrow R_{q+1} \rightarrow R_q \rightarrow 0$$

avec R_{q+1} et R_q deux fibrés vectoriels, donc g_{q+1} est un fibré vectoriel. Maintenant, g_q est 2-acyclique et nous avons donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \longrightarrow & g_{q+2} & \longrightarrow & S_{q+2}T^* \otimes E & \longrightarrow & S_2T^* \otimes F_0 & \longrightarrow & T^* \otimes F_1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \longrightarrow & T^* \otimes g_{q+1} & \longrightarrow & T^* \otimes S_{q+1}T^* \otimes E & \longrightarrow & T^* \otimes T^* \otimes F_0 & \longrightarrow & T^* \otimes F_1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \longrightarrow & \Lambda^2 T^* \otimes g_q & \longrightarrow & \Lambda^2 T^* \otimes S_q T^* \otimes E & \longrightarrow & \Lambda^2 T^* \otimes F_0 & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 0 \longrightarrow & \Lambda^3 T^* \otimes S_{q-1} T^* \otimes E & \longrightarrow & \Lambda^3 T^* \otimes S_{q-1} T^* \otimes E & & & &
 \end{array}$$

où les trois dernières suites horizontales sont exactes (par définition de g_q et puisque l'application de T^* à la suite exacte (98) conserve l'exactitude) et les suites verticales sont exactes grâce à la proposition 3.1 et au fait que g_q est 2-acyclique. Une chasse dans le diagramme montre que la première suite horizontale

$$(99) \quad 0 \longrightarrow g_{q+2} \longrightarrow S_{q+2}T^* \otimes E \longrightarrow S_2T^* \otimes F_0 \longrightarrow T^* \otimes F_1$$

est alors exacte. Nous avons donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \longrightarrow & g_{q+2} & \longrightarrow & S_{q+2}T^* \otimes E & \xrightarrow{\sigma_2(\Phi)} & S_2T^* \otimes F_0 & \longrightarrow & T^* \otimes F_1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \longrightarrow & R_{q+2} & \longrightarrow & J_{q+2}(E) & \xrightarrow{\rho_2(\Phi)} & J_2(F) & \longrightarrow & J_1(F_1) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \longrightarrow & R_{q+1} & \longrightarrow & J_{q+1}(E) & \xrightarrow{\rho_1(\Phi)} & J_1(F_0) & \longrightarrow & F_1, \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

où la dernière suite horizontale est exacte, ainsi que la première suite horizontale (nous venons de le montrer) et les suites verticales. Une chasse dans le diagramme montre que $\pi_{q+1}^{q+2} : R_{q+2} \rightarrow R_{q+1}$ est alors un épimorphisme. De la suite exacte (99) et de la proposition 1.1, nous déduisons que g_{q+2} est un fibré vectoriel. Comme R_{q+1} est un fibré vectoriel, de la suite exacte $0 \rightarrow g_{q+2} \rightarrow R_{q+2} \rightarrow R_{q+1} \rightarrow 0$, nous déduisons que R_{q+2} est un fibré vectoriel. Nous avons alors R_{q+1}, R_{q+2} deux fibrés vectoriels, π_{q+1}^{q+2} épimorphisme et g_q 2-acyclique et, par récurrence, on montre que $\pi_q^{q+r} = \pi_{q+r-1}^{q+r} \circ \dots \circ \pi_q^{q+1} : R_{q+r} \rightarrow R_q$ est un épimorphisme pour tout $r \geq 0$, d'où R_q est formellement intégrable.

REMARQUE 3.2. Le théorème précédent donne une condition suffisante mais non nécessaire pour qu'un système soit formellement intégrable. En effet, le symbole

$$g_1 \begin{cases} v_1^1 = 0, \\ v_2^1 + v_1^2 = 0, \\ v_2^2 = 0, \end{cases} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \bullet \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

du système R_1 , défini à l'exemple 2.10, n'est pas involutif, car le symbole est résolu au maximum par rapport aux v_μ^k de classe 2 et le prolongement de ces équations par rapport à \bullet donne, par élimination, la nouvelle équation $v_{11}^2 = 0$. De plus, g_1 n'est pas 2-acyclique sinon nous aurions la suite exacte

$$T^* \otimes g_2 \xrightarrow{\delta} \Lambda^2 T^* \otimes g_1 \rightarrow 0$$

et comme $g_2 = 0$, nous aurions $g_1 = 0$. Cependant, nous avons vu dans l'exemple 2.10 que R_1 était formellement intégrable.

EXEMPLE 3.3. Nous avons vu dans l'exemple 3.2 que le symbole g_2 du système R_2 défini par

$$R_2 \begin{cases} y_{33} - y_{11} = 0, \\ y_{23} = 0, \\ y_{22} - y_{11} = 0, \\ y_{13} = 0, \\ y_{12} = 0 \end{cases}$$

était 2-acyclique ($a = b = 1 \neq 0$). De plus, $g_3 = 0$, donc $\pi_2^3 : R_3 \rightarrow R_2$ est un épimorphisme, d'où R_2 est formellement intégrable.

DÉFINITION 3.3. Un système R_q , associé à l'opérateur différentiel $\mathcal{D} = \Phi \circ j_q$, est *involutif* si R_q est formellement intégrable et g_q est involutif.

EXEMPLE 3.4. Considérons le système suivant :

$$R_2 \begin{cases} y_{22}^2 + y_2^1 = 0, \\ y_{22}^1 = 0, \\ y_{12}^2 + a(x^1) y_{11}^1 = 0, \\ y_{12}^1 = 0. \end{cases}$$

Nous avons vu, dans l'exemple 3.1, que g_2 est un symbole involutif. Nous vérifions alors facilement que $\pi_2^3 : R_3 \rightarrow R_2$ est un épimorphisme. Donc, R_2 est un système involutif.

DÉFINITION 3.4. Un système R_q est dit *suffisamment régulier* si $R_{q+r}^{(s)}$ est un fibré vectoriel pour tout entier r et s .

Le théorème suivant montre que si un système suffisamment régulier R_q n'est pas formellement intégrable, alors par prolongement et projection, on peut toujours obtenir un système $R_{q+r}^{(s)}$ formellement intégrable et ayant les mêmes solutions que R_q .

THÉORÈME 3.3. Si R_q est un système suffisamment régulier, alors il existe deux entiers r et s tels que le système $R_{q+r}^{(s)}$ est formellement intégrable (involutif) et possède les mêmes solutions que R_q .

PREUVE. La preuve est technique et utilise des arguments de noethérianité. Nous renvoyons à [60, 110] pour plus de détails. De façon algorithmique, nous procédons ainsi : on prolonge suffisamment de fois R_q pour obtenir un système R_{q+r} ayant un symbole g_{q+r} 2-acyclique. Cela est toujours possible car, grâce à la proposition 3.4, il existe toujours un entier r suffisamment grand tel que g_{q+r} est involutif donc 2-acyclique. Nous vérifions alors si $\pi_{q+r}^{q+r+1} : R_{q+r+1} \rightarrow R_{q+r}$ est un épimorphisme ou non. Si π_{q+r}^{q+r+1} est un épimorphisme, alors R_{q+r} est formellement intégrable et

l'on s'arrête. Sinon, on prend le nouveau système $R_{q+r}^{(1)}$, obtenu en ajoutant à R_{q+r} les nouvelles équations d'ordre $q+r$ obtenues dans la projection de R_{q+r+1} sur R_{q+r} , et on recommence la procédure. \square

EXEMPLE 3.5. Nous reprenons l'exemple 2.12

$$R_2 \begin{cases} y_{22} - y_1 = 0, \\ y_{12} = 0. \end{cases}$$

Le symbole g_2 , défini par

$$g_2 \begin{cases} v_{22} = 0, \\ v_{12} = 0, \end{cases} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & \bullet \\ \hline \end{array}$$

est involutif car le prolongement v_{12} par rapport à sa variable non-multiplicative x^2 est égal au prolongement de v_{22} par rapport à sa variable multiplicative x^1 . Cependant, nous avons vu dans l'exemple 2.12 que $R_2^{(1)} \subsetneq R_2$ car :

$$R_2^{(1)} \begin{cases} y_{22} - y_1 = 0, \\ y_{12} = 0, \\ y_{11} = 0. \end{cases}$$

Le symbole $g_2^{(1)}$ est défini par

$$\begin{cases} v_{22} = 0, \\ v_{12} = 0, \\ v_{11} = 0, \end{cases} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & \bullet \\ \hline 1 & \bullet \\ \hline \end{array}$$

d'où $g_2^{(1)}$ est de type fini et donc involutif. On vérifie alors aisément que $R_2^{(2)} = R_2^{(1)}$, c-à-d que $R_2^{(1)}$ est alors un système involutif.

Soit R_q un système involutif, alors nous avons

$$\begin{aligned} \dim R_{q+r} &= \dim R_{q-1} + \sum_{s=0}^r \dim g_{q+s} \\ &= \dim R_{q-1} + \sum_{s=0}^r \sum_{i=1}^n \frac{(s+i-1)!}{s!(i-1)!} \alpha_q^i \\ &= \dim R_{q-1} + \sum_{i=1}^n \frac{(r+i)!}{r! i!} \alpha_q^i, \end{aligned}$$

où $R_{q-1} = \pi_{q-1}^q(R_q)$ et nous avons le théorème suivant dû à Janet, Cartan et Khäler [26, 74, 75, 76].

THÉORÈME 3.4. *Si R_q est un système analytique involutif, alors il existe une unique solution analytique $y^k = f^k(x)$ telle que $j_{q-1}(f)(x_0) \in \pi_{q-1}^q(R_q) \subset J_{q-1}(E)$ est un point donné. La solution y^k dépend alors de α_q^n fonctions de x^1, \dots, x^n , de α_q^{n-1} fonctions de $x^1, \dots, x^{n-1}, \dots$, et de α_q^1 fonctions en x^1 .*

EXEMPLE 3.6. Nous avons vu dans l'exemple 3.2 que pour $a = b = 0$, g_2 est involutif. Nous avons de plus $\dim g_2^0 = 6 - 5 = 1$ et $\dim g_2^1 = 0$, d'où $\alpha_2^1 = 1$ et $\alpha_2^2 = 0 \Rightarrow \dim g_{2+r} = 1$. D'où :

$$\dim R_{2+r} = \dim J_1(E) + 2 = 3 + 2, \quad \forall r \geq 0.$$

Toute solution analytique du système R_2 dépend alors d'une fonction arbitraire de x^1 .

4. Suite de Janet - Suites de Spencer

DÉFINITION 4.1. Un morphisme $\Phi : J_q(E) \rightarrow F$ est *régulier* si le morphisme $\rho_r(\Phi) : J_{q+r}(E) \rightarrow J_r(F)$ est de rang constant, pour tout $r \geq 0$.

EXEMPLE 4.1. Dans l'exemple 2.6, le morphisme $\rho_1(\Phi)$ n'est pas de rang constant car son rang change suivant que $x^2 \neq 0$ ou que $x^2 = 0$.

DÉFINITION 4.2. Soient $\Phi : J_q(E) \rightarrow F$ et $\Psi : J_r(F) \rightarrow G$ deux morphismes de fibrés et soient $\mathcal{D} : E \rightarrow F$ et $\mathcal{D}' : F \rightarrow G$ leurs opérateurs différentiels associés. Supposons que nous ayons le complexe suivant

$$(100) \quad E \xrightarrow{\mathcal{D}} F \xrightarrow{\mathcal{D}'} G,$$

alors, la suite (100) est dite *formellement exacte* si les suites de fibrés vectoriels

$$J_{q+r+s}(E) \xrightarrow{\rho_{r+s}(\Phi)} J_{r+s}(F) \xrightarrow{\rho_s(\Psi)} J_s(G),$$

sont exactes pour tout $s \geq 0$.

DÉFINITION 4.3. Une suite d'opérateurs différentiels $E \xrightarrow{\mathcal{D}} F \xrightarrow{\mathcal{D}'} G$ est *localement exacte* si pour toute section locale η de F telle que $\mathcal{D}'\eta = 0$, il existe localement une section ξ de E telle que $\mathcal{D}\xi = \eta$.

PROPOSITION 4.1. Soit $\mathcal{D} = \Phi \circ j_q : E \rightarrow F_0$ un opérateur involutif d'ordre q , alors il existe une suite formellement exacte

$$(101) \quad 0 \longrightarrow R_{q+n} \longrightarrow J_{q+n}(E) \xrightarrow{\rho_n(\Phi)} J_n(F_0) \xrightarrow{\rho_{n-1}(\Psi_1)} J_{n-1}(F_1) \xrightarrow{\rho_{n-2}(\Psi_1)} \dots \xrightarrow{\rho_1(\Psi_{n-1})} J_1(F_n) \xrightarrow{\Psi_n} F_n \longrightarrow 0,$$

avec $\mathcal{D} = \Phi \circ j_q$, F_i fibré vectoriel et $\Psi_i : J_1(F_{i-1}) \rightarrow F_i$ morphisme de fibrés, pour $i \geq 1$.

PREUVE. Puisque $R_q = \ker \Phi$ est un fibré vectoriel, nous avons alors la suite formellement exacte suivante :

$$0 \longrightarrow R_q \longrightarrow J_q(E) \xrightarrow{\Phi} F_0 \longrightarrow 0.$$

Par prolongement, nous obtenons alors

$$0 \longrightarrow R_{q+1} \longrightarrow J_{q+1}(E) \xrightarrow{\rho_1(\Phi)} J_1(F_0) \xrightarrow{\Psi_1} F_1 \longrightarrow 0,$$

où $F_1 = \text{coker } \rho_1(\Phi)$. Puisque $\pi_q^{q+1} : R_{q+1} \rightarrow R_q$ est un épimorphisme, alors nous avons le diagramme commutatif exact suivant

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & g_{q+1} & \longrightarrow & S_{q+1}T^* \otimes E & \xrightarrow{\sigma_1(\Phi)} & T^* \otimes F_0 & \xrightarrow{\sigma_0(\Psi_1)} & \text{coker } \sigma_0(\Psi_1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & R_{q+1} & \longrightarrow & J_{q+1}(E) & \xrightarrow{\rho_1(\Phi)} & J_1(F_0) & \xrightarrow{\Psi_1} & F_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & R_q & \longrightarrow & J_q(E) & \xrightarrow{\Phi} & F_0 & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

d'où l'on déduit $\text{coker } \sigma_0(\Psi_1) \cong F_1$.

Supposons maintenant que nous ayons la suite formellement exacte suivante

$$0 \longrightarrow R_{q+r} \longrightarrow J_{q+r}(E) \xrightarrow{\rho_r(\Phi)} J_r(F_0) \xrightarrow{\rho_{r-1}(\Psi_1)} \dots \xrightarrow{\rho_1(\Psi_{r-1})} J_1(F_{r-1}) \xrightarrow{\Psi_r} F_r \longrightarrow 0,$$

alors, nous avons le diagramme commutatif exact suivant

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & g_{q+r+1} & \longrightarrow & S_{q+r+1}T^* \otimes E & \xrightarrow{\sigma_{r+1}(\Phi)} & \dots & \xrightarrow{\sigma_1(\Psi_r)} & T^* \otimes F_r & \xrightarrow{\sigma_0(\Psi_{r+1})} & \text{coker } \sigma_0(\Psi_{r+1}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & R_{q+r+1} & \longrightarrow & J_{q+r+1}(E) & \xrightarrow{\rho_{r+1}(\Phi)} & \dots & \xrightarrow{\rho_1(\Psi_r)} & J_1(F_r) & \xrightarrow{\Psi_{r+1}} & F_{r+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & R_{q+r} & \longrightarrow & J_{q+r}(E) & \xrightarrow{\rho_r(\Phi)} & \dots & \xrightarrow{\Psi_r} & F_r & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & & 0 & & & &
 \end{array}$$

où $F_{r+1} = \text{coker } \rho_1(\Psi_r)$. En raisonnant comme nous l'avons fait à la preuve du théorème 3.2 (voir suite (99)), on montre que l'involution du symbole g_q implique que la première suite horizontale du diagramme ci-dessus est exacte. Puisque la dernière suite horizontale est exacte, nous déduisons que la suite du milieu est exacte. D'où le résultat. \square

THÉORÈME 4.1. *Si $\mathcal{D} : E \rightarrow F_0$ est un opérateur involutif, alors il existe une suite formellement exacte de longueur au plus $n + 1$*

$$0 \longrightarrow \Theta \longrightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}_n} F_n \longrightarrow 0,$$

avec $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$ et où les opérateurs \mathcal{D}_i sont du premier ordre et involutifs, pour $i \geq 1$. Cette suite est appelée suite de Janet de \mathcal{D}_0 .

PREUVE. Puisque $\mathcal{D} = \Phi \circ j_q$ est un opérateur involutif, alors il existe une suite formellement exacte (101). De plus, $R_q = \ker \Phi$ et R_{q+r} pour $r \geq 1$ sont des fibrés vectoriels. Puisque R_q est formellement intégrable, alors nous avons la suite exacte $0 \longrightarrow g_{q+r} \longrightarrow R_{q+r} \longrightarrow R_{q+r-1} \longrightarrow 0$ et donc g_{q+r} est un fibré vectoriel pour $r \geq 0$. Notons alors les fibrés vectoriels $B_r = \text{im } \rho_r(\Phi) =$

$J_{q+r}(E)/R_{q+r}$ et $N_r = \text{im } \sigma_r(\Phi) = (S_{q+r}T^* \otimes E)/g_{q+r}$, pour $r \geq 1$. Nous avons alors le diagramme commutatif exact suivant pour $r \geq 1$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \longrightarrow & g_{q+r} & \longrightarrow & S_{q+r}T^* \otimes E & \longrightarrow & N_r & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & R_{q+r} & \longrightarrow & J_{q+r}(E) & \longrightarrow & B_r & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & R_{q+r-1} & \longrightarrow & J_{q+r-1}(E) & \longrightarrow & B_{r-1} & \longrightarrow 0, \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

avec $B_0 = F_0$. On en déduit que B_1 est formellement intégrable. De plus, nous avons le diagramme commutatif suivant, pour $r \geq 1$,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \longrightarrow & g_{q+r} & \longrightarrow & S_{q+r}T^* \otimes E & \longrightarrow & N_r & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & \\
 0 \longrightarrow & T^* \otimes g_{q+r-1} & \longrightarrow & T^* \otimes S_{q+r-1}T^* \otimes E & \longrightarrow & T^* \otimes N_{r-1} & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & \\
 0 \longrightarrow & \Lambda^2 T^* \otimes g_{q+r-2} & \longrightarrow & \Lambda^2 T^* \otimes S_{q+r-2}T^* \otimes E & \longrightarrow & \Lambda^2 T^* \otimes N_{r-2} & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & \\
 0 \longrightarrow & \Lambda^3 T^* \otimes g_{q+r-3} & \longrightarrow & \Lambda^3 T^* \otimes S_{q+r-3}T^* \otimes E & \longrightarrow & \Lambda^3 T^* \otimes N_{r-3} & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
 & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & \\
 0 \longrightarrow & \Lambda^n T^* \otimes g_{q+r-n} & \longrightarrow & \Lambda^n T^* \otimes S_{q+r-n}T^* \otimes E & \longrightarrow & \Lambda^n T^* \otimes N_{r-n} & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

où les suites horizontales sont exactes et ainsi que la première suite verticale, grâce au fait que g_q est involutif. De plus, la proposition 3.1 implique que la deuxième suite verticale est exacte. On en déduit alors que la dernière suite verticale est exacte et donc N_r est involutif (en fait g_q $(s+1)$ -acyclique $\Rightarrow N_r$ s -acyclique). Finalement, $B_1 \subset J_1(F_0)$ est alors un système du premier ordre, involutif et transitif (c-à-d, B_1 n'a pas d'équation d'ordre zéro ou, en d'autres termes, $B_1 \rightarrow F_0$ est un épimorphisme). L'opérateur différentiel correspondant au système B_1 est alors $\mathcal{D}_1 = \Psi_1 \circ j_1$. On peut faire de même que précédemment en remplaçant R_q par B_1 , pour obtenir un opérateur $\mathcal{D}_2 : F_1 \rightarrow F_2$ du premier ordre, involutif et transitif. Pour finir, remarquons que nous avons le diagramme exact suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & N_r & \xrightarrow{\delta} & T^* \otimes N_{r-1} & \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} & \Lambda^r T^* \otimes F_0 & \longrightarrow \text{coker } \delta \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & S_r T^* \otimes F_0 & \xrightarrow{\delta} & T^* \otimes S_{r-1} T^* \otimes F_0 & \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} & \Lambda^r T^* \otimes F_0 & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & S_{r-1} T^* \otimes F_1 & \xrightarrow{\delta} & T^* \otimes S_{r-2} T^* \otimes F_1 & \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 \longrightarrow & T^* \otimes F_{r-1} & \longrightarrow & T^* \otimes F_{r-1} & \longrightarrow & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & F_r & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & & & & \\
 & 0 & & & & &
 \end{array}$$

où $\text{coker } \delta = \Lambda^r T^* \otimes F_0 / \delta(\Lambda^{r-1} T^* \otimes N_1)$. Une chasse dans le diagramme montre que :

(102)
$$F_r \cong \Lambda^r T^* \otimes F_0 / \delta(\Lambda^{r-1} T^* \otimes N_1).$$

D'où, la suite d'opérateurs se termine par $\mathcal{D}_n = \Psi_n \circ j_1$, ce qui conclut la preuve. □

REMARQUE 4.1. Nous avons par définition $N_{r+1} = S_{q+r+1} T^* \otimes E / g_{q+r+1}$, d'où

$$\begin{aligned}
 \dim N_{r+1} &= \dim S_{q+r+1} T^* \otimes E - \dim g_{q+r+1} = \sum_{i=1}^n \frac{(r+i)!}{(r+1)!(i-1)!} \left(m \frac{(q+n-i-1)!}{(q-1)!(n-i)!} - \alpha_q^i \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{(r+i)!}{(r+1)!(i-1)!} \beta_q^i
 \end{aligned}$$

En particulier, $\dim N_1 = \sum_{i=1}^n i \beta_q^i$. Ceci est bien en accord avec la remarque 3.1, dans laquelle nous avons montré que g_{q+1} était défini par $\beta_q^1 + 2\beta_q^2 + \dots + n\beta_q^n$ équations indépendantes.

EXEMPLE 4.2. Soit l'opérateur $\mathcal{D} : E \rightarrow F$ défini par :

$$\begin{cases} \partial_1 \xi - \xi = \eta^1, \\ \partial_2 \xi = \eta^2, \\ \partial_3 \xi + \xi = \eta^3, \end{cases}$$

Le système R_1 correspondant est défini par

$$R_1 \begin{cases} y_1 - y = 0, \\ y_2 = 0, \\ y_3 + y = 0, \end{cases}$$

et son symbole par :

$$g_1 \left\{ \begin{array}{l} v_3 = 0, \\ v_2 = 0, \\ v_1 = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & \bullet \\ \hline 1 & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array}$$

Le symbole g_1 est de type fini, donc involutif. On vérifie alors que R_1 est involutif. En mettant un second membre z aux équations de R_1 et en dérivant ces équations par rapport aux variables non-multiplicatives du symbole, nous obtenons les conditions de compatibilité du premier ordre suivantes :

$$B_1 \left\{ \begin{array}{l} z_3^2 - z_2^3 + z^2 = 0, \\ z_3^1 - z_1^3 + z^1 - z^3 = 0, \\ z_2^1 - z_1^2 - z^2 = 0. \end{array} \right.$$

Le symbole de B_1 est alors

$$N_1 \left\{ \begin{array}{l} v_3^2 - v_2^3 = 0, \\ v_3^1 - v_1^3 = 0, \\ v_2^1 - v_1^2 = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & \bullet \\ \hline \end{array}$$

et l'on vérifie facilement que N_1 est involutif. Donc le système B_1 est du premier ordre, involutif et transitif, et l'opérateur différentiel correspondant est $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$, avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_3 \eta^2 - \partial_2 \eta^3 + \eta^2 = \zeta^1, \\ \partial_3 \eta^1 - \partial_1 \eta^3 + \eta^1 - \eta^3 = \zeta^2, \\ \partial_2 \eta^1 - \partial_1 \eta^2 - \eta^2 = \zeta^3. \end{array} \right.$$

De même, en mettant un second membre t aux équations définissant B_1 , en dérivant la troisième équation par rapport à la variable non-multiplicative x^3 , nous obtenons alors l'unique condition de compatibilité d'ordre un :

$$t_3^3 - t_2^2 + t_1^1 + t^1 + t^3 = 0.$$

L'opérateur correspondant $\mathcal{D}_2 : F_1 \rightarrow F_2$ est alors défini par

$$\partial_3 \zeta^3 - \partial_2 \zeta^2 + \partial_1 \zeta^1 + \zeta^1 + \zeta^3 = \theta.$$

Nous obtenons finalement la suite de Janet suivante :

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} F_2 \longrightarrow 0.$$

EXEMPLE 4.3. Soit l'opérateur $j_q : E \rightarrow J_q(E)$ involutif car de type fini. D'après le théorème 4.1, nous avons alors la suite formellement exacte suivante

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{j_q} C_0(E) \xrightarrow{D_1} C_1(E) \xrightarrow{D_2} \dots \xrightarrow{D_n} C_n(E) \longrightarrow 0,$$

avec $C_0(E) = J_q(E)$. D'après la formule (102), et en utilisant le fait que $R_{q+1} = 0 \Rightarrow B_1 \cong J_{q+1}(E)$, et donc $N_1 \cong S_{q+1}T^* \otimes E$, nous obtenons alors les fibrés vectoriels suivants :

$$C_r(E) \cong \Lambda^r T^* \otimes J_q(E) / \delta(\Lambda^{r-1} T^* \otimes S_{q+1} T^* \otimes E).$$

Ceci prouve en particulier que la suite de Janet de l'opérateur j_q est toujours de longueur $n + 1$.

DÉFINITION 4.4. On appelle *opérateur de Spencer* D , l'opérateur différentiel défini par

$$(103) \quad \begin{aligned} D : J_{q+1}(E) &\longrightarrow T^* \otimes J_q(E) \\ \xi_{q+1} &\longrightarrow D(\xi_{q+1}) = ((j_1 \circ \pi_q^{q+1}) - \rho_1(\text{id}_q)) \xi_{q+1} = j_1(\xi_q) - \xi_{q+1}, \end{aligned}$$

et nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & J_{q+1}(E) & \xrightarrow{\rho_1(\text{id}_q)} & J_1(J_q(E)) & & \\ & & \downarrow \pi_q^{q+1} & & \uparrow j_1 & & \\ 0 & \longrightarrow & J_q(E) & \longrightarrow & J_q(E) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Nous étendons l'opérateur D à un opérateur $D : \Lambda^s T^* \otimes J_{q+1}(E) \rightarrow \Lambda^{s+1} T^* \otimes J_q(E)$ défini par :

$$D(\omega \otimes \xi_{q+1}) = d\omega \otimes \pi_q^{q+1}(\xi_{q+1}) + (-1)^s \omega \wedge D(\xi_{q+1}).$$

En coordonnées locales, si $\omega = \xi_{\mu,I}^k(x) dx^I$, alors :

$$(104) \quad (D\omega)_\mu^k = (\partial_i \xi_{\mu,I}^k(x) - \xi_{\mu+1,i,I}^k(x)) dx^i \wedge dx^I.$$

Alors, on montre facilement que D induit un morphisme (voir [113] pour plus de détails) :

$$D : \Lambda^s T^* \otimes R_{q+1}(E) \rightarrow \Lambda^{s+1} T^* \otimes R_q(E).$$

Nous avons alors la suite suivante, appelée *première suite de Spencer* :

$$(105) \quad 0 \longrightarrow \Theta \xrightarrow{j_{q+r+n}} R_{q+r+n} \xrightarrow{D} T^* \otimes R_{q+r+n-1} \xrightarrow{D} \dots \xrightarrow{D} \Lambda^n T^* \otimes R_{q+r} \longrightarrow 0.$$

EXEMPLE 4.4. Considérons l'opérateur $j_1 : E \rightarrow J_1(E)$ défini par

$$\begin{cases} \xi^k = \eta^k \\ \partial_i \xi^k = \eta_i^k. \end{cases}$$

Toutes les conditions de compatibilité de j_1 sont données par le système suivant

$$\begin{cases} \partial_i \eta^k - \eta_i^k = 0, \\ \partial_i \eta_j^k - \partial_j \eta_i^k = 0, \end{cases}$$

alors que l'opérateur $D : J_1(E) \rightarrow T^* \otimes E$ est seulement défini par $\partial_i \eta^k - \eta_i^k = \zeta_i^k$. Donc, la suite d'opérateurs $0 \rightarrow E \xrightarrow{j_1} J_1(E) \xrightarrow{D} T^* \otimes E$ n'est pas formellement exacte.

L'exemple précédent montre que la première suite de Spencer (105) n'est pas formellement exacte. Cependant, on peut montrer que la première suite de Spencer est localement exacte (voir [59, 113, 144]). En introduisant les fibrés vectoriels suivants

$$C_r = \Lambda^r T^* \otimes R_q / \delta(\Lambda^{r-1} T^* \otimes g_{q+1}),$$

nous avons alors la *seconde suite de Spencer* (voir [59, 113, 144])

$$(106) \quad 0 \longrightarrow \Theta \xrightarrow{j_q} C_0 \xrightarrow{D_1} C_1 \xrightarrow{D_2} \dots \xrightarrow{D_n} C_n \longrightarrow 0,$$

avec $C_0 = R_q$. On montre alors que la suite (106) est formellement exacte mais n'est pas en général exacte. De plus, la suite de Janet d'un opérateur involutif $\mathcal{D} = \Phi \circ j_q : E \rightarrow F_0$ d'ordre

q et la seconde suite de Spencer du système $R_q = \ker \Phi$ sont liées par le diagramme commutatif exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & 0 & & 0 & & & 0 & & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \Theta & \xrightarrow{j_q} & C_0 & \xrightarrow{D_1} & C_1 & \xrightarrow{D_2} & \dots & \xrightarrow{D_n} & C_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{j_q} & C_0(E) & \xrightarrow{D_1} & C_1(E) & \xrightarrow{D_2} & \dots & \xrightarrow{D_n} & C_n(E) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & \Theta & \longrightarrow & E & \xrightarrow{D_0} & F_0 & \xrightarrow{D_1} & F_1 & \xrightarrow{D_2} & \dots & \xrightarrow{D_n} & F_n & \longrightarrow & 0. \\
 & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \\
 & & & & & 0 & & 0 & & 0 & & & 0 & &
 \end{array}$$

EXEMPLE 4.5. Considérons l'opérateur différentiel $\mathcal{D} : E \rightarrow F_0$ défini par :

$$\begin{cases} \ddot{\xi}^1 + \dot{\xi}^2 - 4\xi^1 - 2\xi^2 = \eta^1, \\ \dot{\xi}^2 - \dot{\xi}^1 - 2\xi^1 - 2\xi^2 = \eta^2. \end{cases}$$

L'opérateur \mathcal{D} est formellement surjectif, c-à-d, il n'admet pas de conditions de compatibilité. Nous avons donc la suite formellement exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \Theta \longrightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}} F_0 \longrightarrow 0.$$

Puisque le premier opérateur de Spencer D_1 est du premier ordre, la seconde suite de Spencer revient à mettre le système $\Theta = \ker \mathcal{D}$ au premier ordre. En effet, la suite médiane du diagramme ci-dessus devient alors

$$(107) \quad 0 \longrightarrow E \xrightarrow{j_2} C_0(E) \xrightarrow{D_1} C_1(E) \longrightarrow 0,$$

avec l'opérateur $j_2 : E \rightarrow C_0(E) = J_2(E)$ défini par

$$(108) \quad \begin{cases} \xi^1 = \gamma^1, \\ \dot{\xi}^1 = \gamma^2, \\ \ddot{\xi}^1 = \gamma^3, \\ \xi^2 = \gamma^4, \\ \dot{\xi}^2 = \gamma^5, \\ \ddot{\xi}^2 = \gamma^6, \end{cases}$$

et $D_1 : C_0(E) \rightarrow C_1(E)$, définissant les conditions de compatibilité de j_2 , est défini par :

$$\begin{cases} \dot{\gamma}^1 - \gamma^2 = \kappa^1, \\ \dot{\gamma}^2 - \gamma^3 = \kappa^2, \\ \dot{\gamma}^4 - \gamma^5 = \kappa^3, \\ \dot{\gamma}^5 - \gamma^6 = \kappa^4. \end{cases}$$

La seconde suite de Spencer est alors la restriction de la suite (107) au système :

$$(109) \quad \begin{cases} y_{11}^1 + y_1^2 - 4y^1 - 2y^2 = 0, \\ y_{11}^2 - y_1^1 - 2y^1 - 2y^2 = 0. \end{cases}$$

Du système (109), on peut exprimer les inconnues principales y_{11}^1 et y_{11}^2 en fonction des inconnues paramétriques y_1^1, y_1^2, y^1, y^2 et, en utilisant l'opérateur j_2 , nous obtenons alors :

$$\begin{cases} \gamma^3 = 4\gamma^1 + 2\gamma^4 - \gamma^5, \\ \gamma^6 = 2\gamma^1 + \gamma^2 + 2\gamma^4. \end{cases}$$

L'opérateur $D_1 : C_0(E) \rightarrow C_1(E)$, restreint à R_2 , devient alors $D_1 : C_0 = R_2 \rightarrow C_1$, défini par :

$$(\gamma^1 \ \gamma^2 \ \gamma^4 \ \gamma^5) \longrightarrow \begin{cases} \dot{\gamma}^1 - \gamma^2 = \pi^1, \\ \dot{\gamma}^2 - 4\gamma^1 - 2\gamma^4 + \gamma^5 = \pi^2, \\ \dot{\gamma}^4 - \gamma^5 = \pi^3, \\ \dot{\gamma}^5 - 2\gamma^1 - \gamma^2 - 2\gamma^4 = \pi^4. \end{cases}$$

Le système défini par

$$\begin{cases} \ddot{\xi}^1 + \dot{\xi}^2 - 4\xi^1 - 2\xi^2 = 0, \\ \dot{\xi}^2 - \dot{\xi}^1 - 2\xi^1 - 2\xi^2 = 0, \end{cases}$$

est alors équivalent au système

$$\begin{cases} \dot{\gamma}^1 - \gamma^2 = 0, \\ \dot{\gamma}^2 - 4\gamma^1 - 2\gamma^4 + \gamma^5 = 0, \\ \dot{\gamma}^4 - \gamma^5 = 0, \\ \dot{\gamma}^5 - 2\gamma^1 - \gamma^2 - 2\gamma^4 = 0. \end{cases}$$

c-à-d,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \gamma^3 \\ \gamma^4 \\ \gamma^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \gamma^3 \\ \gamma^4 \\ \gamma^5 \end{pmatrix},$$

où les relations entre ξ et γ sont données par (108).

EXEMPLE 4.6. Considérons l'opérateur involutif $\mathcal{D} : E \rightarrow F_0$ défini par

$$\begin{cases} \partial_1 \xi = \eta^1, \\ \partial_2 \xi = \eta^2, \\ \partial_3 \xi = \eta^3. \end{cases}$$

Nous avons alors la suite formellement exacte suivante

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} F_2 \longrightarrow 0,$$

correspondant à la suite "grad-rot-div", où $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ est défini par

$$\begin{cases} -\partial_3 \eta^2 + \partial_2 \eta^3 = \zeta^1, \\ \partial_3 \eta^1 - \partial_1 \eta^3 = \zeta^2, \\ -\partial_2 \eta^1 + \partial_1 \eta^2 = \zeta^3, \end{cases}$$

et où l'opérateur $D_2 : F_1 \rightarrow F_2$ est défini par $\partial_1 \zeta^1 + \partial_2 \zeta^2 + \partial_3 \zeta^3 = \pi$. La suite de Janet médiane, c-à-d la suite de Janet pour l'opérateur $j_1 : E \rightarrow J_1(E)$, défini par

$$\begin{cases} \xi = A, \\ \partial_1 \xi = A_1, \\ \partial_2 \xi = A_2, \\ \partial_3 \xi = A_3, \end{cases}$$

est donnée par

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{j_1} J_1(E) \xrightarrow{D_1} C_1(E) \xrightarrow{j_1} J_1(E) \xrightarrow{D_2} C_2(E) \xrightarrow{D_3} C_3(E) \longrightarrow 0,$$

où $D_1 : J_1(E) \rightarrow C_1(E)$ est défini par

$$\begin{cases} \partial_1 A - A_1 = B_1, \\ \partial_2 A - A_2 = B_2, \\ \partial_3 A - A_3 = B_3, \\ \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = B_{12}, \\ \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 = B_{13}, \\ \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = B_{23}, \end{cases}$$

l'opérateur $D_2 : C_1(E) \rightarrow C_2(E)$ est défini par

$$\begin{cases} \partial_1 B_2 - \partial_2 B_1 + B_{12} = C_{12}, \\ \partial_3 B_1 - \partial_1 B_3 + B_{13} = C_{13}, \\ \partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 + B_{23} = C_{23}, \\ \partial_1 B_{23} + \partial_2 B_{13} + \partial_3 B_{12} = C_{123}, \end{cases}$$

et où l'opérateur $D_3 : C_2(E) \rightarrow C_3(E)$ est défini par :

$$\partial_1 C_{23} + \partial_2 C_{13} + \partial_3 C_{12} - C_{123} = D_{123}.$$

La restriction de l'opérateur $D_1 : J_1(E) \rightarrow C_1(E)$ au système R_1 défini par

$$\begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 = 0, \\ y_3 = 0, \end{cases}$$

correspond à poser $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ dans l'opérateur D_1 . Nous obtenons alors l'opérateur $D_1 : C_0 \rightarrow C_1$, défini par

$$A \longrightarrow \begin{cases} \partial_1 A = B_1, \\ \partial_2 A = B_2, \\ \partial_3 A = B_3, \end{cases}$$

et nous remarquons que l'opérateur D_1 est en fait le gradient. De plus, comme nous avons alors $B_{12} = B_{13} = B_{23} = 0$, l'opérateur $D_2 : C_1 \rightarrow C_2$ est alors défini par :

$$(B_1 \ B_2 \ B_3) \longrightarrow \begin{cases} \partial_1 B_2 - \partial_2 B_1 = C_{12}, \\ \partial_3 B_1 - \partial_1 B_3 = C_{13}, \\ \partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 = C_{23}. \end{cases}$$

Nous retrouvons le rotationnel. Pour finir, nous avons $C_{123} = 0$, ce qui implique que l'opérateur $D_2 : C_2 \rightarrow C_3$ est défini par :

$$(C_{12} \ C_{23} \ C_{13}) \longrightarrow \partial_1 C_{23} + \partial_2 C_{13} + \partial_3 C_{12} = D_{123}.$$

Nous retrouvons alors la divergence. Ainsi, la seconde suite de Spencer

$$0 \longrightarrow \Theta \xrightarrow{j_1} J_1(E) \xrightarrow{D_1} C_1 \xrightarrow{D_2} C_2 \xrightarrow{D_3} C_3 \longrightarrow 0,$$

est aussi la suite "grad-rot-div".

5. Variété caractéristique

DÉFINITION 5.1. Soit $\mathcal{D} : E \rightarrow F$ un opérateur différentiel d'ordre q , défini localement par :

$$\begin{pmatrix} \xi^1(x) \\ \xi^k(x) \\ \xi^m(x) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \eta^1(x) \\ \eta^r(x) \\ \eta^l(x) \end{pmatrix} = \left(\sum_{0 \leq |\mu| \leq q} a_k^{\tau\mu}(x) \partial_\mu \right) \begin{pmatrix} \xi^1(x) \\ \xi^k(x) \\ \xi^m(x) \end{pmatrix}.$$

Soit $\chi = \sum_{i=1}^n \chi_i dx^i \in T^*$ un covecteur, nous appelons alors *matrice caractéristique* de l'opérateur \mathcal{D} , la matrice définie par

$$A(x, \chi) = \left(\sum_{|\mu|=q} a_k^{\tau\mu}(x) \chi_\mu \right),$$

où $\chi_\mu = (\chi_1)^{\mu_1} \dots (\chi_n)^{\mu_n}$. Nous pouvons alors définir l'application suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_\chi(\mathcal{D}) : E &\longrightarrow F \\ \xi &\longrightarrow A(x, \chi) \xi = \eta \end{aligned}$$

On appelle alors l'application $\sigma_\chi(\mathcal{D})$ le *symbole* de \mathcal{D} en $\chi \in T^*$.

REMARQUE 5.1. La définition ci-dessus, adoptée par Spencer [144], est la seule qui puisse s'adapter à la situation de l'algèbre différentielle où l'on a un corps différentiel de base K à la place de la variété de base X , et où la notion de variable indépendante n'a donc plus de sens. Pour une autre définition, voir [85, 93, 107].

EXEMPLE 5.1. Considérons l'opérateur $\mathcal{D} : E \rightarrow F$ d'ordre q , défini par :

$$\begin{cases} -\partial_3 \eta^2 + \partial_2 \eta^3 + \eta^1 = \zeta^1, \\ \partial_3 \eta^1 - \partial_1 \eta^3 - \eta^2 = \zeta^2, \\ -\partial_2 \eta^1 + \partial_1 \eta^2 + \eta^3 = \zeta^3. \end{cases}$$

Sa matrice caractéristique est définie par :

$$A(\chi) = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_3 & \chi_2 \\ \chi_3 & 0 & -\chi_1 \\ -\chi_2 & \chi_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors $\det A(\chi) = -\chi_1 \chi_2 \chi_3 + \chi_1 \chi_2 \chi_3 = 0$. Donc, le rang générique de la matrice $A(\chi)$ est 2.

DÉFINITION 5.2. Un covecteur $0 \neq \chi \in T^*$ est dit *caractéristique* pour l'opérateur différentiel \mathcal{D} si l'application $\sigma_\chi(\mathcal{D})$ n'est pas injective. Un opérateur \mathcal{D} est dit *elliptique* s'il n'existe pas de covecteur χ réel caractéristique pour \mathcal{D} . Soit $x \in X$, alors on note par

$$V_x = \{\chi \in T^* \mid \exists 0 \neq \xi \in E, A(x, \chi) \xi = 0\},$$

et $V = \cup_{x \in X} V_x$ est appelée la *variété caractéristique* de l'opérateur différentiel \mathcal{D} .

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [59, 113, 144].

EXEMPLE 5.2. Nous avons montré dans l'exemple précédent que $\text{rk } A(\chi) = 2 < 3$, donc $V = T^*$. L'opérateur $\mathcal{D} : E \rightarrow F$ défini par $\partial_{11} \xi + \partial_{22} \xi = \eta$ est elliptique car $A(\chi) = \chi_1^2 + \chi_2^2$ et donc, il n'existe pas de covecteur réel caractéristique pour \mathcal{D} . L'opérateur $\mathcal{D} : E \rightarrow F$ défini par $\partial_{11} \xi - \partial_{22} \xi = \eta$, a pour matrice caractéristique $A(\chi) = \chi_1^2 - \chi_2^2$ et donc :

$$V = \{\chi \in T^* \mid \chi_1 - \chi_2 = 0\} \cup \{\chi \in T^* \mid \chi_1 + \chi_2 = 0\}.$$

EXEMPLE 5.3. Considérons l'opérateur $\mathcal{D} : E \rightarrow F$, défini par

$$\begin{cases} \partial_2 \xi^1 - \partial_1 \xi^1 + \partial_1 \xi^2 + \partial_2 \xi^2 = \eta^1, \\ x^1 \partial_1 \xi^1 + x^1 \partial_2 \xi^1 + \partial_1 \xi^2 + \partial_2 \xi^2 = \eta^2. \end{cases}$$

La matrice caractéristique est alors définie par

$$A(x, \chi) = \begin{pmatrix} \chi_2 - \chi_1 & \chi_1 + \chi_2 \\ x^1 (\chi_1 + \chi_2) & \chi_1 + \chi_2 \end{pmatrix},$$

et

$$\det A(x, \chi) = (\chi_2 - \chi_1)(\chi_2 + \chi_1) - x^1 (\chi_1 + \chi_2)^2 = -(\chi_1 + \chi_2)((x^1 + 1)\chi_1 + (x^1 - 1)\chi_2).$$

D'où la variété caractéristique est définie par :

$$V = \{\chi \in T^* \mid \chi_1 + \chi_2 = 0\} \cup_{x \in X} \{\chi \in T^* \mid (x^1 + 1)\chi_1 + (x^1 - 1)\chi_2 = 0\}.$$

Si l'opérateur \mathcal{D} est involutif et d'ordre q , alors grâce à (96), nous avons la relation :

$$\alpha_q^n + \beta_q^n = m.$$

On en déduit alors facilement les relations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_q^n = \min_{\chi \in T^*} \dim \ker \sigma_\chi(\mathcal{D}), \\ \beta_q^n = \max_{\chi \in T^*} \dim \text{im } \sigma_\chi(\mathcal{D}). \end{cases}$$

De la dernière équation du système précédent, on obtient :

$$\beta_q^n = \max_{\chi \in T^*} \text{rk } \sigma_\chi(\mathcal{D}).$$

CHAPITRE 5

Identités de Bezout généralisées & Applications

Ce chapitre est formé de trois parties :

- la première partie est composée du papier "Generalized Bezout Identity", co-écrit avec J.F. Pommaret et paru dans le journal *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing* 9 (2) (1998), 91-116. Les identités de Bezout jouent un rôle important en théorie du contrôle et en particulier dans le problème de placement de pôles, de stabilisation et de réalisation (voir [81, 152] pour plus de détails). Cette partie montre les liens existant entre les identités de Bezout généralisées et les suites exactes scindées, et en particulier, entre les identités de Bezout et les relèvements d'opérateurs différentiels. Des conditions nécessaires et suffisantes en terme de modules sont données pour qu'un système de contrôle multidimensionnel admette des identités de Bezout généralisées. Pour cela, nous donnons des tests effectifs permettant de vérifier si ces propriétés sont vérifiées et le moyen effectif de scinder de longues suites différentielles. De nombreux exemples concrets illustrent l'effectivité des méthodes présentées.
- la seconde partie propose deux applications des identités de Bezout : le placement de pôles [2, 3, 81] et le calcul des formes canoniques de Brunovsky [23] pour les systèmes multidimensionnels. Des conditions suffisantes, en terme de modules projectifs, sont données pour pouvoir placer les pôles des systèmes multidimensionnels. Ces résultats effectifs sont liés à des travaux récents et indépendants, développés par Pillai et Shankar dans [108]. De plus, nous montrons que les formes canoniques de Brunovsky existent seulement pour les systèmes de contrôle engendrant un module différentiel libre. Elles sont alors données par le premier opérateur de Spencer D_1 correspondant à l'opérateur injectif \mathcal{D}_0 qui définit la paramétrisation du système de contrôle.
- d'un appendice formé d'un exemple qui montre que la proposition 2.19 du chapitre 3 n'est vraie que si la matrice définissant le module M est de rang maximal. Cet exemple ainsi que les tests effectifs permettant de vérifier ce résultat sont tirés de la première partie.

Les résultats caractérisant en terme de modules l'existence des identités de Bezout généralisées et les moyens de les déterminer (scission d'une suite exacte) sont vrais pour tout anneau intègre A , comme nous le montrerons au chapitre 10. Cependant, nous disposons plus généralement de méthodes effectives comme pour l'anneau des opérateurs différentiels.

1. Generalized Bezout identity

Abstract: We describe a new approach of the generalized Bezout identity for linear time-varying ordinary differential control systems. We also explain when and how it can be extended to linear partial differential control systems. We show that it only depends on the algebraic nature of the differential module determined by the equations of the system. This formulation shows that the generalized Bezout identity is equivalent to the splitting of an exact differential sequence formed by the control system and its parametrization. This point of view gives a new algebraic and geometric interpretation of the entries of the generalized Bezout identity.

Keywords: Generalized Bezout identity, controllability, parametrization, Janet sequence, formal integrability, D -module, commutative algebra.

1.1. Introduction. Let us denote $s = \frac{d}{dt}$, $\mathbb{R}[s]$ the polynomial algebra in s and M_{mp} the set of $m \times p$ matrices with entries in $\mathbb{R}[s]$. It is well known that if

$$(110) \quad P(s)y + Q(s)u = 0,$$

is a left-coprime polynomial system, i.e. controllable [9, 41], where $P \in M_{mm}$, $\det P(s) \neq 0$ and $Q \in M_{mp}$, then we can find six polynomial matrices $X \in M_{mm}$, $\bar{X}, Y \in M_{pm}$, $\bar{P} \in M_{mp}$, $\bar{Y}, \bar{Q} \in M_{pp}$ such that

$$(111) \quad \begin{bmatrix} P(s) & Q(s) \\ \bar{X}(s) & \bar{Y}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) & \bar{P}(s) \\ Y(s) & \bar{Q}(s) \end{bmatrix} = I,$$

where I is the $(m+p) \times (m+p)$ identity matrix. This identity, generally called *generalized Bezout identity*, is useful in control theory [81, 152, 165].

Recently, it has been shown in [39, 41, 42, 86, 104, 113, 115] that controllability of a control system was a "built-in" property of the system and thus did not depend on a separation of the system variables between inputs and outputs. So, we are led to revisit the generalized Bezout identity with a more intrinsic point of view. For controllable *surjective* linear time-varying control system, the generalized Bezout identity is reformulated in terms of the *splitting of a short exact differential sequence* formed by the system and its parametrization. Moreover, in [43, 102, 113, 115, 116], the algebraic and geometric concepts of ordinary differential control theory (OD control theory) have been extended within the framework of partial differential control theory (PD control theory) or delay control theory, that is, linear or nonlinear input/output relations defined by systems of partial differential equations or differential and delay equations. See also [86, 104] for a n -dimensional control systems theory. Then, we can wonder if such a generalized Bezout identity exists for PD control systems. However, the existence of the generalized Bezout identity for (110) is deeply based on Bezout theorem which is not true in general for multivariable polynomial algebra. So (111) does not seem to have a generalization for PD control systems. We shall show that its existence only depends on the algebraic nature of the differential module determined by the equations of the system. Such a generalized Bezout identity exists for a *surjective* linear PD control system generating a *free* differential module. In this case, the generalized Bezout identity can be reformulated in terms of the splitting of a short exact differential sequence made by the system and its parametrization. In case the differential module is no longer free but *projective*, then only the upper part of (111) is satisfied, or in other words, the system admits a *parametrization* and a *right-inverse*. Finally, if the system is controllable, i.e. if it generates a *torsion-free* differential module, we only have the right upper part of (111), that is, the system admits a parametrization. Tests are known for checking whether a finitely generated differential module is torsion-free, projective or free [115, 116, 163, 164]. Thus for linear PD control systems, we are able to know which parts of the generalized Bezout identity exist and to compute them. Moreover, the extension of the generalized Bezout identity in the case of non surjective linear OD and PD control systems is obtained. In this case, we have to build and split a long exact differential sequence. Many explicit examples will illustrate the main results.

1.2. Controllability. The use of the module language for control systems was initiated by Kalman thirty years ago [84] and it took a new insight with Blomberg and Ylinen [9]. Recently,

its use seems to have given new results on structural properties of the system like controllability, observability, poles and zeros, motion planning... See for example [17, 39, 41, 42, 102, 104, 113, 115]. We recall a few results.

DEFINITION 1.1. A differential field K with n commuting derivations $\partial_1, \dots, \partial_n$ is a field which satisfies $\forall a, b \in K, \forall i, j = 1, \dots, n$:

- $\partial_i a \in K$,
- $\partial_i(a + b) = \partial_i a + \partial_i b$,
- $\partial_i(ab) = (\partial_i a)b + a\partial_i b$,
- $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$.

See [87, 113, 132] for more details.

In the course of the text, we will always consider differential field K containing \mathbb{Q} . We form the ring of linear differential operators with coefficients in K and denote it by $D = K[d_1, \dots, d_n]$. Any element of D has the form $\sum_{\text{finite}} a^\mu d_\mu$, where $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ is a multi-index with length $|\mu| = \mu_1 + \dots + \mu_n$ and $a^\mu \in K$. D is a non commutative integral domain which satisfies

$$\forall a, b \in K : ad_i(bd_j) = abd_id_j + a(\partial_i b)d_j,$$

and possesses the Ore property: $\forall (p, q) \in D^2, \exists (u, v) \in (D \setminus 0)^2$ such that $up = vq$.

EXAMPLE 1.1. The field of rational functions $\mathbb{R}(t)$ is a differential field with derivative $\frac{d}{dt}$. Indeed, $\forall a(t), 0 \neq b(t) \in \mathbb{R}(t)$, we have:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a(t)}{b(t)} \right) = \frac{\dot{a}(t)b(t) - a(t)\dot{b}(t)}{b^2(t)} \in \mathbb{R}(t).$$

When $D = \mathbb{R}(t)[\frac{d}{dt}]$ is the ring of linear operators with coefficients in $\mathbb{R}(t)$, every element $p \in D$ has the form $p = \sum_{\text{finite}} a_i(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^i$, with $a_i \in \mathbb{R}(t)$.

We introduce the differential indeterminates $y = \{y^k \mid k = 1, \dots, m\}$ and denote by $Dy = Dy^1 + \dots + Dy^m$ or by $[y] = [y^1, \dots, y^m]$ the left D -module spanned by the set y . Every element of Dy has the form $\sum_{\text{finite}} a_k^\mu d_\mu y^k$. If we have a finite set \mathcal{R} of linear OD or PD equations (ODE or PDE), we form the finitely generated left D -module $[\mathcal{R}]$ of linear differential consequences of the system generators and the differential residual D -module $M = [y]/[\mathcal{R}]$. See [7, 93, 107] for much details on D -modules.

REMARK 1.1. In the examples of this paper, we shall use either the language of jet theory for systems of PDE or the language of sections for operators [113]. In the first case, we have $d_i y_\mu^k = y_{\mu+1}^k$ while in the second case d_i must be replaced by ∂_i on sections.

DEFINITION 1.2. We call *observable* any element of M , or in other words, any linear combination of the system variables and their derivatives satisfying the equations of the control system.

Only two possibilities may happen for an observable: it may or may not verify an OD or a PD equation by itself. An observable which does not satisfy any OD or PD equation is called *free*. We find in [113] the following definition of controllability.

DEFINITION 1.3. A system is controllable if every observable is free.

A characterization of the controllability in terms of *differential closure* is shown in [113]. In [39, 41, 86, 102, 104, 113], the equivalent notion of *torsion-free* D -module has been used for linear time-varying OD, delay, n -dimensional and PD control systems. We recall the definition.

DEFINITION 1.4. A *torsion* element m of a D -module M is an element which satisfies $\exists 0 \neq a \in D$ such that $am = 0$ [135]. We denote by $t(M)$ the submodule of M made by all the torsion elements of M . A module is *torsion-free* if $t(M) = 0$.

From Definition 1.3 and Definition 1.4, we obtain the following theorem.

THEOREM 1.1. A linear OD or PD system is controllable iff the D -module M determined by its equations is torsion-free. In any case, $M/t(M)$ is a torsion-free module, a result leading to the concept of minimal realization [49, 86, 104, 113].

Let us give an illustrating example.

EXAMPLE 1.2. We take $D = \mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$ and let M be the residual D -module of $Dy^1 + Dy^2$ with respect to the D -submodule generated by $\ddot{y}^1 + y^1 + y^1 - y^2 + \alpha y^3$, $\ddot{y}^2 + y^2 - y^1 - y^3$. In the language of systems of ODE (see remark 1.1), we have the two equations:

$$(112) \quad \begin{cases} \ddot{y}^1 + y^1 - y^2 + \alpha y^3 = 0, \\ \ddot{y}^2 + y^2 - y^1 - y^3 = 0. \end{cases}$$

- For $\alpha = -1$, if we subtract the first equation from the second of (112) and set $z = y^1 - y^2$, we find $\ddot{z} + 2z = 0$. The image of z in M is a torsion element.
- For $\alpha = 1$, if we add the first equation to the second of (112) and set $z = y^1 + y^2$, we find $\ddot{z} = 0$ and thus the image of z in M is a torsion element.

We recall two other definitions of module properties which will be at the core of this paper (see [135] for more details).

- DEFINITION 1.5.
1. A D -module M is *free* if there is a set of elements which generate M and are independent on D . Such a set is called a basis.
 2. A D -module M is *projective* if there exist a free D -module F and a D -module N such that $F \cong M \oplus N$. Hence, the module N is also a projective D -module.

REMARK 1.2. It is quite easy to verify that a free D -module is a projective D -module and that a projective D -module is a torsion-free D -module, which can be summed up by the following module inclusions:

$$\text{free} \subseteq \text{projective} \subseteq \text{torsion-free}.$$

Moreover, any submodule of a free D -module is a torsion-free D -module. We will see that the reciprocity is true and we will describe a way to construct a free D -module containing a given torsion-free D -module (see the *Torsion-free Test* described in the section *Formal Tests* and p. 18 of [85]).

In [42, 102], the basis of a free D -module determined by a control system is called *flat output* or *linearizing output* and plays an important role for the motion planning. We have the useful theorem [135].

- THEOREM 1.2.
1. If D is a principal ideal ring (for example $K[\frac{d}{dt}]$) the D -module M is torsion-free iff M is free.

2. Over a polynomial ring $k[\chi_1, \dots, \chi_n]$, where k is a field, any projective module is also a free module.

The last part of the previous theorem has been conjectured in 1950 by Serre and demonstrated independently in 1976 by Quillen and Suslin [135, 164]. We can find in [102, 163, 164] tests permitting to know if a finitely generated $k[d_1, \dots, d_n]$ -module M , with k a field of constants (i.e. $\forall a \in k : \forall i = 1, \dots, n, \partial_i a = 0$), is respectively torsion-free, projective and free (see [106] for deeper results). Remark that in this case, we can use the Quillen-Suslin theorem and any projective module is a free module. Recently, formal tests have been found in [113, 116] permitting to treat the more general situation of $D = K[d_1, \dots, d_n]$ where K is a differential field with subfield of constants k (for example $D = \mathbb{R}(x^1, \dots, x^n)[d_1, \dots, d_n]$). We will recall these tests.

1.3. Linear Differential Operators. From a geometric point of view, a linear PD control system with n derivatives may be defined as a linear PD operator $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ where F_0, F_1 are vector bundles over a manifold X of dimension n , with local coordinates $x = (x^1, \dots, x^n)$. In other words, \mathcal{D}_1 is a PD linear operator acting on sections of F_0 , i.e. acting on functions $\eta : X \rightarrow F_0$. We define its sheaf of solutions by $\mathcal{D}_1 \eta = 0$ (see remark 1.1).

REMARK 1.3. A fundamental idea is to associate to each operator $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$ the D -module $M = [\eta]/[\mathcal{D}_1 \eta]$ and we shall say that the operator \mathcal{D}_1 determines the D -module M .

EXAMPLE 1.3. Let us take the operator $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$ defined by:

$$\begin{cases} \ddot{\eta}^1 + \eta^1 - \eta^2 + \alpha \eta^3 = \zeta^1, \\ \ddot{\eta}^2 + \eta^2 - \eta^1 - \eta^3 = \zeta^2. \end{cases}$$

The operator \mathcal{D}_1 determined the $D = \mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$ -module $M = [\eta^1, \eta^2, \eta^3]/[\ddot{\eta}^1 + \eta^1 - \eta^2 + \alpha \eta^3, \ddot{\eta}^2 + \eta^2 - \eta^1 - \eta^3]$.

By an abuse of language, we shall say that an operator \mathcal{D}_1 is controllable if the D -module M determined by \mathcal{D}_1 is torsion-free.

- DEFINITION 1.6. 1. An operator \mathcal{D}_1 is *formally injective* if $\mathcal{D}_1 \eta = 0 \Rightarrow \eta = 0$.
2. The operator \mathcal{D}_1 is *formally surjective* if the equations $\mathcal{D}_1 \eta = 0$ are differentially independent (see [87, 132]), i.e. independent on D , or equivalently if $\mathcal{D}_1 \eta = \zeta$ has no compatibility conditions, that is, if there does not exist an operator \mathcal{D}_2 such that $\mathcal{D}_1 \eta = \zeta \Rightarrow \mathcal{D}_2 \zeta = 0$.

In the course of the text, we shall say injective (resp. surjective) operator for formally injective (resp. formally surjective) operator. Moreover, a control system defined by \mathcal{D}_1 will be called *surjective* (resp. *injective*) if \mathcal{D}_1 is a surjective (resp. injective) operator.

EXAMPLE 1.4. - The operator $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$ defined by

$$(113) \quad \begin{cases} x^2 \partial_1 \eta + \eta = \zeta^1, \\ -\partial_2 \eta = \zeta^2, \end{cases}$$

where (x^1, x^2) are local coordinates on X , is an injective operator as we may easily verify that $\eta = -(x^2)^2 \partial_1 \zeta^2 - x^2 \partial_2 \zeta^1 + \zeta^1 - x^2 \zeta^2$. Thus, $(\zeta^1, \zeta^2) = (0, 0) \Rightarrow \eta = 0$.

- We take the *Spencer operator* (see [144] for more details) $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$ defined by:

$$(114) \quad \begin{cases} \partial_1 \eta^1 - \eta^2 = \zeta^1, \\ \partial_2 \eta^1 - \eta^3 = \zeta^2, \\ \partial_2 \eta^2 - \partial_1 \eta^3 = \zeta^3. \end{cases}$$

It is not a surjective operator. Indeed, if differentiating ζ^1 with respect to ∂_2 and ζ^2 to ∂_1 and subtracting them, we find $\partial_1 \zeta^2 - \partial_2 \zeta^1 - \zeta^3 = 0$. The operator $\mathcal{D}_2 : \zeta \rightarrow \chi$, defined by the compatibility condition $\partial_1 \zeta^2 - \partial_2 \zeta^1 - \zeta^3 = \chi$ of \mathcal{D}_1 , is surjective because it has only one equation.

- The operator $\mathcal{D}_1 : (y, u)^t \rightarrow \zeta$ defined by

$$P(s)y + Q(s)u = \zeta,$$

with $\det P(s) \neq 0$ is a surjective operator.

We recall that a differential sequence of operators $\{\mathcal{D}_i, i = 0, \dots, l\}$ is *locally exact* if $\ker \mathcal{D}_{i+1} = \text{im } \mathcal{D}_i$. We have in particular $\forall i = 0, \dots, l : \mathcal{D}_{i+1} \circ \mathcal{D}_i = 0$. A differential sequence is called *formally exact* if each operator generates all the compatibility conditions of the preceding one. Such a situation is met in particular if all the corresponding sequences on the jet level at any order are exact [113, 144], but the converse may not be true (see example 1.12). An injective operator \mathcal{D} will be denoted by the following formally exact differential sequence $0 \rightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}} F$, whereas the formally exact differential sequence $E \xrightarrow{\mathcal{D}} F \rightarrow 0$ will mean that \mathcal{D} is a surjective operator.

DEFINITION 1.7. The formally exact sequence $0 \rightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \rightarrow 0$ is said to be a *split exact differential sequence* if we have one of the following equivalent properties [135]:

- there exists an operator $\mathcal{P}_1 : F_1 \rightarrow F_0$ such that $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \text{id}_{F_1}$,
- there exists an operator $\mathcal{P}_0 : F_0 \rightarrow E$ such that $\mathcal{P}_0 \circ \mathcal{D}_0 = \text{id}_E$,
- $F_0 \cong E \oplus F_1$ (on the level of sections).

A system of partial differential equations $\mathcal{D}_1 \eta = 0$ is said to be *formally integrable* whenever the formal power series of the solutions can be determined step by step by successive derivations without obtaining backwards new informations on lower-order derivatives [113, 121, 144]. For a sufficiently regular operator \mathcal{D}_1 , we are always able to add to its equations new equations, made by differential consequences of the given ones, in order to have a formally integrable system with an *involutive* symbol (see [113, 121, 144] for more details). Such an operator is called *involutive*. In the course of the text, we shall always suppose that these regularity conditions are satisfied. We can find in [138] a symbolic package which completes a system of PDE to an involutive one, using algorithms based on the formal integrability theory, or some other packages, based on Janet-Riquier theory [74, 131], can be found in [55, 56, 129]. See also the symbolic packages in [12, 32, 33] using the effective methods of differential algebra [87, 132]. Now, if \mathcal{D}_1 is an involutive operator, then the sequence starting with \mathcal{D}_1 and in which each operator exactly describes the compatibility conditions of the preceding one is finite and stops after at most $n + 1$ operators where n is the dimension of X . This sequence

$$F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}_n} F_n \xrightarrow{\mathcal{D}_{n+1}} F_{n+1} \rightarrow 0,$$

is formally exact and it is usually called the *Janet sequence* of \mathcal{D}_1 [113].

REMARK 1.4. As both the initial (not involutive) and final (involutive) operators have the same solutions, if the original operator \mathcal{D}_1 is injective, then the final equations contain the zero order equation $\eta = 0$ which can therefore be a differential consequence of the initial equations. Thus, we have obtained a *left-inverse* $\eta = \mathcal{P}_1 \zeta$ which is however not uniquely determined. Indeed, we can take $\mathcal{P}'_1 = \mathcal{P}_1 + \mathcal{Q} \circ \mathcal{D}_2$ with $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 = \text{id}_{F_1}$ and $\mathcal{Q} : F_2 \rightarrow F_0$ any operator and we easily verify that $\mathcal{P}'_1 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 = \text{id}_{F_1}$ ($\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1 = 0$).

We recall the duality for differential operators [113, 115]. We denote by E a vector bundle over a manifold X , T^* the cotangent bundle of X , E^* the dual bundle of E and $\tilde{E} = \wedge^n T^* \otimes E^*$ its adjoint bundle. This is the right generalization of the concept of tensor density in physics [113].

DEFINITION 1.8. If $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ is a linear differential operator, its formal adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \tilde{F}_1 \rightarrow \tilde{F}_0$ is defined by the following formal rules equivalent to the integration by parts:

- the adjoint of a matrix (zero order operator) is the transposed matrix,
- the adjoint of ∂_i is $-\partial_i$,
- for two linear PD operators P, Q that can be composed: $\widetilde{P \circ Q} = \tilde{Q} \circ \tilde{P}$.

We easily verify that $\tilde{\tilde{\mathcal{D}}}_1 = \mathcal{D}_1$. It can be proved that, for any section λ of \tilde{F}_1 , we have the relation

$$\langle \lambda, \mathcal{D}_1 \eta \rangle - \langle \tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda, \eta \rangle = d(\cdot),$$

expressing a difference of n -forms ($\lambda \in \wedge^n T^* \otimes F_1^* \Rightarrow \langle \lambda, \mathcal{D}_1 \eta \rangle \in \wedge^n T^*$), where d is the standard exterior derivative. Equivalently, we can directly compute the adjoint of an operator by multiplying it by test functions on the left and integrating by parts.

EXAMPLE 1.5. We compute the adjoint operator of the Spencer operator (114). We multiply $\mathcal{D}_1 \eta$ on the left by a row vector $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ and integrate the result by parts, we obtain the operator $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \lambda \rightarrow \mu$ defined by:

$$(115) \quad \begin{cases} -\partial_1 \lambda_1 - \partial_2 \lambda_2 = \mu_1, \\ -\partial_2 \lambda_3 - \lambda_1 = \mu_2, \\ \partial_1 \lambda_3 - \lambda_2 = \mu_3. \end{cases}$$

DEFINITION 1.9. We call an operator \mathcal{D}_1 *parametrizable* if there exists a set of arbitrary functions $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^r)$ or "*potentials*" and a linear operator \mathcal{D}_0 such that all the compatibility conditions of the inhomogenous system $\mathcal{D}_0 \xi = \eta$ are *exactly* generated by $\mathcal{D}_1 \eta = 0$, i.e., if the sequence $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$ is formally exact.

1.4. Formal Tests. We can find in [102, 163, 164] tests to know whether a finitely generated $k[\chi_1, \dots, \chi_n]$ -module M (k is a field) has torsion elements or if it is respectively torsion-free or free. We give formal tests which can check those module properties over rings D of the form $D = K[d_1, \dots, d_n]$ where K is a differential field containing \mathbb{Q} (for example $\mathbb{R}(x^1, \dots, x^n)[d_1, \dots, d_n]$). All the calculations can be effectively performed by means of existing symbolic packages.

1.4.1. *Torsion-free D-modules.* We describe a formal test checking if the operator \mathcal{D}_1 determines a torsion-free D -module M or not (compare with p. 18 of [85]):

Torsion-free Test:

1. Start with \mathcal{D}_1 .
2. Construct its adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1$.
3. Find the compatibility conditions of $\tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = \mu$ and denote this operator by $\tilde{\mathcal{D}}_0$.
4. Construct its adjoint $\mathcal{D}_0 (= \tilde{\tilde{\mathcal{D}}}_0)$.
5. Find the compatibility conditions of $\mathcal{D}_0 \xi = \eta$ and call this operator \mathcal{D}'_1 .

We are led to two different cases. If \mathcal{D}_1 is exactly the compatibility conditions \mathcal{D}'_1 of \mathcal{D}_0 , then the system \mathcal{D}_1 determines a torsion-free D -module M and \mathcal{D}_0 is a parametrization of \mathcal{D}_1 in sense of the definition 1.9. Otherwise, the operator \mathcal{D}_1 is among, but not exactly, the compatibility conditions of \mathcal{D}_0 . The torsion elements of M are all the new compatibility conditions modulo the equations $\mathcal{D}_1 \eta = 0$.

PROOF. The operator $\tilde{\mathcal{D}}_0$ describes exactly the compatibility conditions of the operator $\tilde{\mathcal{D}}_1$ and we have in particular $\tilde{\mathcal{D}}_0 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = 0 \Rightarrow \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_0 = 0$. Hence, \mathcal{D}_1 is among the compatibility conditions of \mathcal{D}_0 , which are described by the operator \mathcal{D}'_1 . Now, computing the rank of the operators \mathcal{D}'_1 and \mathcal{D}_1 , we find that $\text{rank } \mathcal{D}'_1 = \text{rank } \mathcal{D}_1$ (see [116] for more details). If \mathcal{D}_1 is strictly among the compatibility conditions of \mathcal{D}_0 , then any new single compatibility condition ζ' in \mathcal{D}'_1 is a differential consequence of \mathcal{D}_1 ($\text{rank } \mathcal{D}'_1 = \text{rank } \mathcal{D}_1$) and we can find an operator $q \in D$ such that $q \zeta' = 0$, whenever $\mathcal{D}_1 \eta = 0$. Hence, any new single compatibility condition of \mathcal{D}_0 (not in \mathcal{D}_1) determines a torsion element. If \mathcal{D}_1 describes exactly the compatibility conditions of \mathcal{D}_0 , i.e. the sequence $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$ is formally exact, then the D -module M determined by \mathcal{D}_1 is torsion-free because $M \subseteq D \xi$ and $D \xi$ is a free D -module (see remark 1.2). \square

We can represent the test by the following differential sequences where the numbers indicate the different stages:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 5 & & \\
 & & \xrightarrow{\mathcal{D}'_1} & & F'_1, \\
 E & \xrightarrow{\mathcal{D}_0} & F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1, \\
 & & 4 & & 1 \\
 \tilde{E} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_0} & \tilde{F}_0 & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} & \tilde{F}_1. \\
 & & 3 & & 2
 \end{array}$$

In the preceding sequences, only the dual sequence and the sequence made with \mathcal{D}_0 and \mathcal{D}'_1 are formally exact. Thus, the defect of controllability of the operator \mathcal{D}_1 may be seen as a defect of the formal exactness of the upper sequence formed by \mathcal{D}_0 and \mathcal{D}_1 . This fact will lead to a future introduction of the functor Ext (see [13, 85, 106, 135]) in control theory, organized around the following two central results obtained one from the other by reversing the arrows:

1. Controllability of \mathcal{D}_1 amounts to the cancellation of the first extension of the D -module determined by $\tilde{\mathcal{D}}_1$ with value in the ring D of differential operators.

2. Observability of \mathcal{D}_1 amounts to the cancellation of $\text{ext}^1(M, D)$, the first extension of the D -module M determined by \mathcal{D}_1 with value in the ring D of differential operators.

In this framework, an operator is naturally controllable (observable) iff its formal adjoint is observable (controllable).

Using theorem 1.1, we obtain the following useful corollary.

THEOREM 1.3. *A linear PD control system is controllable iff it is parametrizable.*

PROOF. The operator \mathcal{D}_1 is controllable iff it determines a torsion-free D -module. By the previous test, \mathcal{D}_1 determines a torsion-free D -module iff there exists an operator $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$ parametrizing \mathcal{D}_1 , i.e. the sequence $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$ is formally exact. \square

We now illustrate the test by an example.

EXAMPLE 1.6. We wonder if the Spencer operator (114) determines a torsion-free D -module M (see example 1.3). The adjoint operator of the Spencer operator is (115). Differentiating the second equation of $\tilde{\mathcal{D}}_1$ with respect to ∂_1 , the third with respect to ∂_2 and adding them, we obtain the operator $\tilde{\mathcal{D}}_0 : \mu \rightarrow \nu$ defined by $-\partial_1\mu_2 - \partial_2\mu_3 + \mu_1 = \nu$. We multiply $\tilde{\mathcal{D}}_0$ by ξ and after one integration by parts, we obtain the operator $\mathcal{D}_0 : \xi \rightarrow \eta$ defined by:

$$(116) \quad \begin{cases} \xi = \eta^1, \\ \partial_1 \xi = \eta^2, \\ \partial_2 \xi = \eta^3. \end{cases}$$

We find the compatibility conditions of \mathcal{D}_0 by differentiating the second equation by ∂_2 , the third by ∂_1 and subtracting them, we obtain the third equation of \mathcal{D}_1 . Differentiating the first equation of \mathcal{D}_0 by respectively ∂_1 and ∂_2 and subtracting it by respectively the second and the third equation, we obtain the first and the second equation of \mathcal{D}_1 . Thus, all the compatibility conditions of \mathcal{D}_0 are exactly generated by \mathcal{D}_1 and the Spencer operator determines a torsion-free D -module M .

We now describe how to compute the torsion elements if \mathcal{D}_1 does not determine a torsion-free D -module M .

Computation of torsion elements:

1. Compute \mathcal{D}'_1 and check that \mathcal{D}_1 is strictly among \mathcal{D}'_1 .
2. For any new single compatibility condition of the form $\mathcal{D}'_1\eta = \zeta'$ of \mathcal{D}'_1 , compute the compatibility conditions of the following system:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 \eta = 0, \\ \mathcal{D}'_1 \eta = \zeta' \text{ (one equation only)}. \end{cases}$$

3. We find that ζ' is a torsion element of M satisfying $q\zeta' = 0$ with $0 \neq q \in D$.

We now give a theoretical but non-trivial example of a computation of a torsion element.

EXAMPLE 1.7. We consider the system

$$\ddot{\eta}^2 + \alpha(t)\dot{\eta}^2 + \dot{\alpha}(t)\eta^2 + \ddot{\eta}^1 - \eta^1 = 0,$$

where $\alpha(t)$ is a non zero function satisfying $\dot{\alpha}(t) + \alpha(t)^2 - 1 = 0$. See [117] for the general situation. We let the reader check that the operator $\mathcal{D}'_1 : \eta \rightarrow \zeta'$ is:

$$\dot{\eta}^2 + \dot{\eta}^1 - \alpha(t) \eta^1 - \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)}(\eta^2 + \eta^1) = \zeta'$$

(be careful, the adjoint of $\alpha(t) \dot{y}$ is $-\alpha(t) \dot{\lambda} - \dot{\alpha}(t) \lambda$). The compatibility condition of \mathcal{D}_0 is not the operator \mathcal{D}_1 and thus the system is not controllable. If we want to find the torsion element of the associated D -module M , we only have to compute the compatibility conditions of the system:

$$\begin{cases} \ddot{\eta}^2 + \alpha(t) \dot{\eta}^2 + \dot{\alpha}(t) \eta^2 + \dot{\eta}^1 - \eta^1 = 0, \\ \dot{\eta}^2 + \dot{\eta}^1 - \alpha(t) \eta^1 - \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)}(\eta^2 + \eta^1) = \zeta'. \end{cases}$$

After straightforward but tedious computations, we find that the torsion element ζ' satisfies $\alpha(t)\dot{\zeta}' + \zeta' = 0$.

1.4.2. *Projective D-modules.* Let \mathcal{D}_1 be a surjective operator with an injective adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1$. As $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is an injective operator, among the differential consequences of the equations $\tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = \mu$, we must find $\lambda = \tilde{\mathcal{P}}_1 \mu$ (see remark 1.4). A natural way to compute $\tilde{\mathcal{P}}_1$ is to bring $\tilde{\mathcal{D}}_1$ to formal integrability, that is, roughly speaking to saturate the system by lower order consequences of the equations [113]. Thus, bringing $\tilde{\mathcal{D}}_1$ to formal integrability, we form an operator $\tilde{\mathcal{P}}_1$ satisfying $\tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = \text{id}_{\tilde{F}_1}$, where $\text{id}_{\tilde{F}_1}$ is the identity operator of \tilde{F}_1 . The operator $\tilde{\mathcal{P}}_1$ is then a left-inverse of $\tilde{\mathcal{D}}_1$. Dualizing $\tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = \text{id}_{\tilde{F}_1}$, we obtain $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \text{id}_{F_1}$ or, in other words, \mathcal{D}_1 admits a right-inverse \mathcal{P}_1 . It is equivalent to say that the D -module M , determined by the surjective operator \mathcal{D}_1 , is a projective D -module [102, 116, 164].

THEOREM 1.4. *A surjective differential operator $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ determines a projective D -module iff its adjoint is injective, i.e., if there exists $\mathcal{P}_1 : F_1 \rightarrow F_0$ such that $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \text{id}_{F_1}$.*

We shall represent the operator $\mathcal{P}_1 : F_1 \rightarrow F_0$ by the following upper left arrow:

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\mathcal{P}_1} & \\ F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 \longrightarrow 0. \end{array}$$

EXAMPLE 1.8. To illustrate what has been said, we show that the system

(117)
$$\partial_2 \eta^2 - x^2 \partial_1 \eta^1 + \eta^1 = 0,$$

where (x^1, x^2) are local coordinates on X , determines a projective D -module and we find a right-inverse. Its adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \lambda \rightarrow \mu$ is just (113), i.e.,

$$\begin{cases} x^2 \partial_1 \lambda + \lambda = \mu_1, \\ -\partial_2 \lambda = \mu_2. \end{cases}$$

Bringing this system to formal integrability by derivating the first equation with respect to ∂_2 and the second by ∂_1 , we obtain the new lower order equation:

$$\lambda = -(x^2)^2 \partial_1 \mu_2 - x^2 \partial_2 \mu_1 + \mu_1 - x^2 \mu_2.$$

Thus $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is an injective operator and \mathcal{D}_1 determines a projective D -module. If we denote by $\tilde{\mathcal{P}}_1 : \mu \rightarrow \lambda$ the operator defined by $-(x^2)^2 \partial_1 \mu_2 - x^2 \partial_2 \mu_1 + \mu_1 - x^2 \mu_2 = \lambda$ then $\tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = \text{id}_{\tilde{F}_1}$, and its adjoint $\mathcal{P}_1 : \zeta \rightarrow \eta$, given by

$$\begin{cases} x^2 \partial_2 \zeta + 2\zeta = \eta^1, \\ (x^2)^2 \partial_1 \zeta - x^2 \zeta = \eta^2, \end{cases}$$

is a right-inverse of (117). Indeed, we easily verify that $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \text{id}_{F_1}$.

In the general case, \mathcal{D}_1 is no longer a surjective operator and a characterization of projective module in the language of operator can be found in [13, 103, 116]. We recall it.

THEOREM 1.5. *An operator $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ determines a projective D -module if there exists an operator $\mathcal{P}_1 : F_1 \rightarrow F_0$ such that $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1$. The operator \mathcal{P}_1 is then called a lift-operator.*

PROOF. As \mathcal{D}_1 is not a surjective operator, there exists an operator $\mathcal{D}_2 : F_1 \rightarrow F_2$ describing the compatibility conditions of \mathcal{D}_1 . The operator \mathcal{D}_1 defines a projective D -module M iff there exists an operator $\mathcal{P}_1 : F_1 \rightarrow F_0$ such that $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \text{id}_{\text{im } \mathcal{D}_1} = \text{id}_{F_1}$ modulo \mathcal{D}_2 , i.e., if there exists $\mathcal{P}_2 : F_2 \rightarrow F_1$ such that $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2 = \text{id}_{F_1}$. However, $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \text{id}_{\text{im } \mathcal{D}_1}$ is equivalent to:

$$(118) \quad \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1.$$

Indeed, the direct way is trivial whereas the reciprocity can be demonstrated as follows. From (118), we have $(\text{id}_{F_1} - \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1) \circ \mathcal{D}_1 = 0$ and thus $\text{id}_{F_1} - \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1$ must factorize through \mathcal{D}_2 (see p. 150 of [111]), that is to say, there exists an operator \mathcal{P}_2 such that

$$(119) \quad \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2 = \text{id}_{F_1},$$

which proves the inverse way. □

Moreover, the identity (119) implies $\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2$ and \mathcal{D}_2 defines, in its turn, a projective D -module. In a similar way, all the successive operators of compatibility conditions define a projective D -module. Now, if we dualize (118), we obtain $\tilde{\mathcal{D}}_1 \circ \tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = \tilde{\mathcal{D}}_1$ and thus $\tilde{\mathcal{D}}_1$ defines a projective D -module. Moreover, we have $\tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 + \tilde{\mathcal{D}}_2 \circ \tilde{\mathcal{P}}_2 = \text{id}_{\tilde{F}_1}$ and $\tilde{\mathcal{D}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_2 = 0$. The first identity shows that $\text{im } \tilde{\mathcal{D}}_2 \subseteq \text{ker } \tilde{\mathcal{D}}_1$, whereas if we take $\lambda \in \text{ker } \tilde{\mathcal{D}}_1$, the second one shows that $\tilde{\mathcal{D}}_2(\tilde{\mathcal{P}}_2 \lambda) = \lambda$ and thus $\lambda \in \text{im } \tilde{\mathcal{D}}_2 \Rightarrow \text{im } \tilde{\mathcal{D}}_2 = \text{ker } \tilde{\mathcal{D}}_1$. Hence, we have the following locally exact sequence:

$$\tilde{F}_0 \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} \tilde{F}_1 \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_2} \tilde{F}_2.$$

For a non surjective operator \mathcal{D}_1 , we give a test checking whether the module M determined by the operator \mathcal{D}_1 is a projective D -module or not [116].

Projective Test:

1. Construct the Janet sequence starting with \mathcal{D}_1 .
2. Check if the adjoint of the last operator of the sequence is injective.
3. Check if the backward sequence, made with the adjoint of the operators of the Janet sequence of \mathcal{D}_1 , is a formally exact sequence.

EXAMPLE 1.9. The Spencer operator \mathcal{D}_1 is not a surjective operator as we have seen in the example 1.4. The operator $\mathcal{D}_2 : \zeta \rightarrow \chi$ defining the compatibility conditions of \mathcal{D}_1 is

$$(120) \quad \partial_1 \zeta^2 - \partial_2 \zeta^1 - \zeta^3 = \chi,$$

and it is surjective. Dualizing the operator \mathcal{D}_2 by multiplying it by β and integrating the result by parts, we obtain the injective operator $\tilde{\mathcal{D}}_2 : \beta \rightarrow \lambda$ defined by:

$$\begin{cases} \partial_2 \beta = \lambda_1, \\ -\partial_1 \beta = \lambda_2, \\ -\beta = \lambda_3. \end{cases}$$

Thus, we only have to check that all the compatibility conditions of the operator $\tilde{\mathcal{D}}_2$ are exactly defined by the operator $\tilde{\mathcal{D}}_1$. Up to a change of sign, it is the same as verifying that all the compatibility conditions of \mathcal{D}_0 are defined by \mathcal{D}_1 (see the example 1.6). We conclude that the Spencer operator determines a projective D -module M . As the Spencer operator is a PD system with constant coefficients, then according to the theorem of Quillen-Suslin, it determines a free D -module. Indeed, the D -module M determined by the Spencer operator is equal to the module $D\xi = D\eta^1$ which is a free D -module (see the parametrization (116) of \mathcal{D}_1).

Let us describe now how to compute the lift-operators \mathcal{P}_i . Let \mathcal{D}_1 be an operator defining a projective D -module. Thus, we have the two following locally exact sequences:

$$\begin{array}{ccccccc} F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 & \xrightarrow{\mathcal{D}_2} & \dots & \xrightarrow{\mathcal{D}_n} & F_n & \xrightarrow{\mathcal{D}_{n+1}} & F_{n+1} & \longrightarrow & 0, \\ \tilde{F}_0 & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} & \tilde{F}_1 & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_2} & \dots & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_n} & \tilde{F}_n & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_{n+1}} & \tilde{F}_{n+1} & \longleftarrow & 0. \end{array}$$

As \mathcal{D}_{n+1} is a surjective operator with an injective adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_{n+1}$, there exists an operator $\mathcal{P}_{n+1} : F_{n+1} \rightarrow F_n$ such that $\mathcal{D}_{n+1} \circ \mathcal{P}_{n+1} = \text{id}_{F_{n+1}} \Rightarrow \mathcal{D}_{n+1} \circ \mathcal{P}_{n+1} \circ \mathcal{D}_{n+1} = \mathcal{D}_{n+1}$. Let us denote $\mathcal{Q}_n = \text{id}_{F_n} - \mathcal{P}_{n+1} \circ \mathcal{D}_{n+1}$. We have $\mathcal{D}_{n+1} \circ \mathcal{Q}_n = \mathcal{D}_{n+1} - \mathcal{D}_{n+1} \circ \mathcal{P}_{n+1} \circ \mathcal{D}_{n+1} = 0$ and thus $\tilde{\mathcal{Q}}_n \circ \tilde{\mathcal{D}}_{n+1} = 0$. However, we have $\tilde{\mathcal{D}}_n \circ \tilde{\mathcal{D}}_{n+1} = 0$ which implies that $\tilde{\mathcal{Q}}_n$ factorizes through $\tilde{\mathcal{D}}_n$: $\tilde{\mathcal{Q}}_n = \tilde{\mathcal{P}}_n \circ \tilde{\mathcal{D}}_n \Rightarrow \mathcal{Q}_n = \mathcal{D}_n \circ \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{D}_n \circ \mathcal{P}_n + \mathcal{P}_{n+1} \circ \mathcal{D}_{n+1} = \text{id}_{F_n} \Rightarrow \mathcal{D}_n \circ \mathcal{P}_n \circ \mathcal{D}_n = \mathcal{D}_n$. In a similar way, we can find \mathcal{P}_i for $i \in \{1, \dots, n\}$ satisfying $\mathcal{D}_i \circ \mathcal{P}_i \circ \mathcal{D}_i = \mathcal{D}_i$. Hence, the lift-operator \mathcal{P}_{i-1} can be computed as follows:

Computation of the lift-operators \mathcal{P}_i :

1. Compute an operator $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$ such that $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1} \circ \tilde{\mathcal{D}}_{n+1} = \text{id}_{\tilde{F}_{n+1}}$ and take its adjoint \mathcal{P}_{n+1} .

For $i=n+1, \dots, 2$:

2. Compute $\mathcal{Q}_{i-1} = \text{id}_{F_{i-1}} - \mathcal{P}_i \circ \mathcal{D}_i$ and $\tilde{\mathcal{Q}}_{i-1}$.
3. As before, $\tilde{\mathcal{Q}}_{i-1}$ must factorize through $\tilde{\mathcal{D}}_{i-1}$ and we find $\tilde{\mathcal{P}}_{i-1}$ such that $\tilde{\mathcal{Q}}_{i-1} = \tilde{\mathcal{P}}_{i-1} \circ \tilde{\mathcal{D}}_{i-1}$ and dualizing, we have \mathcal{P}_{i-1} .

EXAMPLE 1.10. We have seen that the Spencer operator defined a projective D -module. We show how to compute \mathcal{P}_1 . We easily find that $\mathcal{P}_2 : \chi \rightarrow \zeta$ defined by

$$(121) \quad \begin{cases} 0 = \zeta^1, \\ 0 = \zeta^2, \\ -\chi = \zeta^3, \end{cases}$$

is a right-inverse of \mathcal{D}_2 . We start by defining $Q_1 = \text{id}_{F_1} - \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2$. The operator $Q_1 : \zeta \rightarrow \gamma$ is thus:

$$\begin{cases} \zeta^1 = \gamma^1, \\ \zeta^2 = \gamma^2, \\ \partial_1 \zeta^2 - \partial_2 \zeta^1 = \gamma^3. \end{cases}$$

Taking its adjoint, we obtain $\tilde{Q}_1 : \lambda \rightarrow \phi$

$$\begin{cases} \partial_2 \lambda_3 + \lambda_1 = \phi_1, \\ -\partial_1 \lambda_3 + \lambda_2 = \phi_2, \\ 0 = \phi_3, \end{cases}$$

whereas $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is given by (115). We easily find that $\tilde{\mathcal{P}}_1$ is defined by

$$\begin{cases} -\mu_2 = \phi_1, \\ -\mu_3 = \phi_2, \\ 0 = \phi_3, \end{cases}$$

and we have the operator $\mathcal{P}_1 : \zeta \rightarrow \eta$ given by:

$$(122) \quad \begin{cases} 0 = \eta^1, \\ -\zeta^1 = \eta^2, \\ -\zeta^2 = \eta^3. \end{cases}$$

We let the reader check that $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1$.

1.4.3. *Free D-modules.* We have seen in 1. of theorem 1.2 that for a principal ring D (for example $K[\frac{d}{dt}]$), a torsion-free D -module is a free D -module. Hence, we state a very useful theorem [113, 115].

THEOREM 1.6. *A surjective linear time-varying OD control system is controllable iff its adjoint is injective.*

PROOF. In a principal ring, the notions of torsion-free and projective module are equivalent. Thus, a linear OD control system is controllable iff the D -module M is projective. The operator \mathcal{D}_1 is surjective and its adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is injective, then \mathcal{D}_1 determines a projective D -module M and the system is controllable. Conversely, if $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is not injective then we can find a test vector $\lambda \neq 0$ which satisfies $\tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = 0$. Thus $\langle \lambda, \mathcal{D}_1 \eta \rangle$ is a total derivative of an observable which is therefore a torsion element, as its derivative is null as soon as η is a solution of the system and the system is not controllable. \square

REMARK 1.5. Even in the case of time-varying system, we deduce that there is a bijective correspondence between torsion elements and first integrals of motions.

EXAMPLE 1.11. We take again example (112). Multiplying it by a row vector $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ and integrating the result by parts, we obtain $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \lambda \rightarrow \mu$ defined by:

$$\begin{cases} \ddot{\lambda}_1 + \lambda_1 - \lambda_2 = \mu_1, \\ \ddot{\lambda}_2 + \lambda_2 - \lambda_1 = \mu_2, \\ -\lambda_2 + \alpha \lambda_1 = \mu_3. \end{cases}$$

Differentiating twice the zero-order equation and substituting it, we obtain

$$(\alpha + 1)(\alpha - 1)\lambda_1 = 0,$$

and the operator \tilde{D}_1 is injective i.e. controllable iff $\alpha \neq -1$ and $\alpha \neq 1$.

THEOREM 1.7. *An operator D_1 determines a free D -module M iff there exists an injective parametrization of D_1 .*

PROOF. Let $D_0 \xi = \eta$ be a parametrization of $D_1 \eta = \zeta$, then we have $M \subseteq D \xi$. Now, if $D_0 \xi = \eta$ is an injective parametrization of D_1 , then there exists a left-inverse P_0 of D_0 such that $\xi = P_0 \circ D_0 \xi \Leftrightarrow \xi = P_0 \eta \Rightarrow D \xi \subseteq M$. Thus, $M = D \xi$ and M is a free D -module. The converse is obvious. \square

EXAMPLE 1.12. The operator $D_2 : \zeta \rightarrow \chi$, generating the compatibility condition of the Spencer operator, is defined by $\partial_1 \zeta^2 - \partial_2 \zeta^1 - \zeta^3 = \chi$. We know that the operator D_2 determines a free D -module (see example 1.9). However, the operator D_1 is a parametrization of D_2 which is not injective. We have in (115) the relation $\mu_1 = \partial_1 \mu_2 + \partial_2 \mu_3$ and if we take only the second and the third equations of \tilde{D}_1 as a new operator \tilde{D}_1^\sharp , we easily see that its adjoint $D_1^\sharp : \theta \rightarrow \zeta$, defined by

$$\begin{cases} -\theta^1 = \zeta^1, \\ -\theta^2 = \zeta^2, \\ -\partial_1 \theta^2 + \partial_2 \theta^1 = \zeta^3, \end{cases}$$

is an injective parametrization of D_2 .

1.5. Split Exact Sequences. The following theorem is at the core of the generalization of the generalized Bezout identity for non surjective operators. It shows how we can construct the lift-operators in order to split a long formally exact sequence of differential operators.

THEOREM 1.8. *Let $D_1 : F_0 \rightarrow F_1$ be an operator determining a projective D -module and let*

$$F_0 \xrightarrow{D_1} F_1 \xrightarrow{D_2} \dots \xrightarrow{D_n} F_n \xrightarrow{D_{n+1}} F_{n+1} \rightarrow 0,$$

be its Janet sequence. Then, there exists lift-operators $P_i : F_i \rightarrow F_{i-1}$ such that the sequence

$$F_0 \xleftarrow{P_1} F_1 \xleftarrow{P_2} \dots \xleftarrow{P_n} F_n \xleftarrow{P_{n+1}} F_{n+1} \leftarrow 0,$$

is locally exact and $\forall i = 1 \dots n + 1 : P_i \circ D_i \circ P_i = P_i$.

PROOF. Let $D_1 : F_0 \rightarrow F_1$ be an operator determining a projective D -module M and let

$$F_0 \xrightarrow{D_1} F_1 \xrightarrow{D_2} \dots \xrightarrow{D_n} F_n \xrightarrow{D_{n+1}} F_{n+1} \rightarrow 0,$$

be the Janet sequence of D_1 . Let us suppose that we have found operators P_i such that $D_i \circ P_i \circ D_i = D_i$ for $i = 1 \dots n$ and $D_{n+1} \circ P_{n+1} = \text{id}_{F_{n+1}}$. Let us focus, only for the moment, on the locally exact differential sequence $F_{i-1} \xrightarrow{D_i} F_i \xrightarrow{D_{i+1}} F_{i+1}$ with $D_{i+1} \circ P_{i+1} \circ D_{i+1} = D_{i+1}$ and $D_i \circ P_i \circ D_i = D_i$. We have $\forall \eta \in F_i : D_{i+1} \circ (\text{id}_{F_i} - P_{i+1} \circ D_{i+1}) \eta = 0 \Rightarrow \exists \xi \in F_{i-1} : (\text{id}_{F_i} - P_{i+1} \circ D_{i+1}) \eta = D_i \xi$ as the sequence formed by D_i and D_{i+1} is locally exact. However, we have $\forall \xi \in F_{i-1} : (D_i \circ P_i - \text{id}_{F_i}) \circ D_i \xi = 0 \Rightarrow (D_i \circ P_i - \text{id}_{F_i}) \circ (\text{id}_{F_i} - P_{i+1} \circ D_{i+1}) \eta = 0, \forall \eta \in F_i$.

Finally, we obtain the new identity $\text{id}_{F_i} = \mathcal{D}_i \circ \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{i+1} \circ \mathcal{D}_{i+1} - \mathcal{D}_i \circ \mathcal{P}_i \circ \mathcal{P}_{i+1} \circ \mathcal{D}_{i+1}$. This identity can be rewritten under the two different following forms¹:

$$(123) \quad \begin{cases} \mathcal{P}'_i = \mathcal{P}_i \circ (\text{id}_{F_i} - \mathcal{P}_{i+1} \circ \mathcal{D}_{i+1}), \\ \text{id}_{F_i} = \mathcal{D}_i \circ \mathcal{P}'_i + \mathcal{P}_{i+1} \circ \mathcal{D}_{i+1}, \end{cases}$$

or

$$(124) \quad \begin{cases} \mathcal{P}''_{i+1} = (\text{id}_{F_i} - \mathcal{D}_i \circ \mathcal{P}_i) \circ \mathcal{P}_{i+1}, \\ \text{id}_{F_i} = \mathcal{D}_i \circ \mathcal{P}_i + \mathcal{P}''_{i+1} \circ \mathcal{D}_{i+1}. \end{cases}$$

Now, let us suppose that $\mathcal{P}_{i+1} \circ \mathcal{D}_{i+1} \circ \mathcal{P}_{i+1} = \mathcal{P}_{i+1}$, then we have $\mathcal{P}'_i \circ \mathcal{P}_{i+1} = 0 \Rightarrow \text{im } \mathcal{P}_{i+1} \subseteq \ker \mathcal{P}'_i$. Let us take $\eta \in \ker \mathcal{P}'_i$ then, from the second equation of (123), we have $\eta = \mathcal{P}_{i+1}(\mathcal{D}_{i+1}\eta) \Rightarrow \eta \in \text{im } \mathcal{P}_{i+1}$ showing that

$$F_{i-1} \xleftarrow{\mathcal{P}'_i} F_i \xleftarrow{\mathcal{P}_{i+1}} F_{i+1},$$

is a locally exact differential sequence. Moreover, from the second equation of (123), we have $\mathcal{P}'_i \circ \mathcal{D}_i \circ \mathcal{P}'_i = \mathcal{P}'_i$. For showing that $\mathcal{P}_{i+1} \circ \mathcal{D}_{i+1} \circ \mathcal{P}_{i+1} = \mathcal{P}_{i+1}$, we only have to prove it for $i = n$ (the above demonstration has shown that $\mathcal{P}_n \circ \mathcal{D}_n \circ \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}'_{n-1} \circ \mathcal{D}_{n-1} \circ \mathcal{P}'_{n-1} = \mathcal{P}'_{n-1} \dots$). However, $\mathcal{D}_{n+1} \circ \mathcal{P}_{n+1} = \text{id}_{F_{n+1}} \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1} \circ \mathcal{D}_{n+1} \circ \mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_{n+1}$.

Finally, we have shown that, starting with \mathcal{P}_{n+1} , we can change \mathcal{P}_n into another lift-operator \mathcal{P}'_n , according to (123), in order to have the sequence formed by \mathcal{P}_{n+1} and \mathcal{P}'_n locally exact. Now, starting with \mathcal{P}'_n , we can change \mathcal{P}_{n-1} using (123), in which we have substituted \mathcal{P}_n by \mathcal{P}'_n , to have the sequence made by \mathcal{P}'_n and \mathcal{P}'_{n-1} locally exact. We can do similar for all the lift-operators \mathcal{P}_i and we obtain the following locally exact differential sequence

$$F_0 \xleftarrow{\mathcal{P}'_1} F_1 \xleftarrow{\mathcal{P}'_2} \dots \xleftarrow{\mathcal{P}'_n} F_n \xleftarrow{\mathcal{P}_{n+1}} F_{n+1} \leftarrow 0,$$

with $\mathcal{D}_i \circ \mathcal{P}'_i \circ \mathcal{D}_i = \mathcal{D}_i$ and $\mathcal{P}'_i \circ \mathcal{D}_i \circ \mathcal{P}'_i = \mathcal{P}'_i$. \square

COROLLARY 1.1. *Let $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ be an operator determining a projective D -module, then there exists an operator $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$ and lift-operators $\mathcal{P}_i : F_i \rightarrow F_{i-1}$ such that the sequence*

$$E \xleftarrow{\mathcal{P}_0} F_0 \xleftarrow{\mathcal{P}_1} F_1 \xleftarrow{\mathcal{P}_2} \dots \xleftarrow{\mathcal{P}_n} F_n \xleftarrow{\mathcal{P}_{n+1}} F_{n+1} \leftarrow 0,$$

is locally exact and $\forall i = 0 \dots n + 1 : \mathcal{P}_i \circ \mathcal{D}_i \circ \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i$.

PROOF. As \mathcal{D}_1 determines a projective D -module, there exists a parametrization $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_1$ and $\tilde{\mathcal{D}}_1$ determines a projective D -module. Thus $\tilde{\mathcal{D}}_0$ and \mathcal{D}_0 determine also a projective D -module, which implies the existence of a lift-operator \mathcal{P}_0 such that $\mathcal{D}_0 \circ \mathcal{P}_0 \circ \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0$. Applying the previous theorem, we have the locally exact differential sequence

$$F_0 \xleftarrow{\mathcal{P}'_1} F_1 \xleftarrow{\mathcal{P}'_2} \dots \xleftarrow{\mathcal{P}'_n} F_n \xleftarrow{\mathcal{P}_{n+1}} F_{n+1} \leftarrow 0,$$

with $\mathcal{P}'_i \circ \mathcal{D}_i \circ \mathcal{P}'_i = \mathcal{P}'_i$. As in the previous proof, we can prolong this differential sequence to obtain the following locally exact differential sequence

$$E \xleftarrow{\mathcal{P}'_0} F_0 \xleftarrow{\mathcal{P}'_1} F_1 \xleftarrow{\mathcal{P}'_2} \dots \xleftarrow{\mathcal{P}'_n} F_n \xleftarrow{\mathcal{P}_{n+1}} F_{n+1} \leftarrow 0,$$

with $\mathcal{D}_0 \circ \mathcal{P}'_0 \circ \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0$ and $\mathcal{P}'_0 \circ \mathcal{D}_0 \circ \mathcal{P}'_0 = \mathcal{P}'_0$. \square

1. On peut trouver les identités (123) et (124) plus simplement: on remarque que $\text{id}_{F_i} = \mathcal{D}_i \circ \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{i+1} \circ \mathcal{D}_{i+1} \Rightarrow \mathcal{D}_i \circ \mathcal{P}_i = \mathcal{D}_i \circ \mathcal{P}_i \circ \mathcal{D}_i \circ \mathcal{P}_i + \mathcal{D}_i \circ \mathcal{P}_i \circ \mathcal{P}_{i+1} \circ \mathcal{D}_{i+1} \Rightarrow \mathcal{D}_i \circ \mathcal{P}_i \circ \mathcal{P}_{i+1} \circ \mathcal{D}_{i+1} = 0$, d'où les identités.

1.6. Applications to the Generalized Bezout Identity. We now explain the link of the preceding results with the generalized Bezout identity.

1.6.1. *PD Control Systems with Variable Coefficients.* The following theorem is the generalization of the generalized Bezout identity for non surjective operator \mathcal{D}_1 describing the control system. We insist on the fact that everything that follows can be computed explicitly using symbolic packages. See the examples illustrating the main results.

THEOREM 1.9. *Let $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ be a PD control system with variable coefficients.*

1. *If \mathcal{D}_1 determines a free D -module M , then there exist three operators $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$, $\mathcal{P}_0 : F_0 \rightarrow E$ and $\mathcal{P}_1 : F_1 \rightarrow F_0$ such that:*

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_0 = 0, \\ \mathcal{P}_0 \circ \mathcal{D}_0 = \text{id}_E, \\ \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1, \\ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1, \\ \mathcal{P}_0 \circ \mathcal{P}_1 = 0. \end{cases}$$

The differential sequences $0 \rightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$ and $0 \leftarrow E \xleftarrow{\mathcal{P}_0} F_0 \xleftarrow{\mathcal{P}_1} F_1$ are locally exact.

2. *If \mathcal{D}_1 determines a projective D -module M , then there exist three operators $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$, $\mathcal{P}_0 : F_0 \rightarrow E$ and $\mathcal{P}_1 : F_1 \rightarrow F_0$ such that:*

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_0 = 0, \\ \mathcal{D}_0 \circ \mathcal{P}_0 \circ \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0, \\ \mathcal{P}_0 \circ \mathcal{D}_0 \circ \mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0, \\ \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1, \\ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1, \\ \mathcal{P}_0 \circ \mathcal{P}_1 = 0. \end{cases}$$

The differential sequences $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$ and $E \xleftarrow{\mathcal{P}_0} F_0 \xleftarrow{\mathcal{P}_1} F_1$ are locally exact.

3. *If \mathcal{D}_1 determines a torsion-free D -module M , i.e. \mathcal{D}_1 is controllable, then there exists one operator $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$ such that:*

$$\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_0 = 0.$$

The differential sequence $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$ is formally exact.

EXAMPLE 1.13. Let us take again the Spencer operator \mathcal{D}_1 defined by (114). We have shown that \mathcal{D}_1 determined a free D -module and that the following differential sequence

$$(125) \quad 0 \rightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} F_2 \rightarrow 0,$$

was locally exact, where \mathcal{D}_0 and \mathcal{D}_2 are defined respectively by (116) and by (120). The operator \mathcal{P}_2 defined by (121) is a right-inverse of \mathcal{D}_2 and \mathcal{P}_1 , defined by (122), satisfies $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1$. We let the reader check that $\mathcal{P}'_1 = \mathcal{P}_1$ and $\mathcal{P}'_0 = \mathcal{P}_0 : \eta \rightarrow \xi$ defined by $\eta^1 = \xi$ satisfies

$\mathcal{P}_0 \circ \mathcal{D}_0 = \text{id}_{F_0}$. Thus, we have:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_0 = 0, \\ \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1 = 0, \\ \mathcal{P}_0 \circ \mathcal{D}_0 = \text{id}_E, \\ \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1, \\ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1, \\ \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{P}_2 = \text{id}_{F_2}, \\ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2 = 0, \\ \mathcal{P}_0 \circ \mathcal{P}_1 = 0. \end{cases}$$

Moreover, the differential sequence

$$0 \longleftarrow E \xleftarrow{\mathcal{P}_0} F_0 \xleftarrow{\mathcal{P}_1} F_1 \xleftarrow{\mathcal{P}_2} F_2 \longleftarrow 0,$$

is locally exact.

In the case \mathcal{D}_1 is a surjective operator, the previous theorem leads to the existence of the generalized Bezout identity.

COROLLARY 1.2. *Let $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ be a surjective PD control system with variable coefficients.*

1. *If the operator \mathcal{D}_1 determines a free D -module M , then we have*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{P}_0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 & \mathcal{D}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{id}_{F_1} & 0 \\ 0 & \text{id}_E \end{bmatrix},$$

and the generalized Bezout identity is equivalent to the splitting of the following locally exact differential sequence:

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \rightarrow 0.$$

2. *If \mathcal{D}_1 determines a projective D -module M , then we have:*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}_1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 & \mathcal{D}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{id}_{F_1} & 0 \end{bmatrix}.$$

3. *If \mathcal{D}_1 determines a torsion-free D -module M , then we have:*

$$\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_0 = 0.$$

In the next example, we illustrate each situation for a surjective operator.

EXAMPLE 1.14. 1. The system $\partial_2 \eta^1 - x^2 \partial_1 \eta^2 - \eta^3 = 0$ determines a free-module and we have:

$$\begin{bmatrix} \partial_2 & -x^2 \partial_1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\partial_2 & -x^2 \partial_1 \end{bmatrix} = I.$$

2. We have seen that the system (117), defined by $\partial_2 \eta^2 - x^2 \partial_1 \eta^1 + \eta^1 = 0$, was generating a projective module and we found a right-inverse. We let the reader check that:

$$\begin{bmatrix} -x^2 \partial_1 + 1 & \partial_2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x^2 \partial_2 + 2 & x^2 \partial_2^2 + 2 \partial_2 \\ (x^2)^2 \partial_1 - x^2 & (x^2)^2 \partial_1 \partial_2 - x^2 \partial_2 - 1 \end{bmatrix} = [1, 0].$$

3. The system $\partial_2 \eta^2 - x^1 \partial_1 \eta^1 + \eta^1 = 0$ determines only a torsion-free module and we have:

$$\begin{bmatrix} -x^1 \partial_1 + 1 & \partial_2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} -\partial_2 \\ -x^1 \partial_1 + 1 \end{bmatrix} = 0.$$

REMARK 1.6. Projective module and right-inverse are useful if we want to know whether a system of polynomial equations admits solutions. Indeed, the Hilbert theorem claims that the system of polynomial equations

$$(126) \quad \begin{cases} P_1(\chi_1, \dots, \chi_n) = 0, \\ P_2(\chi_1, \dots, \chi_n) = 0, \\ \dots \\ \dots \\ P_m(\chi_1, \dots, \chi_n) = 0, \end{cases}$$

where $P_1, \dots, P_m \in k[\chi_1, \dots, \chi_n]$, has no solution iff there exist $Q_1, \dots, Q_m \in k[\chi_1, \dots, \chi_n]$ such that:

$$P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + \dots + P_m Q_m = 1.$$

We can reformulate the Hilbert theorem saying that the system of polynomial equations (126) has no solution iff the adjoint of the surjective operator $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$ defined by

$$P_1(\partial_1, \dots, \partial_n) \eta^1 + \dots + P_m(\partial_1, \dots, \partial_n) \eta^m = \zeta,$$

where we have substituted χ_i by ∂_i in P_j , is injective, i.e., the module M determined by \mathcal{D}_1 is a projective and is thus a free D -module (Quillen-Suslin theorem).

We give an example.

EXAMPLE 1.15. We search the common solutions of the following set of polynomials:

$$(127) \quad \begin{cases} P_1 = \chi_3^3 + \chi_1 \chi_3 + 1, \\ P_2 = \chi_3^2 + \chi_2 \chi_3, \\ P_3 = \chi_2^2 + \chi_1. \end{cases}$$

We define the operator $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$ by:

$$(\partial_3^3 + \partial_1 \partial_3 + 1) \eta^1 + (\partial_3^2 + \partial_2 \partial_3) \eta^2 + (\partial_2^2 + \partial_1) \eta^3 = \zeta.$$

It is quite easy to see that we obtain from $\bar{\mathcal{D}}_1 \lambda = \mu$ the equation:

$$\lambda = \mu_1 + \partial_3 \mu_2 - \partial_2 \mu_2 + \partial_3 \mu_3.$$

Thus, the operator $\mathcal{P}_1 : \zeta \rightarrow \eta$, defined by

$$\begin{cases} \zeta = \eta^1, \\ \partial_2 \zeta - \partial_3 \zeta = \eta^2, \\ -\partial_3 \zeta = \eta^3, \end{cases}$$

is a right-inverse of \mathcal{D}_1 , i.e. $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \text{id}_{F_1}$. We have

$$P_1 + P_2(\chi_2 - \chi_3) - P_1 \chi_3 = 1,$$

and the system (127) has no solution.

1.6.2. *Time-varying OD Control Systems.* The following theorem leads to the existence of the generalized Bezout identity.

THEOREM 1.10. – Let $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ be a controllable time-varying OD control system, then there exist three operators $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$, $\mathcal{P}_0 : F_0 \rightarrow E$ and $\mathcal{P}_1 : F_1 \rightarrow F_0$ such that:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_0 = 0, \\ \mathcal{P}_0 \circ \mathcal{D}_0 = \text{id}_E, \\ \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1, \\ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1, \\ \mathcal{P}_0 \circ \mathcal{P}_1 = 0. \end{cases}$$

Moreover, the differential sequences $0 \rightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$ and $0 \leftarrow E \xleftarrow{\mathcal{P}_0} F_0 \xleftarrow{\mathcal{P}_1} F_1$ are locally exact.

– If \mathcal{D}_1 is a surjective operator, then we have

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{P}_0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 & \mathcal{D}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{id}_{F_1} & 0 \\ 0 & \text{id}_E \end{bmatrix},$$

and the generalized Bezout identity is equivalent to the splitting of the locally exact differential sequence:

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \rightarrow 0.$$

We now give examples of a computation of the generalized Bezout identity for a time-varying OD control system.

- EXAMPLE 1.16.** 1. If we start with the left-coprime system (110), i.e. controllable [9, 17, 41], we can rewrite it under the form $\mathcal{D}_1 \eta = \zeta$ where $\mathcal{D}_1 = [P(s), Q(s)]$, $s = \frac{d}{dt}$ and $\eta = (y, u)^t$. The assumption of $\det P(s) \neq 0$ amounts to the surjectivity of \mathcal{D}_1 (see example 1.4) and, by theorem 1.10, we have (111).
2. We compute a generalized Bezout identity for the following time-varying OD control system

$$\ddot{\eta}^1 + \alpha(t)\dot{\eta}^1 + \eta^1 - \dot{\eta}^2 - \alpha(t)\eta^2 = 0,$$

with α a function of time. We take the surjective operator \mathcal{D}_1 associated with the previous system and dualizing it, we obtain the operator $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \lambda \rightarrow \mu$ defined by:

$$\begin{cases} \ddot{\lambda} - \alpha(t)\dot{\lambda} - \dot{\alpha}(t)\lambda + \lambda = \mu_1, \\ \dot{\lambda} - \alpha(t)\lambda = \mu_2. \end{cases}$$

It is easy to see that $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is an injective operator as we obtain, by saturating the preceding OD system by low-order equations, the zero-order new equation:

$$\lambda = -\dot{\mu}_2 + \mu_1.$$

The operator $\tilde{\mathcal{P}}_1 : \mu \rightarrow \lambda$ defined by

$$-\dot{\mu}_2 + \mu_1 = \lambda,$$

satisfies $\tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = \text{id}_{\tilde{E}}$ and thus the adjoint of $\tilde{\mathcal{P}}_1$ is the operator $\mathcal{P}_1 : \zeta \rightarrow \eta$

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \eta^1, \\ \zeta = \eta^2, \end{cases}$$

and we let the reader check that \mathcal{P}_1 is a right-inverse of \mathcal{D}_1 . Substituting $\lambda = \tilde{\mathcal{P}}_1 \mu$ in $\tilde{\mathcal{D}}_1$, we find the following operator $\tilde{\mathcal{D}}_0 : \mu \rightarrow \nu$ defined by:

$$\ddot{\mu}_2 - \alpha(t)\dot{\mu}_2 + \mu_2 - \dot{\mu}_1 + \alpha(t)\mu_1 = \nu.$$

Dualizing $\tilde{\mathcal{D}}_0$, we obtain a parametrization $\mathcal{D}_0 : \xi \rightarrow \eta$ of \mathcal{D}_1 :

$$\begin{cases} \dot{\xi} + \alpha(t)\xi = \eta^1, \\ \xi + \alpha(t)\xi + (1 + \dot{\alpha}(t))\xi = \eta^2. \end{cases}$$

This parametrization is injective as we have

$$\xi = -\dot{\eta}^1 + \eta^2,$$

and we have a left-inverse of \mathcal{D}_0 given by:

$$\mathcal{P}_0 \eta = -\dot{\eta}^1 + \eta^2 = \xi.$$

Hence, the module M is a free D -module with basis $\xi = -\dot{\eta}^1 + \eta^2$. We easily check that $\mathcal{P}'_0 = \mathcal{P}_0$ generates exactly the compatibility conditions of \mathcal{P}_1 . Finally, we have the following generalized Bezout identity

$$\begin{bmatrix} s^2 + \alpha(t)s + 1 & -s - \alpha(t) \\ -s & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & s + \alpha(t) \\ s & s^2 + \alpha(t)s + (1 + \dot{\alpha}(t)) \end{bmatrix} = I,$$

where the time derivative of the coefficient $\alpha(t)$ explicitly appears. This situation is more general than the classical one (constant coefficients systems), where the composition of matrix operators is just the ordinary multiplication of polynomial matrices.

1.7. Conclusion. We have seen how the generalized Bezout identity could be extended to non surjective linear time-varying OD control systems. If the linear time-varying OD control system is defined by a surjective operator, we have shown that the generalized Bezout identity was, in fact, the well-known algebraic notion of the splitting of a short exact sequence made with the system and its parametrization. We have seen when and how it could be extended for general linear PD control systems with variable coefficients. We have shown that it only depended on the algebraic nature of the differential module determined by the system. This new formulation has the advantage of bringing the generalized Bezout identity and its computation closer to algebraic and geometric concepts. In particular, we have made clear that it did not depend on a separation of the system variables between inputs and outputs. The formal tests, developed in this paper, can be used for any control systems over the ring of polynomial $k[\chi_1, \dots, \chi_n]$ with k a field (delay control systems, n -dimensional systems, ...). Applications of the generalized Bezout identity for the parametrization of controllers [152, 165] will be treated in future communications.

2. Applications

This part is the complement of the previous paper. This section deals with applications of the Generalized Bezout identity (GBI) to poles placement and Brunovsky canonical form.

2.1. Parametrization of multidimensional controllers. In the course of this section, we shall use the notation s for $\frac{d}{dt}$ and M_{nm} for the set of $n \times m$ polynomial matrices in s . We start with the following left-coprime polynomial system [81]

$$(128) \quad P(s)y + Q(s)u = 0,$$

where $P \in M_{mm}$, $\det P(s) \neq 0$ and $Q \in M_{mp}$. The system (128) admits the following *generalized Bezout identity* [81],

$$(129) \quad \begin{bmatrix} P(s) & Q(s) \\ \bar{X}(s) & \bar{Y}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) & \bar{P}(s) \\ Y(s) & \bar{Q}(s) \end{bmatrix} = I,$$

where I is the $(m+p) \times (m+p)$ identity matrix and $X \in M_{mm}$, $\bar{X}, Y \in M_{pm}$, $\bar{P} \in M_{mp}$, $\bar{Y}, \bar{Q} \in M_{pp}$. The system (128) can be rewritten under its *controller form* [81], that is to say,

$$(130) \quad \begin{cases} \bar{P}(s)\xi = y, \\ \bar{Q}(s)\xi = u, \end{cases}$$

where ξ is called *partial state* [81]. Now, let \mathcal{C} be a left-coprime controller given by

$$(131) \quad A(s)y + B(s)u = 0,$$

where $B \in M_{pp}$, $\det B(s) \neq 0$ and $A \in M_{pm}$. Substituting (130) in (131), we obtain $T(s)\xi = 0$, where the $p \times p$ matrix $T(s)$ is defined by:

$$(132) \quad T(s) = A(s)\bar{P}(s) + B(s)\bar{Q}(s).$$

The modes of the closed loop are determined by the zeros of $\det T(s)$.

Now, let us fix the dynamic of the closed loop by imposing $T(s)$ and let us find the corresponding controller \mathcal{C} . Hence, we have to find $(A(s) \ B(s))$ satisfying (132). Using the generalized Bezout identity (129), we find the well-known parametrization of the controller \mathcal{C} , usually called the *Youla parametrization* for polynomial controller \mathcal{C}

$$(133) \quad \begin{cases} A(s) = T(s)\bar{X}(s) + K(s)P(s), \\ B(s) = T(s)\bar{Y}(s) + K(s)Q(s), \end{cases}$$

where $K(s)$ is any $p \times m$ matrix with entries in $A = \mathbb{R}[s]$. The parameter $K(s)$ is the degree of freedom of the parametrization of the controller \mathcal{C} and it can be used for disturbance rejection for example [2, 3]. The system (133) can be written as:

$$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K(s) & T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(s) & Q(s) \\ \bar{X}(s) & \bar{Y}(s) \end{bmatrix}.$$

Using (129), we obtain:

$$\begin{bmatrix} K(s) & T(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) & \bar{P}(s) \\ Y(s) & \bar{Q}(s) \end{bmatrix}.$$

The purpose of this complement is to show how we can reformulate the parametrization of the polynomial controllers (133) in a more algebraic point of view and to extend it to multidimensional systems.

2.2. Simplified proof on the existence of a GBI. The following proposition will be important for the rest of this section. See [111] for a proof.

PROPOSITION 2.1. *Let $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$ be a formally exact sequence and let $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}'_1} F'_1$ be a complex of differential operators, i.e. $\mathcal{D}'_1 \circ \mathcal{D}_0 = 0$, then there exists an operator $\mathcal{C}_1 : F_1 \rightarrow F'_1$ such that $\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}'_1$, or equivalently, we have the following commutative diagram:*

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\mathcal{D}_0} & F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 \\ & & \parallel & & \downarrow \mathcal{C}_1 \\ & & F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}'_1} & F'_1. \end{array}$$

EXAMPLE 2.1. Let us consider the operator $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$ defined by

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} \dot{\xi} - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} \xi = \eta^1, \\ -\frac{1}{\alpha} \dot{\xi} + (\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} + 1) \xi = \eta^2, \end{cases}$$

where α is a non zero function of time satisfying $\dot{\alpha} + \alpha^2 - 1 = 0$. The condition of compatibility of this operator is defined by $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$, given by:

$$\dot{\eta}^1 + \dot{\eta}^2 - \alpha \eta^1 - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} (\eta^1 + \eta^2) = \zeta.$$

Let the operator $\mathcal{D}'_1 : F_0 \rightarrow F'_1$ be defined by

$$\ddot{\eta}^2 + \alpha \dot{\eta}^2 + \dot{\alpha} \eta^2 + \ddot{\eta}^1 - \eta^1 = \zeta',$$

then we easily verifies that $\mathcal{D}'_1 \circ \mathcal{D}_0 = 0$. Thus, using proposition 2.1, there exists an operator $\mathcal{C}_1 : F_1 \rightarrow F'_1$ satisfying $\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}'_1$. We let the reader check by himself that \mathcal{C}_1 is defined by:

$$\alpha \dot{\zeta} + \zeta = \zeta'.$$

We have shown in the beginning of this chapter that we can reformulate, for more general situations, the Generalized Bezout identity into the concept of splitting exact sequence. Let us give a simpler and more direct proof on the existence of a generalized Bezout identity in the case of surjective operator \mathcal{D}_1 .

THEOREM 2.1. *Let $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ be a surjective PD control system with variable coefficients.*

1. *If the operator \mathcal{D}_1 determines a free D-module then the generalized Bezout identity is the exact splitting of the following locally exact differential sequence:*

$$(134) \quad 0 \rightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \rightarrow 0.$$

Hence, we have in particular:

$$(135) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{P}_0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 & \mathcal{D}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{id}_{F_1} & 0 \\ 0 & \text{id}_E \end{bmatrix}.$$

In particular, if \mathcal{D}_1 is a controllable time-varying OD system, then we have (134) and thus (135).

2. If \mathcal{D}_1 determines a projective D -module, then there exist three operators $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$, $\mathcal{P}_0 : F_0 \rightarrow E$ and $\mathcal{P}_1 : F_1 \rightarrow F_0$ such that:

$$[\mathcal{D}_1] \circ [\mathcal{P}_1 \ \mathcal{D}_0] = [\text{id}_{F_1} \ 0].$$

Moreover, the sequences $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \rightarrow 0$ and $E \xleftarrow{\mathcal{P}_0} F_0 \xleftarrow{\mathcal{P}_1} F_1 \leftarrow 0$ are locally exact.

3. If \mathcal{D}_1 determines a torsion-free D -module, then we have the following exact sequence of operators: $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$. Hence, we have:

$$\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_0 = 0.$$

PROOF. Let $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ be a surjective operator.

- If the operator \mathcal{D}_1 determines a torsion-free D -module M , then we have seen that there exists an operator $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$ such that $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \rightarrow 0$ is a formally exact sequence and we have 3.
- If the operator \mathcal{D}_1 determines a projective D -module M then, in particular, there exists an operator $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$ such that $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \rightarrow 0$ is a formally exact sequence. Now, as M is a projective D -module, then there exists an operator $\mathcal{P}_1 : F_1 \rightarrow F_0$ such that $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \text{id}_{F_1}$. Let us define the new operator $\mathcal{Q}_0 : F_0 \rightarrow F_0$ as $\mathcal{Q}_0 = \text{id}_{F_0} - \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1$. We have $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{Q}_0 = 0$ and thus $\tilde{\mathcal{Q}}_0 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = 0$. But, M is a projective D -module which implies that the sequence $\tilde{E} \xleftarrow{\tilde{\mathcal{P}}_0} \tilde{F}_0 \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} \tilde{F}_1$ is formally exact and thus $\tilde{\mathcal{D}}_0$ represents all the compatibility conditions of $\tilde{\mathcal{D}}_1$. This means that the operator $\tilde{\mathcal{Q}}_0$ factorizes through $\tilde{\mathcal{D}}_0$ by proposition 2.1: there exists $\tilde{\mathcal{P}}_0 : \tilde{E} \rightarrow \tilde{F}_0$ such that $\tilde{\mathcal{Q}}_0 = \tilde{\mathcal{P}}_0 \circ \tilde{\mathcal{D}}_0$. Taking the adjoint, we obtain the identity:

$$(136) \quad \text{id}_{F_0} = \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_0 \circ \mathcal{P}_0,$$

where $\mathcal{P}_0 : F_0 \rightarrow E$. From (136), we have: $\mathcal{D}_0 \circ \mathcal{P}_0 \circ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 = 0$ and thus

$$\begin{cases} \mathcal{P}'_0 = \mathcal{P}_0 \circ (\text{id}_{F_0} - \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1), \\ \text{id}_{F_0} = \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_0 \circ \mathcal{P}'_0. \end{cases}$$

We let the reader check that $E \xleftarrow{\mathcal{P}'_0} F_0 \xleftarrow{\mathcal{P}_1} F_1 \leftarrow 0$ is a locally exact sequence. Moreover, we have $\mathcal{P}'_0 \circ \mathcal{D}_0 \circ \mathcal{P}'_0 = \mathcal{P}'_0$.

- Finally, if \mathcal{D}_1 determines a free D -module, then we take an injective parametrization \mathcal{D}_0 of \mathcal{D}_1 . As before, we can find $\mathcal{P}_1 : F_1 \rightarrow F_0$ and $\mathcal{P}_0 : F_0 \rightarrow E$ such that (136) is satisfied. From (136), we have $\mathcal{D}_0 \circ \mathcal{P}_0 \circ \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0$ and $\mathcal{D}_0 \circ \mathcal{P}_0 \circ \mathcal{P}_1 = 0$. The injectivity of \mathcal{D}_0 implies $\mathcal{P}_0 \circ \mathcal{D}_0 = \text{id}_E$ and $\mathcal{P}_0 \circ \mathcal{P}_1 = 0$. The last identity with (136) implies that the sequence $0 \leftarrow E \xleftarrow{\mathcal{P}_0} F_0 \xleftarrow{\mathcal{P}_1} F_1 \leftarrow 0$ is locally exact. Thus, we obtain the splitting sequence (134) which concludes the demonstration.

□

EXAMPLE 2.2. Let M be the D -module determined by the Maxwell equations:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{j} = 0, \\ \text{div } \vec{D} - \rho = 0. \end{cases}$$

One can easily show that the D -module M , determined by the Maxwell equations, is free with basis \vec{H} and \vec{D} . Thus, the Maxwell equations admit a generalized Bezout identity.

COROLLARY 2.1. *Let us consider the following splitting differential exact sequence*

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \longrightarrow 0,$$

If we denote by

$$\begin{cases} \mathcal{P}'_1 = \mathcal{P}_1 + \mathcal{D}_0 \circ \mathcal{Q}, \\ \mathcal{P}'_0 = \mathcal{P}_0 - \mathcal{Q} \circ \mathcal{D}_1, \end{cases}$$

where \mathcal{Q} is any differential operator from F_1 to E , then the differential sequence

$$(137) \quad 0 \longrightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}'_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}'_1} F_1 \longrightarrow 0,$$

is again a splitting exact sequence. In particular, we have

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{P}_0 - \mathcal{Q} \circ \mathcal{D}_1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 + \mathcal{D}_0 \circ \mathcal{Q} & \mathcal{D}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{id}_{F_1} & 0 \\ 0 & \text{id}_E \end{bmatrix},$$

where $\mathcal{Q} : F_1 \rightarrow E$ is any differential operator.

PROOF. The dual of the operator \mathcal{P}_1 is a left-inverse of $\tilde{\mathcal{D}}_1$ because it satisfies $\tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = \text{id}_{\tilde{F}_1}$. This left-inverse $\tilde{\mathcal{P}}_1$ is not unique as we easily verify that

$$\tilde{\mathcal{P}}'_1 = \tilde{\mathcal{P}}_1 + \tilde{\mathcal{Q}} \circ \tilde{\mathcal{D}}_0,$$

where $\tilde{\mathcal{Q}}$ is any differential operator from \tilde{E} to \tilde{F}_1 , satisfies at its turn $\tilde{\mathcal{P}}'_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = \text{id}_{\tilde{F}_1}$. Dualizing, we obtain that $\mathcal{P}'_1 = \mathcal{P}_1 + \mathcal{D}_0 \circ \mathcal{Q}$ is a right-inverse of \mathcal{D}_1 , where $\mathcal{Q} : F_1 \rightarrow E$ is any differential operator. We take, as in the previous proof, $\mathcal{P}'_0 = \mathcal{P}_0 \circ (\text{id}_{F_0} - \mathcal{P}'_1 \circ \mathcal{D}_1)$, i.e.

$$\mathcal{P}'_0 = \mathcal{P}_0 - \mathcal{Q} \circ \mathcal{D}_1,$$

we easily check first that $\mathcal{P}'_0 \circ \mathcal{D}_0 = \text{id}_E$, i.e. \mathcal{P}'_0 is still a left-inverse of \mathcal{D}_0 . Moreover, we have $\mathcal{P}'_0 \circ \mathcal{P}'_1 = 0$ and $\mathcal{D}_0 \circ \mathcal{P}'_0 + \mathcal{P}'_1 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_0 \circ \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 = \text{id}_{F_0}$ and thus the differential sequence

$$0 \longleftarrow E \xleftarrow{\mathcal{P}'_0} F_0 \xleftarrow{\mathcal{P}'_1} F_1 \longleftarrow 0,$$

is a locally exact sequence. Finally, we obtain the splitting sequence (137). \square

The arbitrary operator \mathcal{Q} will be shown to be the degree of freedom in the Youla parametrization of polynomial systems. See remark 2.2 (see also corollary 2.2 and corollary 2.3).

EXAMPLE 2.3. Let us take again example 1.16 and, in particular, the system defined by:

$$\ddot{\eta}^1 + \alpha(t)\dot{\eta}^1 + \eta^1 - \dot{\eta}^2 - \alpha(t)\eta^2 = 0.$$

We have found the following generalized Bezout identity:

$$\begin{bmatrix} s^2 + \alpha(t)s + 1 & -s - \alpha(t) \\ -s & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & s + \alpha(t) \\ s & s^2 + \alpha(t)s + (1 + \dot{\alpha}(t)) \end{bmatrix} = I_2.$$

Thus, we obtain a family of generalized Bezout identities defined by

$$\begin{bmatrix} s^2 + \alpha(t)s + 1 & -s - \alpha(t) \\ -(\alpha(t)s + 1) + s & r(s + \alpha(t)) + 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 + (s + \alpha(t))r & s + \alpha(t) \\ s + (s^2 + \alpha(t)s + 1 + \dot{\alpha}(t))r & s^2 + \alpha(t)s + (1 + \dot{\alpha}(t)) \end{bmatrix} = I_2,$$

where $r \in D$.

2.3. Homotopy. Let us give the definition of homotopy into the framework of differential operators.

DEFINITION 2.1. 1. A differential operator of complexes $C : X \rightarrow X'$ is a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc} X' & \dots & \longrightarrow & F'_{i-1} & \xrightarrow{\mathcal{D}'_i} & F'_i & \longrightarrow \dots \\ & & & \uparrow C_{i-1} & & \uparrow C_i & \\ X & \dots & \longrightarrow & F_{i-1} & \xrightarrow{\mathcal{D}_i} & F_i & \longrightarrow \dots \end{array}$$

that is, differential operators $C_i : F_i \rightarrow F'_i$ such that $\mathcal{D}'_i \circ C_{i-1} = C_i \circ \mathcal{D}_i$.

2. A differential operator of complexes $C : X \rightarrow X'$ is *homotopic to zero* if for all k there exists an operator $\mathcal{P}_k : F_k \rightarrow F'_{k-1}$ such that $C_k = \mathcal{D}'_k \circ \mathcal{P}_k + \mathcal{P}_{k+1} \circ \mathcal{D}_{k+1}$.
3. Two differential operators of complexes $C, C' : X \rightarrow X'$ are *homotopic* if $C - C'$ is homotopic to zero.
4. A differential operator $C : X \rightarrow X'$ is an *homotopy equivalence* if there exists $C' : X' \rightarrow X$ such that $C' \circ C - \text{id}_X$ and $C \circ C' - \text{id}_{X'}$ are homotopic to zero.
5. A complex X is said to be *homotopic to zero* if id_X is homotopic to zero.

EXAMPLE 2.4. Let

$$(138) \quad X : 0 \longrightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \longrightarrow 0$$

be a formally exact sequence. Then (138) is a *splitting exact sequence* if and only if the operator $\text{id}_X : X \rightarrow X$ is homotopic to zero, i.e., we have the following diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\mathcal{D}_0} & F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 \longrightarrow 0 \\ & & \parallel \mathcal{P}_0 \swarrow & & \parallel \mathcal{P}_1 \swarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\mathcal{D}_0} & F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 \longrightarrow 0. \end{array}$$

THEOREM 2.2. Let the operator \mathcal{D}_1 determine a free D -module M , \mathcal{D}_0 an injective parametrization of \mathcal{D}_1 and $0 \rightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \rightarrow \dots$ a formally exact sequence. For any formally exact sequence $E \xrightarrow{\mathcal{D}'_0} F'_0 \xrightarrow{\mathcal{D}'_1} F'_1 \rightarrow \dots$, there exists a differential operator $C_i : F_i \rightarrow F'_i$ such that $C_i = \mathcal{D}'_i \circ \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{i+1} \circ \mathcal{D}_{i+1}$, where $\mathcal{P}_0 : F_0 \rightarrow E$ is a left-inverse of \mathcal{D}_0 and \mathcal{P}_i is an operator from F_i to F'_{i-1} . Hence, the differential operator of complexes $C_i : F_i \rightarrow F'_i$ is homotopic to zero, and we have the following exact diagram:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} E & \xrightarrow{\mathcal{D}'_0} & F'_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}'_1} & F'_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & F'_{n-1} & \xrightarrow{\mathcal{D}'_n} & F'_n & \xrightarrow{\mathcal{D}'_{n+1}} & F'_{n+1} & \longrightarrow & \dots \\ \parallel & \swarrow \mathcal{P}_0 & \uparrow C_0 & \swarrow \mathcal{P}_1 & \uparrow C_1 & \swarrow & \uparrow & \swarrow & \uparrow C_{n-1} & \swarrow \mathcal{P}_n & \uparrow C_n & \swarrow \mathcal{P}_{n+1} & \uparrow C_{n+1} & & \\ 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\mathcal{D}_0} & F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & F_{n-1} & \xrightarrow{\mathcal{D}_n} & F_n & \xrightarrow{\mathcal{D}_{n+1}} & F_{n+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

PROOF. The operator \mathcal{D}_0 is an injective operator, thus there exists $\mathcal{P}_0 : F_0 \rightarrow E$ such that $\mathcal{P}_0 \circ \mathcal{D}_0 = \text{id}_E$. Thus, the solution of $\mathcal{C}_0 \circ \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}'_0$ is given by $\mathcal{C}_0 = \mathcal{D}'_0 \circ \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1$, where $\mathcal{P}_1 : F_1 \rightarrow F'_0$ is any operator. Now, we have

$$\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}'_1 \circ \mathcal{C}_0 = \mathcal{D}'_1 \circ (\mathcal{D}'_0 \circ \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1) = \mathcal{D}'_1 \circ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1,$$

and thus $(\mathcal{C}_1 - \mathcal{D}'_1 \circ \mathcal{P}_1) \circ \mathcal{D}_1 = 0$. The operator \mathcal{D}_2 generates all the compatibility conditions of \mathcal{D}_1 and, using proposition 2.1, there exists $\mathcal{P}_2 : F_2 \rightarrow F'_1$ such that $\mathcal{C}_2 - \mathcal{D}'_1 \circ \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2$, i.e., $\mathcal{C}_2 = \mathcal{D}'_1 \circ \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2 \dots$ \square

We shall see at the next section, how this corollary can be used to make poles placement.

THEOREM 2.3. *Let the operator \mathcal{D}'_1 determine a projective D -module and let $F'_0 \xrightarrow{\mathcal{D}'_1} F'_1 \rightarrow \dots \rightarrow F'_n \xrightarrow{\mathcal{D}'_{n+1}} F'_{n+1} \rightarrow 0$ be a formally exact sequence. For any formally exact sequence $F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \rightarrow \dots \rightarrow F_n \xrightarrow{\mathcal{D}_{n+1}} F_{n+1} \rightarrow 0$, there exists a differential operator $\mathcal{C}_i : F_i \rightarrow F'_i$ such that $\mathcal{C}_i = \mathcal{P}_{i+1} \circ \mathcal{D}_{i+1} + \mathcal{D}'_i \circ \mathcal{P}_i$, where $\mathcal{P}_{n+1} : F'_{n+1} \rightarrow F'_n$ is a right-inverse of \mathcal{D}_{n+1} and \mathcal{P}'_i is an operator from F_i to F'_{i-1} . Hence, the differential operator $\mathcal{C}_i : F_i \rightarrow F'_i$ is homotopic to zero, and we have the following exact diagram:*

$$\begin{array}{ccccccccccc} F'_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}'_1} & F'_1 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & F'_{n-1} & \xrightarrow{\mathcal{D}'_n} & F'_n & \xrightarrow{\mathcal{D}'_{n+1}} & F'_{n+1} & \rightarrow & 0 \\ \uparrow \mathcal{C}_0 & \swarrow \mathcal{P}'_1 & \uparrow \mathcal{C}_1 & \swarrow & \uparrow & \swarrow & \uparrow \mathcal{C}_{n-1} & \swarrow \mathcal{P}'_n & \uparrow \mathcal{C}_n & \swarrow \mathcal{P}'_{n+1} & \parallel & & \\ F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & F_{n-1} & \xrightarrow{\mathcal{D}_n} & F_n & \xrightarrow{\mathcal{D}_{n+1}} & F_{n+1} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

PROOF. The operator \mathcal{D}'_1 determines a projective D -module, then there exists an operator $\mathcal{P}'_{n+1} : F'_{n+1} \rightarrow F'_n$ such that $\mathcal{D}'_{n+1} \circ \mathcal{P}'_{n+1} = \text{id}_{F'_{n+1}}$. Thus, the solution of $\mathcal{D}'_{n+1} \circ \mathcal{C}_n = \mathcal{D}_{n+1}$ is given by $\mathcal{C}_n = \mathcal{P}'_{n+1} \circ \mathcal{D}_{n+1} + \mathcal{D}'_n \circ \mathcal{P}'_n$, where $\mathcal{P}'_n : F_n \rightarrow F'_{n-1}$ is any operator. Now, we have:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_n \circ \mathcal{C}_{n-1} &= \mathcal{C}_n \circ \mathcal{D}_n = (\mathcal{P}'_{n+1} \circ \mathcal{D}_{n+1} + \mathcal{D}'_n \circ \mathcal{P}'_n) \circ \mathcal{D}_n = \mathcal{D}'_n \circ \mathcal{P}'_n \circ \mathcal{D}_n \\ &\Rightarrow \mathcal{D}'_n \circ (\mathcal{C}_{n-1} - \mathcal{P}'_n \circ \mathcal{D}_n) = 0 \\ &\Rightarrow (\mathcal{C}_{n-1} - \widetilde{\mathcal{P}'_n} \circ \mathcal{D}_n) \circ \widetilde{\mathcal{D}'_n} = 0. \end{aligned}$$

But, the operator \mathcal{D}'_1 determines a projective D -module, thus $\widetilde{\mathcal{D}'_{n-1}}$ generates all the compatibility condition of $\widetilde{\mathcal{D}'_n}$. Using proposition 2.1, there exists an operator $\widetilde{\mathcal{P}'_{n-1}} : \widetilde{F}'_{n-2} \rightarrow \widetilde{F}'_{n-1}$ such that $\widetilde{\mathcal{P}'_{n-1}} \circ \widetilde{\mathcal{D}'_{n-1}} = (\mathcal{C}_{n-1} - \widetilde{\mathcal{P}'_n} \circ \mathcal{D}_n)$, and thus $\mathcal{C}_{n-1} = \mathcal{P}'_n \circ \mathcal{D}_n + \mathcal{D}'_{n-1} \circ \mathcal{P}'_{n-1}$. Then, we have $\mathcal{D}'_{n-1} \circ \mathcal{C}_{n-2} = \mathcal{C}_{n-1} \circ \mathcal{D}_{n-1} = \mathcal{D}'_{n-1} \circ \mathcal{P}'_{n-1} \circ \mathcal{D}_{n-1} \dots$ \square

2.4. Poles Placement. Let $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ be a system and $\mathcal{C}_0 : F_0 \rightarrow F'_0$ a controller. We can represent these two previous operators by the following diagram

$$\begin{array}{ccc} & F'_0 & \\ & \uparrow \mathcal{C}_0 & \\ F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1, \end{array}$$

and the closed loop is therefore defined by:

$$(139) \quad \begin{cases} \mathcal{D}_1 \eta = 0, \\ \mathcal{C}_0 \eta = 0. \end{cases}$$

PROPOSITION 2.2. Let \mathcal{D}_1 be a controllable system and $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$ a parametrization of \mathcal{D}_1 such that the sequence

$$(140) \quad E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$$

is locally exact at F_0 . Then, the closed loop is defined by the following system

$$(141) \quad \begin{cases} \mathcal{D}_0 \xi = \eta, \\ \mathcal{T}_0 \xi = 0, \end{cases}$$

where $\mathcal{T}_0 = \mathcal{C}_0 \circ \mathcal{D}_0$. Hence, the closed loop is totally determined by the differential operator \mathcal{T}_0 .

PROOF. Let us suppose that the system \mathcal{D}_1 is controllable and the existence of a parametrization $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$ of \mathcal{D}_1 such that the sequence (140) is exact at F_0 . Then, we have the following diagram

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\mathcal{T}_0} & F'_0 \\ \parallel & & \uparrow \mathcal{C}_0 \\ E & \xrightarrow{\mathcal{D}_0} & F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1, \end{array}$$

with $\mathcal{T}_0 = \mathcal{C}_0 \circ \mathcal{D}_0$. Hence, $\mathcal{D}_0 \xi = \eta \Leftrightarrow \mathcal{D}_1 \eta = 0$ and $\mathcal{C}_0 \eta = \mathcal{C}_0(\mathcal{D}_0 \xi) = \mathcal{T}_0 \xi = 0$ easily prove the assertion. \square

REMARK 2.1. If \mathcal{D}_1 determines a projective D -module, then the sequence $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$ is locally exact at F_0 (this sequence splits). In particular, we can apply the previous proposition to any system which determines a projective or a free D -module.

EXAMPLE 2.5. We easily see that operator \mathcal{D}_1 defined by

$$\begin{cases} \dot{\eta}^1 + \eta^2 - \eta^3 = \zeta^1, \\ \dot{\eta}^2 - \eta^1 + \eta^3 = \zeta^2, \end{cases}$$

determines a controllable system. We easily find that an injective parametrization $\mathcal{D}_0 : \xi \rightarrow \eta$ of \mathcal{D}_1 is given by:

$$\begin{cases} \dot{\xi} + \xi = \eta^1, \\ -\dot{\xi} + \xi = \eta^2, \\ \ddot{\xi} + \xi = \eta^3. \end{cases}$$

If we define a controller $\mathcal{C}_0 : \eta \rightarrow \gamma$ by $\eta^3 + 3\eta^1 - \eta^2 = \gamma$, then the dynamics of the closed loop is given by the operator:

$$\mathcal{T}_0 \xi = \ddot{\xi} + 4\dot{\xi} + 3\xi = (s+1)(s+3)\xi = \gamma.$$

EXAMPLE 2.6. Let us consider the system defined by:

$$\partial_{11} \epsilon_{22} + \partial_{22} \epsilon_{11} - 2\partial_{12} \epsilon_{12} = 0.$$

We can prove that a parametrization of the above system is given by :

$$\begin{cases} \partial_1 \xi_1 = \epsilon_{11}, \\ \frac{1}{2}(\partial_1 \xi_2 + \partial_2 \xi_1) = \epsilon_{12}, \\ \partial_2 \xi_2 = \epsilon_{22}. \end{cases}$$

We recognize that parametrization of the stress tensor by the displacement in elasticity theory (two dimensions). It is well-known that the sequence $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$ is locally exact at F_0 because this sequence is isomorphic to the Poincaré sequence which is locally exact (see chapter 9). Thus, the system

$$\begin{cases} \partial_{11} \epsilon_{22} + \partial_{22} \epsilon_{11} - 2 \partial_{12} \epsilon_{12} = 0, \\ (\alpha + 2\beta) \partial_1 \epsilon_{11} + \alpha \partial_1 \epsilon_{22} + 2\beta \partial_2 \epsilon_{12} = 0, \\ 2\beta \partial_1 \epsilon_{12} + \alpha \partial_2 \epsilon_{11} + (\alpha + 2\beta) \partial_2 \epsilon_{22} = 0, \end{cases}$$

is equivalent to the system:

$$\begin{cases} \partial_1 \xi_1 = \epsilon_{11}, \\ \frac{1}{2}(\partial_1 \xi_2 + \partial_2 \xi_1) = \epsilon_{12}, \\ \partial_2 \xi_2 = \epsilon_{22}, \\ (\alpha + \beta) \partial_1 (\partial_1 \xi_1 + \partial_2 \xi_2) + \beta \Delta \xi_1 = 0, \\ (\alpha + \beta) \partial_2 (\partial_1 \xi_1 + \partial_2 \xi_2) + \beta \Delta \xi_2 = 0. \end{cases}$$

We notice that the two last equations are just the Navier equations.

Let us suppose now that we want to find $C_0 \eta = 0$ in such a way that the following system

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 \eta = 0, \\ C_0 \eta = 0, \end{cases}$$

is equivalent to a prescribed system. Using theorem 2.2, we have the following corollary.

COROLLARY 2.2. *Let $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ be a differential operator which determines a free D -module and let $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$ be an injective parametrization of \mathcal{D}_1 . Then, for any differential operator $\mathcal{T}_0 : E \rightarrow F'_0$, the differential operator $C_0 : F_0 \rightarrow F'_0$ which satisfies the relation*

$$\mathcal{T}_0 = C_0 \circ \mathcal{D}_0,$$

is given by

$$C_0 = \mathcal{T}_0 \circ \mathcal{P}_0 + \mathcal{K}_1 \circ \mathcal{D}_1,$$

where \mathcal{P}_0 is a left-inverse of \mathcal{D}_0 and \mathcal{K}_1 is any differential operator from F_1 to F'_0 .

REMARK 2.2. If moreover, \mathcal{D}_1 is a surjective operator, then we have the following splitting exact sequence

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \longrightarrow 0,$$

and the generalized Bezout identity (135). Then, using the identity

$$C_0 = (\mathcal{K}_1 \ \mathcal{T}_0) \circ \begin{pmatrix} \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{P}_0 \end{pmatrix},$$

and (135), we obtain:

$$(\mathcal{K}_1 \ \mathcal{T}_0) = C_0 \circ (\mathcal{P}_1 \ \mathcal{D}_0).$$

EXAMPLE 2.7. We take again the operator $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$ defined by

$$\begin{cases} \dot{\eta}^1 + \eta^2 - \eta^3 = \zeta^1, \\ \dot{\eta}^2 - \eta^1 + \eta^3 = \zeta^2, \end{cases}$$

and we want to determine a controller $\mathcal{C}_0 : \eta \rightarrow \gamma$ such that the dynamic of the closed loop is given by $\mathcal{T}_0 \xi = (s+1)(s+3)\xi = \gamma$. We know from the previous corollary that $\mathcal{C}_0 = \mathcal{T}_0 \circ \mathcal{P}_0 + \mathcal{K}_1 \circ \mathcal{D}_1$, where \mathcal{K}_1 is any operator from F_1 to F'_0 and we find \mathcal{C}_0 defined by

$$\frac{1}{2}(s+1)(s+3)(\eta^1 + \eta^2) + p(s)(\dot{\eta}^1 + \eta^2 - \eta^3) + q(s)(\dot{\eta}^2 - \eta^1 + \eta^3) = \gamma,$$

with $p(s)$ and $q(s)$ any elements in D . We choose $p(s)$ and $q(s)$ in order to lower the order of the controller \mathcal{C}_0 . If we take

$$\begin{cases} p(s) = -\frac{1}{2}(s+5), \\ q(s) = -\frac{1}{2}(s+3), \end{cases}$$

we obtain $\mathcal{C}_0 \eta = \eta^3 + 3\eta^1 - \eta^2 = \gamma$.

EXAMPLE 2.8. See example 6.1 of chapter 9 for another OD example and links with linear quadratic methods and spectral factorizations.

Now, we can also look for a controller of the form $\mathcal{C}_{-1} \gamma = \eta$ instead of the form $\mathcal{C}_0 \eta = 0$. Thus, we have the following diagram

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 \\ \uparrow \mathcal{C}_{-1} & & \parallel \\ F_{-1} & \xrightarrow{\mathcal{T}_{-1}} & F_1, \end{array}$$

where $\mathcal{T}_{-1} = \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{C}_{-1}$.

EXAMPLE 2.9. Let us consider the differential operator $\mathcal{C}_{-1} : \gamma \rightarrow \eta$ defined by:

$$\begin{cases} \eta^1 = \gamma^1, \\ \eta^2 = \gamma^2, \\ \eta^3 = -3\gamma^1 + \gamma^2, \end{cases}$$

then, we obtain the differential operator $\mathcal{T}_{-1} : \gamma \rightarrow \zeta$ defined by:

$$(142) \quad \begin{cases} \dot{\gamma}^1 + 3\gamma^1 = 0, \\ \dot{\gamma}^2 - 4\gamma^1 + \gamma^2 = 0. \end{cases}$$

Using theorem 2.3, we obtain the following corollary.

COROLLARY 2.3. Let $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ be a surjective differential operator which determines a projective D -module and $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$ any parametrization of \mathcal{D}_1 . Then, for any differential operator $\mathcal{T}_{-1} : F_{-1} \rightarrow F_1$, the operator $\mathcal{C}_{-1} : F_{-1} \rightarrow F_0$ which satisfies the equation

$$\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{C}_{-1} = \mathcal{T}_{-1}$$

is given by

$$\mathcal{C}_{-1} = \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{T}_{-1} + \mathcal{D}_0 \circ \mathcal{K}_{-1},$$

where \mathcal{P}_1 is a right-inverse of \mathcal{P}_1 and \mathcal{K}_{-1} is any differential operator from F_{-1} to E .

REMARK 2.3. If moreover, \mathcal{D}_1 determines a free D -module, then we have the generalized Bezout identity (135). Then, using the following identity

$$\mathcal{C}_{-1} = (\mathcal{P}_1 \ \mathcal{D}_0) \circ \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{-1} \\ \mathcal{K}_{-1} \end{pmatrix},$$

we obtain:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}_{-1} \\ \mathcal{K}_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{P}_0 \end{pmatrix} \circ \mathcal{C}_{-1}.$$

EXAMPLE 2.10. We easily verify that a right-inverse $\mathcal{P}_1 : \zeta \rightarrow \eta$ of the operator \mathcal{D}_1 , defined in example 2.9, is given by:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}(\zeta^1 + \zeta^2) = \eta^1, \\ \frac{1}{2}(\zeta^1 + \zeta^2) = \eta^2, \\ -\frac{1}{2}(\zeta^1 + \zeta^2 + \zeta^1 - \zeta^2) = \eta^3. \end{cases}$$

An injective parametrization $\mathcal{D}_0 : \xi \rightarrow \eta$ of \mathcal{D}_1 is given by:

$$\begin{cases} \dot{\xi} + \xi = \eta^1, \\ -\dot{\xi} + \xi = \eta^2, \\ \ddot{\xi} + \xi = \eta^3. \end{cases}$$

Then, all the controllers $\mathcal{C}_{-1} : \gamma \rightarrow \eta$ which satisfy $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{C}_{-1} = \mathcal{T}_{-1}$, where \mathcal{T}_{-1} is defined by (142), are given by:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}(\dot{\gamma}^1 + \dot{\gamma}^2 - \gamma^1 + \gamma^2) + (s+1)(a(s)\gamma^1 + b(s)\gamma^2 + c(s)\gamma^3) = \eta^1, \\ \frac{1}{2}(\dot{\gamma}^1 + \dot{\gamma}^2 - \gamma^1 + \gamma^2) + (-s+1)(a(s)\gamma^1 + b(s)\gamma^2 + c(s)\gamma^3) = \eta^2, \\ -\frac{1}{2}(\ddot{\gamma}^1 + \ddot{\gamma}^2 + 7\gamma^1 - \gamma^2) + (s^2+1)(a(s)\gamma^1 + b(s)\gamma^2 + c(s)\gamma^3) = \eta^3. \end{cases}$$

We easily verify that if we take $a(s) = b(s) = \frac{1}{2}$ in order to lower the order of $\mathcal{C}_{-1} : \gamma \rightarrow \eta$, we obtain:

$$\begin{cases} \eta^1 = \gamma^1, \\ \eta^2 = \gamma^2, \\ \eta^3 = -3\gamma^1 + \gamma^2. \end{cases}$$

Similar computations can be done for multidimensional systems but it becomes more difficult to perform them by hand.

2.5. Brunovsky Canonical Form. We denote by $j_q : E \rightarrow J_q(E)$ the operator defined by

$$\partial_\mu \xi^k(x) = \eta_\mu^k(x), \quad k = 1, \dots, m = \dim E, \quad 0 \leq |\mu| \leq q,$$

and by $D_1 : C_0(E) = J_q(E) \rightarrow C_1(E)$ the compatibility conditions of j_q^2 .

THEOREM 2.4. Let \mathcal{D}_1 be an operator determining a free D -module M and \mathcal{D}_0 a q -order injective parametrization of \mathcal{D}_1 . Let $X : 0 \rightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \rightarrow \dots$ and $X' : 0 \rightarrow E \xrightarrow{j_q} J_q(E) \xrightarrow{D_1} C_1(E) \rightarrow \dots$, then there exists a differential operator $C : X \rightarrow X'$ such that C is a homotopy equivalence.

2. See chapter 4 for more informations about the operators j_q and D_1

PROOF. From 1 of theorem 2.3, there exists a differential operator $C_1 = j_q \circ \mathcal{P}_0 + \mathcal{K}_1 \circ \mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow J_q(E)$ where \mathcal{P}_0 is a right-inverse of \mathcal{D}_0 and \mathcal{K}_1 any operator from F_1 to $J_q(E)$. Similarly, there exists a differential operator $C'_1 = \mathcal{D}_0 \circ \mathcal{P}'_0 + \mathcal{K}'_1 \circ \mathcal{D}_1 : J_q(E) \rightarrow F_0$, where \mathcal{P}'_0 is a right-inverse of j_q and \mathcal{K}'_1 any operator from $J_q(E)$ to F_1 . We have

$$C'_1 \circ C_1 - \text{id}_{F_0} = \mathcal{D}_0 \circ (\mathcal{P}'_0 \circ \mathcal{K}_1 \circ \mathcal{D}_1) + (\mathcal{P}_1 + \mathcal{K}'_1 \circ \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{K}_1) \circ \mathcal{D}_1,$$

where \mathcal{P}_1 satisfies $\text{id}_{F_0} = \mathcal{D}_0 \circ \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1$ (M is a projective D -module). Thus, the differential operator $C'_1 \circ C_1 - \text{id}_{F_0}$ is homotopic to zero. In a similar way, we obtain $C_1 \circ C'_1 - \text{id}_{J_q(E)}$ which is homotopic to zero. \square

REMARK 2.4. Let us take $n = 1$, then the operator $j_q : E \rightarrow J_q(E)$ is defined by:

$$\frac{d^i}{dt^i} \xi^k(x) = \eta_i^k(x), \quad 0 \leq i \leq q, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Then the compatibility conditions of j_q are described by the operator $\mathcal{D}_1 : J_q(E) \rightarrow C_1$, defined by:

$$\frac{d}{dt} \eta_i^k(x) - \eta_{i+1}^k(x) = \zeta_i^k(x), \quad 0 \leq i \leq q - 1, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Finally, if $\xi \in \ker \mathcal{D}_1$ then we have the following system

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \eta^k(x) \\ \eta_1^k(x) \\ \eta_2^k(x) \\ \vdots \\ \eta_{q-2}^k(x) \\ \eta_{q-1}^k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^k(x) \\ \eta_1^k(x) \\ \vdots \\ \eta_{q-2}^k(x) \\ \eta_{q-1}^k(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \eta_q^k(x), \quad 1 \leq k \leq m,$$

which is in the Brunovsky canonical form [23].

EXAMPLE 2.11. Let us determine the Brunovsky canonical form of the controllable system

$$\ddot{\eta}^1 + \alpha(t) \dot{\eta}^1 + \eta^1 - \dot{\eta}^2 - \alpha(t) \eta^2 = 0,$$

taken from the example 1.16 and where α is a function of time. We have shown in the example 1.16 that a parametrization $\mathcal{D}_0 : \xi \rightarrow \eta$ of the operator \mathcal{D}_1 was given by:

$$\begin{cases} \dot{\xi} + \alpha(t) \xi = \eta^1, \\ \xi + \alpha(t) \xi + (1 + \dot{\alpha}(t)) \xi = \eta^2. \end{cases}$$

This parametrization is injective because we have:

$$\xi = -\dot{\eta}^1 + \eta^2,$$

Thus, there exists a left-inverse $\mathcal{P}_0 : \eta \rightarrow \xi$ of the operator \mathcal{D}_0 , defined by:

$$-\dot{\eta}^1 + \eta^2 = \xi.$$

Applying theorem 2.4, we obtain $\mathcal{C}_0 = j_2 \circ \mathcal{P}_0 + \mathcal{K}_1 \circ \mathcal{D}_1$, where \mathcal{K}_1 is any differential operator form F_1 to $J_2(E)$. The operator $\mathcal{C}_0 : \eta \rightarrow \gamma$ is then defined by

$$\begin{cases} -\ddot{\eta}^1 + \eta^2 + a(s)(\ddot{\eta}^1 + \alpha(t)\dot{\eta}^1 + \eta^1 - \dot{\eta}^2 - \alpha(t)\eta^2) = \gamma^1, \\ -\ddot{\eta}^1 + \eta^2 + b(s)(\ddot{\eta}^1 + \alpha(t)\dot{\eta}^1 + \eta^1 - \dot{\eta}^2 - \alpha(t)\eta^2) = \gamma^2, \\ -s^3\eta^1 + \ddot{\eta}^2 + c(s)(\ddot{\eta}^1 + \alpha(t)\dot{\eta}^1 + \eta^1 - \dot{\eta}^2 - \alpha(t)\eta^2) = \gamma^3, \end{cases}$$

where a, b, c are any scalar differential operators. In particular, if we set $a(s) = 0, b(s) = 1, c(s) = s - \alpha(t)$ in order to lower the order of \mathcal{C}_0 , we finally obtain:

$$(143) \quad \begin{cases} -\ddot{\eta}^1 + \eta^2 = \gamma^1, \\ \alpha(t)\dot{\eta}^1 + \eta^1 - \alpha(t)\eta^2 = \gamma^2, \\ (\dot{\alpha}(t) - \alpha(t)^2 + 1)\dot{\eta}^1 - \alpha(t)\eta^1 + (-\dot{\alpha}(t) + \alpha(t)^2)\eta^2 = \gamma^3. \end{cases}$$

This operator shows how to transform η into γ to change \mathcal{D}_0 into the operator $j_2 : \xi \rightarrow \gamma$ defined by

$$\begin{cases} \xi = \gamma^1, \\ \dot{\xi} = \gamma^2, \\ \ddot{\xi} = \gamma^3, \end{cases}$$

or equivalently, how to transform η into γ to change \mathcal{D}_1 into the operator D_1 , defined by

$$\begin{cases} \dot{\gamma}^1 - \gamma^2 = 0, \\ \dot{\gamma}^2 - \gamma^3 = 0, \end{cases}$$

that is to say, into the following Brunovsky canonical form [23]:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \gamma^3.$$

Moreover, we can invert the operator (143) to obtain the transformation of γ into η :

$$\begin{cases} \eta^1 = \gamma^2 + \alpha(t)\gamma^1, \\ \eta^2 = \alpha(t)\dot{\gamma}^1 + \dot{\gamma}^2 + (\dot{\alpha}(t) + 1)\gamma^1. \end{cases}$$

We can do similarly for any system of PDE which determines a free D -module. Let us give an example.

EXAMPLE 2.12. Let $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$ be an operator defined by:

$$\begin{cases} \partial_{11}\eta^2 - \partial_{12}\eta^1 - 2x^2\partial_1\eta^2 + x^2\partial_2\eta^1 + (x^2)^2\eta^2 - \eta^1 = \zeta^1, \\ \partial_{12}\eta^2 - \partial_{22}\eta^1 - x^2\partial_2\eta^2 - 2\eta^2 = \zeta^2. \end{cases}$$

We let the reader check by himself that \mathcal{D}_1 is parametrized by the operator $\mathcal{D}_0 : \xi \rightarrow \eta$, defined by:

$$\begin{cases} \partial_1\xi - x^2\xi = \eta^1, \\ \partial_2\xi = \eta^2. \end{cases}$$

The parametrization \mathcal{D}_0 is injective because we have $\xi = \partial_1\eta^2 - \partial_2\eta^1 - x^2\eta^2$, and thus \mathcal{D}_0 has a left-inverse \mathcal{P}_0 , given by:

$$\partial_1\eta^2 - \partial_2\eta^1 - x^2\eta^2 = \xi.$$

Hence, the operator $C_0 = j_1 \circ \mathcal{P}_0 + \mathcal{K}_1 \circ \mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \gamma$, where we have chosen $\mathcal{K}_1 : \zeta \rightarrow \gamma$ to be

$$\begin{cases} 0 = \gamma^1, \\ -\zeta^1 = \gamma^2, \\ \zeta^2 = \gamma^3, \end{cases}$$

in order to lower the order of C_0 , is defined by:

$$\begin{cases} \partial_1 \eta^2 - \partial_2 \eta^1 - x^2 \eta^2 = \gamma^1, \\ x^2 \partial_1 \eta^2 - x^2 \partial_2 \eta^1 - (x^2)^2 \eta^2 + \eta^1 = \gamma^2. \\ \eta^2 = \gamma^3. \end{cases}$$

Finally, the operator C_0 transforms the control system $\mathcal{D}_1 \eta = 0$ into

$$\begin{cases} \xi = \gamma^1, \\ \partial_1 \xi = \gamma^2, \\ \partial_2 \xi = \gamma^3, \end{cases}$$

or equivalently, into $\mathcal{D}_1 \gamma = 0$:

$$\begin{cases} \partial_1 \gamma^1 - \gamma^2 = 0, \\ \partial_2 \gamma^1 - \gamma^3 = 0, \\ \partial_2 \gamma^2 - \partial_1 \gamma^3 = 0. \end{cases}$$

3. Appendice

Nous avons montré à la proposition 2.19 du chapitre 3 que si une matrice R , de rang générique maximal, détermine un module projectif, il en est alors de même pour toute matrice formée d'un certain nombre de lignes de R . L'exemple suivant montre que ce résultat n'est plus vrai si la matrice R n'est pas de rang maximal.

EXEMPLE 3.1. Soit M le $D = \mathbb{R}(x^1, x^2)[d_1, d_2]$ -module défini par l'opérateur différentiel \mathcal{D}_1 suivant :

$$\begin{cases} x^2 \partial_{22} \eta^2 + (x^2)^2 \partial_{12} \eta^1 + 2 \partial_2 \eta^2 + 3x^2 \partial_1 \eta^1 - x^2 \partial_2 \eta^1 - \eta^1 = \zeta^1, \\ (x^2)^2 \partial_{12} \eta^2 + (x^2)^3 \partial_{11} \eta^1 - x^2 \partial_2 \eta^2 - 2(x^2)^2 \partial_1 \eta^1 + x^2 \eta^1 - \eta^2 = \zeta^2. \end{cases}$$

Nous avons alors la résolution libre du D -module M suivante

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\cdot R_2} A^2 \xrightarrow{\cdot R_1} A^2 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

avec

$$R_2 = (-x^2 \partial_1 + 1 \quad \partial_2), \quad R_1 = \begin{pmatrix} (x^2)^2 \partial_{12} + 3x^2 \partial_1 - x^2 \partial_2 - 1 & x^2 \partial_{22} + 2 \partial_2 \\ (x^2)^3 \partial_{11} - 2(x^2)^2 \partial_1 + x^2 & (x^2)^2 \partial_{12} - x^2 \partial_2 - 1 \end{pmatrix},$$

car R_1 correspond aux conditions de compatibilité de \mathcal{D}_1 . On montre alors qu'une paramétrisation de \mathcal{D}_1 est donnée par l'opérateur $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$, défini par (voir l'exemple 3.7 du prochain chapitre pour plus de détails):

$$\begin{cases} -x^2 \partial_2 \xi - 2 \xi = \eta^1, \\ (x^2)^2 \partial_1 \xi - x^2 \xi = \eta^2. \end{cases}$$

L'opérateur \mathcal{D}_0 est injectif car $\xi = \partial_2 \eta^2 + x^2 \partial_1 \eta^1 - \eta^1$. D'où, M est un D -module libre, donc projectif. Si l'on retire maintenant une ligne de la matrice R , par exemple la deuxième, alors le D -module M' est défini par la présentation finie suivante

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{R_1'} A^2 \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

où $R_1' = ((x^2)^2 \partial_{12} + 3x^2 \partial_1 - x^2 \partial_2 - 1 \quad x^2 \partial_{22} + 2\partial_2 + 2\partial_2)$. Le module M' n'est alors plus un D -module projectif, car l'adjoint de l'opérateur $\mathcal{D}'_1 : \eta \rightarrow \zeta$, défini par

$$x^2 \partial_{22} \eta^2 + (x^2)^2 \partial_{12} \eta^1 + 2 \partial_2 \eta^2 + 3x^2 \partial_1 \eta^1 - x^2 \partial_2 \eta^1 - \eta^1 = \zeta,$$

est donné par :

$$\begin{cases} (x^2)^2 \partial_{12} \lambda - x^2 \partial_1 \lambda + x^2 \partial_2 \lambda = \mu_1, \\ x^2 \partial_{22} \lambda = \mu_2. \end{cases}$$

En rendant formellement intégrable le système suivant

$$\begin{cases} (x^2)^2 \partial_{12} \lambda - x^2 \partial_1 \lambda + x^2 \partial_2 \lambda = 0, \\ x^2 \partial_{22} \lambda = 0, \end{cases}$$

on montre alors que l'opérateur $\tilde{\mathcal{D}}'_1$ n'est pas injectif, d'où l'on conclut que M' n'est pas un D -module projectif.

CHAPITRE 6

Contrôlabilité des systèmes multidimensionnels

Ce chapitre est composé du papier intitulé "Localization and Parametrization of Linear Multidimensional Control Systems" co-écrit avec J.F. Pommaret et paru dans le journal *Systems and Control Letters*, 37 (1999), pp. 247-260.

Le but de ce chapitre est de rappeler tout d'abord une définition algébrique et intrinsèque de la contrôlabilité des systèmes multidimensionnels. Cette notion de contrôlabilité est traduite en terme d'absence d'élément de torsion du D -module M associé au système de contrôle. Fliess a montré dans [40] que pour les systèmes de contrôle, définis par des EDO linéaires à coefficients constants, l'absence de torsion du module M est équivalente à la contrôlabilité en terme de comportement, défini par Willems dans [158, 159]. Ce résultat a été récemment étendu par Pillai et Shankar aux systèmes de contrôle définis par des EDP linéaires à coefficients constants [108]. Le théorème 2.2 du chapitre 3 nous donne deux moyens de calculer la partie de torsion $t(M)$, soit par l'utilisation de $\text{ext}_D^1(N, D)$, soit par celle de $\text{tor}_1^D(K/D, M)$, lorsque $K = Q(D)$. Nous donnons ici une méthode effective, basée sur l'intégrabilité formelle et l'utilisation de l'adjoint formel des opérateurs différentiels, pour calculer $\text{ext}_D^1(N, D)$. Plus précisément, si $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ est un opérateur différentiel entre des fibrés vectoriels triviaux F_0 et F_1 de dimensions respectives l_0 et l_1 , définissant le système de contrôle, alors le $D = A[d_1, \dots, d_n]$ -module à gauche M , engendré par \mathcal{D}_1 , est défini par la présentation finie suivante :

$$D^{l_1} \xrightarrow{\mathcal{D}_1} D^{l_0} \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Nous avons alors, par transposition, le D -module à droite N , défini par la suite exacte :

$$(144) \quad 0 \leftarrow N \leftarrow D^{l_1} \xleftarrow{\mathcal{P}_1} D^{l_0} \leftarrow \text{hom}_D(M, D) \leftarrow 0.$$

Le problème est qu'il n'existe pas d'interprétation en termes d'opérateurs différentiels des D -morphisms à droite entre D -modules libres. Donc, N ne peut pas être vu comme provenant d'un opérateur différentiel. Le seul moyen d'obtenir une telle interprétation est de transformer la suite exacte (144) en une suite exacte de D -modules à gauche par multiplication par $\wedge^n T$, où T est le A -module $T = D_1/D_0$, muni du crochet $[P, Q] = P \circ Q - Q \circ P$, $\forall P, Q \in D$, où $\{D_r\}_{r \geq 0}$ désigne la filtration correspondant à l'ordre des opérateurs de D . T est alors un A -module libre avec pour base $\{\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n\}$, où \bar{d}_i est la classe de $d_i \in D_1$ dans T . Nous obtenons alors la présentation finie suivante du D -module à gauche $N_l = \wedge^n T \otimes_A N$

$$0 \leftarrow N_l \leftarrow \wedge^n T \otimes_A D^{r_1} \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} \wedge^n T \otimes_A D^{r_1},$$

où $\tilde{\mathcal{D}}_1$ est l'adjoint formel de l'opérateur différentiel \mathcal{D}_1 . Nous avons alors :

$$\text{ext}_D^1(N_l, D) = \wedge^n T \otimes_A \text{ext}_D^1(N, D).$$

Changeant de notation pour le choix des indices de manière à utiliser les propriétés spécifiques des suites de Janet, à toute suite de Janet

$$0 \rightarrow \Theta \rightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}_{n-1}} F_{n-1} \xrightarrow{\mathcal{D}_n} F_n \rightarrow 0$$

correspond la résolution libre du D -module M suivante

$$0 \rightarrow D^{l_n} \xrightarrow{\mathcal{D}_n} D^{l_{n-1}} \xrightarrow{\mathcal{D}_{n-1}} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}_2} D^{l_1} \xrightarrow{\mathcal{D}_1} D^{l_0} \xrightarrow{\mathcal{D}_0} D^m \rightarrow M \rightarrow 0,$$

où l_i (resp. m) est la dimension de la fibre des fibrés vectoriels F_i (resp. E). Ces deux remarques permettent alors de déterminer de manière effective $\text{ext}_D^1(N, D)$ et donc de déterminer si un système linéaire multidimensionnel est contrôlable ou non.

Les justifications mathématiques des manipulations précédentes sont délicates et seront décrites au chapitre "Analyse algébrique des systèmes de contrôle" (voir aussi [8, 96, 93, 107] pour plus de détails). Les équivalences précédentes permettent d'utiliser seulement le langage des opérateurs différentiels pour déterminer effectivement les $\text{ext}_D^i(N, D)$, en n'utilisant que l'adjoint formel et les conditions de compatibilité. Nous donnons un algorithme effectif du calcul du $\text{ext}_D^1(N, D)$, ainsi que de nombreux exemples. Si le système est contrôlable, alors l'algorithme du calcul du $\text{ext}_D^1(N, D)$ nous donne une paramétrisation du système, tout comme on paramétrise en géométrie algébrique certaines variétés algébriques. Nous montrons un résultat délicat qui prouve que tout opérateur $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$, définissant un D -module sans-torsion, admet une *paramétrisation minimale*, c-à-d, une paramétrisation comportant un nombre minimal de fonctions de n variables arbitraires. Dans le cas $n = 1$, cette paramétrisation est appelée habituellement la *forme contrôleur* du système [81]. Nous donnons une preuve utilisant seulement les modules différentiels, une autre utilisant seulement les opérateurs différentiels, et enfin, nous montrons que ce résultat est vrai pour tout module de type fini sur un anneau noethérien.

Nous nous intéresserons aussi, dans ce chapitre, au lien entre les paramétrisations obtenues par le calcul du $\text{ext}_D^1(N, D)$ et les paramétrisations obtenues par utilisation des procédés de localisation des D -modules. Nous rappelons que la localisation est un moyen algébrique permettant de retrouver, dans le cadre des modules, la notion de matrice de transfert des systèmes de contrôle. Nous l'étendons de manière effective aux systèmes EDP à coefficients variables en utilisant le travail de Kashiwara [85]. Notons pour finir que la localisation de l'anneau $A = \mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$ par rapport à un certain élément $\pi \in \mathbb{R}[\delta]$, appelé polynôme libérateur, est utilisée dans [43, 44, 102] pour rendre libre un A -module sans-torsion. Ceci permet alors d'appliquer les techniques développées dans [42] à certaines classes de systèmes linéaires à retards. Pour l'anneau $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta_1, \dots, \delta_r]$, des résultats sur de tels polynômes libérateurs $\pi \in \mathbb{R}[\delta_1, \dots, \delta_r]$ sont développés dans [127] et en particulier leur calcul effectif.

LOCALIZATION AND PARAMETRIZATION OF LINEAR MULTIDIMENSIONAL CONTROL SYSTEMS

Abstract: We study the link existing between the parametrization of differential operators by potential-like arbitrary functions and the localization of differential modules, while applying these results to the parametrization of linear multidimensional control systems. We show that the localization of differential modules is a natural way to generalize some well-known results on transfer matrix, classically obtained by using Laplace transform, to time-varying ordinary differential control systems and to partial differential control systems with variable coefficients. In particular, we show that the parametrizations obtained by localization are simpler than those obtained by formal duality but are worse in the sense of Palamodov-Kashiwara's classification of differential modules.

Keywords: Controllability, controller form, transfer matrix, minimal realization, parametrization of differential operators, localization, formal integrability, differential module, homological algebra.

1. Introduction

Recently, the language of differential modules has been introduced in control theory to understand intrinsically the structural properties of control systems. Our approach is guided by the wish to have a tool, which should formally look like the Laplace transform, but which could permit a better understanding of the concepts of controllability and observability. For instance, the system $\ddot{y} - \dot{y} - 2y - \dot{u} + 2u = 0$ becomes, by the Laplace transform, $\hat{y} = \frac{(s-2)}{(s+1)(s-2)} \hat{u}$, where we denote by \hat{y}, \hat{u} the Laplace transform of y, u . The transfer function of the system is $H(s) = \frac{(s-2)}{(s+1)(s-2)} = \frac{1}{s+1}$, after the cancellation of the common factor $(s-2)$. In 1960, Kalman was the first to understand that such a cancellation led to the loss of the system controllability [82]. The use of differential modules prevents any cancellation [9, 38, 39, 41, 104, 113]. Indeed, we write the system as $(\frac{d}{dt} + 1)(\frac{d}{dt} - 2)y - (\frac{d}{dt} - 2)u = 0$, i.e. $(\frac{d}{dt} - 2)((\frac{d}{dt} + 1)y - u) = 0$. The last equation leads to the existence of a *torsion element*, i.e. an element $z = (\frac{d}{dt} + 1)y - u$ satisfying the non zero equation $(\frac{d}{dt} - 2)z = 0$. Thus, the controllability of control systems can be seen as the lack of any torsion element, that is to say, in the algebraic language, the differential module generated by the control system is a $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$ *torsion-free* module [135]. Hence, the use of modules permits to give an intrinsic definition of controllability and it provides a clear understanding of the previous cancellation, a fact that cannot be done with the Laplace transform techniques involving vector spaces over $\mathbb{R}(\frac{d}{dt})$. A first purpose of this paper is to recall these facts. The first step of *Palamodov-Kashiwara's classification* of modules (see the exact sequence (149) and [85, 106]) says that every torsion-free differential module can be embedded into a free differential module, which means, in the operator language, that the operator \mathcal{D}_1 defining the controllable system can be parametrized by an operator \mathcal{D}_0 . We shall point out that the parametrization \mathcal{D}_0 is just the generalization of the *controller form* for time-varying ordinary control systems (OD control systems) [81]. We shall show then how to use the *formal duality* (see paragraph 3.2) and the *formal integrability theory* (see [26, 60, 74, 96, 113, 144, 131]) to check whether a control system is controllable or not and to compute effectively the operator \mathcal{D}_0 . In the nonlinear case, we shall also show how to look for constrained observables and prove that such a search, in the general framework, supersedes the search for first integrals, in the ordinary differential case (see remark 3.2).

The use of modules over a ring of operators is too restrictive because we sometimes need, in this framework, to invert certain elements of the ring. In fact, this is the well-known algebraic concept of *localization* of modules and that was first noticed by Oberst in [104] for multidimensional system with constant coefficients and by Fliess [41] for time-varying ordinary control systems. The second goal of this paper is to show how to make effective computations in localized partial differential control systems (PD control systems) with variable coefficients and to show, by means of a localization, another way to compute a parametrization \mathcal{D}_0 of a controllable system \mathcal{D}_1 . We shall show that the localization approach is *the natural way* to generalize certain results given by the Laplace transform techniques to the time-varying OD control systems or PD control systems with variable coefficients.

Finally, the main novelty of this paper is to use operators rather than modules in order to establish a link between these two approaches. In particular, we shall see that even if the parametrization found by localization is sometimes "simpler" than the one computed by using the formal duality, it is generally "worse" in the sense of the Palamodov-Kashiwara's classification of modules. Many explicit examples will illustrate the main results.

We stress out the fact that our approach is in the line of the extensive literature on linear multidimensional control theory [86, 104, 160, 163, 164, 168] and not in the line of the distributed parameter control theory pioneered by J.L. Lions in 1970 (see also [44]).

2. Differential Modules

Let F_0 and F_1 be two trivial vector bundles over a manifold X of dimension n with local coordinates $x = (x^1, \dots, x^n)$. In the course of the paper, we shall use $X = \mathbb{R}^n$. Let \mathcal{D}_1 be a linear partial differential operator of order q defined by

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 \\ (x, \eta^k(x)) & \longmapsto & (x, \zeta^\tau(x) = \sum_{0 \leq |\mu| \leq q, 1 \leq k \leq m} a_k^{\tau\mu}(x) \partial_\mu \eta^k), \end{array}$$

with $1 \leq k \leq m, 1 \leq \tau \leq l$, m (resp. l) is the fibered dimension of F_0 (resp. F_1) and $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ is a multi-index of length $|\mu| = \mu_1 + \dots + \mu_n$.

Let us recall a few definitions (see [87, 93, 132, 113] for more details).

DEFINITION 2.1. 1. A *differential field* K with n commuting derivations $\partial_1, \dots, \partial_n$ is a field which satisfies: $\forall a, b \in K, \forall i = 1, \dots, n$:

- $\partial_i a \in K$,
- $\partial_i(a + b) = \partial_i a + \partial_i b$,
- $\partial_i(ab) = (\partial_i a)b + a \partial_i b$,
- $\partial_i\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\partial_i a b - a \partial_i b}{b^2}, b \neq 0$,
- $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$.

2. Let K be a differential field containing \mathbb{Q} , with the set of derivations $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$, and let us denote by D the K -algebra $K[d_1, \dots, d_n]$ of the differential operators of the form $\sum_{|\mu| < \infty} a^\mu d_\mu$, where $a^\mu \in K$. It satisfies:

- (a) $d_i d_j = d_j d_i$,
- (b) $\forall a \in K : d_i a = a d_i + \partial_i a$.

We shall denote by k the differential subfield of constants of K , i.e. $k = \{a \in K \mid \partial_i a = 0, \forall i = 1, \dots, n\}$. The ring of differential operator D is a non-commutative integral domain and a *left Ore algebra*, i.e. $\forall (p, q) \in D^2, \exists (u, v) \in (D \setminus 0)^2$ such that $u p = v q$.

3. Introducing the differential indeterminates $y = (y^1, \dots, y^m)$, we denote by Dy the left D -module $Dy^1 + Dy^2 + \dots + Dy^m$ and by M the finitely generated left D -module *determined* by the operator \mathcal{D}_1 , i.e. $M = Dy/(\mathcal{D}_1 y)$, where $(\mathcal{D}_1 y)$ is the D -submodule generated by the formal linear differential components of $\mathcal{D}_1 y$.

REMARK 2.1. We shall use either the language of jet theory for systems of partial differential equations (PDE) or the language of sections for operators [113]. In the first case, we write $d_i y_\mu^k = y_{\mu+1}^k$, whereas, in the second case, d_i must be replaced by ∂_i on sections. We shall use the notation $\partial_{ij} = \partial_i \partial_j$.

REMARK 2.2. In this framework, we can study the following types of systems:

1. $D = k[\frac{d}{dt}] = k[\chi]$: ordinary differential systems with constant coefficients.
2. $D = K[\frac{d}{dt}]$: ordinary differential systems with variable coefficients (e.g. $K = \mathbb{R}(t)$).
3. $D = k[\frac{d}{dt}, \delta_1, \dots, \delta_n]$: delay differential systems.
4. $D = k[\chi_1, \dots, \chi_n]$: n -dimensional systems with constant coefficients.

EXAMPLE 2.1. Let us consider the following control system, adapted from a delay differential system presented in [102] but interpreted as a partial differential system ($\partial_1 = \delta, \partial_2 = \frac{d}{dt}$):

$$\begin{cases} \partial_2 y^1 - \partial_1 y^1 + 2y^1 + 2y^2 - 2\partial_1 y^3 = 0, \\ \partial_2 y^1 + \partial_2 y^2 - \partial_1 y^3 = 0. \end{cases}$$

We associate to this system the following differential operator $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$ defined by

$$(145) \quad \begin{cases} \partial_2 \eta^1 - \partial_1 \eta^1 - 2\partial_1 \eta^3 + 2\eta^1 + 2\eta^2 = \zeta^1, \\ \partial_2 \eta^1 + \partial_2 \eta^2 - \partial_1 \eta^3 = \zeta^2, \end{cases}$$

and the D -module $M = Dy/(y_2^1 - y_1^1 - 2y_1^3 + 2y^1 + 2y^2, y_2^1 + y_2^2 - y_1^3)$ where $D = \mathbb{R}[d_1, d_2]$ and $y = (y^1, y^2, y^3)$.

We recall certain properties of the D -module M defined as above, and thus, for finitely generated module over D (see [135] for more details).

DEFINITION 2.2. - A D -module M is *free* if M is isomorphic to D^r for a certain r .

- A D -module M is *projective* if there exist a free D -module F and a D -module N such that: $F = M \oplus N$.

- We call *torsion submodule* of M , the D -module defined by $t(M) = \{m \in M \mid \exists 0 \neq a \in D, am = 0\}$. The D -module M is *torsion-free* if $t(M) = 0$ and $M/t(M)$ is a torsion-free D -module.

It is quite easy to show that every free D -module is projective and every projective D -module is torsion-free. This can be summed up by the following module inclusions:

$$\text{free} \subseteq \text{projective} \subseteq \dots \subseteq \text{torsion-free}.$$

We shall see in the next section how to check whether or not a finitely generated left D -module is respectively torsion-free or projective and we shall give a characterization of free modules. We have the following theorem, where part 2 is the famous Quillen-Suslin theorem (see [135, 164] for more details).

THEOREM 2.1. 1. If D is a principal ideal ring (for example $D = K[\frac{d}{dt}]$), then every torsion-free D -module is a free D -module.

2. Every projective module over a polynomial ring $k[\chi_1, \dots, \chi_n]$, where k is a field, is free. Hence, over $D = k[d_1, \dots, d_n]$, any projective module is free.

Now, if we consider a differential operator $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ and a section ζ of F_1 , then all the necessary conditions for the local existence of a section η of F_0 , satisfying the inhomogenous system $\mathcal{D}_1 \eta = \zeta$, are of the form $\mathcal{D}_2 \zeta = 0$. The operator \mathcal{D}_2 only depends on the operator \mathcal{D}_1 and is called the *compatibility conditions* of \mathcal{D}_1 . A historical problem was to construct effectively the operator \mathcal{D}_2 [26, 74, 131]. We can construct the operator \mathcal{D}_2 by bringing the operator \mathcal{D}_1 to *involutiveness* and starting anew with \mathcal{D}_2 . The procedure has to stop after at most $n + 1$

steps, where n is the number of partial derivatives (see [60, 113, 128, 144] for more details). We obtain a *formally exact sequence* (that is to say, each \mathcal{D}_{i+1} represents exactly all the compatibility conditions of \mathcal{D}_i) of differential operators \mathcal{D}_i on the "right" of \mathcal{D}_1 and depending only on \mathcal{D}_1 :

$$(146) \quad 0 \longrightarrow \Theta \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}_{n+1}} F_{n+1} \longrightarrow 0,$$

where Θ denotes the solutions of \mathcal{D}_1 . We can reformulate this result into the framework of D -modules [96, 98, 128]. Corresponding to (146), we have the following *free resolution* of the D -module M (see e.g. [135]), i.e. the exact sequence of D -modules:

$$(147) \quad 0 \longleftarrow M \longleftarrow D^{r_0} \xleftarrow{\mathcal{D}_1} D^{r_1} \xleftarrow{\mathcal{D}_2} \dots \xleftarrow{\mathcal{D}_{n+1}} D^{r_{n+1}} \longleftarrow 0,$$

where r_i is the fibered dimension of F_i ($r_0 = m, r_1 = l$) and $\cdot \mathcal{D}_1$ means that we let operate a row vector of D^{r_1} on the left of \mathcal{D}_1 to obtain a row vector of D^{r_0} . Following Spencer's work [144], it can be shown that the last operator \mathcal{D}_{n+1} determines a projective D -module. For more details and applications, see the forthcoming publication [120]. We recall that a complete knowledge of M is given by the free resolution (147) and that the length of the exact sequence (147) explains why, in general, it is difficult to treat multidimensional systems with two or more independent unknowns (see discussions in [160, 163, 168]).

3. Parametrization

Dually, if we have a system of partial differential equations $\mathcal{D}_0 \xi = 0$, it is useful to know when the solutions of the systems can be parametrized by certain arbitrary functions called "*potentials*" (for example, $\text{curl } \eta = 0 \Rightarrow \exists \xi$ such that $\text{grad } \xi = \eta$). The new problem is the following: starting with an operator $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$, can we find a criterion to decide about the existence of an operator $\mathcal{D}_0 : F_1 = E \rightarrow F_0$ such that $\mathcal{D}_1 \eta = 0$ represents exactly all the compatibility conditions of the inhomogeneous system $\mathcal{D}_0 \xi = \eta$. If such an operator \mathcal{D}_0 exists, we say that \mathcal{D}_0 *parametrizes* the operator \mathcal{D}_1 . Starting anew with \mathcal{D}_0 , we can try to construct a formally exact differential sequence, on the left of \mathcal{D}_1 and depending only on \mathcal{D}_1 ,

$$(148) \quad F_{-k-1} \xrightarrow{\mathcal{D}_{-k}} F_{-k} \xrightarrow{\mathcal{D}_{-k+1}} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}_{-1}} F_{-1} \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1,$$

in which each operator exactly describes the compatibility conditions of the previous one. This criterion exists for syzygies. It was first provided in the seventies by Palamodov for linear partial differential operators with constant coefficients [106] and was extended by Kashiwara for analytic ones [85]. In the framework of D -modules, the criterion says that the obstructions to embed the D -module M into the following exact sequence of D -modules

$$(149) \quad 0 \longrightarrow M \longrightarrow D^{r-1} \xrightarrow{\mathcal{D}_{-1}} D^{r-2} \xrightarrow{\mathcal{D}_{-2}} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}_{-k}} D^{r-k+1},$$

are given by:

- for $k=0$, the injectivity of the canonical map $M \xrightarrow{\phi} \text{hom}_D(\text{hom}_D(M, D), D)$ defined by $\forall x \in M, \forall f \in \text{hom}_D(M, D) : \phi(x)(f) = f(x)$,
- for $k=1$, the injectivity *and* the surjectivity of ϕ ,
- for $k > 1$ (in this case M is said to be *reflexive*), the injectivity and the surjectivity of ϕ plus other conditions on the vanishing of certain extension modules [135] ($\forall i = 1, \dots, k-1 : \text{ext}_D^i(\text{Hom}_D(M, D), D) = 0$).

The exact sequence (149) is the algebraic counterpart of the formally exact sequence of differential operators (148). This is a beautiful but delicate and powerful tool of homological algebra which is, in its general form, out of our scope now. See [120] for applications of (148) to linear multidimensional control systems. We shall only be interested here in the first step of (149), i.e. the embedding of M into a free D -module, and we shall give an example of a D -module embedded into an exact sequence of two free D -modules.

As far as we are concerned, the quite abstract and previous results of Palamodov-Kashiwara seem to be unknown in control theory, in applied mathematics or in physics. It is not evident, at first glance, that the differential operator \mathcal{D}_1 , which defines the control system, is parametrizable by an operator \mathcal{D}_0 if and only if the control system is controllable in the sense of controllability of multidimensional systems [86, 102, 104, 113, 118, 160, 168]. See also [39, 41, 49]. Let us show this result.

3.1. Controllability. We find the following definition of controllability in [113, 118] which is even working for nonlinear analytic control systems but which is not the one now adopted for distributed parameter systems.

DEFINITION 3.1. Let $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ be a differential operator and let M be the D -module associated with \mathcal{D}_1 .

1. We call *observable* of the control system any scalar function of the inputs, outputs and their derivatives up to a certain order.
2. A system is called *controllable* if every observable of the system does not satisfy by itself any PDE.

For example, the nonlinear system $u\dot{y} - \dot{u} = a = \text{cst}$ is controllable in the previous sense if and only if $a \neq 0$. If $a = 0$, it admits the observable $z = y - \log u$ satisfying $\dot{z} = 0$, a reason for dealing with analytic functions (see [113] and remark 3.2).

In the linear case, an observable is an element of M and we may give the following corresponding definition which agrees with the one now adopted for multidimensional control systems [86, 102, 104, 160, 168].

DEFINITION 3.2. A control system, defined by an operator \mathcal{D}_1 , is controllable if the D -module M determined by \mathcal{D}_1 is torsion-free.

As a byproduct, the control system defined by the D -module $M/t(M)$ is always controllable. This algebraic definition of controllability is the intrinsic formulation of the concept of "factor primeness in the generalized sense" ("minor primeness") for matrices of (surjective) operators with constant coefficients [160, 163, 164, 168]. This fact first appeared for applications to control theory in [104]. For a more general classification of algebraic properties of D -modules (torsion-free, reflexive,, projective) and the different concepts of primeness, see [120].

EXAMPLE 3.1. 1. Let the OD control system be defined in Kalman form by

$$(150) \quad \begin{cases} \dot{\eta}^1 - \eta^2 - \eta^3 = 0, \\ \dot{\eta}^2 - \eta^1 + \alpha \eta^3 = 0, \end{cases}$$

where α is a constant real coefficient. For $\alpha = -1$, the element $z = \eta^1 - \eta^2$ satisfies $\dot{z} + z = 0$ and z is a torsion element in the corresponding D -module M . Moreover, if

$\alpha = 1$, we have $z = \eta^1 + \eta^2$ satisfying $\dot{z} - z = 0$ and z is a torsion element of M . At least for two values of the parameter α , the control system is not controllable.

2. Let us consider the following control system, adapted from a delay differential system presented in [102] but interpreted as a partial differential system ($\partial_1 = \delta, \partial_2 = \frac{d}{dt}$):

$$(151) \quad \begin{cases} \partial_2 y^1 - \partial_1 y^1 + 2y^1 + 2y^2 - 2\partial_1 y^3 = 0, \\ \partial_2 y^1 + \partial_2 y^2 - \partial_{12} y^3 = 0. \end{cases}$$

This system is not controllable because the observable $z = y^1$ satisfies $\partial_{22}z - \partial_{12}z = 0$.

3.2. Torsion-free D -Modules. We denote by E a vector bundle over a manifold X , by T^* the cotangent bundle of X , by E^* the dual bundle of E and by $\tilde{E} = \wedge^n T^* \otimes E^*$ its adjoint bundle. The adjoint bundle \tilde{E} is the right generalization of the concept of tensor density in physics [113].

REMARK 3.1. This is the true reason for which, in physics, certain quantities (deformation, electromagnetic field) are tensors whereas the dual quantities (stress, electromagnetic induction) are tensor densities, even if a background metric is not specified.

DEFINITION 3.3. If $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ is a linear differential operator, its formal adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \tilde{F}_1 \rightarrow \tilde{F}_0$ is defined by the following formal rules that are equivalent to an integration by parts:

- the adjoint of a matrix (zero order operator) is the transposed matrix,
- the adjoint of ∂_i is $-\partial_i$,
- for two linear PD operators P, Q that can be composed: $\widetilde{P \circ Q} = \tilde{Q} \circ \tilde{P}$.

We can easily check that $\tilde{\tilde{\mathcal{D}}}_1 = \mathcal{D}_1$. It can be proved that, for any section λ of \tilde{F}_1 , we have the relation

$$\langle \lambda, \mathcal{D}_1 \eta \rangle - \langle \tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda, \eta \rangle = d(\cdot),$$

expressing a difference of two n -forms ($\lambda \in \wedge^n T^* \otimes F_1^* \Rightarrow \langle \lambda, \mathcal{D}_1 \eta \rangle \in \wedge^n T^*$), where d is the standard exterior derivative. We can directly compute the adjoint of an operator by multiplying it by test functions on the left and integrating it by parts.

EXAMPLE 3.2. 1. Let us compute the adjoint of the operator (145). We multiply $\mathcal{D}_1 \eta$ on the left by $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, we integrate the result by parts and we find the operator $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \lambda \rightarrow \mu$ defined by:

$$(152) \quad \begin{cases} -\partial_2 \lambda_1 + \partial_1 \lambda_1 - \partial_2 \lambda_2 + 2\lambda_1 = \mu_1, \\ -\partial_2 \lambda_2 + 2\lambda_1 = \mu_2, \\ 2\partial_1 \lambda_1 + \partial_1 \lambda_2 = \mu_3. \end{cases}$$

2. In electromagnetism, if A is the 4-potential 1-form and F the electromagnetic field 2 form, the compatibility condition $dF = 0$ describes the first set of Maxwell equations while the adjoint of $F = dA$ describes the second set of Maxwell equations.

As we have noticed in the introduction, it is sometimes useful to parametrize a system of PDE by certain "potentials" considered as arbitrary functions. It leads to the following definition.

DEFINITION 3.4. We say that an operator $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$ formally parametrizes the operator $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ if $\mathcal{D}_1 \eta = 0$ generates exactly all the compatibility conditions of $\mathcal{D}_0 \xi = \eta$.

Let us describe the formal test for checking whether a D -module M is torsion-free or not [113, 118]. If M is torsion-free, then we give a way to compute a parametrization, i.e. a way to embed M into a free D -module (first step in Palamodov-Kashiwara's classification).

Torsion-free Test & Parametrization:

1. Start with \mathcal{D}_1 .
2. Construct its adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1$.
3. Find the compatibility conditions of $\tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = \mu$ and denote this operator by $\tilde{\mathcal{D}}_0$.
4. Construct its adjoint $\mathcal{D}_0 (= \tilde{\tilde{\mathcal{D}}}_0)$.
5. Find the compatibility conditions of $\mathcal{D}_0 \xi = \eta$ and call this operator \mathcal{D}'_1 .

This led to two different cases:

- If \mathcal{D}_1 is exactly the compatibility conditions \mathcal{D}'_1 of \mathcal{D}_0 , then the system \mathcal{D}_1 determines a torsion-free D -module M and \mathcal{D}_0 is a parametrization of \mathcal{D}_1 .
- Otherwise, the operator \mathcal{D}_1 is among, but not exactly, the compatibility conditions of \mathcal{D}_0 and we shall write $\mathcal{D}_1 < \mathcal{D}'_1$. The torsion elements of M are all the new compatibility conditions modulo the equations $\mathcal{D}_1 \eta = 0$.

PROOF. The operator $\tilde{\mathcal{D}}_0$ describes exactly the compatibility conditions of the operator $\tilde{\mathcal{D}}_1$ and we have in particular $\tilde{\mathcal{D}}_0 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = 0 \Rightarrow \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_0 = 0$. Thus, \mathcal{D}_1 is among the compatibility conditions of \mathcal{D}_0 , which are described by the operator \mathcal{D}'_1 . Now, computing the differential rank of the operators \mathcal{D}'_1 and \mathcal{D}_1 , we find that $\text{diff rk } \mathcal{D}'_1 = \text{diff rk } \mathcal{D}_1$ (see [113] for more details). If \mathcal{D}_1 is strictly among the compatibility conditions of \mathcal{D}_0 , then any new single compatibility condition ζ' in \mathcal{D}'_1 is a differential consequence of \mathcal{D}_1 ($\text{diff rk } \mathcal{D}'_1 = \text{diff rk } \mathcal{D}_1$), and we can find an operator $q \in D$ such that $q \zeta' = 0$ whenever $\mathcal{D}_1 \eta = 0$. Thus, any new single compatibility condition of \mathcal{D}_0 (not in \mathcal{D}_1) determines a torsion element. If \mathcal{D}_1 describes exactly the compatibility conditions of \mathcal{D}_0 , then the D -module M determined by \mathcal{D}_1 is torsion-free because $M \subseteq D \xi$ and $D \xi$ is a free D -module. \square

We can represent the test by the following differential sequences where the numbers indicate the different stages:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \xrightarrow{\mathcal{D}'_1} & F'_1 & 5 \\
 4 & E & \xrightarrow{\mathcal{D}_0} & F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 & 1 \\
 3 & \tilde{E} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_0} & \tilde{F}_0 & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} & \tilde{F}_1 & 2
 \end{array}$$

EXAMPLE 3.3. Let us try to know whether the operator given by (145) is controllable or not. We have already computed the adjoint operator (152) of (145). The operator (152) admits only one compatibility condition of second order which defines the operator $\tilde{\mathcal{D}}_0 : \mu \rightarrow \nu$:

$$\partial_{22} \mu_3 - \partial_{12} \mu_3 - \partial_{12} \mu_2 + 2\partial_{12} \mu_1 - \partial_{11} \mu_2 + 2\partial_1 \mu_1 - 2\partial_1 \mu_2 = \nu.$$

Taking its adjoint, we finally find the operator $\mathcal{D}_0 : \xi \rightarrow \eta$ defined by:

$$(153) \quad \begin{cases} 2\partial_{12}\xi - 2\partial_1\xi = \eta^1, \\ -\partial_{12}\xi - \partial_{11}\xi + 2\partial_1\xi = \eta^2, \\ \partial_{22}\xi - \partial_{12}\xi = \eta^3. \end{cases}$$

We let the reader check that the operator \mathcal{D}_1 exactly generates the compatibility conditions of \mathcal{D}_0 and thus \mathcal{D}_1 determines a torsion-free D -module. Hence, we have found a parametrization (153) of the operator (145).

We now describe how to compute the torsion elements of a D -module M determined by an operator \mathcal{D}_1 .

Computation of torsion elements:

1. Compute \mathcal{D}'_1 and check that \mathcal{D}_1 is strictly among \mathcal{D}'_1 .
2. For any new single compatibility condition of the form $\mathcal{D}'_1\eta = \zeta'$ of \mathcal{D}'_1 , compute the compatibility conditions of the following system:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1\eta = 0, \\ \mathcal{D}'_1\eta = \zeta' \text{ (one equation only)}. \end{cases}$$

3. We find that ζ' is a torsion element of M satisfying $a\zeta' = 0$ with $0 \neq a \in D$.

We give an example of the search of torsion elements.

EXAMPLE 3.4. Let us consider the operator $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$, defined by the system (151). Its formal adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \lambda \rightarrow \mu$ is defined by:

$$\begin{cases} -\partial_2\lambda_1 + \partial_1\lambda_1 - \partial_2\lambda_2 + 2\lambda_1 = \mu_1, \\ -\partial_2\lambda_2 + 2\lambda_1 = \mu_2, \\ 2\partial_1\lambda_1 - \partial_{12}\lambda_2 = \mu_3. \end{cases}$$

There is one compatibility condition $-\partial_1\mu_2 + \mu_3 = 0$ and thus the operator $\tilde{\mathcal{D}}_0 : \mu \rightarrow \nu$ is given by:

$$-\partial_1\mu_2 + \mu_3 = \nu.$$

We find the operator $\mathcal{D}_0 : \xi \rightarrow \eta$ defined by

$$\begin{cases} 0 = \eta^1, \\ \partial_1\xi = \eta^2, \\ \xi = \eta^3, \end{cases}$$

and we find the following operator $\mathcal{D}'_1 : \eta \rightarrow \zeta'$

$$(154) \quad \begin{cases} \eta^1 = \zeta'^1, \\ \partial_1\eta^3 - \eta^2 = \zeta'^2. \end{cases}$$

Thus, the D -module determined by \mathcal{D}_1 admits torsion elements which can be computed by finding the compatibility conditions of the systems

$$\begin{cases} \eta^1 = \zeta'^1, \\ \partial_2\eta^1 - \partial_1\eta^1 - 2\partial_1\eta^3 + 2\eta^1 + 2\eta^2 = 0, \\ \partial_{12}\eta^3 - \partial_2\eta^1 - \partial_2\eta^2 = 0, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} \partial_1 \eta^3 - \eta^2 = \zeta'^2, \\ \partial_2 \eta^1 - \partial_1 \eta^1 - 2\partial_1 \eta^3 + 2\eta^1 + 2\eta^2 = 0, \\ \partial_{12} \eta^3 - \partial_2 \eta^1 - \partial_2 \eta^2 = 0, \end{cases}$$

and we find the two torsion elements satisfying

$$\begin{cases} \zeta'^1 = \eta^1, \\ \partial_{22} \zeta'^1 - \partial_{12} \zeta'^1 = 0, \end{cases}$$

and¹

$$\begin{cases} \zeta'^2 = \partial_1 \eta^3 - \eta^2, \\ \partial_{22} \zeta'^2 - \partial_{12} \zeta'^2 = 0. \end{cases}$$

EXAMPLE 3.5. When \mathcal{D}_1 describes the $n(n+1)/2$ components of twice the Einstein tensor multiplied and linearized

$$\omega^{rs}(\partial_{ij}\Omega_{rs} + \partial_{rs}\Omega_{ij} - \partial_{ri}\Omega_{sj} - \partial_{sj}\Omega_{ri}) - \omega_{ij}(\omega^{rs}\omega^{uv}\partial_{rs}\Omega_{uv} - \omega^{ru}\omega^{sv}\partial_{rs}\Omega_{uv}) = 0,$$

where Ω is a perturbation of the Minkowski metric $\omega = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ produced by the gravitational field, one easily checks the self-dual relation: $\mathcal{D}_1 = \tilde{\mathcal{D}}_1$. It follows that $\tilde{\mathcal{D}}_0$ is the well known covariant divergence and thus \mathcal{D}_0 is the Killing operator. As the corresponding linearized curvature \mathcal{D}'_1 is generated by $n^2(n^2-1)/12$ equations and $n^2(n^2-1)/12 > n(n+1)/2$, whenever $n \geq 4$, it follows that $\mathcal{D}_1 < \mathcal{D}'_1$ strictly whenever $n \geq 4$ and therefore Einstein equations cannot be parametrized by a potential whenever $n \geq 4$ [114].

Let us recall the concept of minimal realization for multidimensional control system [86, 104] and let us generalize it for the variable coefficients case.

DEFINITION 3.5. Let the operator $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ determine a D -module M . Then, we call a minimal realization of the system, corresponding to M , any operator $\mathcal{D}'_1 : F_0 \rightarrow F'_1$ which determines the D -module $M/t(M)$, i.e. $M/t(M) = Dy/(D'_1 y)$, as a specialization of M .

THEOREM 3.1. If \mathcal{D}_1 is the operator determining the D -module M , then a minimal realization of the system, or of M , is the torsion-free module $M' = M/t(M)$ determined by the operator $\mathcal{D}'_1 : F_0 \rightarrow F'_1$ computed in step 5 of the formal torsion-free test.

EXAMPLE 3.6. A minimal realization of the control system (151) is given by the system corresponding to the operator (154).

3.3. Projective & Free D -modules. We only give here a characterization of a projective D -module determined by a surjective operator \mathcal{D}_1 , i.e. for an operator \mathcal{D}_1 with no compatibility conditions. We refer the reader to [116, 118] for the general case and for their applications to the generalized Bezout identity [81]. The algebraic definition of a projective module is the intrinsic formulation of the concept of *zero left-coprime-ness* for matrices of surjective operators with constant coefficients [104, 120]. See also [42, 102, 163, 164, 168].

THEOREM 3.2.² A surjective operator $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ determines a projective D -module M iff its adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is injective, i.e. iff there exists an operator $\mathcal{P}_1 : F_1 \rightarrow F_0$ such that $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \text{id}_{F_1}$, where id_{F_1} is the identity operator of F_1 .

1. Nous avons la relation $\zeta'^2 = \frac{1}{2}(\partial_2 \zeta'^1 - \partial_1 \zeta'^1 + 2\zeta'^1)$ entre les deux éléments de torsion ζ'^1 et ζ'^2 .
2. Ce théorème est la version opérateur différentiel de la proposition 2.8 du chapitre 3.

PROOF. If the operator $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is injective, then differential algebraic consequences of the equations $\tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = 0$ are $\lambda = 0$. Hence, we have $\tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = \mu \Rightarrow \lambda = \mathcal{P}_1 \mu$ and thus $\tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = \text{id}_{\tilde{F}_1} \Rightarrow \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \text{id}_{F_1}$. The operator $\mathcal{P}_1 : F_1 \rightarrow F_0$ is a right-inverse of \mathcal{D}_1 and we have the following *splitting exact* sequence [135]

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow D^m \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{D}_1} \\ \xrightarrow{\mathcal{P}_1} \end{array} D^l \longleftarrow 0,$$

that is to say, $D^m \cong M \oplus D^l$ and \mathcal{D}_1 determines a projective D -module. Conversely, the preceding sequence splits and there exists a right inverse of \mathcal{D}_1 . □

Finally, we have the following theorem.

THEOREM 3.3. *An operator \mathcal{D}_1 determines a free D -module if there exists an injective parametrization \mathcal{D}_0 , i.e. if there exists a left-inverse \mathcal{P}_0 of the operator \mathcal{D}_0 .*

PROOF. If \mathcal{D}_1 has an injective parametrization \mathcal{D}_0 , then \mathcal{D}_0 has a left-inverse \mathcal{P}_0 and we have the following exact diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longleftarrow & M & \longleftarrow & D^m & \xleftarrow{\mathcal{D}_1} & D^l \\ & & \downarrow & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longleftarrow & D^{r-1} & \xleftarrow{\mathcal{D}_0} & D^m & \xleftarrow{\mathcal{D}_1} & D^l, \\ & & \downarrow & \xrightarrow{\mathcal{P}_0} & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

where the two horizontal sequences are exact and thus we have $M \cong D^{r-1}$, which means that M is a free D -module. □

EXAMPLE 3.7. Let us consider the following operator $\mathcal{D}_2 : \zeta \rightarrow \pi$, defined by:

(155)
$$\partial_2 \zeta^2 - x^2 \partial_1 \zeta^1 + \zeta^1 = \pi.$$

Its formal adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_2 : \kappa \rightarrow \lambda$ is given by

$$\begin{cases} x^2 \partial_1 \kappa + \kappa = \lambda_1, \\ -\partial_2 \kappa = \lambda_2, \end{cases}$$

and we easily see that $\tilde{\mathcal{D}}_2$ is an injective operator as we have

(156)
$$\kappa = -x^2 \partial_2 \lambda_1 - (x^2)^2 \partial_1 \lambda_2 - x^2 \lambda_2 + \lambda_1.$$

Thus, the operator \mathcal{D}_2 generates a projective D -module, and taking the adjoint of (156), we obtain a right-inverse $\mathcal{P}_2 : \pi \rightarrow \zeta$ of \mathcal{D}_2 :

$$\begin{cases} x^2 \partial_2 \pi + 2\pi = \zeta^1, \\ (x^2)^2 \partial_1 \pi - x^2 \pi = \zeta^2. \end{cases}$$

We let the reader check that $\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{P}_2 = \text{id}_{F_2}$. We obtain the operator $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \lambda \rightarrow \mu$, by substituting (156) in $\tilde{\mathcal{D}}_2$, and we find:

$$(157) \quad \begin{cases} (x^2)^2 \partial_{12} \lambda_1 + (x^2)^3 \partial_{11} \lambda_2 + 2(x^2)^2 \partial_1 \lambda_2 - x^2 \partial_1 \lambda_1 + x^2 \partial_2 \lambda_1 + x^2 \lambda_2 = \mu_1, \\ x^2 \partial_{22} \lambda_1 + (x^2)^2 \partial_{12} \lambda_2 + 2x^2 \partial_1 \lambda_2 + x^2 \partial_2 \lambda_2 = \mu_2. \end{cases}$$

Dualizing $\tilde{\mathcal{D}}_1$, we obtain a parametrization $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$ of \mathcal{D}_2 :

$$(158) \quad \begin{cases} x^2 \partial_{22} \eta^2 + (x^2)^2 \partial_{12} \eta^1 + 2 \partial_2 \eta^2 + 3x^2 \partial_1 \eta^1 - x^2 \partial_2 \eta^1 - \eta^1 = \zeta^1, \\ (x^2)^2 \partial_{12} \eta^2 + (x^2)^3 \partial_{11} \eta^1 - x^2 \partial_2 \eta^2 - 2(x^2)^2 \partial_1 \eta^1 + x^2 \eta^1 - \eta^2 = \zeta^2. \end{cases}$$

We see that we can parametrize the operator \mathcal{D}_2 by a non trivial parametrization with two arbitrary functions η^1 and η^2 . We start anew with the operator \mathcal{D}_1 and we try again to parametrize the operator \mathcal{D}_1 , i.e. to check whether it determines a controllable system. We take the adjoint of \mathcal{D}_1 defined by (157) and we find only one compatibility condition between μ_1 and μ_2 :

$$x^2 \partial_2 \mu_1 - (x^2)^2 \partial_1 \mu_2 - x^2 \mu_2 - \mu_1 = 0.$$

We obtain the operator $\tilde{\mathcal{D}}_0 : \mu \rightarrow \nu$ defined by

$$x^2 \partial_2 \mu_1 - (x^2)^2 \partial_1 \mu_2 - x^2 \mu_2 - \mu_1 = \nu,$$

and dualizing it, we find the operator $\mathcal{D}_0 : \xi \rightarrow \eta$:

$$\begin{cases} -x^2 \partial_2 \xi - 2\xi = \eta^1, \\ (x^2)^2 \partial_1 \xi - x^2 \xi = \eta^2. \end{cases}$$

The operator \mathcal{D}_0 is an injective operator, as we have

$$\xi = \partial_2 \eta^2 + x^2 \partial_1 \eta^1 - \eta^1,$$

and \mathcal{D}_1 determines a free D -module, with ξ for basis. Hence, the operator \mathcal{D}_2 admits a parametrization \mathcal{D}_1 which itself admits a parametrization \mathcal{D}_0 , i.e the D -module determined by \mathcal{D}_2 can be embedded into an exact sequence of two free D -modules and it is therefore reflexive. We have the following formally exact sequence:

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_2 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} F_3 \longrightarrow 0.$$

Let us give a useful corollary of theorem 3.2, which leads to the generalized Bezout identity [81] for OD control systems. See [118] for the existence and effective computations of the generalized Bezout identity for linear multidimensional control systems.

COROLLARY 3.1. *A surjective OD operator \mathcal{D}_1 defines a controllable system iff its adjoint is injective, i.e. iff it exists a right-inverse \mathcal{P}_1 of \mathcal{D}_1 . If \mathcal{D}_1 is an operator defining a controllable system, we can find an injective parametrization \mathcal{D}_0 which is the controller form of \mathcal{D}_1 .*

PROOF. A D -module M , determined by an OD operator, is torsion-free iff it is a projective D -module (see theorem 2.1). Thus, applying theorem 3.2, M is a free D -module iff the operator $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is injective, i.e. $\tilde{\mathcal{D}}_1$ admits a left-inverse $\tilde{\mathcal{P}}_1$. By duality, \mathcal{D}_1 is controllable iff \mathcal{D}_1 has a right-inverse \mathcal{P}_1 . Moreover, in this case, M is free and by theorem 3.3, there exists an injective parametrization \mathcal{D}_0 of \mathcal{D}_1 . This is the generalization of the controller [81] for non-surjective time-varying OD control systems [118]. \square

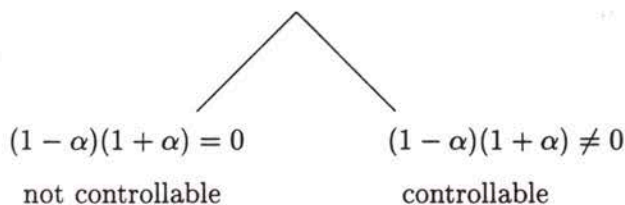
EXAMPLE 3.8. Let us test the controllability of the OD control system (150). The operator \mathcal{D}_1 defined by (150) is surjective and its formal adjoint is given by:

$$\begin{cases} -\dot{\lambda}_1 - \lambda_2 = \mu_1, \\ -\dot{\lambda}_2 - \lambda_1 = \mu_2, \\ -\lambda_1 + \alpha \lambda_2 = \mu_3 \end{cases}$$

Let us investigate the injectivity of $\tilde{\mathcal{D}}_1$. Differentiating the zero order equation and substituting it in the others, we find the new zero order equation:

$$(1 - \alpha)(1 + \alpha)\lambda_2 = \dot{\mu}_3 - \mu_1 + \alpha \mu_2 - \alpha \mu_3.$$

We can easily verify that $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is injective and thus \mathcal{D}_1 is controllable iff $(1 - \alpha)(1 + \alpha) \neq 0$ that is $\alpha \neq 1$ and $\alpha \neq -1$. Finally, we obtain the following tree of integrability conditions:



See [117] for more general trees of integrability conditions for multidimensional control systems. Let us show the link between *torsion elements* and *first integrals of motion*. If $\alpha = 1$, the operator $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is not injective and the solution of $\tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = 0$ is, after one integration,

$$\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = e^{-t} \lambda_1(0).$$

Moreover, we have $\langle \lambda, \mathcal{D}_1 \eta \rangle = \langle \tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda, \eta \rangle + \frac{d}{dt}(\lambda_1 \eta^1 + \lambda_2 \eta^2)$ and if we take (η, λ) satisfying $\mathcal{D}_1 \eta = 0$ and $\tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = 0$, we obtain $\frac{d}{dt}(\lambda_1 \eta^1 + \lambda_2 \eta^2) = 0$ and thus we obtain a first integral of motion:

$$\begin{cases} Z(t) = e^{-t} \lambda_1(0)(\eta^1(t) + \eta^2(t)), \\ \dot{Z}(t) = 0. \end{cases}$$

We let the reader do the same for $\alpha = -1$.

We have the following theorem for local solutions of sufficiently regular analytic ordinary differential operators.

THEOREM 3.4. *If \mathcal{D}_1 is a surjective operator defining a non controllable system, then the following numbers are equal:*

1. *The number of solutions of $\tilde{\mathcal{D}}_1$ that are linearly independent over the constants k of K .*
2. *The number of torsion elements which are linearly independent over K .*
3. *The number of first integrals that are linearly independent over k .*

COROLLARY 3.2. *In the case of Kalman type systems like (150), the preceding number is equal to the dimension over K of the jet space of order zero of the corresponding adjoint system $\tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = 0$.*

PROOF. If we multiply $-\dot{y} + Ay + Bu = 0$ on the left by a row vector of test functions λ and integrate by parts, we find the kernel of \tilde{D}_1 :

$$\begin{cases} \dot{\lambda} + \lambda A = 0, \\ \lambda B = 0, \end{cases} \Rightarrow \lambda AB = 0 \Rightarrow \lambda A^2 B = 0, \dots$$

a result directly leading to the controllability matrix. If now A, B are depending on time t , we get $\lambda B = 0 \Rightarrow \dot{\lambda} B + \lambda \dot{B} = 0 \Rightarrow \lambda(AB - \dot{B}) = 0 \Rightarrow \lambda(A^2 B - \dot{A}B - 2A\dot{B} + \ddot{B}) = 0 \dots$ The concept of a controllability matrix still holds and its rank over K provides the number of equations of order zero that are linearly independent over K as we just need to use the fact that $\dot{\lambda} = -\lambda A$. \square

Hence, we would like to point out the importance of torsion elements compared to first integrals in view of the following two comments:

1. The search for torsion elements is purely algebraic while the search for first integrals is purely analytic (integration needed).
2. The concept of torsion elements can be extended to the PD case as the concept of first integrals is only restricted to the OD case.

REMARK 3.2. In the nonlinear framework, a similar comment is still valid but is out of the scope of this paper devoted to linear systems. Shortly, we study here the case of an affine OD system $\dot{y} = a(y) + \sum_{i=1}^s b_i(y)u_i$. It has already been indicated in [113] that the number r of functionally independent constrained observables, that is, observables satisfying at least one OD equation, is equal to the corank of the strong controllability matrix generated by $b_i, [b_i, b_j], [a, b_i] \dots$, because each observable must be killed by this distribution. If we denote by z_1, \dots, z_r such a functionally independent set, we notice that the derivatives $\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_r$ are still constrained observables and we have, according to the implicit function theorem, $\dot{z}_i = \phi_i(z_1, \dots, z_r)$. Hence, if $Z = f(t, z_1, \dots, z_r)$ is a first integral, we have $\dot{Z} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial z_i} \phi_i(z_1, \dots, z_r) = 0$. Hence, we find by integration (as in the linear case indeed), exactly r functionally independent first integrals Z_1, \dots, Z_r killed by the vector field $\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \phi_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i}$. Once more, we notice that $z_i = g_i(y)$ only depend on y while $Z_i = h_i(t, y)$ explicitly depend on t in general. Of course, we notice that first integrals are trivially constrained observables. See [115] for more details.

REMARK 3.3. The interest of the previous test is that it may work even if the system is not in Kalman form and with variable coefficients.

EXAMPLE 3.9. (See also [117]). Let us consider the second order SISO control system

$$\ddot{y} + \alpha(t)\dot{y} + \dot{\alpha}(t)y + \ddot{u} - u = 0.$$

The kernel of the adjoint system is defined by:

$$\begin{cases} \ddot{\lambda} - \lambda = 0, \\ \ddot{\lambda} - \alpha(t)\dot{\lambda} = 0, \end{cases}$$

or equivalently

$$\begin{cases} \ddot{\lambda} - \lambda = 0, \\ \alpha(t)\dot{\lambda} - \lambda = 0. \end{cases}$$

1. If $\alpha = 0$ then $\lambda = 0$ and the system is controllable.

2. If $\alpha \neq 0$ then differentiating again and substituting, we get $(\dot{\alpha} + \alpha^2 - 1)\lambda = 0$ and the system is *again* controllable if and only if $\dot{\alpha} + \alpha^2 - 1 \neq 0$.

Such an example proves that controllability is not always a generic property of a system in the sense that a system may be controllable even for non-generic values of the coefficients (here $\alpha = 0$).

4. Localization

It is useful to have the possibility, in the D -module framework, to invert certain elements of the ring D . This can be done by *localization* of the D -module. We show how the localization procedure formally extends the Laplace transform to time-varying ordinary OD systems or to PD systems with variable coefficients and we give effective way to compute localization in D -modules.

4.1. Definition-Properties. Let us recall some results about the localization in the general framework of D -modules. See [85] for more details.

DEFINITION 4.1. Let S be a *multiplicative* subset of D , i.e. a subset of D satisfying the following properties:

1. $1 \in S$,
2. $\forall s, t \in S \Rightarrow st \in S$
3. $\forall a \in D, s \in S \Rightarrow \exists b \in D, t \in S$ such that $ta = bs$.

Let M be a D -module, then we define the $S^{-1}D$ -module $S^{-1}M$ as the quotient of the sets $(s, x) \in S \times M$ by the equivalence relation defined by:

$$(s_1, x_1) \sim (s_2, x_2) \Leftrightarrow \exists s'_1, s'_2 \in S \text{ such that} \\ s'_1 s_1 = s'_2 s_2 \text{ and } s'_1 x_1 = s'_2 x_2.$$

We denote by $s^{-1}x$ the equivalence class of the pair (s, x) and such a procedure is called "left localization". We have $S^{-1}M = S^{-1}D \otimes_D M$.

In particular, if we take $S = D \setminus 0$, we obtain $S^{-1}D = Q(D)$ the left field of fraction of D and we have the following exact sequence

$$0 \longrightarrow t(M) \longrightarrow M \xrightarrow{i_S} S^{-1}M = Q(D) \otimes_D M,$$

where $t(M)$ is the torsion D -submodule of M . So, if the D -module M is a torsion-free D -module, then the homomorphism i_S is injective and M is embedded into the $Q(D)$ -vector space $Q(D) \otimes_D M$. The torsion elements vanish in $Q(D) \otimes_D M$, a fact which is similar, in the constant coefficients case, to the cancellation in a transfer function. The following theorem extends the passage from left-coprime to right-coprime used in classical control theory, i.e. for $D = k[s]$.

THEOREM 4.1. *If $S = D \setminus 0$ then we have:*

$$S^{-1}D = D S^{-1}.$$

Let us give an effective proof of this theorem, which makes clear the link between localization techniques and the use of duality through the formal test for checking whether a module is torsion-free or not.

PROOF. Let $a \in S$ and $b \in D$, we have to show that $\exists p \in D, q \in S$ such that $a^{-1}b = pq^{-1}$. If $b = 0$, then the result is obvious. Let us suppose that $b \neq 0$. We denote by $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$ the operator defined by:

$$a\eta^1 - b\eta^2 = \zeta.$$

The adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \lambda \rightarrow \mu$ is defined by:

$$\begin{cases} \tilde{a}\lambda = \mu_1, \\ \tilde{b}\lambda = \mu_2. \end{cases}$$

Now, using the fact that D is a left Ore algebra, we can find one compatibility condition $\tilde{\mathcal{D}}'_0 : \mu \rightarrow \nu$ defined by

$$\tilde{p}\mu_1 - \tilde{q}\mu_2 = \nu,$$

with $\tilde{q} \neq 0$ and thus $\tilde{p} \neq 0$. Dualizing, we obtain the operator $\mathcal{D}'_0 : \xi \rightarrow \eta$ given by:

$$\begin{cases} p\xi = \eta^1, \\ q\xi = \eta^2. \end{cases}$$

Hence, $\xi = q^{-1}\eta^2 \Rightarrow \eta^1 = pq^{-1}\eta^2$. Finally, the kernel of the operator \mathcal{D}_1 is defined by $a\eta^1 - b\eta^2 = 0, a \neq 0 \Rightarrow \eta^1 = a^{-1}b\eta^2$ and thus $a^{-1}b = pq^{-1}$, which concludes the proof. \square

We have the following corollary.

COROLLARY 4.1. D is a right Ore algebra, i.e., $\forall (a, b) \in D^2, \exists (p, q) \in (D \setminus 0)^2$ such that $ap = bq$.

If we start with an operator with constant coefficients, which determines a torsion-free $D = k[d_1, \dots, d_n]$ -module, then we easily obtain a parametrization by means of localizations, using the relation:

$$\partial_i^{-1}\partial_j = \partial_j\partial_i^{-1}.$$

EXAMPLE 4.1. Let us find a parametrization of the divergence operator in \mathbb{R}^3 , defined by

$$\partial_1\eta^1 + \partial_2\eta^2 + \partial_3\eta^3 = \zeta,$$

by means of localizations. We have $\eta^3 = -\partial_3^{-1}(\partial_1\eta^1) - \partial_3^{-1}(\partial_2\eta^2) \Rightarrow \eta^3 = -\partial_1(\partial_3^{-1}\eta^1) - \partial_2(\partial_3^{-1}\eta^2)$. Finally, if we set

$$\begin{cases} \xi^1 = \partial_3^{-1}\eta^1, \\ \xi^2 = \partial_3^{-1}\eta^2, \end{cases}$$

we have the following parametrization of the divergence operator:

$$(159) \quad \begin{cases} \partial_3\xi^1 = \eta^1, \\ \partial_3\xi^2 = \eta^2, \\ -\partial_1\xi^1 - \partial_2\xi^2 = \eta^3. \end{cases}$$

We notice that we do not find the "usual" parametrization of the divergence operator by the curl. In fact, this new parametrization (159) cannot be parametrized in its turn whereas the curl is parametrized by the gradient, a fact showing that the D -module determined by the divergence operator is reflexive. We shall see it is a general fact that the parametrizations found by localization are "simpler" than those obtained using the formal test, but they are "worse" in the sense of Palamodov-Kashiwara's classification of differential modules (149).

The situation of operators with variable coefficients is more complicated. But, the proof of theorem 4.1 shows how to use the formal duality and formal integrability to find a parametrization of an operator, when it determines a torsion-free D -module.

EXAMPLE 4.2. Let us reconsider system (155). We can solve it with respect to ζ^2 :

$$\zeta^2 = \partial_2^{-1}(x^2 \partial_1 - 1)\zeta^1.$$

We denote $a = \partial_2$ and $b = x^2 \partial_1 - 1$ and we search two elements p and $q \in D$ such that $ap = bq$. This is equivalent to search $\tilde{p}, \tilde{q} \in D$ such that $\tilde{p}\tilde{a} = \tilde{q}\tilde{b}$, i.e. to find one compatibility condition of the following operator:

$$\begin{cases} -\partial_2 \kappa = \lambda_1, \\ -x^2 \partial_1 \kappa - \kappa = \lambda_2. \end{cases}$$

This operator is injective as we have $\kappa = x^2 \partial_2 \lambda_2 - (x^2)^2 \partial_1 \lambda_1 - x^2 \lambda_1 - \lambda_2$ and we find two different compatibility conditions of this operator: the first is defined by

$$-\partial_{22} \lambda_2 + x^2 \partial_{12} \lambda_1 + 2\partial_1 \lambda_1 + \partial_2 \lambda_1 = 0,$$

whereas the second is given by:

$$-x^2 \partial_{12} \lambda_2 + (x^2)^2 \partial_{11} \lambda_1 + 2x^2 \partial_1 \lambda_1 + \partial_1 \lambda_2 - \partial_2 \lambda_2 + \lambda_1 = 0.$$

In the first case, we have $\tilde{p} = x^2 \partial_{12} + 2\partial_1 + \partial_2$ and $\tilde{q} = \partial_{22}$, which give $p = x^2 \partial_{12} - \partial_1 - \partial_2$ and $q = \partial_{22}$. Finally, we have

$$\partial_2(x^2 \partial_{12} - \partial_1 - \partial_2) = (x^2 \partial_1 - 1)\partial_{22},$$

and thus:

$$\zeta^2 = \partial_2^{-1}(x^2 \partial_1 - 1)\zeta^1 = (x^2 \partial_{12} - \partial_1 - \partial_2)\partial_{22}^{-1}\zeta^1.$$

Setting $\eta = \partial_{22}^{-1}\zeta^1$, we obtain the parametrization:

$$(160) \quad \begin{cases} \partial_{22} \eta = \zeta^1, \\ x^2 \partial_{12} \eta - \partial_1 \eta - \partial_2 \eta = \zeta^2. \end{cases}$$

Similarly, with the second compatibility condition, we shall obtain the parametrization:

$$(161) \quad \begin{cases} x^2 \partial_{12} \eta + 2\partial_1 \eta - \partial_2 \eta = \zeta^1, \\ (x^2)^2 \partial_{11} \eta - 2x^2 \partial_1 \eta + \eta = \zeta^2. \end{cases}$$

We are in the same situation as in example 4.1: we have obtained two different parametrizations of (145) which are simpler than (158), in the sense that they only depend on one arbitrary function η whereas (158) depends on two arbitrary functions. But these parametrizations cannot be parametrized in their turn by an operator whereas (158) is parametrized by an injective operator.

Let us explain why the localization technique gives a parametrization simpler than the one of the formal test: the number of arbitrary functions in \mathcal{D}_0 is equal to the number of equations of its adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_0$ and when we compute parametrization, by means of localizations, we do not need to compute all the compatibility conditions of $\tilde{\mathcal{D}}_1$ but just a differential transcendence basis [87, 132]. The surprising fact is that, if we only take a differential transcendence basis $\tilde{\mathcal{D}}'_0$ of $\tilde{\mathcal{D}}_0$, it still gives a parametrization of \mathcal{D}_1 . This result is explained by the non trivial following theorem.

THEOREM 4.2. *Let $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ be an operator determining a torsion-free D -module and let $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$ be a parametrization of \mathcal{D}_1 with a kernel having a non zero differential transcendence degree. Then, there exists a parametrization $\mathcal{D}'_0 : E' \rightarrow F_0$ of \mathcal{D}_1 with a kernel having zero differential transcendence degree. We call such a parametrization \mathcal{D}'_0 a minimal parametrization of \mathcal{D}_1 and a way to obtain \mathcal{D}'_0 is to take a differential transcendence basis $\tilde{\mathcal{D}}'_0$ of $\tilde{\mathcal{D}}_0$.*

PROOF. If we denote by $\tilde{\mathcal{D}}'_0$ a differential transcendence basis of $\tilde{\mathcal{D}}_0$, we have the following sequence (not formally exact in general):

$$0 \longleftarrow \tilde{E}' \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}'_0} \tilde{F}_0 \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} \tilde{F}_1.$$

Introducing the differential ranks of operators (see [113] for more details), we have:

$$\text{diff rk}(\tilde{\mathcal{D}}'_0) = \dim(\tilde{F}_0) - \text{diff rk}(\tilde{\mathcal{D}}_1) = \dim \tilde{E}'.$$

Recalling that $\text{diff rk}(\tilde{\mathcal{D}}_0) = \text{diff rk}(\mathcal{D}_0)$, we obtain:

$$\text{diff rk}(\mathcal{D}'_0) = \dim(F_0) - \text{diff rk}(\mathcal{D}_1) = \text{diff rk}(\mathcal{D}_0).$$

The D -module M determined by \mathcal{D}_1 is a torsion-free module and thus M can be seen as the D -module determined by $\text{im}(\mathcal{D}_0)$. If we denote by M' the D -module determined by $\text{im}(\mathcal{D}'_0)$, i.e. the D -module determined by the operator generating the compatibility conditions of the operator \mathcal{D}'_0 , then we have:

$$\text{im}(\mathcal{D}'_0) \subseteq \text{im}(\mathcal{D}_0),$$

which leads to the following specialization:

$$M \xrightarrow{\phi} M' \rightarrow 0.$$

The differential rank of M is equal to the one of M' and thus the kernel of ϕ is a torsion submodule of M , which implies that $\ker(\phi) = 0$ because M is a torsion-free D -module. Hence, we have: $M' \cong M$. \square

Let us notice that, for once, the proof of this theorem in the framework of D -modules is easier than the one in the framework of differential operators, which has been added in the appendix.

5. Conclusion

We hope to have convinced the reader that the *localization technique* is a tool which, at the same time, is coherent with the transfer matrix approach in the case of ordinary control systems with constant coefficients and can be extended to the variable coefficients or to the partial differential case along a procedure which constitutes the core of commutative algebra. The only difficulty met is to adapt such a procedure to the non-commutative case in order to use the Ore property of the ring of differential operators. In this framework, we hope to have proved that the corresponding duality technique, based on a systematic use of the adjoint operator, will play a major constructive and effective role in the study of control theory for partial differential operators and n -dimensional systems.

6. Appendix

Let us give a proof of theorem 4.2 using differential operators: if the kernel of the parametrization \mathcal{D}_0 of \mathcal{D}_1 has a zero differential transcendence degree, then $\mathcal{D}'_0 = \mathcal{D}_0$. Let us suppose that the kernel of \mathcal{D}_0 has a non zero differential transcendence degree [87, 132]. Let us select a maximal set of differentially independent compatibility conditions among $\tilde{\mathcal{D}}_0$ (the image of this new operator $\tilde{\mathcal{D}}'_0$ must produce a differential transcendence basis of the kernel of $\tilde{\mathcal{D}}_{-1}$). We have the commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & & 0 & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 \tilde{E}_{-1} & \leftarrow & \tilde{E}'' & \leftarrow & \Omega & \leftarrow & 0 \\
 \parallel & & \downarrow & & & & \\
 \tilde{E}_{-1} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_{-1}} & \tilde{E} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_0} & \tilde{F}_0 & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} & \tilde{F}_1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \parallel \\
 0 & \leftarrow & \tilde{E}' & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}'_0} & \tilde{F}_0 & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} & \tilde{F}_1, \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

where by construction, the transcendence degree of the space of solutions Ω is zero (the corresponding differential module is a torsion module). We notice that the lower row may not be formally exact at \tilde{F}_0 . Taking the adjoint of all these operators, we get the commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 0 & & E' & \xrightarrow{\mathcal{D}'_0} & F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \parallel \\
 E_{-1} & \xrightarrow{\mathcal{D}_{-1}} & E & \xrightarrow{\mathcal{D}_0} & F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 E_{-1} & \rightarrow & E'' & \rightarrow & 0 & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 0 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

An easy chase proves that the full diagram is formally exact and then the upper row is formally exact at F_0 as desired, that is, \mathcal{D}'_0 is a parametrization of \mathcal{D}_1 such that its kernel has a zero differential transcendence degree.

7. Compléments

7.1. Autre preuve. Donnons une formulation en terme de module du théorème 4.2.

THÉORÈME 7.1. *Soit M un A -module à gauche sans-torsion, défini par la présentation finie $A^q \xrightarrow{\cdot R} A^p \rightarrow M \rightarrow 0$. Supposons que nous ayons une suite exacte suivante $A^q \xrightarrow{\cdot R} A^p \xrightarrow{\cdot R_{-1}} A^l \rightarrow M_1 \rightarrow 0$ où M_1 n'est pas un module de torsion, alors il existe une matrice R'_{-1} telle que nous avons la suite exacte suivante $A^q \xrightarrow{\cdot R} A^p \xrightarrow{\cdot R'_{-1}} A^l \rightarrow M'_1 \rightarrow 0$ avec M'_1 un A -module de torsion.*

PREUVE. Considérons le début de résolution libre du A -module à droite N

$$0 \leftarrow N \leftarrow A^q \xleftarrow{R} A^p \xleftarrow{R_{-1}} A^l \leftarrow L \leftarrow 0,$$

où $L \neq 0$. De la suite exacte $0 \rightarrow L \rightarrow A^l \rightarrow \text{im } R_{-1} \rightarrow 0$, nous obtenons $\text{rk}_A(\text{im } R_{-1}) = l - \text{rk}_A(L)$ et donc, on peut extraire une $(l - \text{rk}_A(L)) \times p$ sous-matrice R'_{-1} de R_{-1} , composée de lignes A -linéairement indépendantes. Appelons $l' = l - \text{rk}_A(L)$, nous avons alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & A^{l-l'} & \leftarrow & A^{l-l'} \leftarrow 0 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 \leftarrow & N_1 & \leftarrow & A^p & \xleftarrow{R_{-1}} & A^l & \leftarrow L \leftarrow 0 \\ & \uparrow & & \parallel & & \uparrow & \\ 0 \leftarrow & N'_1 & \leftarrow & A^p & \xleftarrow{R'_{-1}} & A^{l'} & \leftarrow 0 \\ & & & \uparrow & & \uparrow & \\ & & & 0 & & 0 & \end{array}$$

et, par le lemme du serpent, nous obtenons la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow L \rightarrow A^{l-l'} \rightarrow N'_1 \rightarrow N_1 \rightarrow 0.$$

Nous obtenons alors $\text{rk}_A(N_1) - \text{rk}_A(N'_1) = l' - l + \text{rk}_A(L) = 0$ et donc $\text{rk}_A(N_1) = \text{rk}_A(N'_1)$. Nous avons alors la suite exacte $0 \rightarrow L \rightarrow N'_1 \rightarrow N_1 \rightarrow 0$, où L un A -module de torsion. Par application de $\text{hom}_A(\cdot, A)$ à la suite exacte précédente, nous obtenons $N_1^* \cong N'^*_1$. En dualisant le diagramme précédent, nous obtenons le diagramme commutatif exact suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & A^{l-l'} & \rightarrow & A^{l-l'} \rightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \rightarrow & N_1^* & \rightarrow & A^p & \xrightarrow{R_{-1}} & A^l & \rightarrow M_1 \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \parallel & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow & N'^*_1 & \rightarrow & A^p & \xrightarrow{R'_{-1}} & A^{l'} & \rightarrow M'_1 \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

donc, $N_1^* = \ker .R_{-1} = \text{im } .R$, car M étant un A -module sans-torsion, nous avons $\text{ext}_A^1(N, A) = 0$ où N est le A -module à droite engendré par (R) . De plus, $N'^*_1 = \ker .R'_1$ et donc, le défaut d'homologie en A^p de la suite $A^q \xrightarrow{R} A^p \xrightarrow{R'_{-1}} A^{l'}$ est $H(A^p) = \ker .R'_{-1} / \text{im } .R = \ker .R'_{-1} / \text{im } .R = N'^*_1 / N_1^* = 0$, donc la suite est exacte en A^p , ce qui prouve le théorème si l'on remarque que $M'^*_1 = 0$ et donc M_1 est un A -module de torsion. \square

REMARQUE 7.1. La preuve du théorème 4.2 donnée ci-dessus est liée à celle du paragraphe 4 par le diagramme commutatif exact suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & N_1^* & \longrightarrow & N_1'^* & \longrightarrow & N_1'^*/N_1^* \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A^p & \longrightarrow & A^p & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \ker \phi & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\phi} & M' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

d'où l'on obtient, en utilisant le lemme du serpent :

$$\ker \phi \cong N_1'^*/N_1^*.$$

7.2. Exemples. Nous donnons quelques exemples supplémentaires de techniques développées dans ce chapitre ou dans le précédent.

EXEMPLE 7.1. Nous donnons un exemple d'un calcul de paramétrisation dans le cas d'un système de la forme de Kalman. Cette paramétrisation est alors une forme contrôleur du système et la base est l'état partiel.

Considérons le système, pris dans le livre [27], défini par :

$$(162) \quad \begin{cases} \dot{x}^1 - x^1 - x^3 + u = 0, \\ \dot{x}^2 - x^1 + x^2 + x^3 + u = 0, \\ \dot{x}^3 - 2x^3 - x^4 - u = 0, \\ \dot{x}^4 - x^2 - x^3 + 2u = 0. \end{cases}$$

On lui associe l'opérateur différentiel $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$, défini par :

$$(163) \quad \begin{cases} \dot{\eta}^1 - \eta^1 - \eta^3 + \eta^5 = \zeta^1, \\ \dot{\eta}^2 - \eta^1 + \eta^2 + \eta^3 + \eta^5 = \zeta^2, \\ \dot{\eta}^3 - 2\eta^3 - \eta^4 - \eta^5 = \zeta^3, \\ \dot{\eta}^4 - \eta^2 - \eta^3 + 2\eta^5 = \zeta^4. \end{cases}$$

Son adjoint formel $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \lambda \rightarrow \mu$ est alors déterminé par

$$\begin{cases} -\dot{\lambda}_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = \mu_1, \\ -\dot{\lambda}_2 + \lambda_2 - \lambda_4 = \mu_2, \\ -\dot{\lambda}_3 - \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 - \lambda_4 = \mu_3, \\ -\dot{\lambda}_4 - \lambda_3 = \mu_4, \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 = \mu_5, \end{cases}$$

et l'on vérifie que $\tilde{\mathcal{D}}_1$ est injectif et donc que le système 162 est contrôlable. De plus, nous avons :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\mu_5^{(3)} - \mu_1^{(2)} - \mu_2^{(2)} + \mu_3^{(2)} - 2\mu_4^{(2)} - \mu_5^{(2)} - \dot{\mu}_1 + \dot{\mu}_3 - 2\dot{\mu}_4 + 3\dot{\mu}_5 + 3\mu_1 + 5\mu_2 \\ \quad - 3\mu_3 + 5\mu_4 + \mu_5, \\ \lambda_2 = -\dot{\mu}_5 - \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 - 2\mu_4, \\ \lambda_3 = -\mu_5^{(3)} - \ddot{\mu}_1 - \ddot{\mu}_2 + \ddot{\mu}_3 - 2\ddot{\mu}_4 + \ddot{\mu}_5 + \dot{\mu}_1 + 2\dot{\mu}_2 - \dot{\mu}_3 + 2\dot{\mu}_4 - \mu_4, \\ \lambda_4 = \ddot{\mu}_5 + \dot{\mu}_1 + \dot{\mu}_2 - \dot{\mu}_3 + 2\dot{\mu}_4 - \dot{\mu}_5 - \mu_1 - 2\mu_2 + \mu_3 - 2\mu_4. \end{cases}$$

Il n'est pas si simple de vérifier qu'il n'existe qu'une condition de compatibilité d'ordre quatre, défini par l'opérateur l'opérateur $\tilde{\mathcal{D}}_0 : \mu \rightarrow \nu$ suivant :

$$\mu_5^{(4)} + \mu_1^{(3)} + \mu_2^{(3)} - \mu_3^{(3)} + 2\mu_4^{(3)} + 2\mu_5^{(3)} + 2\ddot{\mu}_1 + \ddot{\mu}_2 - 2\ddot{\mu}_3 + 4\ddot{\mu}_4 - 2\ddot{\mu}_5 - 2\dot{\mu}_1 - 5\dot{\mu}_2 + 2\dot{\mu}_3 - 3\dot{\mu}_4 - 3\dot{\mu}_5 - 3\mu_1 - 4\mu_2 + 2\mu_3 - 3\mu_4 - \mu_5 = \nu.$$

En dualisant $\tilde{\mathcal{D}}_0$, nous obtenons l'opérateur $\mathcal{D}_0 : \xi \rightarrow \eta$:

$$\begin{cases} -\xi^{(3)} + 2\ddot{\xi} + 2\dot{\xi} - 3\xi = \eta^1, \\ -\xi^{(3)} + \ddot{\xi} + 5\dot{\xi} - 4\xi = \eta^2, \\ \xi^{(3)} - 2\ddot{\xi} - 2\dot{\xi} + 2\xi = \eta^3, \\ -2\xi^{(3)} + 4\ddot{\xi} + 3\dot{\xi} - 3\xi = \eta^4, \\ \xi^{(4)} - 2\xi^{(3)} - 2\ddot{\xi} + 3\dot{\xi} - \xi = \eta^5. \end{cases}$$

Nous laissons le lecteur vérifier par lui-même que \mathcal{D}_1 engendre toutes les conditions de compatibilités de \mathcal{D}_0 . Donc, \mathcal{D}_1 est paramétrisable par l'opérateur injectif \mathcal{D}_0 , d'inverse à gauche $\mathcal{P}_0 \eta = -(\eta^1 + \eta^3) = \xi$. Le système est donc un $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$ -module libre, de base $y = x^1 + x^3$, avec la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} y^{(3)} - 2\ddot{y} - 2\dot{y} + 3y = x^1, \\ y^{(3)} - \ddot{y} - 5\dot{y} + 4y = x^2, \\ -y^{(3)} + 2\ddot{y} + 2\dot{y} - 2y = x^3, \\ 2y^{(3)} - 4\ddot{y} - 3\dot{y} + 3y = x^4, \\ -y^{(4)} + 2y^{(3)} + 2\ddot{y} - 3\dot{y} + y = u. \end{cases}$$

Si $y = x^1 + x^3$ est la sortie du système de Kalman (162), alors on peut suivre en boucle ouverte une trajectoire suffisamment régulière donnée $y_0(t)$, en imposant comme entrée $u_0(t) = -y_0^{(4)}(t) + 2y_0^{(3)}(t) + 2\ddot{y}_0(t) - 3\dot{y}_0(t) + y_0(t)$. Cette idée est à la base des *sorties plates* développées dans [42] pour les systèmes non linéaires.

Les calculs de cet exemple ont été effectués à l'aide d'un programme développé dans [123] qui utilise les techniques effectives de l'algèbre différentielle [87, 132].

Nous reprenons l'exemple 3.4 en utilisant le calcul du $\text{tor}_1^A(K, M)$.

EXEMPLE 7.2. Nous avons calculé, à l'exemple 3.4, la partie de torsion du système (151) à l'aide du calcul $\text{ext}_A^1(N, A)$. Nous avons montré au chapitre précédent que $t(M) \cong \text{ext}_A^1(N, A) \cong \text{tor}_1^A(K/A, M)$, où $K = Q(A)$. Regardons ce qui se passe si l'on utilise $\text{tor}_1^A(K/A, M)$ à la place

de $\text{ext}_A^1(N, A)$. Nous avons le diagramme commutatif exact suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & D^2 & \xrightarrow{\cdot R} & D^3 & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & K^2 & \xrightarrow{\text{id}_K \otimes R} & K^3 & \longrightarrow & K \otimes_D M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi'' & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & L \longrightarrow & (K/D)^2 & \xrightarrow{\text{id}_{K/D} \otimes R} & (K/D)^3 & \longrightarrow & (K/D) \otimes_D M & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

avec $R = \begin{pmatrix} d_2 - d_1 + 2 & 2 & -2d_1 \\ -d_2 & -d_2 & d_1 d_2 \end{pmatrix}$. Nous avons alors $t(M) \cong L$. Dans M , nous avons les éléments de torsion $z_1 = y^1$ et $z_2 = d_1 y^3 - y^2$ satisfaisant $\partial_{22} z_1 - \partial_{12} z_1 = 0$ et $\partial_{22} z_2 - \partial_{12} z_2 = 0$. En fait, une base des éléments de torsion de M est définie par z_1 , car nous avons la relation $z_2 = \frac{1}{2}(\partial_2 z_1 - \partial_1 z_1 + 2z_1)$. Une chasse au diagramme montre que $(k_1 \ k_2) \in L \subset (K/D)^2$ doit satisfaire

$$(k_1 \ k_2) \begin{pmatrix} d_2 - d_1 + 2 & 2 & -2d_1 \\ -d_2 & -d_2 & d_1 d_2 \end{pmatrix} = (1 \ 0 \ 0),$$

car $\pi((1 \ 0 \ 0)) = z_1$. Nous obtenons $(k_1 \ k_2) = (1/(d_2 - d_1) \ 2/(d_{22} - d_{12}))$. En raisonnant de même avec z_2 , nous savons qu'il existe une solution $l = (l_1 \ l_2) \in (K/D)^2$ au système

$$(l_1 \ l_2) \begin{pmatrix} d_2 - d_1 + 2 & 2 & -2d_1 \\ -d_2 & -d_2 & d_1 d_2 \end{pmatrix} = (0 \ -1 \ d_1),$$

car $\pi((0 \ -1 \ d_1)) = z_2$. Nous obtenons $(l_1 \ l_2) = (1/(d_2 - d_1) \ (d_2 - d_1 + 2)/(d_2^2 - d_1 d_2))$. Réciproquement, on montre facilement que $\delta(k) = z_1$ et $\delta(l) = z_2$, où δ est le morphisme connectant L à M .

Nous donnons un exemple instructif de calcul de paramétrisation d'un système contrôlable multidimensionnel, à l'aide de la localisation.

EXEMPLE 7.3. Considérons l'exemple de la condition de compatibilité des déformations ϵ_{ij} en élasticité de dimension 2. Cette condition de compatibilité est définie par

$$(164) \quad \partial_{11} \epsilon_{22} - 2\partial_{12} \epsilon_{12} + \partial_{22} \epsilon_{11} = 0.$$

De l'équation (164), on peut tirer $\partial_{12} \epsilon_{12} = \frac{1}{2}(\partial_{11} \epsilon_{22} + \partial_{22} \epsilon_{11})$, d'où par localisation, nous avons $\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \partial_1^{-1} \partial_2^{-1} (\partial_{11} \epsilon_{22} + \partial_{22} \epsilon_{11})$. Nous obtenons finalement,

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} (\partial_1 \partial_2^{-1} \epsilon_{22} + \partial_2 \partial_1^{-1} \epsilon_{11}).$$

En posant $\xi^1 = \partial_1^{-1} \epsilon_{11}$ et $\xi^2 = \partial_2^{-1} \epsilon_{22}$, nous retrouvons alors la paramétrisation des déformations ϵ_{ij} par les déplacements (ξ^1, ξ^2) en grandes déformations :

$$\begin{cases} \partial_1 \xi^1 = \epsilon_{11}, \\ \frac{1}{2}(\partial_1 \xi^1 + \partial_2 \xi^2) = \epsilon_{12}, \\ \partial_2 \xi^2 = \epsilon_{22}. \end{cases}$$

Mais, nous aurions pu nous y prendre tout autrement : on a aussi $\partial_{11} \epsilon_{22} = 2\partial_{12} \epsilon_{12} - \partial_{22} \epsilon_{11}$ et par localisation, on obtient $\epsilon_{22} = \partial_1^{-2}(2\partial_{12} \epsilon_{12} - \partial_{22} \epsilon_{11}) = -\partial_{22} \partial_1^{-2} \epsilon_{11} + 2\partial_2 \partial_1^{-1} \epsilon_{12}$. En posant $\xi^1 = \partial_1^{-2} \epsilon_{11}$ et $\xi^2 = \partial_1^{-2} \epsilon_{12}$, nous obtenons alors :

$$\begin{cases} \partial_{11} \xi^1 = \epsilon_{11}, \\ \partial_{11} \xi^2 = \epsilon_{12}, \\ 2\partial_{12} \xi^2 - \partial_{22} \xi^1 = \epsilon_{22}. \end{cases}$$

On vérifie facilement que nous avons obtenu une autre paramétrisation du système (164). Si l'on tire $\partial_{22} \epsilon_{11}$ en fonction des autres variables dépendantes, on obtient finalement la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} \partial_{22} \xi^1 = \epsilon_{11}, \\ \partial_{22} \xi^2 = \epsilon_{12}, \\ 2\partial_{12} \xi^2 - \partial_{11} \xi^1 = \epsilon_{22}. \end{cases}$$

Ainsi, nous avons obtenu trois paramétrisations distinctes de (164). Cependant, il faut remarquer que les deux dernières, obtenues par localisation, sont d'ordres supérieurs à la première, que nous avons obtenue aussi par localisation mais qui est la même que celle donnée par le test du ext. En conclusion, il faut garder à l'esprit que les paramétrisations obtenues à l'aide de la localisation sont minimales au sens qu'elles utilisent un nombre minimal de fonctions arbitraires de n -variables. Dans les cas où les nombres de fonctions arbitraires de n -variables dans les paramétrisations obtenues par le test du ext et par la localisation sont égaux, alors les ordres des secondes peuvent être plus élevés que ceux des premières.

CHAPITRE 7

Problèmes d'élimination

Ce chapitre est composé du papier intitulé "Formal Elimination of Multidimensional Control Systems", écrit avec J.F. Pommaret et soumis à Journal Mathematics of Control, Signals, and Systems.

Le chapitre précédent a montré comment les propriétés des modules différentiels étaient liées à celles des systèmes EDP correspondants. En particulier, nous avons montré l'importance de l'intégrabilité formelle dans l'étude des propriétés intrinsèques des systèmes. Le but de ce chapitre est de préciser ces résultats dans le cas des systèmes à coefficients variables ou indéterminés en introduisant des "arbres" de conditions d'intégrabilités qui servent à ramener l'étude générale à celle d'un nombre fini de cas particuliers.

FORMAL ELIMINATION OF MULTIDIMENSIONAL CONTROL SYSTEMS

Abstract Following Douglas' ideas on the inverse problem of the calculus of variations, the purpose of this article is to show that we can use the formal integrability theory to develop a theory of elimination for systems of partial differential equations and to apply it to control theory. In particular, we consider linear systems of partial differential equations with variable coefficients and we show that we can organize the integrability conditions on the coefficients to build an "intrinsic tree". Trees of integrability conditions naturally appear when we test the controllability, observability, invertibility, ... of linear control systems with some variable or unknown coefficients, or for linearized nonlinear systems. Many explicit examples will illustrate the main results.

Keywords: Elimination, control systems with variable coefficients, linearized control systems, controllability, observability, invertibility, formal integrability, D -module.

1. Introduction

Expansion into power series of analytic or formal solutions of a system of partial differential equations (PDE) has early been a powerful tool in mathematics, physics and engineering sciences. In particular, the wish to have a theory which computes the dimension of the space of the analytic solutions of a system of PDE, without integrating it explicitly, is not new, as Einstein explained it in 1953 in [35] "... we need a method which gives a measure of the strength of an equation system. We do as follows: we expand the field variables in the neighborhood of a point P , into Taylor series (which presupposes the analytic character of the field), the coefficients of these series, which are simply the derivatives of the field variables at the point P , fall into sets according to the degree of differentiation. In every such degree there appears, for the first time, a set of coefficients which would be free for arbitrary choice if it were not that the field must satisfy a system of differential equations. Through this system of differential equations (and its derivatives with respect to the coordinates) the number of coefficients is restricted, so that in each degree a smaller number of coefficients is left free for arbitrary choice. The set of numbers of "free" coefficients for all degrees of differentiation is then directly a measure of the "weakness" of the system of equations, and through this, indirectly, also of its "strength"."

This notion of "strength" or of "degree of generality" of a system of PDE was introduced by Ch. Riquier [130, 131] and M. Janet [74, 76] in the years 1910 - 1930. They developed effective algorithms in order to compute it without integrating the system explicitly. Their works have inspired J.F. Ritt while he was creating *differential algebra* (see the last two chapters of [132] for an exposition of Riquier and Janet works). More recently and independently of these precursors, the *formal integrability theory* has been developed in an intrinsic way by D.C. Spencer, using fibered manifolds, jet theory, δ -cohomology, diagram chasing, ... [116, 144]. In the beginning of the eighties, the formal integrability theory of PDE with Lie pseudogroups methods has given new insight on mathematical physics (see [116] for more details).

In this paper, we are interested in elimination problems. We consider a system of PDE with two sets of variables and our interest is to know under what conditions on the first set of variables the system admits a solution. The solution of this problem was found by Seidenberg in 1956 using differential algebra approach [137]. The purpose of this article is to show that we can use the formal integrability theory to compute the resultants of a system of PDE. This approach seems to be more intrinsic and permits to have a new point of view on the resultants. In particular, following the *Spencer-Goldschmidt criterion*, only three kinds of inequalities may appear in the resultants: the first ones appear for rank conditions (fibered manifold), the second for the surjectivity of the restricted prolongations, and the third ones when testing a more technical property, that is, the 2-acyclicity of the symbol of the system. In case of linear system of PDE with variable coefficients, these inequalities on the coefficients can be arranged in order to build an "intrinsic tree". Each final leaf represents a formal solution of the system with its degree of generality. Hence, we can study the variation of the degree of generality of the formal solutions of a linear system of PDE with variable coefficients. Surprisingly, such a point of view has first been adopted by J. Douglas (1941) in his study of the inverse problem of the calculus of variations [31], using the ideas of M. Janet [74].

Recently, the theory of differential modules (D -module) has given a new insight for studying the structural properties of control systems. See for example [9, 49, 86, 104, 102, 116, 111, 114, 117, 118, 160, 168]. Most of the intrinsic properties such as controllability, observability and invertibility of control systems have been reformulated in terms of an algebraic nature of a differential module (as torsion, torsion-free, projective, free D -module, ...). Formal tests have been developed in [104, 116, 111, 114, 118, 160, 168] to know whether a finitely generated differential module is respectively a torsion, torsion-free, projective and free D -module. Thus, if we consider control systems with variable coefficients or linearized nonlinear ones, certain trees of integrability conditions will naturally appear when testing these properties. Elimination problems in control theory have been introduced by S. Diop in [32, 33], using effective methods of differential algebra. These methods are in general more effective than those of the formal integrability theory, but less intrinsic (dependence of coordinate system through the ranking, choice of differential polynomials in *characteristic set* [87, 132]) (see [115]). Roughly speaking, we can say that the effective character always competes with the intrinsic one.

2. Formal Integrability Theory

2.1. Introduction. We now introduce the main ideas of the formal integrability theory, before exposing them, using more technical tools.

Roughly speaking, if we want to compute the "degree of generality" of a formal solution of a system of PDE, we have to know the number of "arbitrary" ("free", "parametric", ... depending on the author) derivatives for each order.

Let us consider a system of PDE $\Phi^\tau(x, \partial_\mu y^k(x)) = 0$ of order q , where $\tau = 1, \dots, l$, $k = 1, \dots, m$ and $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ is a multi-index with length $|\mu| = \mu_1 + \dots + \mu_n$. We substitute the derivative of the unknowns y^k by jet coordinates with the same indice ($\partial_\mu y^k(x) \rightarrow y_\mu^k$), that is to say, we regard any derivative of the y^k as new unknowns. We shall say that a jet coordinate with an indice of length lower or equal to q is at the order q , and at the order strictly q if the length of its indice is equal to q . Thus, $\Phi^\tau(x, \partial_\mu y^k(x)) = 0$ is transformed into a pure equation relating the jet coordinates: $\Phi^\tau(x, y_\mu^k) = 0$. Let us suppose that these equations define a fibered manifold \mathcal{R}_q (no relation among the x only) in the space of jet coordinates of order q . Using the implicit function theorem, we can locally determine some jet coordinates in function of $\dim \mathcal{R}_q$ (the fibre dimension) other jet coordinates (we try to write the greatest number of jet coordinates of order strictly equal to q in function of jet coordinates of lower order). We call the first ones "principal" jet coordinates and the second ones "parametric" jet coordinates. Thus, we have made a partition on the jet of order q into two sets, principal and parametric, where the first one can be expressed in terms of the second one.

Now, we remark that if we differentiate once the equations of $\Phi^\tau(x, \partial_\mu y^k(x)) = 0$, with respect to each x^i (prolongation ρ_1), and substitute again the derivatives by the jet coordinates, we obtain:

$$(165) \quad d_i \Phi^\tau = \frac{\partial \Phi^\tau}{\partial x^i} + \sum_{|\mu| \leq q} \frac{\partial \Phi^\tau}{\partial y_\mu^k} y_{\mu+1_i}^k = 0,$$

where $i = 1, \dots, n$. Thus, the terms of order $q+1$ appear linearly with coefficients defined on \mathcal{R}_q , that is with jets satisfying $\Phi^\tau(x, y_\mu^k) = 0$ (something well-known in differential algebra). This simple remark will allow us to use linear algebra. Let us define $\mathcal{R}_{q+1} = \rho_1(\mathcal{R}_q)$ by

$$(166) \quad \begin{cases} d_i \Phi^\tau & = 0, \\ 0 & + \Phi^\tau = 0, \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n$, $\tau = 1, \dots, l$. Now, let us call M_{q+1} the vector space defined by

$$(167) \quad \sum_{|\mu|=q} \frac{\partial \Phi^\tau}{\partial y_\mu^k} y_{\mu+1_i}^k = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tau = 1, \dots, l,$$

in the jet coordinates of order strictly equal to $q+1$. There are $\frac{m(q+n)!}{(q+1)!(n-1)!}$ jet coordinates of order strictly equal to $q+1$ and if we denote by $\sigma_1(\Phi)$ the left member of (167), then we have $\dim M_{q+1} = \frac{(q+n)!}{(q+1)!(n-1)!} - \text{rk } \sigma_1(\Phi)$ parametric jet coordinates at the order strictly $q+1$. Indeed, we can find in (167), $\text{rk } \sigma_1(\Phi)$ linearly independent equations and by linear algebra in the upper part of (166) and substitution of the principal jet coordinates of order q by the parametric ones, we obtain $\text{rk } \sigma_1(\Phi)$ principal jet coordinates of order strictly $q+1$, which can be expressed with $\dim M_{q+1}$ parametric jet coordinates of order strictly $q+1$ and with $\dim \mathcal{R}_q$ ones of order q .

Now, the trouble begins if $\text{rk } \sigma_1(\Phi) < l \times n$: we have certain equations of (167) which are linear combinations of $\text{rk } \sigma_1(\Phi)$ others. By eliminating the jets of order $q+1$ in the corresponding equations of (166), we obtain equations of order q . Only two different cases may happen:

- Substituting the principal jet of order q in these new equations, we are led to 0, then we have no new equations relating the parametric jet coordinates up to the order q . Thus, we have determined for the moment the number of parametric jet coordinates of strict order $q+1$. If we put a second member z^τ in the equations $\Phi^\tau = 0$ and begin again the same operations, we obtain: $A_\tau^{ip}(x, y_\mu^k) d_i z^\tau + B_\tau^p(x, y_\mu^k) z^\tau = 0, |\mu| \leq q$. We notice that it leads to compatibility conditions in the linear case.
- Substituting the principal jet of order q in these new equations, we are led to some non identically zero equations $\Psi^\alpha(x, y_\mu^k) = 0, |\mu| \leq q$, relating the parametric jet coordinates up to order q . This contradicts the fact that they are parametric jet coordinates. Then, we have to add these new equations to the system $\Phi^\tau = 0$ and start anew with the following system:

$$(168) \quad \mathcal{R}_q^{(1)} \begin{cases} \Phi^\tau(x, y_\mu^k) = 0, \\ \Psi^\alpha(x, y_\mu^k) = 0. \end{cases}$$

We have just shown how to compute the number of parametric jet coordinates of order $q+1$. Similarly, it can be done for each order. We have seen that the feedback of informations on the lower order derivatives (new equations $\Psi^\alpha(x, y_\mu^k) = 0$) modifies the calculus of the number of parametric jet coordinates and thus the calculus of the dimension of the space of solutions (the parametric jet coordinates determine the initial conditions that we have to give to compute the power series of the solutions). Hence, certain systems of PDE seem to be "nicer" than some others, that is, those in which no feedback of informations on the lower order derivatives appears when differentiating the equations of the system and projecting them on lower order jets space. Hence, we shall call a system of PDE *formally integrable* whenever the formal power series of its solutions can be determined step by step by successive derivations without obtaining backward new informations on lower-order derivatives. We may wonder how to recognize when a system of PDE is formally integrable, as we have to verify that no new lower order informations appear at each order, that is, for a infinity of orders. So, we can ask: does it exist a finite algorithm testing whether a system of PDE is formally integrable or not? In the case where the system is not formally integrable, we have seen that we have to add new equations. So, does it exist a procedure which adds enough equations to the system, in order to transform it into a formal integrable system, with the same solutions? D.C. spencer and coworkers have given positive answers [144] in the years 1960-1975. Their algorithms turn around the two following crucial points: first of all, we have seen that in (165), the jet coordinates of order strict $q+1$ appeared linearly, a fact permitting to use linear algebra. Thus, we feel that everything we have done precedingly can be reformulated into a more intrinsic way, using homological algebra (ker-coker exact sequences) in place of Cramer rules. D.C. Spencer has introduced the δ -sequence and its cohomology to deal with this problem. Secondly, backward informations on derivatives of order q have appeared after we have projected \mathcal{R}_{q+1} on the space of jet coordinates of order q : we have found more equations in (168) than in $\Phi^\tau = 0$ and thus the projection $\mathcal{R}_q^{(1)}$ of \mathcal{R}_{q+1} on the space of jet coordinates of order q is a strictly subset of \mathcal{R}_q (not always a submanifold). These remarks will lead (at best) to a prolongation-projection procedure that we sketch.

2.2. Main Results of the Formal Integrability Theory. We now expose the main results of the formal integrability theory (see [144, 115] for more details). These results will be illustrated in the examples of the next sections.

Let us denote by X a manifold of dimension n with local coordinates (x^1, \dots, x^n) , by $T(X)$ and $T^*(X)$, its tangent and cotangent bundles. Let \mathcal{E} be a fibered manifold over X with fiber dimension m and local coordinates (x^i, y^k) . We define the q -jet bundle $J_q(\mathcal{E})$ as a fibered manifold with local coordinates (x, y_μ^k) , $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $0 \leq |\mu| \leq q$ and a nonlinear system of PDE of order q as a fibered submanifold \mathcal{R}_q of $J_q(\mathcal{E})$, determined locally by $\Phi^\tau(x, y_\mu^k) = 0$. The r prolongation of \mathcal{R}_q is $\mathcal{R}_{q+r} = \rho_r(\mathcal{R}_q) = J_r(\mathcal{R}_q) \cap J_{r+q}(\mathcal{E})$ is obtained by substituting the jet coordinates by the derivatives, differentiating r times and substituting again the derivatives by jet coordinates. The projection $\pi_{q+r}^{q+r+s} : J_{q+r+s}(\mathcal{E}) \rightarrow J_{q+r}(\mathcal{E})$ induces a projection of \mathcal{R}_{q+r+s} on \mathcal{R}_{q+r} . We denote the image of this projection by $\mathcal{R}_{q+r}^{(s)}$. Notice that \mathcal{R}_{q+r} and $\mathcal{R}_{q+r}^{(s)}$ are not in general fibered manifolds for any $r, s \geq 0$. The *linearized system* R_q of \mathcal{R}_q is defined locally as: $\frac{\partial \Phi^\tau}{\partial y_\mu^k} Y_\mu^k = 0$. It is a linear system in Y_μ^k , with variable coefficients satisfying $\Phi^\tau = 0$. We define the symbol M_q of \mathcal{R}_q , as the family of vector space over \mathcal{R}_q , by

$$(169) \quad \sum_{|\mu|=q} \frac{\partial \Phi^\tau}{\partial y_\mu^k} v_\mu^k = 0, \quad \tau = 1, \dots, l,$$

and denote by $\sigma(\Phi)$ the corresponding matrix. Then, the symbol M_{q+r} of \mathcal{R}_{q+r} defined by

$$(170) \quad \sum_{|\mu|=q, |\nu|=r} \frac{\partial \Phi^\tau}{\partial y_\mu^k} v_{\mu+\nu}^k = 0,$$

only depends on M_q . We call $\sigma_r(\Phi) = \sigma(\rho_r(\Phi))$ the left member of (170). Let us define the δ -sequence by

$$\Lambda^s T^* \otimes M_{q+r+1} \xrightarrow{\delta} \Lambda^{s+1} T^* \otimes M_{q+r},$$

with $(\delta(\omega))_\mu^k = dx^i \wedge \omega_{\mu+1, i}^k$, where $\omega = v_{\mu, I}^k dx^I \in \Lambda^s T^* \otimes M_{q+r+1}$, $dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_s}$, $i_1 < \dots < i_s$ and $|\mu| = q+r$. We easily check that $\delta \circ \delta = 0$. The cohomology at $\Lambda^s T^* \otimes M_{q+r}$ of the sequence

$$\Lambda^{s-1} T^* \otimes M_{q+r+1} \xrightarrow{\delta} \Lambda^s T^* \otimes M_{q+r} \xrightarrow{\delta} \Lambda^{s+1} T^* \otimes M_{q+r-1},$$

is denoted by $H_{q+r}^s(M_q)$.

DEFINITION 2.1. The symbol M_q of \mathcal{R}_q is said to be *s-acyclic* if $\forall r \geq 0 : H_{q+r}^1 = \dots = H_{q+r}^s = 0$. M_q is *involutive* if it is *n-acyclic*. In particular, every system \mathcal{R}_q of ordinary differential equations (ODE) has an involutive symbol. A symbol M_q is of *finite type* if $\exists r \geq 0$ such that $M_{q+r} = 0$.

THEOREM 2.1. *Let M_q be the symbol of the system \mathcal{R}_q , then there exists an integer r large enough such that M_{q+r} is involutive.*

A test checking the 2-acyclicity of the symbol is still lacking. Indeed, we have to check $H_{q+r}^2 = 0$ for any $r \geq 0$ and thus, for an infinity of orders. Only the case of finite type symbol can be checked as we only have to verify $H_q^2 = \dots = H_{q+r-1}^2 = 0$ where $M_{q+r} = 0$ and $M_{q+r-1} \neq 0$. But,

we can test whether a symbol is involutive or not. However, it must be done only on "sufficiently generic coordinates": the δ -regular coordinates. Roughly speaking, the δ -regular coordinates are not the most generic coordinates but "generic enough" to give the right dimension of M_{q+r} .

Let $x = (x^1, \dots, x^n)$ be a system of local coordinates of X and let us order the multi-index μ of length q : $\mu < \mu'$ if there exists l such that $\mu_i = \mu'_i$ for $i = n, \dots, l + 1$ and $\mu_l < \mu'_l$. The order on the multi-index μ implies a preorder on the v_μ^k of M_q : $\mu < \mu' \Rightarrow v_\mu^k < v_{\mu'}^k$. We say that v_μ^k is of class $i > 1$ if $\mu_1 = \dots = \mu_{i-1} = 0$ and $\mu_i > 0$ and of class 1 if $\mu_1 > 0$. Now, using the equations defining M_q , we try to express the maximum number of v_μ^k of class n , in function of the other v_ν^l . Next, we substitute these v_μ^k in the other equations to make disappear the v_μ^k of class n . We respectively do the same for the v_μ^k of class $n - 1, \dots, 1$. We usually say that M_q is in the solved form. We associate a system of "dots" to these equations, as follows:

equations of class n	1	n
equations of class $n - 1$	1	$n - 1$	•	•
....						
equations of class i	1	...	i	•	•	•
...						
equations of class 1	1	•	•	•

Though this classification looks like Janet's original one, it is in fact quite different. For a detailed study, we refer the reader to the reference [55, 56]. Moreover, let M_q^i be the vector space defined locally by $\sigma(\Phi)$ where we have equated to zero the v_μ^k of class strictly lower than i . We call $\sigma(\Phi)^i$ the left member of the defining equations of M_q^i . We have $\dim M_q^i = \frac{m(q+n-i-1)!}{q!(n-i-1)!} - \text{rk } \sigma(\Phi)^i$. Let us call $\alpha_q^i = \dim M_q^{i-1} - \dim M_q^i$, $i = 1, \dots, n$.

THEOREM 2.2. *The symbol M_q is involutive if there exists a system of coordinates, called δ -regular coordinates, in which one of the following properties is satisfied:*

1. $\dim M_{q+1} = \alpha_q^1 + 2\alpha_q^2 + \dots + n\alpha_q^n$.
2. *Prolongation with respect to the dots does not bring new equations.*

Then, $\dim M_{q+r} = \sum_{i=1}^n \frac{(r+i-1)!}{r!(i-1)!} \alpha_q^i, \forall r \geq 0$.

We have seen that a "good system" \mathcal{R}_q of PDE was a system in which no lower order informations appeared when projecting its prolongations $\mathcal{R}_{q+r+s} = \rho_{r+s}(\mathcal{R}_q)$ on lower order jet space $J_{q+r}(\mathcal{E})$. Using the previous notation, it leads to the following definition.

DEFINITION 2.2. A system \mathcal{R}_q is said to be *formally integrable* if \mathcal{R}_{q+r} is a fibered manifold and the projection $\pi_{q+r}^{q+r+s} : \mathcal{R}_{q+r+s} \rightarrow \mathcal{R}_{q+r}$ is surjective $\forall r, s \geq 0$.

A system \mathcal{R}_q is said to be *involutive* if \mathcal{R}_q is formally integrable with an involutive symbol. We now give two key theorems. See [116] for the non trivial demonstrations.

THEOREM 2.3. *If M_q is 2-acyclic and M_{q+1} is a vector bundle over \mathcal{R}_q , then M_{q+r} is a vector bundle over $\mathcal{R}_q, \forall r \geq 1$.*

THEOREM 2.4. *If $\mathcal{R}_q^{(1)}$ is a fibered manifold and M_q is 2-acyclic, then $\mathcal{R}_{q+r}^{(1)}, \forall r \geq 0$.*

These theorems lead to the following criterion.

Spencer-Goldschmidt criterion If M_q is 2-acyclic and \mathcal{R}_{q+1} is a fibered manifold such that $\mathcal{R}_q^{(1)} = \mathcal{R}_q$, then \mathcal{R}_q is formally integrable.

The reader have to keep in mind that the previous criterion gives only sufficient conditions in order to have a formally integrable system.

EXAMPLE 2.1. The symbol of the system $\partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i = 0$ is neither 2-acyclic nor involutive but the first prolongation gives $\partial_{ij} \xi = 0$ and the system is formally integrable. More generally, any homogeneous system is formally integrable even if the criterion is not satisfied.

We have the following corollary.

COROLLARY 2.1. Let \mathcal{R}_q be an involutive system and let us denote by \mathcal{R}_{q-1} the projection of \mathcal{R}_q on $J_{q-1}(\mathcal{E})$, then

$$\dim \mathcal{R}_{q+r} = \dim \mathcal{R}_{q-1} + \sum_{i=1}^n \frac{(r+i)!}{r! i!} \alpha_q^i.$$

See [116] for the proof. In particular, if we want to determine the analytic solutions of the system \mathcal{R}_q , we have to fix α_q^1 functions in x^1 , α_q^2 functions in (x^1, x^2) , ..., and α_q^n functions in (x^1, \dots, x^n) .

DEFINITION 2.3. A system \mathcal{R}_q is called *sufficiently regular* if:

1. $\forall r, s \geq 0$, $\mathcal{R}_{q+r}^{(s)}$ is a fibered manifold.
2. $\forall r, s \geq 0$ the symbol $M_{q+r}^{(s)}$ is induced from a vector bundle over X .

In the case where the system \mathcal{R}_q is not formally integrable, the following theorem shows that there is a finite procedure which adds enough equations to the system, in order to obtain a formally integrable system, with the same solutions.

THEOREM 2.5. If \mathcal{R}_q is sufficiently regular system, we can find two integers, $r, s \geq 0$, such that $\mathcal{R}_{q+r}^{(s)}$ is formally integrable (involutive) with the same solutions as \mathcal{R}_q .

Thus, we are led to the following algorithm [56].

Algorithm We start with \mathcal{R}_q . Find $r \geq 0$ such that \mathcal{R}_{q+r} is 2-acyclic (involutive). Test whether $\mathcal{R}_{q+r}^{(1)} = \mathcal{R}_{q+r}$. If it is the case, then the algorithm stops, else, we start anew with $\mathcal{R}_{q+r}^{(1)}$. Hence, we finally find two integers r, s such that $\mathcal{R}_{q+r}^{(s)}$ is a formally integrable system (involutive) with the same solutions as \mathcal{R}_q .

2.3. Formal Elimination Theory. Let us take a system of PDE defined by the equations

$$(171) \quad \Phi^\tau(x, y_\mu^k, z_\nu^l) = 0, \quad \tau = 1, \dots, k, |\mu| \leq q, |\nu| \leq p,$$

where $y = (y^1, \dots, y^m)$ and $z = (z^1, \dots, z^s)$ are two sets of unknowns. We would like to know which conditions z has to satisfy in order to have solutions of the system (171). Regarding the

system (171) as a system in the set of unknowns y only, with coefficients in z ,

$$(172) \quad \Psi^\tau(x, y_\mu^k) = 0, \quad \tau = 1, \dots, k, |\mu| \leq q,$$

we can study the formal integrability of (172). Roughly speaking, suppose that z is given, we can try to find locally the formal solutions of (172) in bringing this system to formal integrability. However, in bringing it to formal integrability, we have to compute certain determinants (testing fibered manifold conditions, computing the dimension of the symbols, projections, ...) which may depend on z . So, we are led to define family of resultants that z has to satisfy in order to have formal solutions of the system (171). We have to notice that there are three kinds of inequalities which can appear when we bring a system of PDE to formal integrability:

1. inequalities which appear when testing fibered manifold conditions,
2. inequalities appearing when projecting prolongations of the system on lower order space jet,
3. inequalities appearing when testing the 2-acyclicity (or involutivity) of the symbol.

However, the third kind of inequalities is a "technical one". Indeed, the definition of formal integrability does not use 2-acyclicity but only fibered manifolds and projections. However, most of the time, we have to use the Spencer-Goldschmidt criterion in which the 2-acyclicity (or involutivity) has to be tested.

We now give an example, in which the first and the second kinds of inequalities appear when computing the resultants. This example is taken from [33] where the resultants were computed using differential algebra techniques.

EXAMPLE 2.2. Let us consider the system defined by:

$$R_1 \begin{cases} \dot{z}^1 - uz^2 = 0, \\ \dot{z}^2 - z^1 - uz^2 = 0, \\ z^1 - y = 0. \end{cases}$$

In the control framework, u is the input, z the state, y the output and we look for input-output relations by eliminating z , called input-output behaviour. The system R_1 is not formally integrable in $z = (z^1, z^2)$. As this system is a system of ordinary differential equations, we know that the symbol $M_1 = 0$ is trivially involutive and we have only to saturate the system by lower order equations. We have:

$$R_1^{(1)} \begin{cases} \dot{z}^1 - uz^2 = 0, \\ \dot{z}^2 - z^1 - uz^2 = 0, \\ z^1 - y = 0, \\ uz^2 - \dot{y} = 0, \end{cases}$$

and $R_1^{(1)}$ is a fibered manifold iff $u \neq 0$.

1. If $u = 0$ then $R_1^{(1)}$ is defined by

$$\begin{cases} \dot{z}^1 = 0, \\ \dot{z}^2 - z^1 = 0, \\ z^1 - y = 0, \\ \dot{y} = 0, \end{cases}$$

and $R_1^{(1)}$ is a fibered manifold iff $\dot{y} = 0$. In this case, we have $R_1^{(2)} = R_1^{(1)}$ and $R_1^{(1)}$ is an involutive system. Moreover, $\dim R_1^{(1)} = \dim M_1^{(1)} + \dim R_0^{(1)} = 0 + (2 - 1) = 1$, where $R_0^{(1)}$ is the projection of $R_1^{(1)}$ on $J_0(E)$ (i.e., the zero order equations of the system $R_1^{(1)}$).

2. If $u \neq 0$ then $R_1^{(2)} \subsetneq R_1^{(1)}$ where $R_1^{(2)}$ is defined by:

$$R_1^{(2)} \begin{cases} \dot{z}^1 - uz^2 = 0, \\ \dot{z}^2 - z^1 - uz^2 = 0, \\ z^1 - y = 0, \\ uz^2 - \dot{y} = 0, \\ (\dot{u} + u^2)z^2 - \ddot{y} + uy = 0. \end{cases}$$

Now, as $u \neq 0$, the last two equations lead to:

$$R_1^{(2)} \begin{cases} \dot{z}^1 - uz^2 = 0, \\ \dot{z}^2 - z^1 - uz^2 = 0, \\ z^1 - y = 0, \\ uz^2 - \dot{y} = 0, \\ u\ddot{y} - (\dot{u} + u^2)\dot{y} - u^2y = 0. \end{cases}$$

$R_1^{(2)}$ is a fibered manifold iff $u \neq 0$ and $u\ddot{y} - (\dot{u} + u^2)\dot{y} - u^2y = 0$ and, in this case, $R_1^{(2)}$ is an involutive system. Moreover, $\dim R_1^{(2)} = \dim M_1^{(2)} + \dim R_0^{(2)} = 0 + (2 - 2) = 0$.

We can notice that the dimension of the fibre is generically equal to 0 and the dimension jumps to 1 in the differentially algebraic set $\{u = 0, \dot{y} = 0\}$. Finally, the input-output behaviour is the disjunction of the two following systems:

$$\begin{cases} u = 0, \\ \dot{y} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u \neq 0, \\ u\ddot{y} - (\dot{u} + u^2)\dot{y} - u^2y = 0. \end{cases}$$

2.3.1. Trees of Integrability Conditions. It is well known that the "degree of generality" of the formal solutions of a system of linear PDE, with certain variable coefficients, highly depends on certain relations that these coefficients may verify or not. These relations are nothing else than the resultants on the coefficients the system has to verify in order to have a solution. These resultants naturally appear as formal integrability conditions when we study the formal integrability of the system. We can organize those integrability conditions in order to build a tree and each final leaf represents a formal solution of the system with its degree of generality.

EXAMPLE 2.3. Let us consider the following system (we recall that $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_m} y = y_{i_1 \dots i_m}$):

$$R_2 \begin{cases} y_{22} - a(x)y_1 = 0, \\ y_{12} = 0. \end{cases}$$

First of all, the symbol of the system, defined by

$$M_2 \begin{cases} v_{22} = 0, \\ v_{12} = 0, \end{cases} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & \bullet \\ \hline \end{array}$$

is involutive (differentiating with respect to the dot does not bring new equation) and so, we only have to test if we have $R_2^{(1)} = R_2$. We have:

$$R_2^{(1)} \begin{cases} y_{22} - a(x)y_1 = 0, \\ y_{12} = 0, \\ a(x)y_{11} + \partial_1 a(x)y_1 = 0. \end{cases}$$

1. If $a = 0$, then $R_2^{(1)} = R_2$ and R_2 is an involutive system. We easily see that $\alpha_2^1 = 1$ and $\alpha_2^2 = 0$ which implies that $\forall r \geq 0$: $\dim R_{2+r} = \dim M_{2+r} + \dim R_1 = 1+3=4$. The solution of the system depends on one function of x^1 and certain constants. Indeed, we easily integrate the system and we find $y = cx^2 + d(x^1)$.
2. If $a \neq 0$, then

$$R_2^{(1)} \begin{cases} y_{22} - a(x)y_1 = 0, \\ y_{12} = 0, \\ y_{11} + b(x)y_1 = 0, \end{cases}$$

where $b(x) = \partial_1 a(x)/a(x)$. $M_2^{(1)} = 0$ is trivially involutive and we have to compute $R_2^{(2)}$:

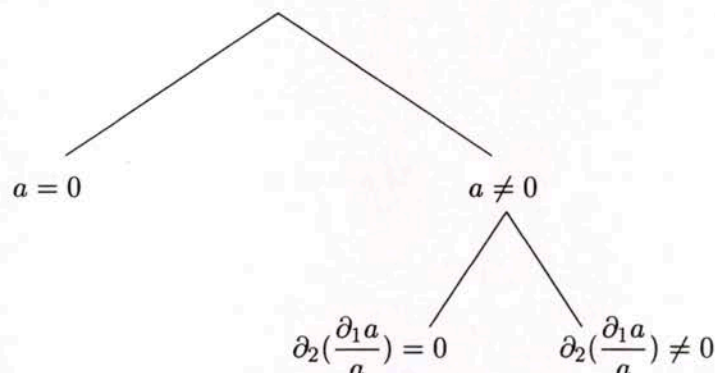
$$\begin{cases} y_{22} - a(x)y_1 = 0, \\ y_{12} = 0, \\ y_{11} + b(x)y_1 = 0, \\ \partial_2 b(x)y_1 = 0. \end{cases}$$

- (a) If $\partial_2 b(x) = 0$, then $R_2^{(2)} = R_2^{(1)}$ and $R_2^{(1)}$ is an involutive system.. We have $\forall r \geq 0$ $\dim M_{2+r}^{(1)} = 0$ and the solution of the system depends only on constants.
- (b) If $\partial_2 b(x) \neq 0$, then $R_2^{(3)} = R_2^{(2)}$ and thus $R_2^{(2)}$ is an involutive system:

$$\begin{cases} y_{22} = 0, \\ y_{12} = 0, \\ y_{11} = 0, \\ y_1 = 0. \end{cases}$$

The solution of the system depends only on $\dim R_1^{(2)} = 3 - 1 = 2$ constants. Indeed, we easily integrate it and find $y = cx^2 + d$.

We obtain the following intrinsic tree of integrability conditions.



We now give an example in which the third kind of inequalities appears when bringing the system to formal integrability. In particular, we are interested in knowing how the compatibility conditions vary (number and order) with the variable coefficients of the system.

EXAMPLE 2.4. Let us define the following system

$$(173) \quad R_2 \begin{cases} y_{33} - a y_{11} = 0, \\ y_{23} = 0, \\ y_{22} - b y_{11} = 0, \\ y_{13} = 0, \\ y_{12} = 0, \end{cases}$$

where a and $b \in \mathbb{R}$. We have the following multiplicative variables:

$$(174) \quad M_2 \begin{cases} v_{33} - a v_{11} = 0, \\ v_{23} = 0, \\ v_{22} - b v_{11} = 0, \\ v_{13} = 0, \\ v_{12} = 0. \end{cases} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & \bullet \\ \hline 1 & 2 & \bullet \\ \hline 1 & \bullet & \bullet \\ \hline 1 & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array}$$

If we prolong with respect to the dots, we find two new equations: $a v_{111} = 0$ and $b v_{111} = 0$. Thus M_2 is involutive if $a = b = 0$. Else, if we prolong once the symbol M_2 , we obtain $M_3 = 0$, i.e., M_2 is finite type and M_3 is a trivial involutive symbol. In that case, we can easily check whether the symbol M_2 is 2-acyclic or not: we have to compute the cohomology $H_2^2(M_2)$ of the following sequence

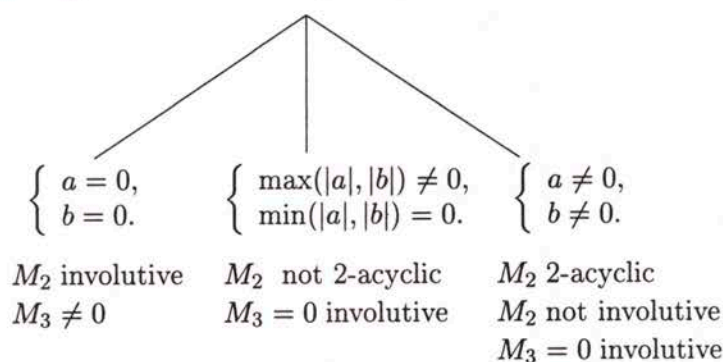
$$0 \longrightarrow \Lambda^2 T^* \otimes M_2 \xrightarrow{\delta} \Lambda^3 T^* \otimes T^*.$$

Thus, we only have to check under what conditions on a and b , δ is injective:

$$\forall \omega = v_{\mu k, ij} dx^i \wedge dx^j \in \Lambda^2 T^* \otimes M_2 : \delta(\omega)_\mu = (v_{\mu 3, 12} + v_{\mu 1, 23} + v_{\mu 2, 31}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Thus $\delta(\omega) = 0$ with $v_{\mu k} \in M_2 \Rightarrow v_{11, 23} = v_{22, 31} = v_{33, 12} = 0 \Rightarrow a v_{11, 12} = 0, b v_{11, 31} = 0$ and δ is injective iff $a \neq 0$ and $b \neq 0$. In this case, M_2 is 2-acyclic but not involutive otherwise we would have the exact sequence $\dots \longrightarrow \Lambda^2 T^* \otimes M_3 \xrightarrow{\delta} \Lambda^3 T^* \otimes M_2 \longrightarrow 0$ and thus $M_3 = 0 \Rightarrow M_2 = 0$, which is obviously not true.

We obtain the following tree of integrability conditions:



1. In case $a = 0, b = 0$, M_2 is involutive and we easily see that $R_2^{(1)} = R_2$. Thus, R_2 is an involutive system. Moreover, $\dim M_2^0 = 1, \dim M_2^1 = 0, \dim M_2^2 = 0 \Rightarrow \alpha_2^1 = 1, \alpha_2^2 = 0$ and $\alpha_2^3 = 0$. Thus, $\dim M_{2+r} = \dim R_{2+r} = 1, \forall r \geq 0$. We find the compatibility conditions of

$$(175) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{33} = z^1, \\ y_{23} = z^2, \\ y_{22} = z^3, \\ y_{13} = z^4, \\ y_{12} = z^5, \end{array} \right. \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & \bullet \\ \hline 1 & 2 & \bullet \\ \hline 1 & \bullet & \bullet \\ \hline 1 & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array}$$

by derivating the equations with respect to the dots and projecting on the system R_2 . We find 6 homogeneous *first order* compatibility conditions:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_3^2 - z_2^1 = 0, \\ z_3^3 - z_2^2 = 0, \\ z_3^5 - z_1^2 = 0, \\ z_3^4 - z_1^1 = 0, \\ z_2^4 - z_1^2 = 0, \\ z_2^5 - z_1^3 = 0. \end{array} \right.$$

We let the reader check that this system is involutive (it is a general property of involutive systems [115]). Now, if we want to know the compatibility conditions of

$$(176) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_3^2 - z_2^1 = t^1, \\ z_3^3 - z_2^2 = t^2, \\ z_3^5 - z_1^2 = t^3, \\ z_3^4 - z_1^1 = t^4, \\ z_2^4 - z_1^2 = t^5, \\ z_2^5 - z_1^3 = t^6, \end{array} \right. \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & \bullet \\ \hline 1 & 2 & \bullet \\ \hline \end{array}$$

we still differentiate the equations with respect to the dots and project the results on the system, we obtain 2 compatibility conditions:

$$(177) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_3^5 - t_2^4 + t_1^1 = 0, \\ t_3^6 - t_2^2 + t_1^2 = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

This system does not have compatibility conditions. We have just built the *Janet sequence* of the operator $\mathcal{D}_0 : y \rightarrow z$ defined by (175). We have:

$$0 \rightarrow \Theta \rightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_2 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} F_3 \rightarrow 0,$$

where Θ is the kernel of \mathcal{D}_0 and the operators $\mathcal{D}_1 : z \rightarrow t$ and $\mathcal{D}_2 : t \rightarrow s$ are defined by (176) and (177) in which s is the second member.

2. In case $a \neq 0$ and $b \neq 0$ (for example $a = b = 1$) then M_2 is 2-acyclic and $R_2^{(1)} = R_2$. Hence, the system is formally integrable. In this case, we can compute the compatibility conditions of

$$(178) \quad \begin{cases} y_{33} - a y_{11} = z^1, \\ y_{23} = z^2, \\ y_{22} - b y_{11} = z^3 \\ y_{13} = z^4, \\ y_{12} = z^5, \end{cases}$$

by computing $R_2^{(1)} = R_2$. We find only 5 homogeneous *first order* compatibility conditions, defined by:

$$\begin{cases} z_3^2 - z_2^1 - a z_1^5 = 0, \\ z_3^3 - z_2^2 + b z_3^4 = 0, \\ z_3^5 - z_1^2 = 0, \\ b z_3^4 - a z_2^5 - b z_1^1 + a z_1^3 = 0, \\ z_4^2 - z_1^2 = 0. \end{cases}$$

3. Finally, in case $\max(|a|, |b|) \neq 0$ and $\min(|a|, |b|) = 0$, M_2 is not 2-acyclic and we have to prolong the system and see whether or not $R_3^{(1)} = R_3$, as we already know that $M_3 = 0$ is a trivial involutive symbol. We let the reader check that it is the case and R_3 is an involutive system. Let us suppose that $a \neq 0$ and $b = 0$. Computing the compatibility conditions by differentiating with respect to the dots of M_3 and projecting on R_3 , we find 6 homogeneous *first and second order* compatibility conditions:

$$\begin{cases} z_{33}^4 - z_{13}^1 - a z_{11}^4 = 0, \\ z_3^5 - z_1^2 = 0, \\ z_2^5 - z_1^3 = 0, \\ z_3^3 - z_2^2 = 0, \\ z_3^2 - z_2^1 - a z_1^5 = 0, \\ z_4^2 - z_1^2 = 0. \end{cases}$$

We have to remark that R_2 is formally integrable ($\forall r, s \geq 0 : \mathcal{R}_{2+r+s}$ is a fibered manifold and $\mathcal{R}_{2+r+s} \rightarrow \mathcal{R}_{2+r}$ is surjective) even if the Spencer-Goldschmidt criterion is not satisfied (see example 1).

Notice that a simple change of the parameters a and b has totally changed the compatibility conditions of the system R_2 (the number and the orders). Moreover, in that example, the 2-acyclicity of M_2 is a generic property. Obviously, we can find examples combining the three kinds of inequations.

3. Applications to Control Systems Theory

Recently, the structural properties of control systems have received a new insight with the use of differential algebra, formal integrability theory and differential module (D -module) theory. See for example [49, 86, 104, 105, 102, 116, 111, 114, 118]. Certain intrinsic properties of the control systems have been reformulated in terms of the algebraic nature of its underlying differential module (as torsion, torsion-free, projective or free module). Formal tests have been found in [49, 86, 104, 116, 111, 114, 118, 160, 168] to test whether a finitely generated $D = K[d_1, \dots, d_n]$ -module (K a differential field containing \mathbb{Q}) satisfies one of the above properties. These tests only use formal integrability theory and thus, most of the structural properties of control systems can be tested by bringing a system of ODE, delays, PDE or n -dimensional to formal integrability (testing the surjectivity or the injectivity of an operator, computing the compatibility conditions, ...). We are able to use the preceding results for control systems with variable coefficients or for linearized nonlinear ones. It will lead to trees of integrability conditions.

We first recall a few statements and results on D -module and linear operators. For more details, see [116, 114, 118]. In particular, the idea is to study how the algebraic nature of a differential module, determined by a system of PDE, changes with the variable coefficients of the system.

3.1. D -modules and Linear Operators. Let $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$ be a linear operator, where E and F_0 are vector bundles over X and $\dim E = m$. The operator \mathcal{D}_0 is injective if $\mathcal{D}_0 \eta = 0 \Rightarrow \eta = 0$ and it is surjective if the equations $\mathcal{D}_0 \eta = 0$ are linearly differential independent or if $\mathcal{D}_0 \eta = \zeta$ has no compatibility conditions, i.e., if it does not exist an operator \mathcal{D}_1 such that $\mathcal{D}_0 \eta = \zeta \Rightarrow \mathcal{D}_1 \zeta = 0$ [116].

Let K be a differential field with n commuting derivatives $\partial_1, \dots, \partial_n$, containing \mathbb{Q} . We denote by $D = K[d_1, \dots, d_n]$ the ring of differential operators with coefficients in K where d_i satisfies:

$$\forall a, b \in K : a d_i (b d_k) = ab d_i d_k + a(\partial_i b) d_k.$$

D is an integral domain which is a commutative ring only when K is a ring of constants (with respect to the derivatives $\partial_i, i = 1, \dots, n$). However, it possesses the left and right Ore properties: $\forall (p, q) \in D^2, \exists (r, s), (u, v) \in (D \setminus \{0\})^2 : rp = sq$ and $pu = qv$. Let $\eta = \{\eta^1, \dots, \eta^m\}$ be some differential indeterminates and let us form the free left D -module generated by η and denote it by $[\eta]$. Every element of $[\eta]$ has the following form: $\sum_{\text{finite}} a_k^\mu d_\mu \eta^k$, where $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ is a multi-index. For all the algebraic concepts, see [135].

A fundamental idea is to associate with any operator \mathcal{D} the left D -module $M = [\eta]/[\mathcal{D}\eta]$. We shall say that the operator \mathcal{D} determines the D -module M .

DEFINITION 3.1. - An element τ of M is called a torsion element if there exists a non zero element of D which "kills" z , i.e., $\exists a \in D, a \neq 0, az = 0$. We note by $t(M)$ the submodule formed by the torsion elements of M .

- A D -module M is *torsion-free* if $t(M) = 0$. The D -module $M/t(M)$ is a torsion-free D -module.

EXAMPLE 3.1. Let us consider the system $\mathcal{D}\eta = 0$ defined by

$$\begin{cases} \ddot{\eta}^1 + \eta^1 - \eta^2 + \alpha \eta^3 = 0, \\ \ddot{\eta}^2 + \eta^2 - \eta^1 - \eta^3 = 0, \end{cases}$$

where $\alpha \in \mathbb{R}$ and the D -module $M = [\eta]/[\mathcal{D}\eta]$ determined by the operator \mathcal{D} .

- For $\alpha = -1$, if we subtract the first equation from the second, we find $z^1 = \eta^1 - \eta^2$ satisfying $(\frac{d^2}{dt^2} + 2)z^1 = 0$. The element z^1 is a torsion element of M .
- For $\alpha = 1$, if we add the first equation to the second, we find a torsion element $z^2 = y^1 + y^2$ satisfying $(\frac{d^2}{dt^2})z^2 = 0$.

Except these two values of the parameter α , it is quite difficult to see that the D -module M is torsion-free.

We now recall the duality of differential operators to give a formal test checking whether a finitely generated D -module M is torsion-free or not. If M is not a torsion-free D -module, the test gives the generators of $t(M)$ and the operators killing them. We denote E^* the dual bundle of E and $\tilde{E} = \wedge^n T^* \otimes E^*$ its adjoint bundle. If $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F$ is a linear differential operator, its formal adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_0 : \tilde{F} \rightarrow \tilde{E}$ is defined by the following rules:

- the adjoint of a matrix (zero order operator) is the transposed matrix,
- the adjoint of ∂_i is $-\partial_i$,
- for two linear PD operators P, Q that can be composed: $\widetilde{P \circ Q} = \tilde{Q} \circ \tilde{P}$.

We have the relation

$$\langle \mu, \mathcal{D}_0 \xi \rangle = \langle \tilde{\mathcal{D}}_0 \mu, \xi \rangle + d(\cdot),$$

with d the exterior derivative. We can directly compute the adjoint of an operator by multiplying it by test functions on the left and integrating the result by part.

EXAMPLE 3.2. Let us compute the adjoint of the operator $\mathcal{D}_0 : \xi \rightarrow \eta$ defined by:

$$\begin{cases} \partial_{22} \xi^1 - a(x) \partial_1 \xi^2 + \xi^1 = \eta^1, \\ \partial_{12} \xi^2 - \partial_{11} \xi^1 = \eta^2. \end{cases}$$

Multiplying the system by (λ_1, λ_2) on the left and integrating the result by part, we find the operator $\tilde{\mathcal{D}}_0 : \mu \rightarrow \nu$:

$$\begin{cases} \partial_{22} \mu_1 - \partial_{11} \mu_2 + \mu_1 = \nu_1, \\ \partial_{12} \mu_2 + a(x) \partial_1 \mu_1 + \partial_1 a(x) \mu_1 = \nu_2. \end{cases}$$

DEFINITION 3.2. We call an operator \mathcal{D}_1 parametrizable if there exist a set of arbitrary functions $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^r)$ or "potentials" and a linear operator \mathcal{D}_0 such that all the compatibility conditions of the inhomogenous system $\mathcal{D}_0 \xi = \eta$ are exactly generated by $\mathcal{D}_1 \eta = 0$. In that case, we will say that the sequence $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$ is formally exact.

We describe a formal test checking if the operator \mathcal{D}_1 determines a torsion-free D -module M or not (see [116] and compare with [85]):

1. Start with \mathcal{D}_1 .
2. Construct its adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1$.
3. Find the compatibility conditions of $\tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = \mu$ and denote this operator by $\tilde{\mathcal{D}}_0$.
4. Construct its adjoint \mathcal{D}_0 .
5. Find the compatibility conditions of $\mathcal{D}_0 \xi = \eta$ and call this operator by \mathcal{D}'_1 .

We are led to two different cases. If $\mathcal{D}'_1 = \mathcal{D}_1$ then the system \mathcal{D}_1 determines a torsion-free D -module M and \mathcal{D}_0 is a parametrization of \mathcal{D}_1 . Otherwise, the operator \mathcal{D}_1 is among,

but not exactly, the compatibility conditions of \mathcal{D}_0 . The torsion elements of M are all the new compatibility conditions modulo the equations $\mathcal{D}_1\eta = 0$.

We can represent the test by the following differential sequences where the number indicates the different stages:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & 5 \\
 & & & & \xrightarrow{\mathcal{D}'_1} & F'_1 \\
 E & \xrightarrow{\mathcal{D}_0} & F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 \\
 & & 4 & & 1 \\
 \tilde{E} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_0} & \tilde{F}_0 & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} & \tilde{F}_1 \\
 & & 3 & & 2
 \end{array}$$

If the D -module M is torsion-free, then the operator \mathcal{D}_0 is the generalization of the controller form for multidimensional systems [104, 118]. Hence, summing up the above results, we obtain the following useful theorem.

THEOREM 3.1. *A system \mathcal{D}_1 determines a torsion-free D -module M iff the operator \mathcal{D}_1 is parametrizable. Hence, for systems of PDE with variable coefficients, we have to construct two trees of integrability conditions (one for $\tilde{\mathcal{D}}_1$ and the other for \mathcal{D}_0) to know whether \mathcal{D}_1 determines a torsion-free D -module or not.*

Such examples with two trees of integrability conditions are very rare. We take an example from [117].

EXAMPLE 3.3. Let us consider the finite transformation $y = f(x)$ satisfying the Pfaffian system:

$$dy^3 - a(y^2)dy^1 = \rho(x)(dx^3 - a(x^2)dx^1).$$

Linearizing such a transformation around the identity by setting $y = x + t\xi(x) + \dots$ and making $t \rightarrow 0$, after eliminating $\rho(x)$, we discover that infinitesimal transformations are defined, through the use of a correct geometric object, by the kernel of the differential system $\mathcal{D}_0\xi = \eta$ as following (see p. 237 of [116]):

$$\begin{cases} -a(x^2)\partial_1 \xi^1 + \partial_1 \xi^3 + \frac{1}{2} a(x^2)(\partial_1 \xi^1 + \partial_2 \xi^2 + \partial_3 \xi^3) - \xi^2 \partial_2 a(x^2) & = \eta^1, \\ -a(x^2)\partial_2 \xi^1 + \partial_2 \xi^3 & = \eta^2, \\ -a(x^2)\partial_3 \xi^1 + \partial_3 \xi^3 - \frac{1}{2} (\partial_1 \xi^1 + \partial_2 \xi^2 + \partial_3 \xi^3) & = \eta^3. \end{cases}$$

From the theory of Lie pseudogroups [116], we can prove that the PD system $\mathcal{D}_0\xi = 0$ is formally integrable if and only if $\partial_2 a(x^2) = c = cst$, the "classical case" of *contact transformations* corresponding to $a(x^2) = x^2$ ($\Rightarrow c = 1$). It follows that the only compatibility condition $\mathcal{D}_1\eta = 0$ is

$$-a(x^2)(\partial_2 \eta^3 - \partial_3 \eta^2) + \partial_1 \eta^2 - \partial_2 \eta^1 + \partial_2 a(x^2) \eta^3 = 0,$$

and the operator \mathcal{D}_1 is surjective. The adjoint operator $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is defined by:

$$\begin{cases} \partial_2 \lambda & = \mu_1, \\ -a(x^2)\partial_3 \lambda - \partial_1 \lambda & = \mu_2, \\ a(x^2)\partial_2 \lambda + 2c \lambda & = \mu_3. \end{cases}$$

As $\mu_3 - a(x^2)\mu_1 = 2c\lambda$, the operator $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is injective if and only if $c \neq 0$. In that case, the two independent compatibility conditions can be written:

$$\begin{cases} \partial_2 \mu_3 - a(x^2) \partial_2 \mu_1 - 3c \mu_1 & = 2\nu_2, \\ -a(x^2) \partial_3 (\mu_3 - a(x^2) \mu_1) - \partial_1 (\mu_3 - a(x^2) \mu_1) - 2c \mu_2 & = -2(\nu_1 + a(x^2) \nu_3), \end{cases}$$

after introducing the adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_0$ of \mathcal{D}_0 as follows:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} a(x^2) \partial_1 \mu_1 + \frac{1}{2} \partial_1 \mu_3 + a(x^2) \partial_3 \mu_3 + a(x^2) \partial_2 \mu_2 + \partial_2 a(x^2) \mu_2 & = \nu_1, \\ -\frac{1}{2} a(x^2) \partial_2 \mu_1 + \frac{1}{2} \partial_2 \mu_3 - \frac{3}{2} \partial_2 a(x^2) \mu_1 & = \nu_2, \\ -\partial_1 \mu_1 - \frac{1}{2} a(x^2) \partial_3 \mu_1 - \partial_2 \mu_2 - \frac{1}{2} \partial_3 \mu_3 & = \nu_3. \end{cases}$$

Now, let us start with the operator $\tilde{\mathcal{D}}_0$ depending on the arbitrary function $a(x^2)$ and let us question about the algebraic nature of $M = [\mu]/[\tilde{\mathcal{D}}_0\mu]$. According to the general test, we must construct the adjoint of $\tilde{\mathcal{D}}_0$ which is \mathcal{D}_0 and look for its compatibility conditions \mathcal{D}_1 , a result bringing out the condition $\partial_2 a(x^2) = c$, where c is an arbitrary constant. When $c = 0$, we should find the zero order compatibility condition $\mu_3 - a(x^2)\mu_1 = 0$ which is not a consequence of $\tilde{\mathcal{D}}_0$ and thus $\tilde{\mathcal{D}}_0$ determines a D -module M with torsion elements. Indeed, we can easily verify that the element non zero element $z = \mu_3 - a(x^2)\mu_1 \in M$ satisfies $\partial_2 z = 0$. When $c \neq 0$, the adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1$ admits the compatibility condition expressed by $\tilde{\mathcal{D}}_0$ because we have, in that case:

$$a(x^2) \partial_3 \nu_2 - \partial_2 \nu_1 + \partial_1 \nu_2 - a(x^2) \partial_2 \nu_3 - 2c \nu_3 = 0,$$

which gives $c\nu_3 = (\partial_1 + a(x^2)\partial_3)\nu_2 - \partial_2(\nu_1 + a(x^2)\nu_3)$, and M is a torsion-free D -module.

We recall the definition of a free D -module.

DEFINITION 3.3. A D -module M is a free D -module if there exists a basis of M , i.e., elements of M which are independent on D and which generate M .

THEOREM 3.2. An operator \mathcal{D}_1 determines a free D -module iff it admits an injective parametrization \mathcal{D}_0 , i.e., if the sequence $0 \rightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$ is formally exact.

We turn now to an important class of D -module: projective module. We only give some basic results. See [118] for more general ones, and in particular, how to use of projective D -module and formal duality in order to split certain differential sequences of operators and for their applications to the *generalized Bezout identity*. See [106] for deeper results.

DEFINITION 3.4. A D -module M is a projective D -module if there exist a D -module N and a free D -module F such that $F = M \oplus N$, i.e., M is a summand of a free D -module. Remark that N is a projective D -module too.

We have the following theorem, which allows us to test if M is a projective D -module.

THEOREM 3.3. A surjective operator $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ determines a projective D -module if there exists an operator $\mathcal{P}_1 : F_1 \rightarrow F_0$ such that $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \text{id}_{F_1}$, where id_{F_1} is the identity operator of F_1 , i.e., if its dual $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is injective. In particular, if the system has variable coefficients, only one tree of integrability conditions has to be built in order to decide whether the operator determines a projective D -module or not.

Let us describe a formal test for checking whether a D -module M is projective or not:

1. Start with \mathcal{D}_1 and check its surjectivity.

2. Construct its adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1$.
3. Check whether $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is an injective operator or not.

We are led to two different cases. If $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is an injective operator then \mathcal{D}_1 determines a projective D -module. If we want to compute its right-inverse, we have to bring the system $\tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = \mu$ to formal integrability. We have to find $\lambda = \tilde{\mathcal{P}}_1 \mu$. Dualizing this operator, we find the operator \mathcal{P}_1 which satisfies $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \text{id}_{F_1}$. In the case when the adjoint of \mathcal{D}_1 is not injective, then \mathcal{D}_1 does not determine a projective D -module.

EXAMPLE 3.4. Let us show that the operator $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$ defined by

$$\partial_2 \eta^2 - x^2 \partial_1 \eta^1 + \eta^1 = \zeta$$

determines a projective D -module M . We first dualize \mathcal{D}_1 and we find the $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \lambda \rightarrow \mu$:

$$\begin{cases} x^2 \partial_1 \lambda + \lambda = \mu_1, \\ -\partial_2 \lambda = \mu_2. \end{cases}$$

We now study the formal integrability of the preceding system in λ and we find a new equation $\lambda = -x^2(\partial_2 \mu_1 + x^2 \partial_1 \mu_2 + \mu_2) + \mu_1$. Thus $\tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ and M is a projective D -module with a right-inverse \mathcal{P}_1 given by the dual of the operator $-x^2(\partial_2 \mu_1 + x^2 \partial_1 \mu_2 + \mu_2) + \mu_1 = \nu$. We obtain $\mathcal{P}_1 : \zeta \rightarrow \eta$ defined by

$$\begin{cases} x^2 \partial_2 \zeta + 2\zeta = \eta^1, \\ (x^2)^2 \partial_1 \zeta - x^2 \zeta = \eta^2, \end{cases}$$

and we let the reader verify that $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \text{id}_{F_1}$.

For non surjective operator, see [118]. It is quite easy to see that every free D -module is projective and every projective D -module is torsion-free, which can be summed up by the following module inclusions:

$$\text{free} \subseteq \text{projective} \subseteq \text{torsion-free}.$$

For a principal ideal ring D (for example $D = k[\frac{d}{dt}]$ with k a field), every torsion-free D -module is a free D -module. Thus, we have the following useful corollary:

COROLLARY 3.1. *A surjective OD operator determines a free D -module iff its dual is injective. In particular, if the operator has some variable coefficients, we only need one tree of integrability conditions to know whether it determines a free D -module or not.*

In 1976, Quillen and Suslin have independently demonstrated the Serre conjecture of 1950 claiming that every projective module over a polynomial ring $k[\chi_1, \dots, \chi_n]$, where k is a field, is free (see [135, 152, 163, 164]). It is typically the case where $D = k[\partial_1, \dots, \partial_n]$ and k is a constant field (i.e., $\forall i = 1, \dots, n, \forall a \in k : \partial_i a = 0$). Thus, we have the following corollary:

COROLLARY 3.2. *A surjective operator with constant coefficients determines a free D -module iff its formal adjoint is injective.*

Now, we give an example showing that the algebraic nature of a D -module, determined by a linear PD system with variable or unknown coefficients, depends on some integrability conditions on the coefficients.

EXAMPLE 3.5. Let $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$ be the operator defined by:

$$(179) \quad \partial_2 \eta^1 - \alpha \partial_1 \eta^1 - \partial_2 \eta^2 + a(x) \eta^2 = \zeta,$$

with $\alpha \in \mathbb{R}$ and let M be the D -module determined by \mathcal{D}_1 . We would like to know how the algebraic nature of the D -module M (torsion, torsion-free, projective and free) depends on the coefficients. Dualizing \mathcal{D}_1 , we obtain the operator $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \lambda \rightarrow \mu$ defined by:

$$\begin{cases} -\partial_2 \lambda + \alpha \partial_1 \lambda = \mu_1, \\ \partial_2 \lambda + a(x) \lambda = \mu_2, \end{cases}$$

which can be rearranged under the following form:

$$\begin{cases} -\partial_2 \lambda + \alpha \partial_1 \lambda = \mu_1, \\ \alpha \partial_1 \lambda + a(x) \lambda = \mu_1 + \mu_2. \end{cases}$$

We put $\mu_1 = \mu_2 = 0$ and we call R_1 the corresponding system:

$$(180) \quad R_1 \begin{cases} -\partial_2 \lambda + \alpha \partial_1 \lambda = 0, \\ \alpha \partial_1 \lambda + a(x) \lambda = 0. \end{cases}$$

We now study the formal integrability of the system R_1 . First of all, M_1 is an involutive symbol $\forall \alpha$, but its dimension depends whether α is equal to zero or not.

1. If $\alpha = 0$, then $\dim M_1 = 2 - 1 = 1$ and M_1 is involutive. Now, the dimension of R_1 depends whether $a = 0$ or not.

(a) If $a = 0$, then $\dim R_0 = 1 - 0 = 1$ and R_1 is formally integrable and we easily find that M is a torsion D -module generated by $z = \eta^1 - \eta^2$ satisfying $\partial_2 z = 0$.

(b) If $a \neq 0$, then $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is an injective operator. Thus \mathcal{D}_1 determined a projective D -module and we have $\tilde{\mathcal{P}}_1 : \mu \rightarrow \lambda$ defined by $(\mu_1 + \mu_2)/a(x) = \lambda$. Dualizing, we obtain the right-inverse $\mathcal{P}_1 : \zeta \rightarrow \eta$ of \mathcal{D}_1 with

$$\begin{cases} \frac{1}{a(x)} \zeta = \eta^1, \\ \frac{1}{a(x)} \zeta = \eta^2. \end{cases}$$

We let the reader check that a parametrization $\mathcal{D} : \xi \rightarrow \eta$ of \mathcal{D}_1 is defined by

$$\begin{cases} -a(x) \partial_2 \xi + (a(x)^2 - 2 \partial_2 a(x)) \xi = \eta^1, \\ -a(x) \partial_2 \xi - 2 \partial_2 a(x) \xi = \eta^2. \end{cases}$$

It is an injective parametrization as we easily see that $\xi = \frac{1}{a(x)^2} (\eta^1 - \eta^2)$ and $M = [\xi]$.

2. If $\alpha \neq 0$, then $\dim M_1 = 2 - 2 = 0$ and $M_1 = 0$ is a trivial involutive symbol. We only have to study the projection $\pi_1^2 : R_2 \rightarrow R_1$, i.e., $R_1^{(1)}$. We have:

$$R_1^{(1)} \begin{cases} -\lambda_2 + \alpha \lambda_1 = 0, \\ \alpha \lambda_1 + a(x) \lambda = 0, \\ (\partial_2 a(x) - \alpha \partial_1 a(x)) \lambda = 0. \end{cases}$$

The dimension of $R_0^{(1)}$ depends whether $\partial_2 a(x) - \alpha \partial_1 a(x)$ is equal to zero or not.

- (a) If $\partial_2 a(x) - \alpha \partial_1 a(x) = 0$, then \mathcal{D}_1 does not determine a projective D -module M . But we easily find a parametrization $\mathcal{D} : \xi \rightarrow \eta$ defined by:

$$\begin{cases} \partial_2 \xi - a(x) \xi = \eta^1, \\ \partial_2 \xi - \alpha \xi = \eta^2. \end{cases}$$

Thus \mathcal{D}_1 determines a torsion-free but not a projective D -module M .

- (b) If $\partial_2 a(x) - \alpha \partial_1 a(x) \neq 0$, then $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is an injective operator and \mathcal{D}_1 determines a projective D -module M . We let the reader check that

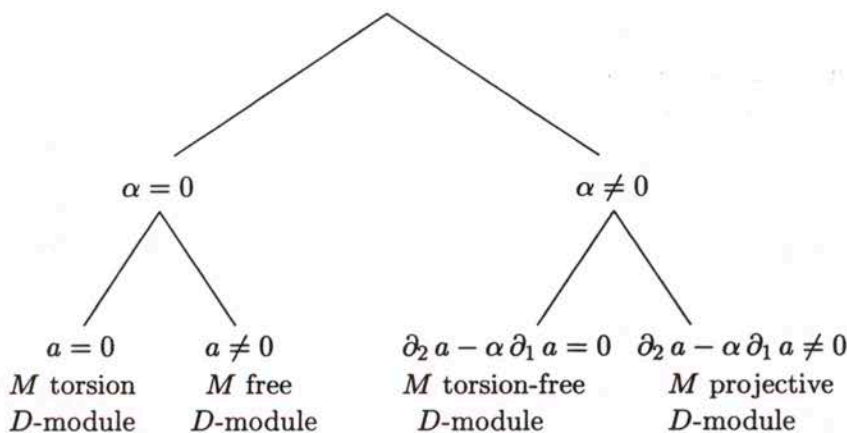
$$\lambda = \frac{\partial_2 \mu_1 + \partial_2 \mu_2 - \alpha \partial_1 \mu_1 + a(x) \mu_1}{\partial_2 a(x) - \alpha \partial_1 a(x)}.$$

If we pose $\phi = \frac{\zeta}{\partial_2 a(x) - \alpha \partial_1 a(x)}$ then $\mathcal{P}_1 : \zeta \rightarrow \eta$ defined by:

$$\begin{cases} -\partial_2 \phi + a(x) \phi = \eta^1, \\ -\partial_2 \phi + \alpha \phi = \eta^2, \end{cases}$$

is a right-inverse of \mathcal{D}_1 .

We can sum up the previous study by the following intrinsic tree of integrability conditions:



3.2. Structural Properties of Linear Control Systems. We now give a mathematical definition of a control system (see [81, 104, 116] for more details).

DEFINITION 3.5. A control system is a system $\mathcal{R}_q \subset J_q(\mathcal{E} \times_X \mathcal{F})$, where $\mathcal{E} \times_X \mathcal{F}$ denotes the fibered product, that is the fibered manifold over X consisting of all elements (u, y) in $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ having the same projection into X . If \mathcal{R}_q is defined by a differential prime ideal \mathcal{I} of $k\{U, Y\}$ (k a differential field), then a control system is the extension $k\langle u, y \rangle = Q(k\{U, Y\}/\mathcal{I})$ over k . We call u the input, y the output. In the linear case, a control system is the D -module M determined by an operator $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$, where a section of F_0 is $\eta = (u, y)$.

3.2.1. *Controllability.* Controllability is one of the key concepts of the control systems theory. Its definition and test for time-varying linear systems go back to Kalman's pioneering work [81]. We recall some recent improvements. See [49, 86, 104, 105, 102, 116, 114, 118] for more details.

We call *observable* any element of M , i.e., any linear combination of the system variables (input and outputs together) and of their derivatives. Only two possibilities may happen for an observable: it may or may not verify a PD equation by itself. An observable which does not satisfy any PD equation is called *free*. In [116], we can find the following definition:

DEFINITION 3.6. A control system is *controllable* iff every observable is free.

A characterization of the controllability in terms of differential closure is shown in [116]. In [104], the definition has been reformulated in the differential module framework:

DEFINITION 3.7. A linear control system is controllable iff it determines a torsion-free D -module.

Hence, using the results of the previous section, we obtain:

COROLLARY 3.3. A linear control system \mathcal{D}_1 is controllable iff it is parametrizable by an operator \mathcal{D}_0 . Hence, the controllability depends at most on two problems of formal integrability and thus at most on two trees of integrability conditions.

We know that a nonlinear control system is controllable if its generic linearization is controllable [114]. However, the linearized control system has variable coefficients, satisfying the nonlinear control system. Hence, we have to build trees of integrability conditions to know whether a nonlinear control system is controllable or not.

EXAMPLE 3.6. Let us consider the system defined by the operator $\tilde{\mathcal{D}}_0$ of the example 7 and let us question about its controllability. We have seen that the module determined by $\tilde{\mathcal{D}}_0$ was a torsion-free D -module, i.e., controllable, if $\partial_2 a(x^2) = c$ and $c \neq 0$. The first condition is a particular branch of a first tree of integrability conditions (formal integrability of \mathcal{D}_0) and the second is another branch of a second tree (formal integrability of $\tilde{\mathcal{D}}_1$) depending on the first tree. Hence, the study of the controllability of that system depends on two trees of formal obstructions (see [117]). Examples of a double trees of formal obstructions to the controllability are very rare.

It is quite often supposed that the inputs are linearly differentially independent, a fact that leads to the surjectivity of the corresponding operator. Then, we have the useful corollary:

COROLLARY 3.4. A surjective OD control system \mathcal{D}_1 is controllable iff its adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is injective. In this case, the controllability depends only on one tree of integrability conditions.

EXAMPLE 3.7. We study the controllability of the system

$$\begin{cases} \ddot{y}^1 + y^1 - y^2 + \alpha u = 0, \\ \ddot{y}^2 + y^2 - y^1 - u = 0, \end{cases}$$

where $\alpha \in \mathbb{R}$. Dualizing the surjective operator \mathcal{D}_1 , we obtain $\tilde{\mathcal{D}}_1$ defined by:

$$\begin{cases} \ddot{\lambda}_1 + \lambda_1 - \lambda_2 = \mu_1, \\ \ddot{\lambda}_2 + \lambda_2 - \lambda_1 = \mu_2, \\ -\lambda_2 + \alpha \lambda_1 = \mu_3. \end{cases}$$

We put $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ and bring this system to formal integrability, we obtain the new equation

$$(\alpha + 1)(\alpha - 1)\lambda_1 = 0$$

and \tilde{D}_1 is injective and thus controllable iff $\alpha \neq -1$ and $\alpha \neq 1$.

See [117] for a more general tree of integrability conditions for an ordinary time-varying control system. We notice that these results show that the controllability is a "built-in" property of a control system that does not depend on the separation of the variables between inputs and outputs, a fact very far from engineering intuition.

3.2.2. *Observability.* Another key concept in control theory is the concept of *observability*. It has been recently reformulated in the D -module framework in [104, 116] as follows:

DEFINITION 3.8. A system of control $M = [\eta', \eta'']$ is said to be *observable* with respect to η' iff $[\eta'] = M$, that is, iff every component of η'' can be expressed as a linear combination of the components of η' and their derivatives.

We can reformulate the above definition, saying that the system \mathcal{M} is observable with respect to η' iff $M/[\eta'] = 0$ or equivalently, in the language of operator theory:

THEOREM 3.4. Let $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ be an operator determining the D -module M and F'_0 be the subbundle of F_0 with sections $(0, \eta'')$, then M is observable with respect to η' if the operator induced $\mathcal{D}'_1 : F'_0 \rightarrow F_1$ is injective.

EXAMPLE 3.8. Let us study the observability of the following system

$$\begin{cases} \partial_{22} z^2 + \partial_{12} z^1 + z^1 - u = 0, \\ \partial_{12} z^2 - \partial_{11} z^1 + z^2 - y = 0, \end{cases}$$

with respect to u and y . Bringing the above system to formal integrability in $z = (z^1, z^2)$, we find that the symbol M_2 is involutive (differentiating with respect to the dot does not bring new equation) and we let the reader check by himself that we obtain:

$$R_2^{(2)} \begin{cases} \partial_{22} z^2 + \partial_{12} z^1 + z^1 = u, \\ \partial_{12} z^2 + \partial_{11} z^1 - z^2 = y, \\ \partial_2 z^2 + \partial_1 z^1 = \partial_1 u - \partial_2 y, \\ z^1 = \partial_{22} u - \partial_{12} y + y, \\ z^2 = \partial_{11} y - \partial_{12} u - u, \end{cases}$$

and the system is observable.

From the above theorem, we only have to study the formal integrability of one system of ODE or PDE and thus we have the following corollary.

COROLLARY 3.5. *The observability of a control system with variable or unknown coefficients only depends on one tree of integrability conditions.*

EXAMPLE 3.9. Let us consider the following control system

$$\begin{cases} \ddot{x}^1 + x^1 - x^2 - u^1 = 0, \\ \ddot{x}^2 + x^2 - x^1 - u^2 = 0, \\ -y - x^2 + \alpha x^1 = 0, \end{cases}$$

where $x = (x^1, x^2)$ is the state, $u = (u^1, u^2)$ the input, y the output and $\alpha \in \mathbb{R}$. This system is observable with respect to (y, u) iff $[x, y, u] = [y, u]$, i.e., if the operator $\mathcal{D}'_1 : x \rightarrow \zeta$ defined by

$$\begin{cases} \ddot{x}^1 + x^1 - x^2 = \zeta^1, \\ \ddot{x}^2 + x^2 - x^1 - u^2 = \zeta^2, \\ -x^2 + \alpha x^1 = \zeta^3, \end{cases}$$

is injective. We recognize that this operator is nothing else than the dual of the operator \mathcal{D}_1 in the preceding example and thus the system is observable iff $\alpha \neq -1$ and $\alpha \neq 1$. If $\alpha \neq -1$ and $\alpha \neq 1$, we have:

$$\begin{cases} x^1 = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha-1)}(\ddot{y} + (1+\alpha)y + u^2 - \alpha u^1), \\ x^2 = \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha-1)}(\ddot{y} + (1+\alpha)y + u^2 - \alpha u^1) - y. \end{cases}$$

Many others properties of the control systems have been reformulated using formal integrability theory [116]. Look also at [33] to have a general view of certain properties of control systems theory that can be tested by effective differential algebraic methods. For example:

- computation of *differential transcendence degree*: we bring the system to be involutive and compute the last character $\alpha_q^n \Rightarrow$ computation of *output rank* \Rightarrow invertibility [33].
- *state elimination*: we bring the system in (z, y, u) to formal integrability in the state z and obtain resultants in u and y which define the input-output behaviour (see example 2).
- *structure at infinity*: we bring the system in (y, u) to formal integrability in u [113], ...

Thus, these properties depend on trees of integrability conditions if the system has variable coefficients.

4. Conclusion

In this article, we have begun to develop a theory of formal elimination for system of PDE, using the formal integrability theory. We hope that we have convinced the reader that this approach seems to be natural for many problems and in particular for linear systems of PDE with variable coefficients. In his paper [137], Seidenberg has given a general solution for this problem based on differential algebraic approach. But, as we have already noticed, the effective character always competes with the intrinsic character. Thus, we think that the formal theory of elimination will give more intrinsic results than the purely differential algebra methods. We have mainly studied the linear case with variable coefficients for its simplicity and also because it gave some nice results in control theory. We shall develop the nonlinear case later on in future papers. We think that an interesting problem should be to revisit Douglas' classification of the inverse problem of the calculus of variations (see [31]) in this modern framework.

5. Compléments

EXEMPLE 5.1. Cet exemple est tiré du papier [117]. On considère le système de contrôle suivant

$$(181) \quad \ddot{y} + \alpha(t)\dot{y} + \alpha(t)y = \ddot{u} - \beta u,$$

où α est un paramètre dépendant du temps et β est une constante. Suivant une idée développée dans [48], on recherche les conditions sur les paramètres α et β pour que le système (181) soit

contrôlable. L'opérateur $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$, correspondant au système, est défini par

$$\ddot{\eta}^1 + \alpha(t)\dot{\eta}^1 + \alpha'(t)\eta^1 - \ddot{\eta}^2 + \beta\eta^2 = \zeta,$$

et son opérateur adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \lambda \rightarrow \mu$ est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \ddot{\lambda} - \beta\lambda = \mu_2, \\ \ddot{\lambda} - \alpha(t)\dot{\lambda} = \mu_1. \end{cases}$$

Nous devons alors rendre le système suivant

$$R_2 \begin{cases} \ddot{\lambda} - \beta\lambda = 0, \\ \alpha(t)\dot{\lambda} - \beta\lambda = 0, \end{cases}$$

formellement intégrable, afin de déterminer dans quelles situations l'opérateur $\tilde{\mathcal{D}}_1$ est injectif. Nous obtenons alors les cas suivants :

1. Si $\alpha(t) = 0$, alors R_2 est défini par

$$\begin{cases} \ddot{\lambda} - \beta\lambda = 0, \\ \beta\lambda = 0. \end{cases}$$

- (a) Si $\beta = 0$, alors R_2 est défini par l'équation $\ddot{\lambda} = 0$ et donc, $\tilde{\mathcal{D}}_1$ n'est pas injectif. Pour ces valeurs des paramètres, le système (181) n'est pas contrôlable.
 - (b) Si $\beta \neq 0$, alors R_2 est défini par l'équation $\lambda = 0$, i.e. $\tilde{\mathcal{D}}_1$ est injectif, d'où le système (181) est contrôlable pour ce jeu de paramètres.
2. Si $\alpha(t) \neq 0$, alors en dérivant la seconde équation de R_2 et en substituant, nous obtenons

$$R_2^{(1)} \begin{cases} \ddot{\lambda} - \beta\lambda = 0, \\ \alpha(t)\dot{\lambda} - \beta\lambda = 0, \\ \beta(\alpha'(t) + \alpha(t)^2 - \beta)\lambda = 0. \end{cases}$$

- (a) Si $\beta = 0$, alors $R_2^{(1)}$ est défini par l'équation $\dot{\lambda} = 0$, et donc $\tilde{\mathcal{D}}_1$ n'est pas injectif. D'où, le système (181) n'est pas contrôlable pour ces valeurs des paramètres.
- (b) Si $\beta \neq 0$, alors :
 - (i) Si $\alpha'(t) + \alpha(t)^2 - \beta = 0$, alors $R_2^{(1)}$ est défini par la seule équation $\alpha(t)\dot{\lambda} - \beta\lambda = 0$, et donc \mathcal{D}_1 n'est pas contrôlable pour ce jeu de paramètres.
 - (ii) Si $\alpha'(t) + \alpha(t)^2 - \beta \neq 0$, alors $R_2^{(1)}$ est défini par $\lambda = 0$, et donc le système (181) est contrôlable.

Finalement, nous obtenons l'arbre de conditions d'intégrabilités suivant.

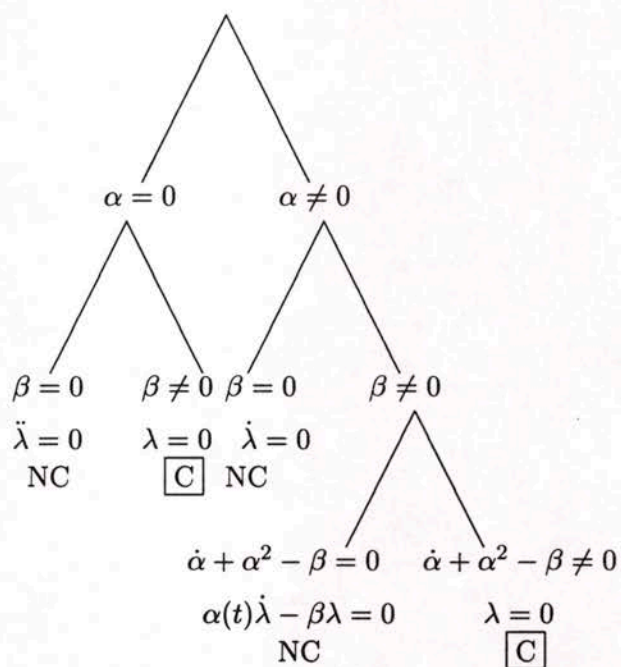


Fig. Arbre de conditions d'intégrabilités

C=contrôlable, NC=non contrôlable

CHAPITRE 8

Analyse algébrique des systèmes de contrôle multidimensionnels

Ce chapitre est composé du papier intitulé "Algebraic Analysis of Linear Multidimensional Control Systems" co-écrit avec J.F. Pommaret et paru dans IMA Journal of Mathematical Control and Information, 16 (1999), pp. 275-297.

Le premier but de ce chapitre est d'établir des liens mathématiques entre les opérateurs différentiels et les modules différentiels. Nous donnons les justifications de certains résultats utilisés dans les chapitres précédents. Cela pourra sembler un peu technique, mais nous pouvons seulement garder à l'esprit les deux résultats fondamentaux suivants [96]:

1. A toute suite de Janet formellement exacte

$$0 \longrightarrow \Theta \longrightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}_{n-1}} F_{n-1} \xrightarrow{\mathcal{D}_n} F_n \longrightarrow 0$$

correspond la résolution libre suivante du $D = K[d_1, \dots, d_n]$ -module M à gauche:

$$0 \longrightarrow D^{l_n} \xrightarrow{\mathcal{D}_n} D^{l_{n-1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow D^{l_1} \xrightarrow{\mathcal{D}_1} D^{l_0} \xrightarrow{\mathcal{D}_0} D^m \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

2. A tout $D = K[d_1, \dots, d_n]$ -module à droite N_r , défini par $0 \longleftarrow N_r \longleftarrow D^l \xleftarrow{\mathcal{D}_0} D^m$, correspond un D -module à gauche N_l , défini par

$$0 \longleftarrow N_l \longleftarrow \wedge^n T \otimes_K D^l \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_0} \wedge^n T \otimes_K D^m,$$

où $\tilde{\mathcal{D}}_0$ est l'adjoint formel de l'opérateur \mathcal{D}_0 et $T = D_1/D_0$ est le K -module muni du crochet $[P, Q] = P \circ Q - Q \circ P$, $\forall P, Q \in D$, où $\{D_r\}_{r \geq 0}$ est la filtration par l'ordre de D . Ainsi, nous obtenons:

$$\text{ext}_D^i(N_r, D) = \wedge^n T^* \otimes_K \text{ext}_D^i(N, D), \quad T^* = \text{hom}_K(T, K).$$

Le second but de ce chapitre est d'étudier en détail les différents types de primalités des systèmes multidimensionnels qui ont été longuement étudiés dans les années 70-90. Voir par exemple [18, 19, 63, 64, 99, 163, 164]. Rappelons les définitions suivantes.

DÉFINITION 0.1. Soit R est une matrice $q \times p$ ($q \leq p$), de rang générique q , à coefficients dans l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[\chi_1, \dots, \chi_n]$, alors on dit que R est:

- première au sens des mineurs, s'il n'existe pas de facteur commun entre tous les mineurs d'ordre q ,
- faiblement première au sens des zéros, si les mineurs d'ordre q s'annulent tous seulement en un nombre fini de points,
- première au sens des zéros, s'il n'y a aucun zéro commun entre les mineurs d'ordre q .

Récemment, l'utilisation des modules a permis une meilleure compréhension de ces notions [44, 104, 160]. Nous donnons dans ce chapitre une classification générale de ces différentes notions de primalités, ainsi que des tests effectifs pour les vérifier. Ces résultats sont basés sur deux théorèmes de l'analyse algébrique, démontrés par Kashiwara dans [85], qui s'inspirent des travaux de Palamodov [106] traitant le cas des opérateurs différentiels à coefficients constants.

Les troisième but de ce chapitre est de montrer comment utiliser la variété caractéristique et le support des modules dans l'étude des pôles et des zéros d'un système multidimensionnel.

ALGEBRAIC ANALYSIS OF LINEAR MULTIDIMENSIONAL CONTROL SYSTEMS

Abstract The purpose of this paper is to show how to use the modern methods of algebraic analysis in partial differential control theory, when the input/output relations are defined by systems of partial differential equations in the continuous case or by multi-shift difference equations in the discrete case. The essential tool is the duality existing between the theory of differential modules or D -modules and the formal theory of systems of partial differential equations. We reformulate and generalize many formal results that can be found in the extensive literature on multidimensional systems (controllability, primeness concepts, poles and zeros, ...). All the results are presented through effective algorithms.

Keywords: Control theory, primeness, poles and zeros, multidimensional systems, algebraic analysis, extension functor, Janet conjecture, formal theory of partial differential equations, duality, homological algebra, commutative algebra, noncommutative algebra.

1. Introduction

In 1963, R.E. Kalman related, in [83], the controllability of a linear ordinary differential control system, with constant coefficients, of the form $\dot{y} = Ay + Bu$, to the full row rank of the controllability matrix $(B, AB, \dots, A^{m-1}B)$, where m is the number of outputs y . In 1969, this criterion was shown by Hautus [65] to be equivalent to the full row rank of the matrix $(A - \chi I, B)$ for all values of the indeterminate χ in an attempt to study the transfer matrix $(\chi I - A)^{-1}B$. Then, more general polynomial systems of the form $D(\chi)y = N(\chi)u$, with D a non degenerate square matrix, were considered in attempt to study the transfer matrix $D(\chi)^{-1}N(\chi)$. In particular, left-coprimeness conditions for the matrices D and N were given for multi-input/multi-output (MIMO) systems generalizing the case of single input/single output (SISO) systems, where common factors of D (denominator) and N (numerator) could disappear in the transfer function [81]. One must notice that the Kalman criterion came from an explicit integration by means of exponential of matrices, which is not easily available in the general case. Little by little, the preceding condition for D and N separately has been reformulated for the full matrix $(D, -N)$ in terms of Bezout identity, a result showing that controllability is a built-in property of the control system, not depending on the separation of the variables between inputs and outputs. Meanwhile, a few people tried to extend these results to matrices over polynomial ring $k[\chi] = k[\chi_1, \dots, \chi_n]$ in n indeterminates over a field k of constants or to operator matrices with variable coefficients [46, 86, 104, 105, 163, 164, 160, 168]. It was soon discovered that the case $n = 1$, where $k[\chi]$ is a principal ideal ring, should be distinguished with care from the case $n = 2$ and $n \geq 3$ [163, 168]. It is only recently that people paid attention to algebraic analysis, pioneered by V.P. Palamodov [106] for the constant coefficients case and by M. Kashiwara [85] for the general case. We quote in particular the very recent work of U. Oberst [104] showing that a control system is controllable if and only if the corresponding differential module is torsion-free. See also [38, 39, 41].

In this paper, the mathematical results are not new and we provide all corresponding references as their homological proofs are often awfully delicate. However, the applications to control

are quite new. In particular, the main purpose of this paper is to combine the formal theory of differential operators with that of differential modules and a description by extension functors in order to avoid the introduction of signals spaces, while recovering and generalizing most of the results previously quoted. As the two main ingredients are the construction of differential sequences for which symbolic computer packages will be soon available on the one hand and the construction of formal adjoint of operators on the other hand, we can say that the techniques, presented in this paper, lead to effective algorithms.

In view of the amount of mathematical tools needed in order to understand algebraic analysis, we suppose that the reader has a basic familiarity with differential sequences or resolutions and their use for defining the extension functor [73, 103, 135].

2. Algebraic Analysis

Let us start by recalling and giving some algebraic results which will be useful for the rest of the paper. For more details, we refer the reader to [73, 103, 132, 135, 139].

2.1. D -modules.

DEFINITION 2.1. A *differential ring* A with n commuting derivations $\partial_1, \dots, \partial_n$ is a ring which satisfies $\forall a, b \in A, \forall i, j = 1, \dots, n$:

- $\partial_i a \in A$,
- $\partial_i(a + b) = \partial_i a + \partial_i b$,
- $\partial_i(ab) = (\partial_i a)b + a \partial_i b$,
- $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$.

For applications, the differential ring A will either be a differential field K containing \mathbb{Q} or its subfield of constants $k = \text{cst}(K) = \{a \in K \mid \forall i = 1, \dots, n : \partial_i a = 0\}$. If d_1, \dots, d_n are n commuting formal derivative operators, we shall introduce the noetherian ring $D = A[d] = A[d_1, \dots, d_n]$ of differential operators. Any element of D has the form $P = \sum_{0 \leq |\mu| \leq q} a^\mu d_\mu$, where $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ is a multi-index with length $|\mu| = \mu_1 + \dots + \mu_n$, $a^\mu \in A$ and $d_\mu = (d_1)^{\mu_1} \dots (d_n)^{\mu_n}$. The ring D is a non-commutative integral domain which satisfies

$$\forall a, b \in A : ad_i(bd_j) = ab d_i d_j + a(\partial_i b) d_j,$$

and possesses the left (right) Ore property:

$$\forall (P, Q) \in D^2, \exists (U, V) \in (D \setminus 0)^2 \text{ such that } UP = VQ \text{ (} PU = QV \text{)}.$$

EXAMPLE 2.1. The field of rational functions $\mathbb{R}(t)$ is a differential field with derivation $\frac{d}{dt}$. Indeed, $\forall a(t), 0 \neq b(t) \in \mathbb{R}(t)$, we have:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a(t)}{b(t)} \right) = \frac{\dot{a}(t)b(t) - a(t)\dot{b}(t)}{b^2(t)} \in \mathbb{R}(t).$$

Let $D = \mathbb{R}(t)[\frac{d}{dt}]$ be the non-commutative ring of linear operators with coefficients in $\mathbb{R}(t)$. Any element $P \in D$ has the form $P = \sum_{0 \leq i \leq q} a_i(t) (\frac{d}{dt})^i$, with $a_i \in \mathbb{R}(t)$.

In the case of constant coefficients, one can identify the ring of multi-shift difference operators and the ring of differential operators with the commutative ring of polynomial in many indeterminates. This is the reason why we shall no longer refer to the multi-shift difference situation.

In the general case, as D is a non-commutative ring, we define the notion of filtration and gradation in order to pass from the non-commutative ring D to the commutative ring $\text{gr}(D)$ and thus to use all the results and techniques developed in the commutative case, for the non-commutative one [7, 93, 107]. Moreover, the ring of differential operators $D = A[d]$ looks like a polynomial ring and thus we may like to generalize the well-known notion of degree of a polynomial to a differential operator in D . This can be done by introducing the notion of graded ring. For more details, see [7, 93, 107].

DEFINITION 2.2. A *filtration* of an A -algebra D is a sequence of A -modules $\{D_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ satisfying:

1. $0 = D_{-1} \subseteq D_0 \subseteq D_1 \subseteq \dots \subseteq D$,
2. $\cup_{r \geq 0} D_r = D$,
3. $D_r D_s \subseteq D_{r+s}$.

The *associated graded* A -algebra $\text{gr}(D)$ of D is defined by:

1. $\text{gr}(D) = \oplus_{r \in \mathbb{N}} D_r / D_{r-1}$,
2. $\forall \bar{P} \in D_r / D_{r-1}, \forall \bar{Q} \in D_s / D_{s-1} : \overline{PQ} = \overline{P} \bar{Q} \in D_{r+s} / D_{r+s-1}$.

D_r / D_{r-1} is called the *homogeneous component of degree r* of D .

EXAMPLE 2.2. The sequence of A -modules $D_r = \{\sum_{0 \leq |\mu| \leq r} a^\mu d_\mu, a^\mu \in A\}$ is a filtration of $D = A[d_1, \dots, d_n]$. In particular, we have $D_0 = A \subset D$ and thus D_r is a free left A -module with basis $\{d_\mu, 0 \leq |\mu| \leq r\}$. In the next sections, D_r will always refer to this filtration and we shall endow $T = D_1 / D_0$ with a bracket induced by the filtration of D , namely $[P, Q] = P \circ Q - Q \circ P, P, Q \in D$.

PROPOSITION 2.1. *The natural morphism*

$$D_r / D_{r-1} \ni \begin{matrix} \text{gr}(D) & \longrightarrow & A[\chi_1, \dots, \chi_n] \\ \sum_{|\mu|=r} a^\mu d_\mu & \longmapsto & \sum_{|\mu|=r} a^\mu \chi_\mu \end{matrix}$$

is an isomorphism of A -algebra.

DEFINITION 2.3. Let M be a D -module where D admits the filtration $\{D_r\}_{r \in \mathbb{N}}$. A family $\{M_q\}_{q \in \mathbb{N}}$ of A -modules is a filtration of M if

1. $0 = M_{-1} \subseteq M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M$,
2. $\cup_{q \in \mathbb{N}} M_q = M$,
3. $D_r M_q \subseteq M_{q+r}$.

The *associated graded* $\text{gr}(D)$ -module $G = \text{gr}(M)$ is then defined by:

1. $G = \oplus_{q \in \mathbb{N}} G_q$, with $G_q = M_q / M_{q-1}$,
2. $\forall \bar{P} \in D_r / D_{r-1}, \forall \bar{m} \in M_q / M_{q-1} : \overline{Pm} = \overline{P} \bar{m} \in M_{q+r} / M_{q+r-1}$.

We have the short exact sequence:

$$(182) \quad 0 \longrightarrow M_{q-1} \longrightarrow M_q \longrightarrow G_q \longrightarrow 0.$$

DEFINITION 2.4. A filtration $\{M_q\}_{q \in \mathbb{N}}$ of a D -module M is called a *good filtration* if it satisfies one of the following equivalent conditions:

1. $\forall q \in \mathbb{N}, M_q$ is finitely generated over A and there exists $p \in \mathbb{N}$ such that:

$$D_r M_p = M_{p+r}, \quad r \geq 0,$$

2. G is a finitely generated $\text{gr}(D)$ -module.

EXAMPLE 2.3. 1. Let M be a finitely generated D -module with the set of generators $\{e_1, \dots, e_m\}$. Then, the filtration $M_q = \sum_{i=1}^m D_q e_i$ is a good filtration as we have $G = \sum_{i=1}^m \text{gr}(D) e_i$, and thus G is finitely generated over $\text{gr}(D)$ by $\{e_1, \dots, e_m\}$.
 2. Let $M = D$ be the left D -module and let $(M_q = D_{2q})_{q \in \mathbb{N}}$ be a filtration of M . Then, we have $D_r M_q = D_r D_{2q} \subseteq D_{2q+r} \subsetneq D_{2(q+r)} = M_{r+q}$ and thus $(D_{2q})_{q \in \mathbb{N}}$ is not a good filtration of D .

PROPOSITION 2.2. Let M be a left D -module, then M admits a good filtration if and only if M is finitely generated over D . Moreover, if M has a good filtration, then

1. Any submodule M' of M has a good filtration, defined by $M'_q = M_q \cap M'$ and M' is finitely generated over D .
2. Any quotient M'' of M has a good filtration, defined by the image of the filtration of M onto the projection $M \rightarrow M'' \rightarrow 0$.
3. If $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ is a short exact sequence of filtered modules then we have the short exact sequence $0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$, where the associated graded modules $G' = \text{gr}(M')$, $G = \text{gr}(M)$ and $G'' = \text{gr}(M'')$ are defined with respect to the above induced filtrations.

Now, using the graded module $\text{gr}(M)$ over the commutative ring $\text{gr}(D)$, instead of the D -module M , we can use the results of algebraic geometry to give an intrinsic definition of the dimension of a module M .

DEFINITION 2.5. Let M be a finitely generated D -module with a good filtration and let $G = \text{gr}(M)$ be its associated graded $\text{gr}(D)$ -module, then the ideal $I(M) = \sqrt{\text{ann}(G)} = \{a \in \text{gr}(D) \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n G = 0\}$ does not depend on the filtration of M and we introduce the *characteristic set* $\text{char}(M) = V(I(M)) = \{\mathfrak{p} \in \text{spec}(\text{gr}(D)) \mid \sqrt{\text{ann}(G)} \subseteq \mathfrak{p}\}$, where $\text{spec}(\text{gr}(D))$ is the set of proper prime ideals of $\text{gr}(D)$.

The previous definition and proposition lead to the following one [7, 93, 107].

PROPOSITION 2.3. Let M be a finitely generated left D -module admitting a good filtration, then

1. For r large enough, there exists a unique Hilbert polynomial H_M such that $\dim(M_r) = H_M(r) = \frac{m}{d!} r^d + \dots$, where d is the degree of the polynomial. The degree $d = d(M)$ is called the dimension of M , the coefficient $m = m(M)$ is the multiplicity of M and they do not depend on the good filtration.
2. If $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ is an exact sequence of finitely generated filtered modules then
 - (a) $\text{char}(M) = \text{char}(M') \cup \text{char}(M'')$,

- (b) $H_M = H_{M'} + H_{M''}$ and thus $d(M) = \max(d(M'), d(M''))$ and if $d(M') = d(M'')$ then $m(M) = m(M') + m(M'')$.

In the next section, we shall see how to compute effectively the Hilbert polynomial and thus the dimension and the multiplicity of a D -module M . Now, let us give some basic definitions of properties of modules that will be at the core of this paper [8, 85].

- DEFINITION 2.6. – A D -module M is *free* if there are elements of M which generate M and which form an independant family over D .
- A D -module M is *projective* if there exist a free D -module F and a D -module N such as: $F = M \oplus N$. Hence, the module N is also a projective D -module.
 - A D -module M is *reflexive* if $M \cong \text{hom}_D(\text{hom}_D(M, D), D)$.
 - A D -module M is *torsion-free* if $t(M) = \{m \in M \mid \exists p \neq 0, pm = 0\} = 0$. We call $t(M)$ the *torsion submodule* of M . In any case, $M/t(M)$ is a torsion-free D -module.

If D is a principal ideal ring (i.e. any ideal of D is only generated by one element of D), then any torsion-free module is free and if $A = k$ then, using the Quillen-Suslin theorem [135, 164], any finitely generated projective module is free. Moreover, it follows immediately from (182) that M is torsion-free (reflexive, projective, free) whenever G is torsion-free (reflexive, projective, free). The converse is not true.

EXAMPLE 2.4. The SISO system $\dot{y} - y - u = 0$ is torsion-free while the graded part $\dot{y} = 0$ is not torsion-free.

2.2. Differential Operators. Let X be a differential manifold of dimension n with local coordinates $x = (x^1, \dots, x^n)$ and structural ring $A = C^\infty(X)$. We denote by $T = T(X)$ the tangent bundle of X and by $T^* = T^*(X)$ the cotangent bundle of X . By $S_q T^*, \wedge^r T^*$ we shall mean the q^{th} symmetric product of T^* , the r^{th} exterior product of T^* . Let E be a vector bundle of fiber dimension m over X , with local coordinates (x, y) , with $y = (y^1, \dots, y^m)$ and we notice that E is a left A -module. Following [96, 144], we shall use the same notation E for a vector bundle and for its sheaf of germs of sections. We consider the vector bundle $J_q(E)$ of q -jets of E . Its fiber at $x \in X$ is the quotient of the space of germs of sections of E at x by the subspace of germs of sections which vanish up to order q at x ($f, g \in J_q(E)_x \Leftrightarrow \partial_\mu f(x) = \partial_\mu g(x), 0 \leq |\mu| \leq q$). We identify $J_0(E)$ with E and we denote the projection of $J_q(E)$ onto X by π and the projection of $J_q(E)$ onto $J_{q-1}(E)$ by π_{q-1}^q . If ξ is a section of E , we denote by $j_q(\xi)(x)$ the equivalence class of germs of ξ at x . We have the following exact sequence [60, 113, 144]:

$$(183) \quad 0 \longrightarrow S_q T^* \otimes E \longrightarrow J_q(E) \xrightarrow{\pi_{q-1}^q} J_{q-1}(E) \longrightarrow 0.$$

Let us recall a few definitions (see [60, 96, 113, 144] for more details).

DEFINITION 2.7. Let F be a vector-bundle over X , of fiber dimension l .

1. A *differential operator* $\mathcal{D} = \Phi \circ j_q : E \rightarrow F$ of order q is given by a bundle morphism $\Phi : J_q(E) \rightarrow F$, where we may suppose that Φ is surjective.
2. The r -prolongation of Φ is the unique bundle morphism $\rho_r(\Phi) : J_{q+r}(E) \rightarrow J_r(F)$ such that $\rho_r(\Phi) \circ j_{q+r} = j_r \circ \mathcal{D} = j_r \circ \Phi \circ j_q$.

3. If the kernel $R_q \subseteq J_q(E)$ of Φ is a vector bundle, we say that the system of partial differential (PD) equations R_q is defined by \mathcal{D} and a solution of R_q is a local section ξ of E , over an open set $U \subset X$, such that $j_q(\xi)(x) \in R_q, \forall x \in U$.
4. The r^{th} prolongation R_{q+r} of R_q is the kernel of $\rho_r(\Phi)$.
5. We denote by $R_{q+r}^{(s)}$ the projection of R_{q+r+s} onto $J_{q+r}(E)$, i.e., $R_{q+r}^{(s)} = \pi_{q+r}^{q+r+s}(R_{q+r+s})$.
6. Using the sequence (183) and the definition of the r -prolongation of Φ , we obtain the induced map $\sigma_r(\Phi) : S_{q+r}T^* \otimes E \rightarrow S_rT^* \otimes F$. We denote by g_{q+r} the kernel of σ_r and we call it *the symbol* of R_{q+r} . We easily see that $g_{q+r} = R_{q+r} \cap S_{q+r}T^* \otimes E$.

To help the reader, we provide the local coordinates expressions of the above concepts. The bundle morphism Φ defined by

$$\begin{aligned} \Phi : J_q(E) &\longrightarrow F \\ (x, y_\mu^k) &\longmapsto (x, \sum_{0 \leq |\mu| \leq q, 1 \leq k \leq m} a_k^{\tau\mu}(x) y_\mu^k), \end{aligned}$$

with $1 \leq \tau \leq l$, gives rise to the differential operator \mathcal{D} defined by:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : E &\longrightarrow F \\ (x, \xi^k(x)) &\longmapsto (x, \eta(x)^\tau = \sum_{0 \leq |\mu| \leq q, 1 \leq k \leq m} a_k^{\tau\mu}(x) \partial_\mu \xi^k(x)), \end{aligned}$$

with $\tau = 1, \dots, l$. The system R_q , defined by the differential operator \mathcal{D} , is given by:

$$\sum_{0 \leq |\mu| \leq q, 1 \leq k \leq m} a_k^{\tau\mu}(x) y_\mu^k = 0, 1 \leq \tau \leq l.$$

The map $\sigma_r(\Phi)$ is then defined by:

$$\begin{aligned} \sigma_r(\Phi) : S_{q+r}T^* \otimes E &\longrightarrow S_rT^* \otimes F \\ (x, v_{\mu+\nu}^k, |\mu| = q, |\nu| = r) &\longmapsto (x, \sum_{|\mu|=q, |\nu|=r, 1 \leq k \leq m} a_k^{\tau\mu}(x) v_{\mu+\nu}^k). \end{aligned}$$

Now, the Spencer δ -sequence is defined by

$$\Lambda^s T^* \otimes g_{q+r+1} \xrightarrow{\delta} \Lambda^{s+1} T^* \otimes g_{q+r},$$

with $(\delta(\omega))_\mu^k = dx^i \wedge \omega_{\mu+1_i}^k$, where $\omega = (v_{\nu,I}^k dx^I) \in \Lambda^s T^* \otimes g_{q+r+1}, \nu = \mu + 1_i, dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_s}$, for $I = \{i_1, \dots, i_s\}$ with $i_1 < \dots < i_s$ and $|\mu| = q+r$ (see [60, 113, 144] for more details). We easily check that $\delta \circ \delta = 0$. The resulting cohomology at $\Lambda^s T^* \otimes g_{q+r}$ is denoted by $H_{q+r}^s(g_q)$.

DEFINITION 2.8. The symbol g_q of R_q is said to be *s-acyclic* if $H_{q+r}^1 = \dots = H_{q+r}^s = 0, \forall r \geq 0$. The symbol g_q is *involutive* if it is *n-acyclic*. In particular, every system R_q of ordinary differential equations (ODE) has an involutive symbol. A symbol g_q is *of finite type* if $\exists r \geq 0$ such that $g_{q+r} = 0$.

One can prove that the symbol g_q of a system R_q is such that g_{q+r} becomes involutive for r large enough. If g_q is an involutive symbol, we may define integers α_q^i called *characters* of g_q such that

$$\dim g_{q+r} = \sum_{i=1}^n \frac{(r+i-1)!}{r!(i-1)!} \alpha_q^i, \forall r \geq 0,$$

and the following relations are satisfied:

1. $\dim g_q = \alpha_q^1 + \dots + \alpha_q^n$,

- 2. $\alpha_q^1 \geq \alpha_q^2 \geq \dots \geq \alpha_q^n \geq 0,$
- 3. $0 \leq \alpha_q^n \leq m.$

DEFINITION 2.9. A system R_q is said to be *formally integrable* if $\forall r, s \geq 0, R_{q+r}$ is a vector bundle and the projection $\pi_{q+r}^{q+r+s} : R_{q+r+s} \rightarrow R_{q+r}$ is surjective. A system R_q is *involutive* if R_q is formally integrable and has an involutive symbol g_q .

If Φ is sufficiently regular, then R_{q+r} are vector bundles for any $r \geq 0$ and if R_q is formally integrable, then we have the exact sequences for $r \geq 0$:

$$(184) \quad 0 \rightarrow g_{q+r} \rightarrow R_{q+r} \xrightarrow{\pi_{q+r}^{q+r-1}} R_{q+r-1} \rightarrow 0.$$

COROLLARY 2.1. *If the system R_q is an involutive system, then*

$$\dim(R_{q+r}) = \dim(R_{q-1}) + \sum_{i=1}^n \frac{(r+i)!}{r! i!} \alpha_q^i = \frac{\alpha_q^n}{n!} r^n + \dots,$$

where R_{q-1} is the projection of R_q onto $J_{q-1}(\mathcal{E})$.

Accordingly, formal solutions of the system R_q depend on α_q^1 functions of x^1, α_q^2 functions of $(x^1, x^2), \dots,$ and α_q^n functions of $(x^1, \dots, x^n),$ a result leading to the famous Cartan-Kähler-Janet theorem in the analytic case [74, 113].

If the system R_q is not formally integrable, then, by adding sufficiently enough equations, we can bring the system R_q to be a formally integrable system $R_{q+r}^{(s)}$ with the same solutions, by means of a finite algorithm [60, 113]. The knowledge of the latter system, which is the finite substitute for $R_\infty = \rho_\infty(R_q),$ is essential for studying the formal properties of the given system and of the corresponding differential module.

DEFINITION 2.10. Let $\mathcal{D} : E \rightarrow F$ be an involutive operator, then there exist n new first order involutive operators $\mathcal{D}_i : F_{i-1} \rightarrow F_i,$ with $F_0 = F,$ such that the following sequence

$$E \xrightarrow{\mathcal{D}} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}_n} F_n \rightarrow 0,$$

is *strictly exact,* i.e., the operator \mathcal{D}_i generates all the compatibility conditions of \mathcal{D}_{i-1} and the sequence is exact at any order on the jet level. This sequence is called the *Janet sequence* of $\mathcal{D}.$

2.3. Duality. Using coordinates (x, y) for $E,$ we may identify $Dy = Dy^1 + \dots + Dy^m$ with $D^m.$ We shall denote by J_q the bundle of q -jets of the trivial vector bundle $X \times \mathbb{R}.$ As the transitions laws of $J_q(E)$ are obtained from the coordinates changes $\bar{y} = a(x)y$ of E by differentiating up to order $q,$ in case of a single y and $a \in A,$ we may obtain a right A -module structure on $J_q.$ Comparing now the two formal relations at first order

$$\begin{aligned} \bar{y}_i &= a y_i + (\partial_i a)y \\ d_i \otimes \bar{y} &= d_i \otimes a y \\ &= d_i a \otimes y \\ &= (a d_i + \partial_i a) \otimes y \\ &= a d_i \otimes y + \partial_i a \otimes y, \end{aligned}$$

we obtain therefore by prolongation the identification $J_q(E) = J_q \otimes_A E$, where E is equipped with its left A -module structure, while J_q is equipped with the above right A -module structure [96]. The duality between differential geometry and differential algebra is obtained by setting

$$J_q^* = \text{hom}_A(J_q, A) = D_q \Rightarrow J_q(E)^* = D_q(E) = D_q \otimes_A E^*,$$

whenever (X, A) is a ringed space [96] (see also the introduction of [85] and [62]). Such a result explains the multi-index contraction $\sum a^\mu y_\mu$ whenever the operator $\sum a^\mu d_\mu$ is applied to the single differential indeterminates y . Accordingly, we can define a differential module M by the cokernel in the exact sequence of modules:

$$D \otimes_A F^* \rightarrow D \otimes_A E^* \rightarrow M \rightarrow 0,$$

or simply

$$D^l \rightarrow D^m \rightarrow M \rightarrow 0,$$

in the trivial case, if $\dim(E) = m$, $\dim(F) = l$. Hence, from the exactness of the contravariant functor $\text{hom}_A(\cdot, A)$, we obtain the exact sequence $0 \rightarrow R_\infty \rightarrow J_\infty(E) \rightarrow J_\infty(F)$, where $R_\infty = \rho_\infty(R_q) = \text{hom}_A(M, A)$ (see [62] and [96]), and the main difficulty is that certain properties of M , using inductive limits, are not easily interpreted as properties of R_∞ , using projective limits and vice-versa. When \mathcal{D} is involutive and sufficiently regular, we notice that a canonical finite resolution of the sheaf Θ of solutions of \mathcal{D} , is of the form of the Janet sequence with $F = F_0$, $\dim(F_r) = l_r$ and $\dim(E) = m$,

$$(185) \quad 0 \rightarrow \Theta \rightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}_n} F_n \rightarrow 0,$$

where \mathcal{D}_i represents all the compatibility conditions of \mathcal{D}_{i-1} . The sequence (185) provides, by duality, a finite free resolution of M [73, 103, 135]:

$$(186) \quad 0 \leftarrow M \leftarrow D^m \xleftarrow{\mathcal{D}} D^{l_0} \xleftarrow{\mathcal{D}_1} D^{l_1} \xleftarrow{\mathcal{D}_2} \dots \xleftarrow{\mathcal{D}_n} D^{l_n} \leftarrow 0,$$

The problem is to study the properties of a $m \times l$ -matrix, acting on column vectors on the right, in the operator sense or on row vectors on the left, in the module sense. Accordingly, a preliminary problem for being able to deal equivalently with \mathcal{D} or with M is to bring effectively \mathcal{D} or R_q to formal integrability or even to involutiveness, in such a way that $R_q = M_q^* = \text{hom}_A(M_q, A)$ and $g_q = G_q^* = \text{hom}_A(G_q, A)$. In that case, the sequence (184) for $r = 0$ is the dual with respect to $\text{hom}_A(\cdot, A)$ of the sequence (182) if \mathcal{D} has coefficients in A , and E, F are trivial bundles. This result provides an effective way to compute the Hilbert polynomial and to justify the comment after proposition 3. Indeed, we have defined an algebraic set over k or K , namely the characteristic set $\text{char}(M) = \text{supp}(G)$ of M as the *support* of G , namely the set of prime ideals of $\text{gr}(D)$, containing the annihilator $\text{ann}(G)$ of $G = \text{gr}(M)$. Keeping the word variety for an irreducible algebraic set, we notice that the dimension $\dim(M) = d(M)$ of the D -module M is the maximum dimension over an algebraic closure of k or K of the varieties corresponding to the minimum prime ideals in $\text{char}(M)$, i.e., the degree d of the Hilbert polynomial H_M . Equivalently, to avoid dealing with many irreducible components, the Hilbert-Serre theorem says that $d(M)$ is equal to the maximum number of non-zero characters α_q^i [139]. We denote by $\text{cd}(M) = n - d(M)$ the *codimension* of $\text{char}(M)$.

It is important to notice that the dualities $\text{hom}_A(\cdot, A)$ and $\text{hom}_D(\cdot, D)$ that will be systematically used in this paper can lead to effective computations and provide a formal interpretation of the behavioural approach used by Oberst [104, 105] and Willems [159].

We present the *extension functor* in the operator language (see [73, 103, 135] for a module approach). If $\mathcal{D} : E \rightarrow F$ is a differential operator of order q , we denote by $\text{ad}(\mathcal{D}) = \tilde{\mathcal{D}} : \tilde{F} = \wedge^n T^* \otimes F^* \rightarrow \tilde{E} = \wedge^n T^* \otimes E^*$, the *formal adjoint* of \mathcal{D} . The operator $\tilde{\mathcal{D}}$ is of the same order than \mathcal{D} , with coefficients in A . The formal adjoint $\tilde{\mathcal{D}} : \tilde{F} \rightarrow \tilde{E}$ can be easily computed by using the following three rules:

- The adjoint of a matrix (zero order operator) is the transposed matrix.
- The adjoint of ∂_i is $-\partial_i$.
- For two linear PD operators P, Q that can be composed: $\widetilde{P \circ Q} = \tilde{Q} \circ \tilde{P}$.

Moreover, we have the following relation

$$\langle \mu, \mathcal{D} \xi \rangle = \langle \tilde{\mathcal{D}} \mu, \xi \rangle + d(\cdot),$$

with d the exterior derivative. We easily check that :

$$\tilde{\tilde{\mathcal{D}}} = \mathcal{D}.$$

We compute the adjoint of an operator by multiplying it by test functions on the left and integrating the result by part, as we could do for distributions.

It is important to notice firstly that $\tilde{\mathcal{D}}$ may not be formally integrable when \mathcal{D} is formally integrable and secondly that $\tilde{\mathcal{D}}_r$ may not generate all the compatibility conditions of $\tilde{\mathcal{D}}_{r+1}$ in the adjoint of the Janet sequence (185). Let us give an example.

EXAMPLE 2.5. We take the operator $\mathcal{D} : \xi \rightarrow \eta$ defined on sections, by

$$\begin{cases} \partial_{12} \xi = \eta^1, \\ \partial_{22} \xi = \eta^2, \end{cases}$$

and we easily see that the compatibility condition of \mathcal{D} is the operator $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$, defined by $\partial_1 \eta^2 - \partial_2 \eta^1 = \zeta$. Then, the adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \lambda \rightarrow \mu$ of \mathcal{D}_1 is given by:

$$\begin{cases} \partial_2 \lambda = \mu_1, \\ -\partial_1 \lambda = \mu_2. \end{cases}$$

The compatibility condition of $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \mu \rightarrow \nu$ is defined by the operator $\partial_1 \mu_1 + \partial_2 \mu_2 = \nu$, which is not the adjoint $\tilde{\mathcal{D}}$ of the operator \mathcal{D} , defined by $\partial_{12} \mu_1 + \partial_{22} \mu_2 = \nu$.

One can roughly say that $\text{ext}_D^r(M, D)$ measures the defect of exactness at \tilde{F}_{r-1} in the adjoint sequence. However, as $\text{ext}_D^r(M, D)$ does not depend on the presentation of M , the previous definition by means of the Janet sequence is, by far, the best one though one could use the second Spencer sequence too (another finite free resolution of the sheaf Θ of solutions of \mathcal{D}) [96, 113, 144], namely (do not confuse among standard notations)

$$(187) \quad 0 \rightarrow \Theta \xrightarrow{j_q} C_0 \xrightarrow{D_1} C_1 \xrightarrow{D_2} \dots \xrightarrow{D_n} C_n \rightarrow 0,$$

and one could measure the defect of exactness at \tilde{C}_r by dealing only with first order operators D_r though with many more unknowns (take for example $E = T, F = \wedge^n T^*$ and for \mathcal{D} the divergence operator).

The first key result of algebraic analysis is the following theorem relating the vanishing of the extension functor to the codimension of the characteristic set [85, 106].

THEOREM 2.1. $\text{cd}(M) \geq r \Leftrightarrow \text{ext}_D^i(M, D) = 0, \forall i < r$.¹

The second key result, instead of looking for the compatibility conditions \mathcal{D}_1 of a differential operator \mathcal{D} , deals with the converse problem of looking for a potential-like expression of \mathcal{D} , namely to know whether one can find an operator $\mathcal{D}_{-1} : E_{-1} \rightarrow E_0 = E$ such that \mathcal{D} generates all the compatibility conditions of \mathcal{D}_{-1} [85, 106]. For example, one may keep in mind the Poincaré sequence for the exterior derivative. If there exists such an operator \mathcal{D}_{-1} , we say that the operator \mathcal{D} is parametrized by \mathcal{D}_{-1} .

THEOREM 2.2. *There exists a sequence of differential operators*

$$E_{-r} \xrightarrow{\mathcal{D}_{-r}} E_{-r+1} \xrightarrow{\mathcal{D}_{-r+1}} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}_{-2}} E_{-1} \xrightarrow{\mathcal{D}_{-1}} E_0 \xrightarrow{\mathcal{D}} F,$$

where each operator generates all the compatibility conditions of the preceding one, if and only if $\text{ext}_D^i(N, D) = 0, \forall i = 1, \dots, r$ whenever N is the differential module determined by the operator $\tilde{\mathcal{D}}$, exactly as M was determined by \mathcal{D} .

Taking into account the fact that the ext modules do not depend on a chosen resolution, the above conditions can be checked effectively as we just need to construct the adjoint operator, find a sequence of compatibility conditions with length r , dualize it and check whether the adjoint sequence is formally exact, i.e., each operator generates exactly the compatibility conditions of the preceding one. The global dimension of D is n because, using the Spencer sequence (187), we obtain at once $\text{ext}_D^i(M, D) = 0, \forall i > n$.

EXAMPLE 2.6. Let us take the divergence operator $\mathcal{D} : \xi \rightarrow \eta$, in \mathbb{R}^3 , defined by

$$\partial_1 \xi^1 + \partial_2 \xi^2 + \partial_3 \xi^3 = \eta.$$

Dualizing the divergence operator, we obtain the operator $\tilde{\mathcal{D}} : \mu \rightarrow \nu$, defined by

$$\begin{cases} -\partial_1 \mu = \nu_1, \\ -\partial_2 \mu = \nu_2, \\ -\partial_3 \mu = \nu_3, \end{cases}$$

which is nothing else than minus the gradient operator. We let the reader check by himself that the compatibility condition $\tilde{\mathcal{D}}_{-1}$ of $\tilde{\mathcal{D}}$ is minus the curl operator and the adjoint of $\tilde{\mathcal{D}}_{-1}$ is still the curl operator, i.e., the curl is a *self-adjoint* operator. The compatibility condition of the curl operator \mathcal{D}_{-1} is the divergence and thus \mathcal{D} is parametrized by the curl operator \mathcal{D}_{-1} . In other words, if M is the D -module defined by \mathcal{D} , we have $\text{ext}_D^1(N, D) = 0$, where N is the D -module defined by $\tilde{\mathcal{D}}$. Moreover, we can check that the compatibility condition $\tilde{\mathcal{D}}_{-2}$ of $\tilde{\mathcal{D}}_{-1}$ is minus the divergence operator and thus its adjoint \mathcal{D}_{-2} is the gradient which parametrizes the curl, i.e., $\text{ext}_D^2(N, D) = 0$. We shall see in the next section that if \mathcal{D} is a formally surjective operator, that is without any compatibility conditions, then N is a torsion D -module and thus $\text{hom}_D(N, D) = \text{ext}_D^0(N, D) = 0$. Using theorem 2.1, we obtain $\text{cd}(N) > 2 \Leftrightarrow d(N) = 0$, that

1. En fait, nous avons $j(M) = \min\{i \mid \text{ext}_D^i(M, D) \neq 0\} = \text{cd}(M)$, où $j(M)$ est appelé le *grade* du D -module M . Nous avons donc la relation $d(M) + j(M) = n$.

is, $\alpha_1^i(\tilde{\mathcal{D}}) = 0, \forall i = 1, \dots, 3$, and we find back that the solutions of the gradient operator only depend on constants.

It is essential to notice that the right D -module $N_r = \wedge^n T^* \otimes_A N$, obtained from the left D -module $N = N_l$ by the side changing functor [8, 93], must not be confused with $\tilde{M} = \text{hom}_D(M, D)$ as we have the exact sequence

$$(188) \quad 0 \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow E \otimes_A D \longrightarrow F \otimes_A D \longrightarrow N_r \longrightarrow 0,$$

and thus we have the relation: $\text{ext}_D^i(N_r, D) = \text{ext}_D^{i-2}(\text{hom}_D(M, D), D), \forall i \geq 3$. Finally, the result 3.1.1 will prove that $\text{ext}_D^i(N, D)$ only depends on $M, i \geq 1$. In fact, as a much stronger but delicate result, one can prove² that N and $\text{ext}_D^0(N, D) = \text{hom}_D(N, D) = \tilde{N}$ are only determined up to a projective equivalence, according to the Schanuel's lemma [73, 103, 135] and the exact sequence of left D -modules:

$$(189) \quad 0 \longrightarrow \tilde{N}_r \longrightarrow D \otimes F^* \longrightarrow D \otimes E^* \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

3. Applications to Control Theory

We shall now divide the properties of control systems into two categories, depending on the fact that they do or do not depend on a separation of the variables of the control system between input and output.

3.1. Structural Properties. We first study the properties that do not depend on such a separation.

3.1.1. *Primeness.* The key idea, *not evident at all intuitively*, is to use $\tilde{\mathcal{D}}$ or N instead of \mathcal{D} or M in order to achieve a classification of modules:

$$\text{free} \subseteq \text{projective} \subseteq \dots \subseteq \text{reflexive} \subseteq \text{torsion-free}.$$

First of all, we recall that M is torsion-free (reflexive) if and only if the central morphism in the long exact sequence of left D -modules³

$$0 \longrightarrow \text{ext}_D^1(N_r, D) \longrightarrow M \xrightarrow{\epsilon} \text{hom}_D(\text{hom}_D(M, D), D) \longrightarrow \text{ext}_D^2(N_r, D) \longrightarrow 0,$$

$$m \longrightarrow \epsilon(m),$$

with $\forall f \in \text{hom}_D(M, D) : \epsilon(m)(f) = f(m)$, is injective (bijective) [85, 106].

DEFINITION 3.1. We shall say that a control system, defined by an operator \mathcal{D} , is *controllable* if one cannot find locally any *autonomous elements*, namely any scalar differential combination $\zeta = \mathcal{A}\xi$, satisfying at least one PDE of the form $\mathcal{B}\zeta = 0$ whenever $\mathcal{D}\xi = 0$.

Then, we have the following corollary.

COROLLARY 3.1. *The following assertions are equivalent [85, 106, 113, 111]:*

1. *The control system defined by \mathcal{D} is controllable.*
2. *The operator \mathcal{D} is parametrizable by a \mathcal{D}_{-1} .*
3. *The D -module M is torsion-free.*
4. $\text{ext}_D^1(N_r, D) = \wedge^n T^* \otimes_A \text{ext}_D^1(N, D) = 0$.

2. Voir le théorème 1.2 du chapitre 3.
 3. Voir la proposition 2.9 du chapitre 3

REMARK 3.1. Moreover, if \mathcal{D} is formally surjective, that is $\mathcal{D}_1 = 0$, then $\text{hom}_D(N, D) = \text{ext}_D^0(N, D) = 0 \stackrel{\text{th.2.1}}{\Leftrightarrow} \text{cd}(N) \geq 1 \Leftrightarrow d(N) \leq n - 1 \Leftrightarrow \alpha_q^n(N) = 0 \Leftrightarrow N$ is a torsion module. Then, M is torsion-free $\Rightarrow \text{ext}_D^i(N, D) = 0, \forall i \leq 1 \Rightarrow \text{cd}(N) \geq 2 \Rightarrow d(N) \leq n - 2$ and we re-establish the concept of *minor left-primeness* (MLP) [46, 104, 163, 160, 168] for the operator matrix representing \mathcal{D} . One must care that, in the variable coefficient case, the matrix of $\tilde{\mathcal{D}}$ is not just the transposed of the matrix of \mathcal{D} . In the particular case $n = 1$, we find back the Hautus test [65] and the fact that the control system is controllable if and only if $\tilde{\mathcal{D}}$ is injective [115]. In that case, there is a lift-operator $\tilde{\mathcal{P}}: \tilde{E} \rightarrow \tilde{F}$ such that $\tilde{\mathcal{P}} \circ \tilde{\mathcal{D}} = \text{id}_{\tilde{F}}$ and thus $\mathcal{D} \circ \mathcal{P} = \text{id}_F$, a result amounting to the forward and reversed generalized Bezout identities [81, 118]. When \mathcal{D} is not surjective, the above result amounts to *generalized factor left primeness* (see [104, 163, 168] and p.12 of [160]).

COROLLARY 3.2. M is reflexive $\Leftrightarrow \text{ext}_D^i(N, D) = 0, \forall i = 1, 2$.

REMARK 3.2. Moreover, if \mathcal{D} is surjective, reasoning as before, we get $d(N) \leq n - 3$. The divergence operator provides a good example of a reflexive module which is nevertheless not projective because $\text{ext}_D^3(N, D) \neq 0$.

Going on along theorem 2.2 with increasing r , we reach the case $\text{ext}_D^i(N, D) = 0, \forall i = 1, \dots, n - 1$, that is, $d(N) = 0$ when \mathcal{D} is surjective, and this is the concept of *weakly zero left-primeness* [104, 160, 168]. A particular example is provided by a system of finite type or *holonomic* module N such that $I(N) = (\chi_1, \dots, \chi_n) \Rightarrow$ the algebraic set $\text{char}(N)$ is reduced to the origin and $\text{ext}_D^i(N, D) = 0, \forall i \neq n$. As N is a differential module too, we have $\text{ext}_D^i(N, D) = 0, \forall i > n$ and we are left with the only case $\text{ext}_D^i(N, D) = 0, \forall i \geq 1$.

COROLLARY 3.3. M is projective $\Leftrightarrow \text{ext}_D^i(N, D) = 0, \forall i \geq 1$.

PROOF. In general, when \mathcal{D} is not surjective, as the $\text{ext}_D^i(N, D)$ do not depend on the resolution of N , we may bring $\tilde{\mathcal{D}}$ to involutiveness and use the corresponding Spencer sequence (187) to construct inductively the lift operators P_r of the Spencer operators D_r in such a way that $D_r \circ P_r \circ D_r = D_r$. More precisely, if $\tilde{\mathcal{D}} = D_1$ is involutive, it follows from $\text{ext}_D^n(N, D) = 0$ that \tilde{D}_n is injective and admits therefore a left-inverse \tilde{P}_n such that $\tilde{P}_n \circ \tilde{D}_n = \text{id}_{\tilde{C}_n}$ or $D_n \circ P_n = \text{id}_{C_n}$. However, we have $(\text{id}_{\tilde{C}_{n-1}} - \tilde{D}_n \circ \tilde{P}_n) \circ \tilde{D}_n = 0$ while $\tilde{D}_{n-1} \circ \tilde{D}_n = 0$ and \tilde{D}_{n-1} represents all the compatibility conditions of \tilde{D}_n because $\text{ext}_D^{n-1}(N, D) = 0$. Hence, there is an operator P_{n-1} such that $\tilde{D}_n \circ \tilde{P}_n + \tilde{P}_{n-1} \circ \tilde{D}_{n-1} = \text{id}_{\tilde{C}_{n-1}}$ or equivalently $P_n \circ D_n + D_{n-1} \circ P_{n-1} = \text{id}_{C_{n-1}}$ leading to $D_{n-1} \circ P_{n-1} \circ D_{n-1} = D_{n-1}$ and so on (see [118] for more details). Accordingly, N itself is projective and \tilde{M} is projective in (188). As M is already reflexive, we have $M \cong \tilde{M}$ and M is projective too. Conversely, if M is projective, the exact sequence (189) splits and thus, applying $\text{hom}_D(\cdot, D)$, it follows that the exact sequence (188) splits too, that is N_r and N are projective D -modules, a fact leading to $\text{ext}_D^i(N, D) = 0, \forall i \geq 1$. We notice that the choice $A = K$ or k is essential in the proof in order to insure the possibility to have a finite free resolution of length n . \square

REMARK 3.3. Moreover, when \mathcal{D} is surjective, we obtain $\text{ext}_D^i(N, D) = 0, \forall i \geq 0$ and thus $d(N) = -1$ that is $\text{char}(N) = \emptyset$ and this is only possible if $N = 0$. Hence, $\tilde{\mathcal{D}}$ admits

a lift and M is a projective module [118]. We find the generalization of *zero left-primeness* [46, 104, 163, 168, 160] as we are now dealing with variable coefficients.

In the commutative case, one may use $\text{ann}(M)$ instead of $\text{ann}(G)$ [104, 105]. Finally, when $D = k[d]$ is commutative, it is known that $\text{ann}(M)$ and $\text{ann}(G)$ define algebraic sets with the same dimension, according to the Hilbert-Serre theorem [139]. Hence, such a generalization of all existing results explains the existence of a whole range of "possible types of primeness" conjectured in [160].

EXAMPLE 3.1. When $n = 1$, only one single type of primeness is left. Dealing with a formally integrable Kalman system $-\dot{y} + Ay + Bu = 0$ and multiplying it on the left by a row vector of test functions λ , we find for the kernel of \tilde{D} :

$$\begin{cases} \dot{\lambda} + \lambda A = 0, \\ \lambda B = 0, \end{cases} \Rightarrow \dot{\lambda} B = 0 \Rightarrow \lambda AB = 0 \Rightarrow \lambda A^2 B = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda A^{m-1} B = 0,$$

and the Kalman test surprisingly amounts to the injectivity of the non-formally integrable operator \tilde{D} , a result also equivalent to the lack of first integrals [115, 121].

EXAMPLE 3.2. The system $\partial_1 \xi^1 + \partial_2 \xi^2 = 0$ defines a torsion-free D -module with a first order parametrization, which is nevertheless not projective, whereas $\partial_1 \xi^1 + \partial_2 \xi^2 - x^2 \xi^1 = 0$ defines a projective (but not free) and thus reflexive D -module which is automatically torsion-free and admits a second order parametrization.

EXAMPLE 3.3. The last operator \mathcal{D}_n in a Janet sequence always provides a projective module.⁴

EXAMPLE 3.4. With $n = 3$, let us consider the second order system

$$\begin{cases} \partial_{33} \xi - \partial_{13} \xi - \partial_3 \xi = 0, \\ \partial_{23} \xi - \partial_{12} \xi - \partial_2 \xi = 0, \\ \partial_{22} \xi - \partial_{12} \xi = 0, \end{cases}$$

with characters $\alpha_2^1 = 3, \alpha_2^2 = 0, \alpha_2^3 = 0$. The algebraic sets defined by $\text{ann}(M)$ and $\text{ann}(G)$ are different though they are both unions of 3 varieties of dimension 1, and thus have the same dimension.

EXAMPLE 3.5. The case of a surjective operator $\mathcal{D} : E \rightarrow F$ with $\dim(E) = \dim(F)$ is standard in physics (wave equations in elasticity, electromagnetism, ...). Indeed, M is a torsion module and thus $\text{ext}_D^0(M, D) = \text{hom}_D(M, D) = 0 \Rightarrow \text{cd}(M) \geq 1$. If $\text{cd}(M) = 1$, then $\text{ext}_D^1(M, D) \neq 0$ and \mathcal{D} is a determined operator which is therefore always formally integrable. A good example is the Cauchy-Riemann system defining holomorphic transformations. However, if $\text{cd}(M) \geq 2$ then $\text{ext}_D^1(M, D) = 0 \Rightarrow N = 0$. It follows that \tilde{D} is invertible, a fact showing that \mathcal{D} is not formally integrable. This result implies that $M = 0$. We have thus obtained a simple proof of the conjecture stated by M. Janet in 1920 [75] and first solved by J. Johnson in [80], saying that, for a system of this kind, there is a whole gap in the possible dimensions of the corresponding

4. La suite formellement exacte (187) correspondant à une résolution libre de longueur n du D -module à gauche $M = D^m/D^l \mathcal{D}$, où $\mathcal{D} : E \rightarrow F_0$. La suite de Janet de \mathcal{D} correspond à une résolution libre de longueur $n + 1$ du D -module M . D'où, le résultat grâce à la proposition 1.11 du chapitre "Algèbre homologique".

modules. The following second order system, with $n = 2$, $\dim(E) = \dim(F) = 2$, provides a good example [74, 113]

$$\begin{cases} \partial_{11} \xi^1 + \partial_{12} \xi^2 - \xi^2 = \eta^1, \\ \partial_{12} \xi^1 + \partial_{22} \xi^2 + \xi^1 = \eta^2, \end{cases}$$

and one can easily check that the square matrix of \mathcal{D} is unimodular with determinant equal to 1.

3.1.2. *Pure Modules.* We end this part with a generalization of the torsion-free property of a module and we follow [8]. In order to explain this extremely useful new direction for applications, we first provide a few examples.

EXAMPLE 3.6. Starting with the system

$$\begin{cases} y_{22} = 0, \\ y_{12} = 0, \end{cases}$$

we notice that $z = y_1$ only satisfies $z_2 = 0$ while $z = y_2$ does satisfy $z_1 = 0$, and $z_2 = 0$. Thus, $\text{cd}(D y_1) = 1$ and $\text{cd}(D y_2) = 0$.

Hence, we may distinguish the torsion elements of a differential module according to the properties of the system of PDE they satisfy. Two examples from engineering science will particularly well illustrate the different behaviour of various torsion elements.

EXAMPLE 3.7. In the linearized system for Euler equation for an incompressible fluid [114], namely

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} p = 0, \end{cases}$$

where \vec{v} is the speed and p the pressure of the fluid, one notices that we have the PDE

$$\Delta p = 0, \quad \frac{\partial(\Delta \vec{v})}{\partial t} = 0.$$

Similarly, the Boussinesq stationary system for the Bénard problem [113, 112], namely

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \\ \Delta \vec{v} - \theta \vec{g} - \vec{\nabla} \pi = 0, \\ \Delta \theta - \vec{g} \cdot \vec{v} = 0, \end{cases}$$

where $\vec{g} = (0, 0, -g)$ is the gravity while π and θ are perturbations of the pressure and temperature, we obtain from the vector analysis

$$\Delta \Delta \Delta \theta - g^2 (\partial_{11} + \partial_{22}) \theta = 0,$$

though, setting $w = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$, we only get $\Delta w = 0$.

Accordingly, among the elements of a differential module, one can find the elements which are *free*, i.e., they do not satisfy any PDE, and the others (torsion elements) which are *constrained* by at least one PDE.

DEFINITION 3.2. 1. We introduce the D -submodules $t_r(M) = \{m \in M | \text{cd}(D m) > r\}$, with $t_0(M) = t(M)$, the torsion submodule of M .

2. A D -module is said to be r -pure if $t_r(M) = 0$ and $t_{r-1}(M) = M$.

The chain of inclusions

$$0 = t_n(M) \subseteq t_{n-1}(M) \subseteq \dots \subseteq t_1(M) \subseteq t_0(M) = t(M) \subseteq M,$$

will be particularly useful for studying the specific properties of engineering quantities that can be observed experimentally by decoupling them from other quantities. Of course, $t_{r-1}(M)/t_r(M)$ is r -pure and one has the following delicate criterion for knowing whether a differential module is r -pure or not [8]

THEOREM 3.1. M is r -pure $\Leftrightarrow M \subseteq \text{ext}_D^r(\text{ext}_D^r(M, D), D)$, with $\text{cd}(M) = r$.

COROLLARY 3.4. When M is r -pure then $\text{char}(M)$ is r -equidimensional, namely it can be decomposed into irreducible components of the same dimension r .

We notice that the above criterion generalizes the situation of the torsion-free modules described in corollary 3.1 for the case $r = 0$.

EXAMPLE 3.8. Without the previous criterion, it is not evident to prove that the differential module provided by example 3.4 is 2-pure and thus that the corresponding adjoint operator is torsion-free. More generally, any differential module defined by a finite type system is automatically n -pure. This is particularly clear in 2-dimensional elasticity, with $\mathcal{D} : (\xi_1, \xi_2) \rightarrow (\partial_1 \xi_1 = \epsilon_{11}, \frac{1}{2}(\partial_1 \xi_2 + \partial_2 \xi_1) = \epsilon_{12}, \partial_2 \xi_2 = \epsilon_{22})$, $\mathcal{D}_1 : \epsilon \rightarrow \partial_{11} \epsilon_{22} + \partial_{22} \epsilon_{11} - 2\partial_{12} \epsilon_{12} = 0$, defining the strain tensor and its compatibility condition, while the adjoint sequence allows to parametrize the stress equation by $\tilde{\mathcal{D}}_1$ acting on the Airy function.

To our knowledge, it does not seem that such a classification of systems/modules has ever been applied. Another striking useful theorem is provided by the following non trivial theorem [85, 106].

THEOREM 3.2. We have the following relation:

$$\text{char}(M) = \cup_{i=0}^n \text{char}(\text{ext}_D^i(M, D)).$$

EXAMPLE 3.9. If \mathcal{D}_1 denotes the compatibility conditions of \mathcal{D} and $\tilde{\mathcal{D}}$ generates the compatibility conditions of $\tilde{\mathcal{D}}_1$, in such a way that both the module M determined by \mathcal{D} and the module N determined by $\tilde{\mathcal{D}}_1$ are torsion modules, then both \mathcal{D}_1 and $\tilde{\mathcal{D}}$ are surjective and $\text{char}(M) = \text{char}(N)$. This result generalizes the equality of the primeness degrees of left and right factor matrix descriptions of a given transfer matrix (see p. 74 of [160]). A typical example of this situation is provided by examples 3.4 and 3.8.

3.2. Input/Output Properties. We now turn to the properties involving inputs and outputs. First of all, we do not suppose here that inputs determine a maximum free differential submodule of M , though it is a possible choice. Accordingly, many concepts in control theory are based upon the two types of exact sequences that can be constructed from M

$$(190) \quad 0 \rightarrow t(M) \rightarrow M \rightarrow M/t(M) \rightarrow 0,$$

$$(191) \quad 0 \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow M/F \rightarrow 0,$$

where $t(M)$ is the torsion submodule of M and F is a maximum free submodule of M . We notice that $M/t(M)$ is torsion-free while M/F is a torsion module. Setting $S = D \setminus \{0\}$, we may

construct the field $Q(D) = S^{-1}D = DS^{-1}$ of quotients of D and tensor by $Q(D)$ the previous sequences in order to kill their torsion modules [85, 104, 119]. Such a construction, which is basic in algebraic analysis, gives the way to generalize the transfer matrix approach, even for variable coefficients, by considering the localization $S^{-1}M = Q(D) \otimes_D M$, without any reference to the Laplace transform [104, 119]. If we already know that M is torsion-free, it may provide a parametrization of \mathcal{D} generalizing the *controller form* for OD control systems [81]. For more details, see [119]. We notice that $M/t(M)$ and M/F are two specializations of M giving rise to two subsystems R'_∞ and R''_∞ of R_∞ . Taking into account that $t(M) \cap F = 0$, we obtain the following commutative and exact diagram

$$(192) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & 0 & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & F & = & F & \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & t(M) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/t(M) & \longrightarrow 0 \\ & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & t(M) & \longrightarrow & M/F & \longrightarrow & M/(t(M) \oplus F) & \longrightarrow 0, \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

and, dualizing it, we obtain the following commutative and exact diagram

$$(193) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & 0 & \\ & & & \uparrow & & \uparrow & \\ & & & R_\infty/R''_\infty & = & R_\infty/R''_\infty & \longleftarrow 0 \\ & & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \longleftarrow & R_\infty/R'_\infty & \longleftarrow & R_\infty & \longleftarrow & R'_\infty & \longleftarrow 0 \\ & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \longleftarrow & R_\infty/R'_\infty & \longleftarrow & R''_\infty & \longleftarrow & R'_\infty \cap R''_\infty & \longleftarrow 0, \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

which provides at once the relation $R_\infty = R'_\infty + R''_\infty$. This very basic reason, hidden in the underlying possible confusion concerning the choice of input and output, comes from the fact that, when $n = 1$, any torsion-free module is free and the first of the two preceding sequences splits. However, the resulting backward sequence must not be confused in general with the second sequence and the two sequences must be distinguished with care. In particular, only the first one entirely depends on M and provides the so-called minimum realization [104, 119].

As input and output play here a reciprocal role and are made by elements of M , we shall consider two different differential submodules M_{in} and M_{out} of M such that $M_{\text{in}} + M_{\text{out}}$ may be a strict differential submodule of M if there are latent variables. We do not suppose that M/M_{in} is a torsion module. The main construction is to introduce $t(M)$ and set $M'_{\text{in}} = M_{\text{in}} + t(M)$, $M'_{\text{out}} = M_{\text{out}} + t(M)$ in M . Then, the idea of the minimal realization is to replace M_{in} , M_{out} and M by $M'_{\text{in}}/t(M) = M_{\text{in}}/(M_{\text{in}} \cap t(M))$, $M'_{\text{out}}/t(M) = M_{\text{out}}/(M_{\text{out}} \cap t(M))$ and $M/t(M)$ in order

to deal only with torsion-free modules, always keeping in mind that the differential rank $\text{rk}_D(M)$ of M , namely the last character, is intrinsically defined, does not depend on the presentation and is additive, that is to say, if $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ is a short exact sequence of differential modules then $\text{rk}_D(M) = \text{rk}_D(M') + \text{rk}_D(M'')$. This is exactly the module analogue of the differential transcendence degree in differential algebra [87, 132] and one can prove that it is equal to the Euler characteristic of M . If one chooses $M_{\text{in}} = F$ as already defined, then $F \cap t(M) = 0$ and $M'_{\text{in}}/t(M) \cong F$ can always be considered as a submodule of $M/t(M)$.

The final idea is to define poles and zeros for multidimensional systems [104, 105, 160, 161]. First of all, we have seen (proposition 2.2) that if

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0,$$

is a short exact sequence of modules and if M is filtered, we can endow M' and M'' with the induced filtration $M'_q = M' \cap M_q$, $M''_q = g(M_q)$ and obtain, for these filtrations, the short exact sequence

$$0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0,$$

of associated graded modules. Taking the radicals of the respective annihilators, we get

$$\sqrt{\text{ann}(G)} = \sqrt{\text{ann}(G')} \cap \sqrt{\text{ann}(G'')},$$

and thus

$$\text{char}(M) = \text{char}(M') \cup \text{char}(M''),$$

as the characteristic set does not depend on the filtration (see proposition 2.3). As we are dealing with finitely generated modules, we also recall⁵ that, in the commutative case, the support $\text{supp}(M)$ of a module M is the set of proper prime ideals of the corresponding ring, that contain the annihilator of M over the ring. The key point, in order to generalize the concept of transfer matrix approach, is to localize the graded sequence with respect to a prime ideal and get the short exact sequence

$$0 \rightarrow G'_p \rightarrow G_p \rightarrow G''_p \rightarrow 0,$$

with $p \in \text{spec}(A[\chi])$, but we can also localize the filtered sequence when D is commutative. In the case of the SISO-system defined in example 2.4, we get $(\chi - 1)y = u$, and we can divide by $\chi - 1$ provided $\chi \neq 1$. Hence, the trick is to notice that $G'_p \cong G_p$ if and only if $G''_p = 0$, that is $p \notin \text{supp}(G'')$, the true reason for looking at $\text{char}(M'')$.

If N is any submodule of M , setting $N' = N + t(M)$, we have the following commutative and exact diagram,

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \rightarrow & t(M) \cap N & \rightarrow & N & \rightarrow & N'/t(M) & \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow & t(M) & \rightarrow & M & \rightarrow & M/t(M) & \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow & t(M)/(t(M) \cap N) & \rightarrow & M/N & \rightarrow & M/N' & \rightarrow 0, \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

5. Voir la proposition 2.35 du chapitre 2.

both with the isomorphisms:

$$(194) \quad t(M)/(t(M) \cap N) \cong N'/N,$$

$$(195) \quad N/(t(M) \cap N) \cong N'/t(M).$$

Setting M_{in} , M_{out} and $M_{in} + M_{out}$ in place of N , we get similar commutative and exact diagrams, both with short exact sequences of the type

$$(196) \quad 0 \rightarrow M_{in} \rightarrow M_{in} + M_{out} \rightarrow (M_{in} + M_{out})/M_{in} \rightarrow 0,$$

$$(197) \quad 0 \rightarrow M'_{in} \rightarrow M'_{in} + M'_{out} \rightarrow (M'_{in} + M'_{out})/M'_{in} \rightarrow 0,$$

and similar sequences with *in* and *out* interchanged.

Now, we have in general an exact sequence of the form

$$(198) \quad 0 \rightarrow N \rightarrow N' \rightarrow t(M)/(t(M) \cap N) \rightarrow 0,$$

and similar sequences with M_{in} , M_{out} and $M_{in} + M_{out}$ in place of N . Combining the two preceding sequences starting respectively with M_{in} and M'_{in} , we obtain the short exact sequence:

$$(199) \quad 0 \rightarrow (t(M) \cap (M_{in} + M_{out})) / (t(M) \cap M_{in}) \rightarrow (M_{in} + M_{out}) / M_{in} \rightarrow (M'_{in} + M'_{out}) / M'_{in} \rightarrow 0,$$

which is not evident at first sight and where many of the previous modules do appear.

We claim that all poles and zeros considered in classical control theory are only examples of the characteristic sets of the modules introduced above and all the relations among poles and zeros come from the preceding exact diagrams/sequences and using the additive property of $\text{char}(\cdot)$ (see proposition 2.3). Of course, it is essential to notice the fact that the identification of $\text{char}(M)$ with $\text{supp}(G)$ when $G = \text{gr}(M)$ only allows to use proper prime ideals of $A[\chi]$, a reason for setting $\text{char}(0) = \emptyset$. Also, if $A = k$, we can use $\text{supp}(M)$ instead of $\text{supp}(G)$ exactly as it has been proposed in [17, 161]. The advantage of our definition is that it covers the variable coefficient case as well by introducing another type of algebraic sets having the same dimension as the one that could be introduced in the constant coefficient case. Hence, both sets provide the same dimension numbers in the constant coefficient case though only the characteristic sets can be used in the variable coefficient case. For this reason, we shall provide the following definitions for the general situation but refer, for simplicity, between brackets, to the standard names that could be used with "supp" instead of "char".

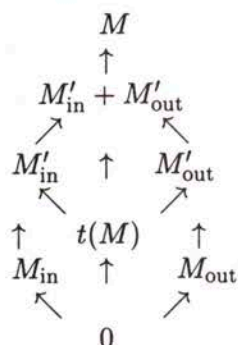
- { observables poles } = $\text{char}((M_{in} + M_{out})/M_{in})$,
- { transmission poles } = $\text{char}((M'_{in} + M'_{out})/M'_{in})$,
- { input decoupling zeros } = $\text{char}(t(M))$,
- { input-output decoupling zeros } = $\text{char}(t(M)/(t(M) \cap (M_{in} + M_{out})))$,

we obtain from the last exact sequence with evident notations:

$$\{\text{ob. p.}\} \cup \{\text{i.o.d.z.}\} \cup \text{char}(t(M) \cap M_{in}) = \{\text{tr. p.}\} + \{\text{i.d.z.}\}.$$

If M_{in} is identified with F , we obtain therefore $t(M) \cap M_{in} = 0$ and we recover the formula (23) of [17].

We may recapitulate the various modules involved on the following picture, explaining all the situations that can be met in the range of applications.



Introducing also the sets:

- {system poles} = $\text{char}(M/M_{in})$,
- {output decoupling zeros} = $\text{char}(M/(M_{in} + M_{out}))$,

and using the short exact sequence

$$0 \longrightarrow (M_{in} + M_{out})/M_{in} \longrightarrow M/M_{in} \longrightarrow M/(M_{in} + M_{out}) \longrightarrow 0,$$

we obtain, with evident notations:

$$\{\text{sys. p.}\} = \{\text{ob.p.}\} + \{\text{o.d.z.}\}.$$

However, in practice, there is no loss of generality in supposing $M = M_{in} + M_{out}$. In such a simple situation, assuming moreover $t(M) \cap M_{in} = 0$ and combining the preceding results, we get:

$$\{\text{syst. p.}\} = \{\text{ob. p.}\} = \{\text{tr. p.}\} + \{\text{i.d.z.}\}.$$

Also, in general we may thus introduce the set:

$$\{\text{hidden modes}\} = \text{char}(M/(M'_{in} + M'_{out})) \cup \text{char}(t(M) \cap (M_{in} + M_{out})),$$

and we obtain the relation (compare with [17]):

$$\{\text{h.m.}\} \cup \{\text{i.o.d.z.}\} = \{\text{i.d.z.}\} \cup \{\text{o.d.z.}\}.$$

In particular, if $M = M_{in} + M_{out}$, then $\{\text{i.o.d.z.}\} = \{\text{o.d. z.}\} = \emptyset$ and we only get $\{\text{h.m.}\} = \{\text{i.d.z.}\}$ in a coherent way.

The preceding results prove that input and output play a similar role and that it is thus better to use the only word "zero", "supp" or "char" for the corresponding modules and not the word "pole". Also, despite the fact that duality seems to appear only in the diagrams (192) and (193), it is in fact of constant use for constructing the characteristic sets of the various modules involved by looking at the corresponding systems.

EXAMPLE 3.10. If we have a SISO system $\dot{y} - y = u$ with input u satisfying $\dot{u} + u = 0$, we obtain $\ddot{y} - y = 0$ and thus $\text{supp}(M) = \{(\chi - 1), (\chi + 1)\}$ while $\text{supp}(t(M) \cap M_{in}) = \{(\chi + 1)\}$ and we find the hidden mode $(\chi + 1)$. Such a situation can happen in an electrical LCR circuit if we suppose conditions on a voltage input.

4. Conclusion

We hope to have convinced the reader that, despite the difficulty of the underlying mathematical tools, the formal methods of algebraic analysis allow to clarify and unify many existing results on multidimensional control systems. In most cases, the corresponding algorithms are effective and can easily be checked. Finally, this approach can separate the intrinsic/built-in properties of a control system such as torsion-freeness or pureness, from the other properties that depend on the choice of input and output. Meanwhile, another essential aspect is the possibility to bring the study of modules over non-commutative rings to the simpler study of modules over commutative rings. We do believe that none of the results presented here could be obtained without the use of the extension functor and/or duality, a fact explaining why it took such a long time to establish a link between algebraic analysis and control theory.

5. Examples

EXAMPLE 5.1. Let us consider the system defined by the first two rows of the curl operator in \mathbb{R}^3 , namely:

$$\begin{cases} -d_3 y^2 + d_2 y^3 = 0, \\ d_3 y^1 - d_1 y^3 = 0. \end{cases}$$

The corresponding differential operator $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$ is defined by:

$$\begin{cases} -\partial_3 \eta^2 + \partial_2 \eta^3 = \zeta^1, \\ \partial_3 \eta^1 - \partial_1 \eta^3 = \zeta^2. \end{cases}$$

\mathcal{D}_1 is a surjective operator, and its adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \lambda \rightarrow \mu$ is defined by:

$$\begin{cases} -\partial_3 \lambda_2 = \mu_1, \\ \partial_3 \lambda_1 = \mu_2, \\ \partial_1 \lambda_2 - \partial_2 \lambda_1 = \mu_3. \end{cases}$$

The kernel of the operator $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is defined by the following involutive system:

$$\begin{cases} -\partial_3 \lambda_2 = 0, \\ \partial_3 \lambda_1 = 0, \\ \partial_1 \lambda_2 - \partial_2 \lambda_1 = 0. \end{cases}$$

The dimension of this system is 2, i.e. we need to give a function of two variables to determine uniquely a general solution. Using theorem 2.1 and the fact that $d(N) = 2 \Rightarrow \text{cd}(N) = 3 - 2 = 1$, we obtain $\text{ext}_D^1(N, D) \neq 0$ and thus we know without any computations that M has torsion elements. In fact, we let the reader check by himself that $z = -d_2 y^1 + d_1 y^2$ is a torsion element of $M = D^3/D^2 \mathcal{D}_1$ satisfying $d_3 z = 0$.

Let us give an example treating the first and the second sets of Maxwell equations.

EXAMPLE 5.2. The electromagnetism field (\vec{B}, \vec{E}) comes from the electromagnetism potential $(\vec{A}, -V)$ by the differential operator $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ defined by:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{B}, \\ -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}. \end{cases}$$

These equations admit compatibility conditions defined by the first part of the Maxwell equations:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

If we put a second member $(\kappa^1, \vec{\kappa}^2)$ on the first part of the Maxwell equations, we find one compatibility equation, defined by:

$$\frac{\partial \kappa^1}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\kappa}^2 = 0.$$

Hence, we have the following formally exact sequence:

$$F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} F_2 \xrightarrow{\mathcal{D}_3} F_3 \longrightarrow 0.$$

The use of space-time formalism while $x^4 = ct$ and of special relativity amounts to rewrite such a sequence in the intrinsic form of the Poincaré sequence for the exterior derivative:

$$T^* \xrightarrow{d} \wedge^2 T^* \xrightarrow{d} \wedge^3 T^* \xrightarrow{d} \wedge^4 T^* \longrightarrow 0.$$

By easy computations and using example 2.6, we easily verify that, up to a sign, the adjoint $-\tilde{\mathcal{D}}_3 : \pi \rightarrow \theta$ of \mathcal{D}_3 is defined by

$$(200) \quad \begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial t} = \theta_1, \\ \nabla \pi = \vec{\theta}_2, \end{cases}$$

and, we verify that the compatibility condition $\tilde{\mathcal{D}}_3 \pi = \theta$ is exactly the operator $-\tilde{\mathcal{D}}_2 : \tilde{F}_2 \rightarrow \tilde{F}_1$, defined by:

$$(201) \quad \begin{cases} \nabla \theta_1 + \frac{\partial \vec{\theta}_2}{\partial t} = \vec{H}, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{\theta}_2 = \vec{D}. \end{cases}$$

This is the parametrization of the inductions by the *pseudo-potentials*. The formal adjoint of \mathcal{D}_1 is defined by multiplying \mathcal{D}_1 by $(\vec{H}, -\vec{D})$ and integrating the result by parts

$$\vec{H}(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + (-\vec{D})(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -(\vec{\nabla} \wedge \vec{H} + \frac{\partial (-\vec{D})}{\partial t}) \vec{A} - (-\vec{\nabla} \cdot (-\vec{D})) V + \dots$$

and we finally obtain, up to a sign, the operator $-\tilde{\mathcal{D}}_1 : \tilde{F}_1 \rightarrow \tilde{F}_0$ defined by

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{H} + \frac{\partial (-\vec{D})}{\partial t} = \vec{j}, \\ -\vec{\nabla} \cdot (-\vec{D}) = \rho, \end{cases}$$

where \vec{j} is the density of current and ρ is the density of electric charge. Moreover, the compatibility conditions of (201) is exactly $-\tilde{\mathcal{D}}_1$. The compatibility conditions of $-\tilde{\mathcal{D}}_0$ is given by:

$$(202) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0,$$

and thus, we have the following formally exact sequence

$$0 \longleftarrow \tilde{E} \xleftarrow{-\tilde{\mathcal{D}}_0} \tilde{F}_0 \xleftarrow{-\tilde{\mathcal{D}}_1} \tilde{F}_1 \xleftarrow{-\tilde{\mathcal{D}}_2} \tilde{F}_2 \xleftarrow{-\tilde{\mathcal{D}}_3} \tilde{F}_3 \longleftarrow \Omega \longleftarrow 0,$$

where we have denoted by Ω the kernel of $-\tilde{\mathcal{D}}_3$. Again in space-time formalism, this sequence is isomorphic to the Poincaré sequence which is therefore said to be *self-adjoint*. The operator \mathcal{D}_1 determines a torsion-free left $D = \mathbb{R}[d_1, d_2, d_3, d_4]$ -module if the compatibility conditions of the adjoint of (202) are generated by \mathcal{D}_1 . We easily see that $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$ is defined by

$$(203) \quad \begin{cases} \nabla \xi = \vec{A}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = V, \end{cases}$$

and its compatibility condition is exactly \mathcal{D}_1 . Finally, we have the formally and locally exact sequence

$$0 \longrightarrow \Theta \longrightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} F_2 \xrightarrow{\mathcal{D}_3} F_3 \longrightarrow 0,$$

where Θ is the kernel of the operator \mathcal{D}_0 .

Let us denote by M_i the left D -module determined by \mathcal{D}_i

$$0 \longleftarrow M_i \longleftarrow D^{r_{i-1}} \xleftarrow{\mathcal{D}_i} D^{r_i}$$

for $i = 0, \dots, 3$ and by N_{ir} the right D -module defined by the following finite presentation

$$D^{r_{i-1}} \xrightarrow{\mathcal{D}_i} D^{r_i} \longrightarrow N_{ir} \longrightarrow 0$$

and by N_i the left D -module determined by $\tilde{\mathcal{D}}_i$, that is to say:

$$D^{r_{i-1}} \xrightarrow{\tilde{\mathcal{D}}_i} D^{r_i} \longrightarrow N_i \longrightarrow 0,$$

then, we have:

1. $\text{ext}_D^i(N_3, D) = \text{ext}_D^i(N_{3r}, D) = 0$, $i = 1, \dots, 3$, $\text{ext}_D^4(N_{3r}, D) = D/D^4\mathcal{D}_0 \Rightarrow M_3$ is just better than a reflexive module in the Kashiwara-Palamodov classification, but M_3 is not a projective D -module.
2. $\text{ext}_D^i(N_2, D) = \text{ext}_D^i(N_{2r}, D) = 0$, $i = 1, 2$, $\text{ext}_D^3(N_{2r}, D) = D/D^4\mathcal{D}_0 \Rightarrow M_2$ is just a reflexive D -module,
3. $\text{ext}_D^1(N_1, D) = \text{ext}_D^1(N_{1r}, D) = 0$, $\text{ext}_D^2(N_{1r}, D) = D/D^4\mathcal{D}_0 \Rightarrow M_1$ is just a torsion-free D -module,
4. $\text{ext}_D^1(N_{0r}) = D/D^4\mathcal{D}_0 = M_0 \Rightarrow M_0$ is a torsion D -module.

The operator \mathcal{D}_3 is a formally surjective operator thus $d(N_{3r}) \leq n - 1$. Hence, using theorem 2.1, we can know which $\text{ext}_D^i(N_{3r}, D)$ is non zero by only computing the dimension of the kernel of $\tilde{\mathcal{D}}_3$, i.e. the dimension of Ω . The system $\tilde{\mathcal{D}}_3\pi = 0$ is of finite type because any solution of this system only depends on four arbitrary constants. Thus, we obtain:

$$d(N_{3r}) = 0 \Rightarrow \text{ext}_D^i(N_{3r}, D) = 0, \quad i = 1, \dots, 3, \quad \text{ext}_D^4(N_{3r}, D) \neq 0.$$

CHAPITRE 9

Commande optimale des systèmes multidimensionnels

Ce chapitre est composé du papier intitulé "A Formal Approach of Optimal Control", co-écrit avec J.F. Pommaret et soumis pour publication au journal "International Journal of Control".

On sait que les techniques du calcul variationnel (avec ou sans contraintes), reposant sur des intégrations par partie, conduisent à des méthodes voisines de celles de la dualité pour des opérateurs différentiels. Le but de ce chapitre est de montrer comment utiliser les propriétés intrinsèques d'un système, et en particulier la contrôlabilité, dans l'étude d'un problème variationnel où le système est considéré comme une contrainte différentielle. Nous montrons que nous pouvons utiliser la paramétrisation d'un système contrôlable pour se ramener à un problème variationnel sans contrainte. Dans le cas où le système engendre un D -module projectif, nous montrons alors comment nous pouvons déterminer explicitement sans intégrations les multiplieurs de Lagrange du problème variationnel correspondant. Ce chapitre est illustré par un exemple concret provenant des différentes approches possibles de la théorie mathématique de l'élasticité et en électromagnétisme.

De façon indépendante, Pillai et Willems ont obtenu, pour les systèmes des équations aux dérivées partielles à coefficients constants, certains résultats similaires à ceux de ce papier [109].

A FORMAL APPROACH TO OPTIMAL CONTROL

Abstract: We use recent improvements in the parametrization of controllable multidimensional control systems to show how to transform the study of a linear quadratic optimal problem into that of a variational problem without constraints. We give formal conditions on the differential module determined by the control system, to pass from the Pontryagin method to a purely Euler-Lagrange variational problem. This formal approach uses the cost function in order to link the formally exact sequence formed by the controllable system and its parametrizations with the sequence formed by their adjoint operators. In the case of partial differential equations, this scheme is typical for any problem of elasticity.

Keywords: Optimal control, linear quadratic control, elasticity theory, controllability, parametrization, differential modules, formal duality, formal integrability, homological algebra.

1. Introduction

In this paper, we show how new results on parametrization of linear multidimensional control systems can be used to find formal results on optimal control and variational calculus. In particular, we are interested in knowing how the structural properties of a multidimensional control system, described in the framework of module theory, can be useful in order to reduce a constrained variational problem to a free one.

We first recall the fact that a controllable system, in the sense that the system determines a torsion-free differential module, is parametrizable and we show how to find effectively its parametrization [113, 118, 119]. The problem investigated in this paper is to extremize a functional under the constraint given by a linear multidimensional control system. We prove

that if the control system generates a torsion-free module and if the differential sequence formed by the system and one of its parametrizations is locally exact, then by substitution, we are led to a simple variational problem without constraints. In particular, if the control system determines a projective module, one can always reduce our problem to this case. Moreover, if the system is defined by a surjective operator and determines a projective module, the Lagrange multipliers can always be found explicitly, without any integrations. Many examples illustrate this approach and, in particular, we show how this formal method can be used to linear quadratic problem, elasticity theory, electromagnetism... We hope to convince the reader that these algebraic and geometric methods, developed for control system theory in [113, 117, 118, 119], and using as main ingredients, formal adjoint of an operator, differential sequences and module theory, are in fact closely related to some physics principles, for example, duality existing between geometry and physics, in the sense of Poincaré.

2. Formal Tools

Let us expose and recall some results about the formal theory of differential operators [94, 96, 113, 144] and its dual approach in terms of differential modules [8, 93, 106, 107, 118].

Let E and F be trivial vector bundles over a differential manifold X of dimension n with local coordinates $x = (x^1, \dots, x^n)$. In the course of this paper, we shall take \mathbb{R}^n for X or open subsets. Let

$$(204) \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\mathcal{D}} & F \\ (x, \xi^k(x)) & \mapsto & (x, \eta^\tau(x) = \sum_{0 \leq |\mu| \leq q, 1 \leq k \leq m} a_k^{\tau\mu}(x) \partial_\mu \xi^k, 1 \leq \tau \leq l), \end{array}$$

be a *differential operator* from E to F , where the fibered dimension of E (resp. F) is equal to m (resp. equal to l), $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ is a multi-index of length $|\mu| = \mu_1 + \dots + \mu_n$ and we adopt the notation $\partial_\mu = \partial_1^{\mu_1} \dots \partial_n^{\mu_n}$. If we denote by Θ the kernel of the operator \mathcal{D} , then we have the following exact sequence:

$$(205) \quad 0 \longrightarrow \Theta \longrightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}} F.$$

Now, we associate with any differential operator \mathcal{D} an algebraic object, namely a differential module M , in the following way (see [118] for more details). For that, when K is a differential field [87, 132], let us introduce the ring $D = K[d_1, \dots, d_n]$ of differential operators, i.e. the ring of elements of the form $P = \sum_{|\mu| < \infty} a^\mu(x) d_\mu$, where the coefficients $a^\mu(x)$ belong to K and where the derivations d_i satisfy:

$$d_i(a(x)d_j) = a(x)d_i d_j + \partial_i a(x)d_j.$$

We associate with (204) the D -homomorphism $\cdot \mathcal{D}$ defined as follows

$$(206) \quad \begin{array}{ccc} D^l & \xrightarrow{\cdot \mathcal{D}} & D^m \\ (P_\tau) & \mapsto & (\sum_{0 \leq |\mu| \leq q, 1 \leq \tau \leq l} P_\tau a_k^{\tau\mu}(x) d_\mu, 1 \leq k \leq m), \end{array}$$

i.e. we let operate a row vector of D^l on the left of \mathcal{D} to obtain a row vector of D^m . Now, we associate with (205), the *finitely presented* left D -module M defined by the following exact sequence:

$$D \otimes_K F^* \xrightarrow{\cdot \mathcal{D}} D \otimes_K E^* \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

or simply, because the vector bundles are trivial:

$$(207) \quad D^l \xrightarrow{\mathcal{D}} D^m \rightarrow M \rightarrow 0,$$

i.e. $M = D^m/D^l \mathcal{D}$ (see [93, 94, 96, 106, 107, 118] for more details).

When $\mathcal{D} : \xi \rightarrow \eta$ is a sufficiently regular differential operator, the *compatibility conditions* of the inhomogeneous system

$$(208) \quad \mathcal{D} \xi = \eta,$$

are defined by an operator $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$, with $F = F_0$ and $l = l_0$. In other words, all the necessary conditions on η , in order to have the local existence of ξ such that (208) is satisfied, are generated by $\mathcal{D}_1 \eta = 0$. The operator \mathcal{D}_1 can be constructed by bringing the operator \mathcal{D} to *involutiveness* [113]. A historical problem was to construct effectively the operator \mathcal{D}_1 and it was investigated by Riquier and Cartan at the beginning of the century [26, 130, 131] but received a nice improvement with Janet's work in the twenties [74, 76] and a final achievement with the works of Spencer in the seventies [113, 144]. Then, we can construct the *formally exact sequence* [113, 118, 144]:

$$(209) \quad 0 \rightarrow \Theta \rightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1.$$

In the differential module language, this means that we have computed the beginning of the *free resolution* (see e.g. [135]) of the D -module M corresponding to \mathcal{D} , i.e. we have the following exact sequence:

$$(210) \quad D^{l_1} \xrightarrow{\mathcal{D}_1} D^{l_0} \xrightarrow{\mathcal{D}} D^m \rightarrow M \rightarrow 0.$$

We can repeat the same thing with \mathcal{D}_1 instead of \mathcal{D} and we obtain a long formally exact sequence of compatibility conditions in the operator language, or a free resolution of M in the algebraic one. Moreover, we know, from the works of Spencer [144], that we can find a resolution of M of length equal to n , where n is the number of derivatives ∂_i , or equivalently, the number of derivations d_i in D . However, the Spencer resolution is in general very difficult to compute [113] and thus it is much easier to compute the *Janet sequence* [113, 118]

$$0 \rightarrow \Theta \rightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}_{n-1}} F_{n-1} \xrightarrow{\mathcal{D}_n} F_n \rightarrow 0,$$

giving rise to a free resolution of M of length equal to $n + 1$:

$$(211) \quad 0 \rightarrow D^{l_n} \xrightarrow{\mathcal{D}_n} D^{l_{n-1}} \rightarrow \dots \rightarrow D^{l_1} \xrightarrow{\mathcal{D}_1} D^{l_0} \xrightarrow{\mathcal{D}} D^m \rightarrow M \rightarrow 0,$$

obtained by replacing \mathcal{D} by an *involutive* operator $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$ with the same kernel Θ [113] and where \mathcal{D}_i are involutive first order operators. In this case, we know that the last operator $\mathcal{D}_n : F_{n-1} \rightarrow F_n$ defines a projective D -module (see e.g. [135] and definition 1).

Applying the functor $\text{hom}_D(\cdot, D)$ to (211), we obtain the *dual sequence*

$$(212) \quad 0 \leftarrow D^{l_n} \xleftarrow{\mathcal{P}_n} D^{l_{n-1}} \leftarrow \dots \leftarrow D^{l_1} \xleftarrow{\mathcal{P}_1} D^{l_0} \xleftarrow{\mathcal{P}_0} D^m \leftarrow \text{hom}_D(M, D) \leftarrow 0,$$

where $\mathcal{D}_i \cdot$ means that we make \mathcal{D}_i operate on the left of a column vector of $D^{l_{i-1}}$ in order to obtain a column vector of D^{l_i} . The defect of cohomology at D^{l_i} is denoted by $H(D^{l_i}) = \text{ext}_D^i(M, D) = \ker \mathcal{D}_{i+1} / \text{im } \mathcal{D}_i$. The defects of cohomology $\text{ext}_D^i(M, D)$ do only depend in fact

on M and not on its resolution (211), that is, if we have two different resolutions of the same D -module M , then we obtain the same defect of cohomology from the two different dual sequences [135]. Now, we have to notice that, using the fact that D is both a left and right D -module, we can endow $\text{hom}_D(M, D)$ with the structure of a right D -module:

$$\forall a \in D, \forall \phi \in \text{hom}_D(M, D) : \forall m \in M, (\phi a)(m) = \phi(m) a.$$

The cokernel of \mathcal{D}_0 is the right D -module N_r defined by:

$$(213) \quad 0 \longleftarrow N_r \longleftarrow D^{l_0} \xleftarrow{\mathcal{P}_0} D^m \longleftarrow \text{hom}_D(M, D) \longleftarrow 0.$$

It can be shown that N_r only depends on M up to a *projective equivalence* [121]. If we want to give an interpretation of the *extension functor* coming from the functor $\text{hom}_D(\cdot, D)$ in terms of differential operators, we have to use the notion of *formal adjoint* [113, 118, 119]: if T^* denotes the cotangent bundle of X and $\mathcal{D} : E \rightarrow F$ is a differential operator, then its formal adjoint is the operator $\tilde{\mathcal{D}} : \wedge^n \tilde{F} = \wedge^n T^* \otimes F^* \rightarrow \tilde{E} = \wedge^n T^* \otimes E^*$, defined by using the three following formal rules equivalent to integration by parts:

- the adjoint of a matrix (zero order operator) is the transposed matrix,
- the adjoint of ∂_i is $-\partial_i$,
- for two linear PD operators P, Q that can be composed, then: $\widetilde{P \circ Q} = \tilde{Q} \circ \tilde{P}$.

Moreover, we have the relation

$$\langle \lambda, \mathcal{D}_1 \eta \rangle - \langle \tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda, \eta \rangle = d(\cdot),$$

expressing a difference of n -forms and where d is the standard exterior derivative. In homological language, if we define the free K -module $T = D_1/D_0$, endowed with the bracket $[P, Q] = P \circ Q - Q \circ P$, $\forall P, Q \in D$ and where $\{D_r\}_{r \geq 0}$ is the order filtration of D , then the functor $\wedge^n T \otimes_K \cdot$ is the *side changing functor* [8] and it allows to pass from a right D -module N_r to a left D -module. Thus the left D -module $N = \wedge^n T \otimes_K N_r$ is the module determined by the adjoint $\tilde{\mathcal{D}}$ of \mathcal{D} and we have:

$$(214) \quad 0 \longleftarrow N \longleftarrow \wedge^n T \otimes_K D^l \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}} \wedge^n T \otimes_K D^m.$$

Now, let us start with an involutive operator $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$ and let us denote by M the D -module determined by \mathcal{D} . We give a formal test to check whether or not $\text{ext}_D^i(M, D)$ is equal to zero or not.

Computation of $\text{ext}_D^i(M, D)$:

1. Start with \mathcal{D}_0 .
2. Find the sequence of the compatibility condition operators \mathcal{D}_r up to \mathcal{D}_i .
3. Construct the adjoint sequence formed by the operators $\tilde{\mathcal{D}}_i$ and $\tilde{\mathcal{D}}_{i-1}$.
4. Find the compatibility conditions $\tilde{\mathcal{D}}'_{i-1}$ of $\tilde{\mathcal{D}}_i$.
5. Check whether or not $\tilde{\mathcal{D}}_{i-1}$ generates all the compatibility conditions $\tilde{\mathcal{D}}'_{i-1}$ of $\tilde{\mathcal{D}}_i$. If yes, then $\text{ext}_D^i(M, D) = 0$ else $\text{ext}_D^i(M, D)$ is defined by all the compatibility conditions which are in $\tilde{\mathcal{D}}'_{i-1}$ and not in $\tilde{\mathcal{D}}_{i-1}$.

We can represent the above algorithm by the following diagram

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 1 & E & \xrightarrow{D_0} & F_0 & \xrightarrow{D_1} & \dots & \xrightarrow{D_{i-2}} & F_{i-2} & \xrightarrow{D_{i-1}} & F_{i-1} & \xrightarrow{D_i} & F_i & 2 \\
 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 3 & \tilde{F}_{i-2} & \xleftarrow{\tilde{D}_{i-1}} & \tilde{F}_{i-1} & \xleftarrow{\tilde{D}_i} & \tilde{F}_i, \\
 & & & & & & & 4 & \tilde{F}'_{i-2} & \xleftarrow{\tilde{D}'_{i-1}} & & &
 \end{array}$$

where the number indicates the step of the algorithm.

More generally, from algebraic analysis [85, 106, 119], we have the following theorem:

THEOREM 2.1. *We can embed the D -module M into an exact sequence*

$$(215) \quad 0 \longrightarrow M \longrightarrow D^m \xrightarrow{D_{-1}} D^{l-1} \xrightarrow{D_{-2}} \dots \xrightarrow{D_{-r+1}} D^{l-r+1} \xrightarrow{D_{-r}} D^{l-r},$$

if and only if $\text{ext}_D^i(N, D) = 0$, $\forall i = 1, \dots, r$, where N is the left D -module corresponding to the right D -module defined by (213). Equivalently, we have, in the framework of differential operator, the following formally exact sequence:

$$E_{-r} \xrightarrow{D_{-r}} E_{-r+1} \xrightarrow{D_{-r+1}} \dots \xrightarrow{D_{-2}} E_{-1} \xrightarrow{D_{-1}} E_0 \xrightarrow{D} F,$$

where $E_0 = E$ and each operator generates all the compatibility conditions of the preceding one if and only if $\text{ext}_D^i(N, D) = 0$, $\forall i = 1, \dots, r$, where N is the left D -module determined by \tilde{D} .

DEFINITION 2.1. – A finitely generated D -module M is *free* if it is isomorphic to copies of D .

- A finitely generated D -module M is *projective* if there exist a free D -module F and a D -module N such as $F = M \oplus N$.
- A finitely generated D -module M is *reflexive* if $M \cong \text{hom}_D(\text{hom}_D(M, D), D)$.
- A finitely generated D -module M is *torsion-free* if $t(M) = \{m \in M \mid \exists p \neq 0, pm = 0\} = 0$. We call $t(M)$ the *torsion submodule* of M .

We have the following inclusions of D -modules:

$$(216) \quad \text{free} \subseteq \text{projective} \subseteq \dots \subseteq \text{reflexive} \subseteq \text{torsion-free}.$$

PROPOSITION 2.1. *Let M be a finitely generated left D -module determined by the operator \mathcal{D} and N the left D -module defined by \tilde{D} . We have the following propositions [119]:*

- M is a torsion-free D -module $\Leftrightarrow \text{ext}_D^1(N, D) = 0$.
- M is a reflexive D -module $\Leftrightarrow \text{ext}_D^i(N, D) = 0$, $i = 1, 2$.
- M is a projective D -module $\Leftrightarrow \text{ext}_D^i(N, D) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Let us notice that, if $n = 1$, then any torsion-free D -module is projective. It has been shown in [104, 119] that the notions of torsion-freeness and projectiveness were the intrinsic formulation of the notion of *minor left coprimeness* and *zero minor coprimeness*, used in multidimensional systems theory [163, 164, 160, 168], for matrices with maximal generic rank.

THEOREM 2.2. – *If D is a principal ideal ring (for example $D = K[\frac{d}{dt}]$), then any torsion-free D -module is free.*

- *If k is the field of constants, i.e. $\forall a \in k : d_i a = 0$, then any projective $D = k[d_1, \dots, d_n]$ -module is free.*

The first point is a well-known result and one can find the proof in any textbook on module theory. The second point is the famous and difficult Quillen-Suslin theorem (see e.g. [135] for a proof).

EXAMPLE 2.1. Let $\mathcal{D} : \xi \rightarrow \eta$ be defined by

$$\begin{cases} \partial_{12} \xi = \eta^1, \\ \partial_{22} \xi = \eta^2, \end{cases}$$

$D = \mathbb{R}[d_1, d_2]$ and let $M = D/D^2 \begin{pmatrix} d_1 d_2 \\ d_2^2 \end{pmatrix}$ be the D -module determined by \mathcal{D} . Let us check whether or not $\text{ext}_D^1(M, D)$ is equal to zero. We first find that the compatibility condition of $\mathcal{D} \xi = \eta$ is given by $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$ defined by $\partial_1 \eta^2 - \partial_2 \eta^1 = \zeta$. Its adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \lambda \rightarrow \mu$, obtained by multiplying \mathcal{D}_1 on the left by a row vector λ and integrating by parts, is defined by:

$$\begin{cases} \partial_2 \lambda = \mu_1, \\ -\partial_1 \lambda = \mu_2. \end{cases}$$

The compatibility conditions $\tilde{\mathcal{D}}' : \mu \rightarrow \nu$ of $\tilde{\mathcal{D}}_1$ are generated by

$$\partial_1 \mu_1 + \partial_2 \mu_2 = \nu',$$

whereas the adjoint $\tilde{\mathcal{D}}$ of \mathcal{D} is defined by:

$$\partial_{12} \mu_1 + \partial_{22} \mu_2 = \nu.$$

Thus, $\tilde{\mathcal{D}}$ does not generate all the compatibility conditions of $\tilde{\mathcal{D}}_1$ and we have the relation

$$\partial_2 \nu' = \nu.$$

We let the reader check by himself that the left D -module determined by the operator $\tilde{\mathcal{D}}$ is not a torsion-free D -module and $z = \partial_1 \mu_1 + \partial_2 \mu_2$ is a torsion element because it satisfies the equation $\partial_2 z = 0$.

EXAMPLE 2.2. We let the reader check by himself that the sequence of compatibility conditions of the operator $\mathcal{D} : \xi \rightarrow \eta$, defined by the gradient in \mathbb{R}^3 , i.e. $\nabla \xi = \eta$, is formed respectively by the curl and the divergence operator. Moreover, we can easily verify that, up to a sign, the differential sequence is self-adjoint, i.e. the formal adjoint of the gradient is minus the divergence... Now, if we start with the divergence operator and call $M = D^3/D(d_1 \ d_2 \ d_3)$, the corresponding left D -module, then we easily verify that $\text{ext}_D^1(N, D) = 0$ because the divergence is parametrized by the curl, $\text{ext}_D^2(N, D) = 0$ because the curl is parametrized by the gradient and $\text{ext}_D^3(N, D) = D/D^3(d_1 \ d_2 \ d_3)^t \neq 0$ because the gradient is not a formally injective operator. Hence, using proposition 2.1, we obtain that the D -module M is reflexive but not projective. Similarly, one can prove that the D -module determined by the curl is only torsion-free and the gradient determines a torsion D -module.

EXAMPLE 2.3. Let us consider the operator $\mathcal{D} : \xi \rightarrow \eta$ defined by

$$\partial_1 \xi^1 + \partial_2 \xi^2 - x^2 \xi^1 = \eta,$$

$D = \mathbb{R}(x^1, x^2)[d_1, d_2]$ and let $M = D^2/D \begin{pmatrix} d_1 - x^2 \ d_2 \end{pmatrix}$ be the left D -module determined by \mathcal{D} . Let us determine the algebraic nature of M . First of all, we have to notice that \mathcal{D} is *formally*

surjective, i.e. \mathcal{D} has no compatibility conditions. The operator $\tilde{\mathcal{D}} : \mu \rightarrow \nu$ is defined by:

$$(217) \quad \begin{cases} -\partial_1 \mu - x^2 \mu = \nu_1, \\ -\partial_2 \mu = \nu_2. \end{cases}$$

We easily verify that we have $\mu = \partial_1 \nu_2 - \partial_2 \nu_1 + x^2 \nu_2$, which implies that $\tilde{\mathcal{D}}$ is an injective operator. Let us define the operator $\tilde{\mathcal{P}} : \nu \rightarrow \mu$ by $\partial_1 \nu_2 - \partial_2 \nu_1 + x^2 \nu_2 = \mu$, then $\tilde{\mathcal{P}} \circ \tilde{\mathcal{D}} = \text{id}_{\tilde{F}}$, i.e. $\tilde{\mathcal{P}}$ is a left-inverse of $\tilde{\mathcal{D}}$. The $\wedge^n T \otimes_K D$ -morphism $\tilde{\mathcal{D}} : \wedge^n T \otimes_K D^m \rightarrow \wedge^n T \otimes_K D^{l_0}$ is then surjective because for all $a \in \wedge^n T \otimes_K D^{l_0}$, we can define $b = a \tilde{\mathcal{P}}$ and we easily verify that $a = b \tilde{\mathcal{D}}$. Hence, the left D -module N , defined by (214), verifies $N = \text{coker } \tilde{\mathcal{D}} = 0 \Rightarrow \text{ext}_D^1(N, D) = 0$, $i = 1, 2$ and M is projective by proposition 2.1. Dualizing the operator $\tilde{\mathcal{P}}$, we obtain a right-inverse \mathcal{P} of \mathcal{D} , i.e. $\mathcal{D} \circ \mathcal{P} = \text{id}_F$. We refer the reader to [118] for the applications of left and right-inverses to the generalized Bezout identity. Substituting the expression of μ in functions of ν_1 and ν_2 in (217), we obtain the operator $\tilde{\mathcal{D}}_{-1} : \nu \rightarrow \pi$ defined by:

$$\begin{cases} \partial_{11} \nu_2 - \partial_{12} \nu_1 + 2x^2 \partial_1 \nu_2 - x^2 \partial_2 \nu_1 + (x^2)^2 \nu_2 + \nu_1 = \gamma_1, \\ \partial_{12} \nu_2 - \partial_{22} \nu_1 + x^2 \partial_2 \nu_2 + 2\nu_2 = \gamma_2. \end{cases}$$

Dualizing $\tilde{\mathcal{D}}_{-1}$, we obtain $\mathcal{D}_{-1} : \theta \rightarrow \xi$ given by:

$$\begin{cases} -\partial_{22} \theta^2 - \partial_{12} \theta^1 + x^2 \partial_2 \theta^1 + 2\theta^1 = \xi^1, \\ \partial_{12} \theta^2 + \partial_{11} \theta^1 - x^2 \partial_2 \theta^2 - 2x^2 \partial_1 \theta^1 + (x^2)^2 \theta^1 + \theta^2 = \xi^2. \end{cases}$$

We let the reader check by himself that the compatibility conditions of $\mathcal{D}_{-1} \theta = \xi$ are exactly generated by the operator $\mathcal{D} \xi = 0$. Hence, \mathcal{D} is parametrized by \mathcal{D}_{-1} in agreement with the fact that any projective module is torsion-free.

3. Optimal Control

We first recall how the preceding section can be used for the analysis of control systems. We refer the reader to [113, 118, 119] for more details and examples.

3.1. Controllability. In agreement with the notion of controllability used in multidimensional control theory, we have the following definition [104, 113, 160, 168]:

DEFINITION 3.1. A control system, described by the operator $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$, is *controllable* if the module M determined by \mathcal{D}_1 is a torsion-free D -module.

By Proposition 2.1, a control system, defined by the operator \mathcal{D}_1 , is controllable if and only if $\text{ext}_D^1(N, D) = 0$, where N is the left D -module determined by $\tilde{\mathcal{D}}_1$. In the case where the system is controllable, using theorem 2.1, we know that \mathcal{D}_1 can be parametrized by an operator \mathcal{D}_0 , i.e. \mathcal{D}_1 represents exactly all the compatibility conditions of \mathcal{D}_0 . If we want to check whether or not a system is controllable and to compute effectively the operator \mathcal{D}_0 or the torsion elements, we have to proceed in the following way:

Controllability test:

1. Start with \mathcal{D}_1 .
2. Construct its adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1$.
3. Find the compatibility conditions of $\tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = \mu$ and denote this operator by $\tilde{\mathcal{D}}_0$.

4. Construct its adjoint $\mathcal{D}_0 (= \tilde{\mathcal{D}}_0)$.
5. Find the compatibility conditions of $\mathcal{D}_0 \xi = \eta$ and call this operator \mathcal{D}'_1 .

This leads to two different cases:

- If \mathcal{D}_1 is exactly the compatibility conditions \mathcal{D}'_1 of \mathcal{D}_0 , then the system \mathcal{D}_1 determines a torsion-free D -module M and \mathcal{D}_0 is a parametrization of \mathcal{D}_1 .
- Otherwise, the operator \mathcal{D}_1 is among, but not exactly, the compatibility conditions of \mathcal{D}_0 and we shall write $\mathcal{D}_1 < \mathcal{D}'_1$. The torsion elements of M are all the new compatibility conditions modulo the equations $\mathcal{D}_1 \eta = 0$.

REMARK 3.1. For a matrix with polynomial entries and maximal generic rank, it is well-known that this matrix determines a torsion-free module if there is no common factor on all the maximal minors [104, 119, 160]. The above test can be used for more general systems (variable coefficients case, non surjective operator). Moreover, if the D -module is torsion-free, it gives effectively an explicit parametrization and, if the module is not torsion-free, it gives a basis of torsion elements.

EXAMPLE 3.1. We have seen in example 2.3 that, up to a change of notations, the system defined by $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$ by

$$\partial_1 \eta^1 + \partial_2 \eta^2 - x^2 \eta^1 = \zeta,$$

determines a projective D -module and thus is controllable. Moreover, we have found a parametrization $\mathcal{D}_0 : \xi \rightarrow \zeta$, defined by

$$\begin{cases} -\partial_{22} \xi^2 - \partial_{12} \xi^1 + x^2 \partial_2 \xi^1 + 2 \xi^1 = \eta^1, \\ \partial_{12} \xi^2 + \partial_{11} \xi^1 - x^2 \partial_2 \xi^2 - 2x^2 \partial_1 \xi^1 + (x^2)^2 \xi^1 + \xi^2 = \eta^2. \end{cases}$$

of \mathcal{D}_1 . This concept of parametrization generalizes the notion of *controller form* and *partial state* [81] to non surjective operator and to multidimensional systems. We refer the interested reader to [118, 121] for more details.

We use similarly the differential operator language to compute explicitly $\text{ext}_D^i(N, D)$ and, therefore, to know whether a multidimensional system determines a reflexive, ..., projective D -module. Applications of projective modules to generalized Bezout identity are shown in [118].

THEOREM 3.1. An OD control system defined by a surjective operator \mathcal{D}_1 , i.e. the operator \mathcal{D}_1 has no compatibility conditions, is controllable iff its adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is an injective operator, i.e. $\tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$.

PROOF. Let M be the $D = k[\frac{d}{dt}]$ -module determined by the surjective operator \mathcal{D}_1 . The left D -module N is then defined by:

$$0 \leftarrow N \leftarrow T \otimes_K D^l \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} T \otimes_K D^m.$$

If $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is an injective operator, then there exists an operator $\tilde{\mathcal{P}}_1 : \tilde{F}_1 \rightarrow \tilde{F}_0$ such that $\tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = \text{id}_{\tilde{F}_1}$. This implies that the operator $\tilde{\mathcal{D}}_1 : T \otimes_K D^m \rightarrow T \otimes_K D^{l_0}$ is surjective. Indeed, for all $a \in T \otimes_K D^{l_0}$, we define $b = a \tilde{\mathcal{P}}_1$ and we easily verify that $a = b \tilde{\mathcal{D}}_1$. Thus $N = \text{coker } \tilde{\mathcal{D}}_1 = 0 \Rightarrow \text{ext}_D^1(N, D) = 0 \Rightarrow M$ is a torsion-free D -module. Reciprocally, suppose that M is a torsion-free

D -module then, since D is a principal ideal ring, by theorem 2.2, M is a projective D -module. Thus, the sequence

$$0 \longrightarrow D^l \xrightarrow{\mathcal{D}_1} D^m \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

splits [135], i.e. there exists an operator $\mathcal{P}_1 : D^l \rightarrow D^m$ such that $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \text{id}_{D^l}$, that is to say, $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \text{id}_{F_1}$. Hence, $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is injective with left-inverse $\tilde{\mathcal{P}}_1$. Notice that, in this case, we have $N = 0$. \square

EXAMPLE 3.2. Let us consider the system in the Kalman form $-\dot{y} + A(t)y + B(t)u = 0$, where A is a square $n \times n$ matrix and B is $n \times m$. The OD surjective operator $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$, defined by $-\dot{\eta}^1 + A(t)\eta^1 + B(t)\eta^2 = \zeta$, determines a torsion-free D -module M iff M is projective. The adjoint operator $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \lambda \rightarrow \mu$ is given by:

$$\begin{cases} \dot{\lambda} + \lambda A(t) = \mu_1, \\ \lambda B(t) = \mu_2. \end{cases}$$

Differentiating the zero order equation and using the first one, we obtain that $\lambda(AB - \dot{B}) = 0 \Rightarrow \lambda(A^2B - \dot{A}B - 2A\dot{B} + \ddot{B}) = 0 \dots$. Therefore, the operator $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is injective, i.e. $N = 0 \Leftrightarrow M$ is projective, iff the rank over K of the controlability matrix $\text{rk}(B \ AB - \dot{B} \ \dots \ A^{n-1}B + \dots \dots)$ is equal to n . Of course, we can proceed similarly if A and B do not depend on the time t , and we recover the classical Kalman test. See [121] for more details.

The controllability of a linear multidimensional control system with variable or unknown coefficients may depend on some differential relations on the coefficients. We refer the reader to [117] where examples of trees of conditions are exhibited.

3.2. Linear Quadratic Case. In the course of the text, we shall use the following jet notation $\eta_q = (\eta_\mu, 0 \leq |\mu| \leq q)$. For example, if we take $X = \mathbb{R}$, i.e. in the OD case, we have $\eta_q = (\eta, \dots, \dot{\eta}, \dots, \eta^{(q)})$. Let us consider the differential operator $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$ of order q and the Lagrangian function

$$L(\eta_q) = \frac{1}{2} \eta_q^t R \eta_q,$$

where R is a symmetric matrix ($R_{k,l}^{\alpha,\beta} = R_{l,k}^{\beta,\alpha}$) with entries in K and $\eta = (\eta^k, 1 \leq k \leq m)$. Let us consider the problem of minimizing

$$\int L(\eta_q) dx,$$

with $dx = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, under the constraint

$$\mathcal{D}_1 \eta = 0.$$

The variation of the Lagrangian function is given by $\delta L(\eta_q) = \sum_{|\alpha| \leq q, 1 \leq k \leq m} \pi_k^\alpha \delta \eta_k^\alpha$, where

$$\pi_k^\alpha = \frac{\partial L(\eta_q)}{\partial \eta_k^\alpha} = \sum_{1 \leq l \leq m, |\beta| \leq q} R_{k,l}^{\alpha,\beta} \eta_l^\beta.$$

We define the operator $\mathcal{B} : \eta \rightarrow \mu$ by

$$\mathcal{B} \eta = \left(\sum_{|\alpha| \leq q} (-1)^{|\alpha|} d_\alpha \pi_k^\alpha \right) = \mu,$$

and for any section η of F_0 , $\mathcal{B}\eta$ belongs to $\tilde{F}_0 = \wedge^n T^* \otimes F_0^*$ and we have the following diagram:

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 \\ \downarrow \mathcal{B} & & \\ \tilde{F}_0 & & \end{array}$$

PROPOSITION 3.1. *The operator $\mathcal{B} : F_0 \rightarrow \tilde{F}_0$ is a self-adjoint operator, i.e. $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$.*

PROOF. We multiply $\mathcal{B}\eta$ on the left by a vector $\theta \in F_0$ and we integrate by parts, we obtain with implicit summation on the dumb indices:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}\eta, \theta \rangle &= (-1)^{|\alpha|} (d_\alpha \pi_k^\alpha) \theta^k = \pi_k^\alpha d_\alpha \theta^k + d(\cdot) \\ &= R_{k,l}^{\alpha,\beta} \eta_\beta^l d_\alpha \theta^k + d(\cdot) \\ &= R_{k,l}^{\alpha,\beta} \theta_\alpha^k \eta_\beta^l + d(\cdot) \\ &= ((-1)^{|\beta|} d_\beta \pi_l^\beta) \eta^l + d(\cdot) \\ &= \langle \eta, \mathcal{B}\theta \rangle + d(\cdot). \end{aligned}$$

Finally, we notice that $\widetilde{(\tilde{F}_0)} = F_0$. □

THEOREM 3.2. *The optimal system is given by*

$$(218) \quad \begin{cases} \mathcal{D}_1 \eta = 0, \\ \mathcal{B}\eta - \tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = 0. \end{cases}$$

where λ is a Lagrange multiplier. Moreover, if the compatibility condition of $\tilde{\mathcal{D}}_1$ are written by means of an operator $\tilde{\mathcal{D}}_0$ and if the sequence $\tilde{E} \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_0} \tilde{F}_0 \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} \tilde{F}_1$ is locally exact at \tilde{F}_0 , then the optimal system is

$$(219) \quad \begin{cases} \mathcal{D}_1 \eta = 0, \\ (\tilde{\mathcal{D}}_0 \circ \mathcal{B}) \eta = 0, \end{cases}$$

and we have the following diagram:

$$\begin{array}{ccccc} & & F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 \\ & \swarrow & \downarrow \mathcal{B} & & \\ \tilde{E} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_0} & \tilde{F}_0 & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} & \tilde{F}_1. \end{array}$$

PROOF. If we denote by λ a Lagrange multiplier, then we have:

$$\delta \int (L(\eta_q) - \lambda \mathcal{D}_1 \eta) dx = \int (\mathcal{B}\eta - \tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda) \delta \eta dx + \dots$$

Accordingly, a necessary condition of optimality is:

$$(220) \quad \mathcal{B}\eta - \tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = 0,$$

and we obtain (218). Eliminating the Lagrange multiplier by composing (220) on the left by $\tilde{\mathcal{D}}_0$, we obtain $(\tilde{\mathcal{D}}_0 \circ \mathcal{B}) \eta = 0$ and we have (219). Now, if we have (219) and the sequence $\tilde{E} \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_0} \tilde{F}_0 \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} \tilde{F}_1$ is locally exact at \tilde{F}_0 , then we have $\tilde{\mathcal{D}}_0 \circ \mathcal{B}\eta = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_0(\mathcal{B}\eta) = 0$ and thus $\exists \lambda \in \tilde{F}_0$ such that $\mathcal{B}\eta - \tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = 0$. It leads back to (218). □

EXAMPLE 3.3. Let us minimize

$$\int \frac{1}{2}((\eta^1)^2 + (\eta^2)^2) dx,$$

under the constraint:

$$\partial_1 \eta^1 + \partial_2 \eta^2 - x^2 \eta^1 = 0.$$

The operator $B : F_0 \rightarrow \tilde{F}_0$ is defined by $B\eta = \eta$ and the adjoint \tilde{D}_1 of D_1 is (see example 2.3):

$$\begin{cases} -\partial_1 \lambda - x^2 \lambda = \mu_1, \\ -\partial_2 \lambda = \mu_2. \end{cases}$$

Thus, the optimal system has to satisfy:

$$\begin{cases} \partial_1 \eta^1 + \partial_2 \eta^2 - x^2 \eta^1 = 0, \\ \eta^1 + \partial_1 \lambda + x^2 \lambda = 0, \\ \eta^2 + \partial_2 \lambda = 0. \end{cases}$$

We have seen in example 2.3 that the operator $D_1 : \eta \rightarrow \partial_1 \eta^1 + \partial_2 \eta^2 - x^2 \eta^1 = \zeta$ determines a projective D -module and thus that the sequence $\tilde{E} \xleftarrow{\tilde{D}_0} \tilde{F}_0 \xleftarrow{\tilde{D}_1} \tilde{F}_1$ is locally exact at \tilde{F}_0 . The optimal system is equivalently given by:

$$\begin{cases} \partial_{11} \eta^2 - \partial_{12} \eta^1 + 2x^2 \partial_1 \eta^2 - x^2 \partial_2 \eta^1 + (x^2)^2 \eta^2 + \eta^1 = 0, \\ \partial_{12} \eta^2 - \partial_{22} \eta^1 + x^2 \partial_2 \eta^2 + 2\eta^2 = 0, \\ \partial_1 \eta^1 + \partial_2 \eta^2 - x^2 \eta^1 = 0. \end{cases}$$

We let the reader check by himself that the above system is formally integrable (see [113] for more details) and that its solution space depends on two arbitrary functions of one variable.

THEOREM 3.3. *If the control system D_1 is controllable, that is parametrizable by an operator $D_0 : E \rightarrow F_0$ in such a way that the sequences $\tilde{E} \xleftarrow{\tilde{D}_0} \tilde{F}_0 \xleftarrow{\tilde{D}_1} \tilde{F}_1$ and $E \xrightarrow{D_0} F_0 \xrightarrow{D_1} F_1$ are locally exact at \tilde{F}_0 and F_0 , then the optimal system is given by:*

$$(221) \quad \begin{cases} \mathcal{A} \xi = 0, \\ \mathcal{D}_0 \xi = \eta, \end{cases}$$

where \mathcal{A} is defined by

$$(222) \quad \mathcal{A} = \tilde{D}_0 \circ B \circ D_0,$$

and we have the following diagram:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{D_0} & F_0 & \xrightarrow{D_1} & F_1 \\ \mathcal{A} \downarrow & & \downarrow B & & \\ \tilde{E} & \xleftarrow{\tilde{D}_0} & \tilde{F}_0 & \xleftarrow{\tilde{D}_1} & \tilde{F}_1. \end{array}$$

PROOF. Let us show the equivalence between (219) and (221). Suppose that (219) is satisfied, then we have $D_1 \eta = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}_0 \xi = \eta$ because the sequence formed by D_0 and D_1 is a locally exact at F_0 . Moreover, $(\tilde{D} \circ B) \eta = (\tilde{D}_0 \circ B \circ D_0) \xi = \mathcal{A} \xi = 0$ and (219) and (221) are equivalent. \square

REMARK 3.2. Such an assumption gives the possibility to transfer a variational problem for η with constraint into a variational problem for ξ without any constraint.

COROLLARY 3.1. *If the control system \mathcal{D}_1 determines a projective D -module M , then the optimal system is determined by (221) where \mathcal{A} is defined by (222). This is in particular the case if \mathcal{D}_1 is a controllable OD system.*

PROOF. If \mathcal{D}_1 determines a projective D -module M , then the operator \mathcal{D}_1 can be parametrized by an operator \mathcal{D}_0 such that the two following sequences $\tilde{E} \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_0} \tilde{F}_0 \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} \tilde{F}_1$ and $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$ are locally exact at \tilde{F}_0 and F_0 respectively and thus we have the result. If \mathcal{D}_1 is an OD control system, then M is a torsion-free D -module and thus a projective one because $D = k[\frac{d}{dt}]$ is a principal ideal ring. \square

REMARK 3.3. This result explains the importance of the controllability condition of an OD control system in the study of the variational formulation of an optimal control problem. In the PD case, the controllability is a necessary condition but, in general, not a sufficient one, whereas the fact that the D -module M , determined by the control system, is projective is a sufficient condition but not a necessary one because, for example, the Poincaré sequence, induced by the exterior derivative, is a locally exact sequence [113] but none of its operators determines a projective module.

EXAMPLE 3.4. Let us take back example 3.3. The operator \mathcal{D}_1 determines a projective D -module and thus the sequence $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$ is locally exact at F_0 . The optimal system is then defined by $\mathcal{A}\xi = 0$ but in this case, as $\mathcal{B} = \text{id}$, it follows that, with a slight abuse of language, we can write $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{D}}_0 \circ \mathcal{D}_0$ and the fourth order square operator \mathcal{A} is trivially self-adjoint.

EXAMPLE 3.5. Let us denote by $s = \frac{d}{dt}$ and let the control system be defined by

$$D(s)y + N(s)u = 0,$$

with $\det D(s) \neq 0$, and $(D(s) \ N(s))$ left-coprime, i.e. controllable. Thus, the operator $\mathcal{D}_1 : (y \ u) \rightarrow \zeta$, defined by

$$D(s)y + N(s)u = \zeta$$

has a right-inverse and the $D = \mathbb{R}[s]$ -module M determined by \mathcal{D}_1 is a projective D -module (see example 217 and see [118] for more details). But, $D = \mathbb{R}[s]$ is a principal ideal domain and thus M is a free D -module, i.e. \mathcal{D}_1 admits an injective parametrization \mathcal{D}_0 , which is in fact the *controller form*

$$\begin{cases} \overline{N}(s)\xi = y, \\ \overline{D}(s)\xi = u, \end{cases}$$

where ξ is the basis of M , called the *partial state* [81]. The adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_0 : (\mu_1, \mu_2) \rightarrow \nu$ of \mathcal{D}_0 is defined by:

$$\overline{N}(-s)^t \mu_1 + \overline{D}(-s)^t \mu_2 = \nu$$

Now, let us find the optimal system minimizing

$$\int \frac{1}{2} \eta^t R \eta dt,$$

where $\eta = (y, u)^t$ and R is a symmetric matrix. We easily check that $\mathcal{B} = R$. Finally, we obtain:

$$\tilde{\mathcal{D}}_0 \circ \mathcal{B} = (\overline{N}(-s)^t \ \overline{D}(-s)^t) \circ R,$$

and the operator $\mathcal{A} : \xi \rightarrow \nu$ is defined by:

$$(223) \quad (\bar{N}(-s)^t \bar{D}(-s)^t) \circ R \circ \begin{pmatrix} \bar{N}(s) \\ \bar{D}(s) \end{pmatrix} \xi = \nu.$$

In particular, if we take $R = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$, where S is a symmetric and definite positive matrix acting on the inputs, we find that the dynamics of the optimal system is given by: (compare with [81] where one needs many technical results on determinants of matrices):

$$(\bar{N}(-s)^t \circ \bar{N}(s) + \bar{D}(-s)^t \circ S \circ \bar{D}(s)) \xi = 0.$$

COROLLARY 3.2. *The operator $\mathcal{A} : E \rightarrow \tilde{E}$ defined by (221) is self-adjoint, i.e. $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.*

PROOF. We have:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{D}}_0 \circ \widetilde{\mathcal{B}} \circ \mathcal{D}_0 = \tilde{\mathcal{D}}_0 \circ \tilde{\mathcal{B}} \circ \mathcal{D}_0 = \mathcal{A},$$

because we know from Proposition 3.1 that \mathcal{B} is a self-adjoint operator, i.e. $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$. \square

EXAMPLE 3.6. We take again example 3.5. We have seen that the dynamics of the optimal system is given by $\mathcal{A}\xi = 0$, where \mathcal{A} is defined by (223). We easily verified that \mathcal{A} was a self-adjoint operator. If we denote by $\Delta(s) = (\bar{N}(-s)^t \bar{D}(-s)^t) \circ R \circ \begin{pmatrix} \bar{N}(s) \\ \bar{D}(s) \end{pmatrix}$ and $\delta(s) = \det \Delta(s)$, thus we have:

$$\begin{aligned} \delta(s) &= \det (\Delta(s)^t) \\ &= \det (\Delta(-s)) \\ &= \delta(-s). \end{aligned}$$

Hence, if there exists $s_0 \in \mathbb{C}$ such that $\delta(s_0) = 0$, then $\delta(-s_0) = 0$, showing that the eigenvalues of the dynamics $\mathcal{A}\xi = 0$ are symmetric with respect to the real axis.

PROPOSITION 3.2. *If the operator $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$ is surjective and determines a projective D -module M , then we can express λ as differential combination of η , i.e. $\lambda = (\tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \mathcal{B})\eta$, where $\tilde{\mathcal{P}}_1$ is a left-inverse of the injective operator $\tilde{\mathcal{D}}_1$. The operator $\tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \mathcal{B} : F_0 \rightarrow \tilde{F}_1$ allows to observe λ and we have the diagram:*

$$\begin{array}{ccccc} F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 & \longrightarrow & 0 \\ \mathcal{B} \downarrow & & \searrow & & \\ \tilde{F}_0 & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} & \tilde{F}_1 & \longleftarrow & 0 \\ & & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{P}}_1} & & \end{array}$$

PROOF. The fact that the operator \mathcal{D}_1 is surjective and that it determines a projective D -module implies that $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is an injective operator and thus $\tilde{\mathcal{D}}_1$ admits a left-inverse $\tilde{\mathcal{P}}_1$, i.e. $\tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = \text{id}_{\tilde{F}_1}$. Accordingly, we have $\mathcal{B}\eta = \tilde{\mathcal{D}}_1\lambda \Rightarrow \lambda = (\tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \mathcal{B})\eta$. \square

REMARK 3.4. In the OD case, a control system defined by a surjective operator \mathcal{D}_1 is controllable if and only if $\tilde{\mathcal{D}}_1$ is injective.

EXAMPLE 3.7. We take back example 3.3. We have seen in example 2.3 that \tilde{D}_1 was an injective operator and that \tilde{D}_1 had a left-inverse $\tilde{P}_1 : \mu \rightarrow \lambda$ defined by:

$$\partial_2 \mu_1 + \partial_1 \mu_2 - x^2 \mu_2 = \lambda.$$

Thus, the equation $\tilde{P}_1 \circ B : \eta \rightarrow \lambda$ is defined by:

$$\partial_2 \eta^1 + \partial_1 \eta^2 - x^2 \eta^2 = \lambda.$$

The following particular case is motivated by elasticity theory as we shall see later on and by the fact that we closed the diagram of theorem 3.3 on the left and not on the right.

PROPOSITION 3.3. *If the operator $B : F_0 \rightarrow \tilde{F}_0$ is invertible, then the optimal system is given by:*

$$(224) \quad \begin{cases} C\lambda = 0, \\ (B^{-1} \circ \tilde{D}_1)\lambda = \eta. \end{cases}$$

where C is defined by:

$$(225) \quad C = \mathcal{D}_1 \circ B^{-1} \circ \tilde{D}_1,$$

and we have the following diagram:

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 \\ B \downarrow \uparrow B^{-1} & & \uparrow C \\ \tilde{F}_0 & \xleftarrow{\tilde{D}_1} & \tilde{F}_1. \end{array}$$

In particular, it is the case if \mathcal{D}_1 is a first order operator (e.g. Kalman system) and $B = R$ a non negative square matrix with constant entries.

PROOF. We have seen that the optimal system is given by:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 \eta = 0, \\ B\eta - \tilde{D}_1 \lambda = 0, \end{cases}$$

From the second equation, we obtain $\eta = (B^{-1} \circ \tilde{D}_1)\lambda$, and thus $\mathcal{D}_1 \eta = (\mathcal{D}_1 \circ B^{-1} \circ \tilde{D}_1)\lambda = 0$ and we obtain (224). Reciprocally, if we have (224), then $0 = C\lambda = (\mathcal{D}_1 \circ B^{-1} \circ \tilde{D}_1)\lambda = \mathcal{D}_1 \eta$, which concludes the proof. \square

We let the reader do the computations for Kalman systems and invertible cost.

EXAMPLE 3.8. We take back example 3.3. The operator $B : F_0 \rightarrow \tilde{F}_0$ is invertible and $B^{-1}\mu = \eta$. Thus, the operator $C : \tilde{F}_1 \rightarrow F_1$ is defined by

$$\Delta \lambda - (x^2)^2 \lambda = 0.$$

The optimal system is governed by the following system:

$$\begin{cases} \Delta \lambda - (x^2)^2 \lambda = 0, \\ \eta^1 = -\partial_1 \lambda - x^2 \lambda, \\ \eta^2 = -\partial_2 \lambda. \end{cases}$$

We find back that the optimal problem only depends on two arbitrary functions of one variable needed for integrating the first equation above.

Let us finish with the *Riccati equation and integrability conditions*. We have seen that if we start with a control system $\mathcal{D}_1 \eta = 0$, then resolving the variational problem associated with the optimal control problem adds the new equations $\tilde{B} \eta - \tilde{D}_1 \lambda = 0$ (see theorem 3.2) and the new system becomes (219). The solution of (218) does not depend, in general, on arbitrary functions of n variables, i.e. the module determined by (218) is a torsion D -module, i.e. the system (218) is determined. If we add new equations in η and λ to the system (218), then there exists a new solution if and only if some integrability conditions are satisfied (see [117] for trees of integrability conditions). This is the way which leads to the Riccati equation: let us find the solution of

$$\min \int \frac{1}{2} (x \ u)^t \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} dt,$$

where R is a definite positive matrix, Q is a positive one while x and u satisfy the Kalman system:

$$\dot{x} - Ax - Bu = 0.$$

We obtain the following system:

$$\begin{cases} \dot{x} - Ax - Bu = 0, \\ \dot{\lambda} + A^t \lambda + Qx = 0, \\ Ru + B^t \lambda = 0. \end{cases}$$

Using the fact that R is invertible, we have:

$$\begin{cases} \dot{x} - Ax - BR^{-1}B^t \lambda = 0, \\ \dot{\lambda} + A^t \lambda + Qx = 0, \\ -R^{-1}B^t \lambda = u. \end{cases}$$

The system in x and λ is determined and thus, if we add to this system the new equation $\lambda - Px = 0$ as a kind of feedback for the total system, *it becomes non formally integrable*, i.e. we cannot find step by step the solution of the system as a formal power series (see for more informations [113, 118]). Indeed, if we differentiate the zero order equation and take into account the other equations, we find the following new zero order equation:

$$(\dot{P} + A^t P + PA - PBR^{-1}B^t P + Q)x = 0.$$

Hence, the system

$$\begin{cases} \dot{x} - Ax - BR^{-1}B^t \lambda = 0, \\ \dot{\lambda} + A^t \lambda + Qx = 0, \\ -R^{-1}B^t \lambda = u, \\ \lambda - Px = 0, \end{cases}$$

has a solution different from zero iff the following integrability condition on P is satisfied

$$\dot{P} + A^t P + PA - PBR^{-1}B^t P + Q = 0,$$

that is the Riccati equation for P . In this case, we can rewrite the system of equations as:

$$\begin{cases} \dot{P} + A^t P + PA - PBR^{-1}B^t P + Q = 0, \\ \dot{x} - (A - BR^{-1}B^t P)x = 0, \\ -R^{-1}B^t P x = u, \\ Px = \lambda. \end{cases}$$

We have recently shown in [117, 121] that the controllability of a system with indetermined coefficients depended on trees of integrability conditions on the coefficients. The same thing may happen in optimal control and we provide an illustrative example.

EXAMPLE 3.9. Let us consider the following system

$$\min \int \frac{1}{2}(y^2 - u^2) dt,$$

where y and u satisfy the system

$$\dot{y} + ay - \dot{u} - u = 0,$$

in which a is a constant coefficient. The system (218) is given by:

$$\begin{cases} \dot{\lambda} - a\lambda + y = 0, \\ -\dot{\lambda} + \lambda - u = 0, \\ \dot{y} + ay - \dot{u} - u = 0. \end{cases}$$

Let us eliminate λ in order to find (219): summing the first two equations, we obtain the new zero order equation $(1 - a)\lambda = u - y$. Therefore, two cases may happen depending on the value of the parameter a :

1. if $a = 1$, then $y - u = 0$ and the optimal system is thus given by:

$$\begin{cases} \dot{y} + y - \dot{u} - u = 0, \\ y - u = 0, \end{cases}$$

i.e. $y - u = 0$.

2. if $a \neq 1$, then $\lambda = (y - u)/(a - 1)$ and, after substituting, we get:

$$\begin{cases} \dot{y} + ay - \dot{u} - u = 0, \\ \dot{y} - y - \dot{u} + au = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y} + ay - \dot{u} - u = 0, \\ (a + 1)(y - u) = 0. \end{cases}$$

We are led to new integrability conditions:

- (a) if $a = -1$, then the optimal system is given by the only equation $\dot{y} + ay - \dot{u} - u = 0$. In fact, we can notice that in this case a parametrization $\mathcal{D}_0 : \xi \rightarrow (y, u)$ of the system is given by:

$$\begin{cases} \dot{\xi} + \xi = y, \\ \dot{\xi} - \xi = u, \end{cases}$$

and thus $\frac{1}{2}(y^2 - u^2) = 2\xi\dot{\xi} = \frac{d}{dt}(\xi^2)$.

- (b) if $a \neq -1$, then the only solution is $y = 0 = u$.

We notice that the condition $a \neq 1$ is, in fact, the condition on a for the system to be controllable (if $a = 1$, the element $z = y - u$ satisfies $(\frac{d}{dt} + 1)z = 0$).

4. Applications

We show in this section how all the preceding sections can be used for applications, specially in elasticity theory.

4.1. Elasticity Theory. Let us denote the displacement in \mathbb{R}^n by $\xi = (\xi^i)_{1 \leq i \leq n}$ and contract the index of ξ^i by the euclidean metric $\omega_{ij} = \omega_{ji} = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$, of \mathbb{R}^n in order to lower the index with $\xi_i = \omega_{ij} \xi^j$. The so-called small strain tensor is then given by the operator

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\cdot)\omega : T &\longrightarrow S_2 T^*, \\ \xi &\longrightarrow (\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}(\xi)\omega)_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i))_{1 \leq i, j \leq n} \end{aligned}$$

where \mathcal{L} is the Lie derivative of the euclidean metric. Let us only consider the case $n = 2$. Thus, the small strain tensor is given by

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \partial_1 \xi_1, \\ \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{1}{2}(\partial_1 \xi_2 + \partial_2 \xi_1), \\ \epsilon_{22} = \partial_2 \xi_2. \end{cases}$$

This system has only one compatibility condition of order two, namely

$$(226) \quad \partial_{11} \epsilon_{22} + \partial_{22} \epsilon_{11} - 2 \partial_{12} \epsilon_{12} = 0,$$

and we have the following sequence of differential operators

$$(227) \quad 0 \longrightarrow \Theta \longrightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \longrightarrow 0,$$

where $E = T$, $F_0 = S_2 T^*$, Θ is the field of small rigid displacements and $\mathcal{D}_0 \xi = \frac{1}{2}(\mathcal{L}(\xi)\omega)$. In the spirit of Poincaré, this sequence is only based on geometry whereas the adjoint sequence, i.e. the sequence formed by the adjoint operators, gives the physics. Indeed, the adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_0 : \sigma \rightarrow f$ of the operator \mathcal{D}_0 is defined by multiplying ϵ by σ and integrating by parts, i.e.

$$\begin{aligned} \sigma^{11} \epsilon_{11} + \sigma^{12} \epsilon_{12} + \sigma^{21} \epsilon_{21} + \sigma^{22} \epsilon_{22} &= \sigma^{11} \epsilon_{11} + 2 \sigma^{12} \epsilon_{12} + \sigma^{22} \epsilon_{22} \\ &= -(\partial_1 \sigma^{11} + \partial_2 \sigma^{12}) \xi_1 - (\partial_1 \sigma^{12} + \partial_2 \sigma^{22}) \xi_2 + \dots \end{aligned}$$

where we have supposed that $\sigma^{12} = \sigma^{21}$. Thus, up to a sign, $-\tilde{\mathcal{D}}_0 : \sigma \rightarrow f$ is given by

$$(228) \quad \begin{cases} \partial_1 \sigma^{11} + \partial_2 \sigma^{12} = f^1, \\ \partial_1 \sigma^{12} + \partial_2 \sigma^{22} = f^2, \end{cases}$$

where σ is the stress tensor and f is a density of forces. Similarly, the adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1$ of the operator \mathcal{D}_1 is obtained by multiplying (226) by λ and integrating by parts

$$\lambda(\partial_{11} \epsilon_{22} + \partial_{22} \epsilon_{11} - 2 \partial_{12} \epsilon_{12}) = \partial_{11} \lambda \epsilon_{22} + \partial_{22} \lambda \epsilon_{11} - 2 \partial_{12} \lambda \epsilon_{12} + \dots$$

and thus $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \lambda \rightarrow \sigma$ is given by:

$$(229) \quad \begin{cases} \partial_{22} \lambda = \sigma^{11}, \\ -\partial_{12} \lambda = \sigma^{12}, \\ \partial_{11} \lambda = \sigma^{22}, \end{cases}$$

and we check easily that all the compatibility conditions of $\tilde{\mathcal{D}}_1$ are generated by $\tilde{\mathcal{D}}_0$ or $-\tilde{\mathcal{D}}_0$. We find back the well-known parametrization of the stress tensor by the Airy function λ . Finally, we have the formally exact sequence:

$$(230) \quad 0 \longleftarrow \tilde{E} \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_0} \tilde{F}_0 \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} \tilde{F}_1.$$

In fact, it can be shown that the sequence (227) is locally equivalent to the Poincaré sequence $\wedge^0 T^* \xrightarrow{d} \wedge^1 T^* \xrightarrow{d} \wedge^2 T^* \longrightarrow 0$ (see [113]), which is a locally exact and self-adjoint sequence.

Hence, the sequences (227) et (230) are locally exact. Moreover, the Poincaré sequence being a self-adjoint sequence, this is the reason why the kernel Θ of the operator \mathcal{D}_0 and the kernel Ω of $\tilde{\mathcal{D}}_1$ both depend on three arbitrary constants. Finally, we can link these two differential sequences with the constitutive law, namely the Hooke law $\mathcal{B} : \epsilon \rightarrow \sigma$, defined by

$$\begin{cases} \sigma^{11} = (\alpha + 2\beta)\epsilon_{11} + \alpha\epsilon_{22}, \\ \sigma^{12} = \sigma^{21} = 2\beta\epsilon_{12}, \\ \sigma^{22} = \alpha\epsilon_{11} + (\alpha + 2\beta)\epsilon_{22}, \end{cases}$$

where (α, β) are the Lamé constants and we obtain the following locally exact diagram:

$$(231) \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Theta & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\mathcal{D}_0} & F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \downarrow \mathcal{B} & & & & \\ & & & & 0 & \longleftarrow & \tilde{E} & \xleftarrow{-\tilde{\mathcal{D}}_0} & \tilde{F}_0 & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} & \tilde{F}_1 & \longleftarrow & \Omega & \longleftarrow & 0. \end{array}$$

With such a diagram, we naturally want to associate the operator $\mathcal{A} = -\tilde{\mathcal{D}}_0 \circ \mathcal{B} \circ \mathcal{D}_0 : E \rightarrow \tilde{E}$ to it. Now, let us notice that \mathcal{B} is a symmetric matrix, i.e. $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$, and thus \mathcal{A} is a self-adjoint operator. This fact can easily be verified on the direct expression of the operator \mathcal{A}

$$\begin{cases} (\alpha + 2\beta)\partial_{11}\xi_1 + \beta\partial_{22}\xi_1 + (\alpha + \beta)\partial_{12}\xi_2 = f^1, \\ (\alpha + \beta)\partial_{12}\xi_1 + \beta\partial_{11}\xi_2 + (\alpha + 2\beta)\partial_{22}\xi_2 = f^2, \end{cases}$$

or equivalently on the so-called Navier equations:

$$\begin{cases} (\alpha + \beta)\partial_1(\partial_1\xi_1 + \partial_2\xi_2) + \beta\Delta\xi_1 = f^1, \\ (\alpha + \beta)\partial_2(\partial_1\xi_1 + \partial_2\xi_2) + \beta\Delta\xi_2 = f^2. \end{cases}$$

The Hook law is in fact invertible and the operator \mathcal{B}^{-1} is given by

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \frac{(\alpha + 2\beta)}{4\beta(\alpha + \beta)}\sigma^{11} - \frac{\alpha}{4\beta(\alpha + \beta)}\sigma^{22}, \\ \epsilon_{12} = \frac{1}{2\beta}\sigma^{12}, \\ \epsilon_{22} = -\frac{\alpha}{4\beta(\alpha + \beta)}\sigma^{11} + \frac{(\alpha + 2\beta)}{4\beta(\alpha + \beta)}\sigma^{22}. \end{cases}$$

and thus, we have an operator $\mathcal{C} = \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{B}^{-1} \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 : \tilde{F}_1 \rightarrow F_1$, defined by:

$$\frac{(\alpha + 2\beta)}{4\beta(\alpha + \beta)}\Delta\Delta\lambda = \zeta.$$

Finally, we can sum up the different operators by the following locally exact diagram :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Theta & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\mathcal{D}_0} & F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \mathcal{A} & & \downarrow \mathcal{B} & & \uparrow \mathcal{C} & & \\ & & & & 0 & \longleftarrow & \tilde{E} & \xleftarrow{-\tilde{\mathcal{D}}_0} & \tilde{F}_0 & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} & \tilde{F}_1 & \longleftarrow & \Omega & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

To finish this section, let us connect the above results to controllability of multidimensional systems. We can conclude, from the controllability test and what precedes, that the operator \mathcal{D}_1 determines a torsion-free D -module M , with \mathcal{D}_0 as a parametrization (it is not surprising because,

by definition, \mathcal{D}_1 is the compatibility condition of \mathcal{D}_0). More surprisingly, we have proved that the D -module determined by the operator $\tilde{\mathcal{D}}_0$ is also a torsion-free module with parametrization given by the operator (229) and a "potential" λ called Airy function in this case.

4.1.1. *Case without forces.* In the case where there is no force, let us minimize the energy of deformation given by

$$\int \frac{1}{2} \epsilon^t \mathcal{B} \epsilon \, dx^1 dx^2,$$

under the constraint $\mathcal{D}_1 \epsilon = 0$. Introducing a new unknown λ as a Lagrange multiplier, it is equivalent to extremize the new integral

$$\int \left(\frac{1}{2} \epsilon^t \mathcal{B} \epsilon - \lambda \mathcal{D}_1 \epsilon \right) dx^1 dx^2,$$

where the ϵ are now considered as independent variables. Thus, by theorem 3.2, we have to solve the system

$$(232) \quad \begin{cases} \mathcal{D}_1 \epsilon = 0, \\ \mathcal{B} \epsilon - \tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = 0, \end{cases}$$

or, in another words, the system:

$$\begin{cases} \partial_{11} \epsilon_{22} + \partial_{22} \epsilon_{11} - 2 \partial_{12} \epsilon_{12} = 0, \\ (\alpha + 2\beta) \epsilon_{11} + \alpha \epsilon_{22} - \partial_{22} \lambda = 0, \\ 2\beta \epsilon_{12} + \partial_{12} \lambda = 0, \\ \alpha \epsilon_{11} + (\alpha + 2\beta) \epsilon_{22} - \partial_{11} \lambda = 0, \end{cases}$$

We can solve $\epsilon = (\mathcal{B}^{-1} \circ \tilde{\mathcal{D}}_1) \lambda$ in the first equation of (232), and, substituting it in the second, we obtain $\mathcal{C} \lambda = (\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{B}^{-1} \circ \tilde{\mathcal{D}}_1) \lambda = 0$. Finally, we have to solve the following system:

$$\begin{cases} \Delta \Delta \lambda = 0, \\ \epsilon_{11} = \frac{(\alpha + 2\beta)}{4\beta(\alpha + \beta)} \partial_{22} \lambda - \frac{\alpha}{4\beta(\alpha + \beta)} \partial_{11} \lambda, \\ \epsilon_{12} = -\frac{1}{2\beta} \partial_{12} \lambda, \\ \epsilon_{22} = -\frac{\alpha}{4\beta(\alpha + \beta)} \partial_{22} \lambda + \frac{(\alpha + 2\beta)}{4\beta(\alpha + \beta)} \partial_{11} \lambda. \end{cases}$$

and, from the first equation of the above system, λ is biharmonic.

Moreover, the sequence (227) is locally exact, therefore, as we saw in theorem 3.3, the solution of the equivalent unconstrained problem

$$\min \int \frac{1}{2} \xi^t (\tilde{\mathcal{D}}_0 \circ \mathcal{B} \circ \mathcal{D}_0) \xi \, dx^1 dx^2$$

is

$$\begin{cases} \mathcal{A} \xi = 0, \\ \mathcal{D}_0 \xi = \epsilon, \end{cases}$$

or equivalently, we have to solve a system of PDE only in the displacements ξ :

$$\begin{cases} (\alpha + \beta) \partial_1 (\partial_1 \xi_1 + \partial_2 \xi_2) + \beta \Delta \xi_1 = 0, \\ (\alpha + \beta) \partial_2 (\partial_1 \xi_1 + \partial_2 \xi_2) + \beta \Delta \xi_2 = 0, \\ \partial_1 \xi_1 = \epsilon_{11} \\ \frac{1}{2}(\partial_1 \xi_2 + \partial_2 \xi_1) = \epsilon_{12}, \\ \partial_2 \xi_2 = \epsilon_{22}. \end{cases}$$

4.1.2. *Forces coming from a potential.* If the force f comes from a potential ψ , i.e.

$$\begin{cases} f^1 = \partial_1 \psi, \\ f^2 = \partial_2 \psi, \end{cases}$$

then, from (228), we have the following system

$$(233) \quad \begin{cases} \partial_1 \sigma^{11} + \partial_2 \sigma^{12} - \partial_1 \psi = 0, \\ \partial_1 \sigma^{12} + \partial_2 \sigma^{22} - \partial_2 \psi = 0, \end{cases}$$

and, if we introduce by $\bar{\sigma}^{11} = \sigma^{11} - \psi$, $\bar{\sigma}^{12} = \sigma^{12}$ and $\bar{\sigma}^{22} = \sigma^{22} - \psi$, we find the new system without forces:

$$(234) \quad \begin{cases} \partial_1 \bar{\sigma}^{11} + \partial_2 \bar{\sigma}^{12} = 0, \\ \partial_1 \bar{\sigma}^{12} + \partial_2 \bar{\sigma}^{22} = 0, \end{cases}$$

Moreover, we have $\tilde{D}_0 \bar{\sigma} = 0 \iff \bar{\sigma} = \tilde{D}_1 \lambda$ because the differential sequence $\tilde{F}_1 \xrightarrow{\tilde{D}_1} \tilde{F}_0 \xrightarrow{\tilde{D}_0} \tilde{E}$ is locally exact at \tilde{F}_0 . Finally, we find the system

$$(235) \quad \begin{cases} \sigma^{11} = \partial_{22} \lambda + \psi, \\ \sigma^{12} = -\partial_{12} \lambda, \\ \sigma^{22} = \partial_{11} \lambda + \psi. \end{cases}$$

Therefore, solving the system (233), where σ satisfies $\epsilon = \mathcal{A} \sigma$ and $\mathcal{D}_1 \epsilon = 0$, is the same as solving the system (235) with $\epsilon = \mathcal{A} \sigma$ and $\mathcal{D}_1 \epsilon = 0$. Hence, we have to solve the following system of PDE

$$\Delta \Delta \lambda + \frac{\beta}{(\alpha + 2\beta)} \Delta \psi = 0,$$

and to substitute the result in (235) to obtain the corresponding stress tensor σ . As a matter of fact, when the only forces involved are of gravitational type, then $\Delta \psi = 0$, and we are brought back to the preceding situation.

5. Conclusion

We hope to have convinced the reader about the possibility to extend optimal control theory from the study of variational problems with linear ordinary differential constraints to variational problems with linear partial differential constraints. At the same time, we have explicitly stressed out the role of the controllability condition imposed on the control system as a differential constraint.

6. Compléments

La proposition suivante montre comment utiliser une factorisation spectrale de l'opérateur A pour stabiliser le système \mathcal{D}_1 suivant les valeurs propres et les vecteurs propres généralisés de la partie stable de la dynamique optimale [81].

PROPOSITION 6.1. Soient $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ un opérateur EDO définissant un système contrôlable et $\mathcal{D}_0 : E \rightarrow F_0$ une paramétrisation injective de \mathcal{D}_1 ayant \mathcal{P}_0 pour inverse à gauche. Supposons que nous ayons la factorisation spectrale suivante $A = \tilde{S} \circ S$, avec $S : E \rightarrow E'$ un opérateur carré définissant la dynamique stable de A . Alors, les contrôleurs $C_1 : F_0 \rightarrow E'$ définis par

$$C_1 = S \circ \mathcal{P}_0 + \mathcal{K} \circ \mathcal{D}_1,$$

où \mathcal{K} est un opérateur quelconque de $F_1 \rightarrow E'$, stabilise le système \mathcal{D}_1 suivant les valeurs propres et les vecteurs propres généralisés de la partie stable de la dynamique optimale A .

La preuve est évidente et utilise les techniques de placements de pôles développées au corollaire 2.2 du chapitre 5. L'exemple suivant, pris dans le livre de Kailath [81], illustre cette proposition ainsi que les corollaires 3.1 et 3.2.

EXEMPLE 6.1. Considérons le problème de minimiser

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2} (4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + u_1^2 + u_2^2) dt$$

sous la contrainte :

$$(236) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 + x_2 - u_1 = 0, \\ \dot{x}_2 - u_2 = 0. \end{cases}$$

Au système (236) correspond l'opérateur différentiel $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$, défini par :

$$\begin{cases} \dot{\eta}^1 + \eta^2 - \eta^3 = \zeta^1, \\ \dot{\eta}^2 - \eta^4 = \zeta^2. \end{cases}$$

L'opérateur adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \lambda \rightarrow \mu$ est alors donné par :

$$\begin{cases} -\dot{\lambda}_1 = \mu_1, \\ -\dot{\lambda}_2 + \lambda_1 = \mu_2, \\ -\lambda_1 = \mu_3, \\ -\lambda_2 = \mu_4. \end{cases}$$

L'opérateur $\tilde{\mathcal{D}}_1$ est injectif, donc le D -module $M = D^4/D^2 \mathcal{D}_1$ est libre. D'où, le système (236) est contrôlable. Les conditions de compatibilité de $\tilde{\mathcal{D}}_1$ sont alors définies par l'opérateur $\tilde{\mathcal{D}}_0 : \mu \rightarrow \nu$, défini par :

$$\begin{cases} -\dot{\mu}_3 + \mu_1 = \nu_1, \\ -\dot{\mu}_4 + \mu_2 + \mu_3 = \nu_2. \end{cases}$$

L'opérateur adjoint $\mathcal{D}_0 : \xi \rightarrow \eta$ est alors défini par

$$\begin{cases} \xi^1 = \eta^1, \\ \xi^2 = \eta^2, \\ \xi^1 + \xi^2 = \eta^3, \\ \xi^2 = \eta^4, \end{cases}$$

et est une paramétrisation injective de \mathcal{D}_1 . Nous avons en effet un inverse à gauche $\mathcal{P}_0 : \eta \rightarrow \xi$ de \mathcal{D}_0 défini par :

$$\begin{cases} \eta^1 = \xi^1, \\ \eta^2 = \xi^2. \end{cases}$$

Nous avons finalement les suites formellement exactes suivantes :

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \longrightarrow 0$$

$$0 \longleftarrow \tilde{E} \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_0} \tilde{F}_0 \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} \tilde{F}_1 \longleftarrow 0$$

L'opérateur $\mathcal{B} : F_0 \rightarrow \tilde{F}_0$ est alors défini par

$$\begin{cases} 4\eta^1 + 2\eta^2 = \mu_1, \\ 2\eta^1 + \eta^2 = \mu_2, \\ \eta^3 = \mu_3, \\ \eta^4 = \mu_4, \end{cases}$$

et nous obtenons alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\mathcal{D}_0} & F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \mathcal{A} & & \downarrow \mathcal{B} & & & & \\ 0 & \longleftarrow & \tilde{E} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_0} & \tilde{F}_0 & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} & \tilde{F}_1 & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

où $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{D}}_0 \circ \mathcal{B} \circ \mathcal{D}_0$ est défini par :

$$\begin{cases} -\tilde{\xi}^1 + 4\xi^1 - \xi^2 + 2\xi^2 = \nu_1, \\ -\tilde{\xi}^2 + \xi^1 + 2\xi^1 + 2\xi^2 = \nu_2. \end{cases}$$

Ainsi, la dynamique du système optimal est alors déterminée par :

$$(237) \quad \mathcal{A}\xi = 0.$$

Soit $\Delta\left(\frac{d}{dt}\right)$ la matrice définie par :

$$\Delta\left(\frac{d}{dt}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{d}{dt} + 4 & -\frac{d}{dt} + 2 \\ \frac{d}{dt} + 2 & -\frac{d^2}{dt^2} + 2 \end{pmatrix}.$$

Alors, les pôles du système optimal sont donnés par le déterminant de la matrice $\Delta\left(\frac{d}{dt}\right)$, i.e.,

$$\delta\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(-\frac{d}{dt} + 1\right)\left(-\frac{d}{dt} + 2\right)\left(\frac{d}{dt} + 1\right)\left(\frac{d}{dt} + 2\right) = a\left(-\frac{d}{dt}\right)a\left(\frac{d}{dt}\right),$$

avec :

$$a\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt} + 1\right)\left(\frac{d}{dt} + 2\right).$$

Les pôles stables du système sont alors $\{-1, -2\}$ et $\{1, 2\}$ sont les pôles instables. Nous obtenons alors :

- pour $\frac{d}{dt} = -1$, nous avons $\Delta(-1) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\ker \Delta(-1)$ est engendré par le vecteur $v_{-1} = (1 \ -1)^t$,
- pour $\frac{d}{dt} = -2$, nous avons $\Delta(-2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $\ker \Delta(-2)$ est engendré par le vecteur $v_{-2} = (1 \ 0)^t$,
- pour $\frac{d}{dt} = 1$, nous avons $\Delta(1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\ker \Delta(1)$ est engendré par le vecteur $v_1 = (-1 \ 3)^t$,
- pour $\frac{d}{dt} = 2$, nous avons $\Delta(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $\ker \Delta(2)$ est engendré par le vecteur $v_2 = (1 \ 2)^t$.

Les solutions de (237) sont alors données par

$$\xi = a e^{-t} v_{-1} + b e^{-2t} v_{-2} + c e^t v_1 + d e^{2t} v_2,$$

où a, b, c, d sont quatre constantes réelles. La partie stable

$$\xi = a e^{-t} v_{-1} + b e^{-2t} v_{-2}$$

de la solution ξ satisfait, après élimination de $a e^{-t}$ et $b e^{-2t}$, le système d'équations :

$$(238) \quad \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} + 2 & 1 \\ 0 & \frac{d}{dt} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie bien que la partie stable de la solution optimale satisfait la *décomposition spectrale* suivante :

$$\begin{pmatrix} -\frac{d}{dt} + 4 & -\frac{d}{dt} + 2 \\ \frac{d}{dt} + 2 & -\frac{d^2}{dt^2} + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{dt} + 2 & 0 \\ 1 & -\frac{d}{dt} + 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} + 2 & 1 \\ 0 & \frac{d}{dt} + 1 \end{pmatrix}.$$

Le feedback stabilisant le système (236) est alors donné par un opérateur $\mathcal{C}_1 : F_0 \rightarrow E'$, tel que le système

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 \eta = 0, \\ \mathcal{C}_1 \eta = 0, \end{cases}$$

a le même comportement que (238). Puisque la suite formée par les opérateurs \mathcal{D}_0 et \mathcal{D}_1 est localement exacte, nous avons alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\mathcal{S}} & E' \\ & & & & \parallel & & \uparrow \mathcal{C}_1 \\ 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\mathcal{D}_0} & F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1, \end{array}$$

où $\mathcal{S} : E \rightarrow E'$ est l'opérateur

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} + 2 & 1 \\ 0 & \frac{d}{dt} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \end{pmatrix}$$

et Ω est défini par (238). Nous devons donc résoudre l'équation suivante :

$$S = C_1 \circ D_0.$$

En utilisant le fait que la paramétrisation D_0 est injective, nous obtenons alors tous les contrôleurs $C_1 : E \rightarrow E'$ désirés sous la forme de

$$C_1 = S \circ P_0 + K \circ D_1,$$

où K est un opérateur quelconque de F_1 à E' . En prenant $K = -I_2$ pour abaisser l'ordre du contrôleur C_1 , nous obtenons alors l'opérateur C_1 , défini par :

$$\begin{cases} 2\eta^1 + \eta^3 = \gamma^1, \\ 2\eta^2 + \eta^4 = \gamma^2. \end{cases}$$

Ainsi, le feedback

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

stabilise le système (236) avec une dynamique (valeurs propres-vecteurs propres généralisés) semblable à la partie stable du système optimal (238). En effet, le système bouclé vaut alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + 2x_1 + x_2 = 0, \\ \dot{x}_2 + x_2 = 0. \end{cases}$$

De manière équivalente, le feedback stabilisant le système est donné par

$$u = -R^{-1} B^t P x$$

avec $R = B = I_2$ et où P satisfait l'équation algébrique de Riccati

$$(239) \quad A^t P + P A - P B R^{-1} B^t P + Q = 0,$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie en effet que $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ satisfait (239).

Ainsi, résoudre l'équation algébrique de Riccati (239) pour obtenir le feedback $u = -R^{-1} B^t P x$ est équivalent à trouver une factorisation spectrale de l'opérateur \mathcal{A} et à placer, à l'aide d'un feedback, les pôles et les vecteurs propres généralisés du système primal sur ceux de la partie stable de \mathcal{A} .

Nous donnons un exemple, dans le cadre des systèmes de Kalman, de la proposition 3.2 qui montre que l'on peut déterminer explicitement les multiplicateurs de Lagrange du problème optimal sans intégrations. De plus, nous explicitons la proposition 3.3 dans les cas où les matrices du coût Q et R sont définies positives, ce que nous n'avons jamais vu dans la littérature.

EXEMPLE 6.2. Considérons le problème suivant

$$\min \int \frac{1}{2} (x \ u)^t \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} dt,$$

où x et u satisfont le système de Kalman :

$$(240) \quad \dot{x} - A x - B u = 0.$$

Le système optimal est alors défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} - Ax - Bu = 0, \\ \dot{\lambda} + \lambda A = -x^t Q \\ \lambda B = -u^t R \end{cases}$$

Alors, en rendant le système suivant

$$\begin{cases} \dot{\lambda} + \lambda A = -x^t Q \\ \lambda B = -u^t R, \end{cases}$$

formellement intégrable, nous obtenons

$$\lambda (B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B) = P(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}),$$

où $P(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})$ est une combinaison linéaire de x , de u et de ses dérivées jusqu'à un ordre au plus $n - 1$, où n est le nombre d'état. Si le système de Kalman est contrôlable, alors nous avons $\text{rk}(B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B) = n$, et donc, on peut déterminer explicitement λ sans intégration et en fonction de x , u et ses dérivés jusqu'à un ordre au plus $n - 1$.

Nous supposons maintenant que les deux matrices Q and R sont symétriques et définies positives. Alors, la fonction coût est inversible et son inverse est donné par :

$$\begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons alors appliquer la proposition 3.3 et nous avons alors $C : \lambda \rightarrow \zeta$ défini par :

$$-Q^{-1} \ddot{\lambda} + (Q^{-1} A^t + A Q^{-1}) \dot{\lambda} + (B R^{-1} B^t - A Q^{-1} A^t) \lambda = \zeta.$$

Finalement, le système optimal s'exprime alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} Q^{-1} \ddot{\lambda} - (Q^{-1} A^t + A Q^{-1}) \dot{\lambda} + (A Q^{-1} A^t - B R^{-1} B^t) \lambda = 0, \\ Q^{-1} (-\dot{\lambda} + A^t \lambda) = x, \\ -R^{-1} B^t \lambda = u. \end{cases}$$

EXEMPLE 6.3. Les techniques développées précédemment peuvent aussi être utilisées en électromagnétisme. Considérons le problème de minimiser l'énergie électromagnétique

$$\int \left(\frac{1}{2\mu_0} \|\vec{B}\|^2 - \frac{\epsilon_0}{2} \|\vec{E}\|^2 \right) dx,$$

sous la contrainte différentielle formée du premier groupe des équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Nous avons vu dans l'exemple 5.2 du chapitre précédent, que l'opérateur $\mathcal{D}_2 : F_1 \rightarrow F_2$, défini par

$$(\vec{B}, \vec{E}) \rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \kappa^1, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \kappa^2, \end{cases}$$

est paramétrisable par l'opérateur $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$, défini par

$$(241) \quad (\vec{A}, V) \longrightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{B}, \\ -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}, \end{cases}$$

où (\vec{A}, V) est le quadri-potential. Nous avons alors le diagramme commutatif suivant, où les suites horizontales sont localement exactes (voir l'exemple 5.2 du chapitre précédent),

$$\begin{array}{ccccc} F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 & \xrightarrow{\mathcal{D}_2} & F_2 \\ \downarrow \mathcal{A} & & \downarrow \mathcal{B} & & \\ \tilde{F}_0 & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} & \tilde{F}_1 & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_2} & \tilde{F}_2, \end{array}$$

avec l'opérateur $\mathcal{B} : F_1 \rightarrow \tilde{F}_1$, défini par

$$\begin{cases} -\epsilon_0 \vec{E} = -\vec{D} \\ \frac{1}{\mu_0} \vec{B} = \vec{H}, \end{cases}$$

et $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{D}}_1 \circ \mathcal{B} \circ \mathcal{D}_1$, où $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \tilde{F}_1 \rightarrow \tilde{F}_0$ est le second groupe des équations de Maxwell, c-à-d:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{H} + \frac{\partial (-\vec{D})}{\partial t} = \vec{j}, \\ -\vec{\nabla} \cdot (-\vec{D}) = \rho, \end{cases}$$

Finalement, nous obtenons que l'opérateur $\mathcal{A} : F_0 \rightarrow \tilde{F}_0$ est défini par ($\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$):

$$\begin{cases} -\frac{1}{\mu_0} \left((\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}) - \nabla (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}) \right) = \vec{j}, \\ -\epsilon_0 (\Delta V + \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})}{\partial t}) = \rho. \end{cases}$$

D'où, le système optimal est donné par le système suivant d'équations :

$$\begin{cases} (\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}) - \nabla (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}) = 0, \\ \Delta (V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}) + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}) = 0, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{B}, \\ -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}. \end{cases}$$

Si nous mettons les seconds membres (\vec{B}, \vec{E}) de (241) à zéro, \vec{A} et V sont alors donnés par l'équation (203) du chapitre 8. Nous voyons donc que \vec{A} est défini à un gradient près et V à

la dérivée d'une fonction par rapport à t . Nous pouvons donc poser $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$, pour obtenir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0, \\ \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{B}, \\ -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}. \end{array} \right.$$

Ainsi, \vec{A} et V satisfont des équations des ondes avec une vitesse de propagation égale à c .

CHAPITRE 10

Aspects algébriques des problèmes de stabilisation

Dans les années 1970, Vidyasagar introduit l'idée de représenter des classes de systèmes comme des corps de fractions de certains anneaux de systèmes propres et stables. Cette approche, appelée depuis "fractional representation approach", a permis de donner une caractérisation algébrique des contrôleurs propres qui stabilisent de manière interne un système instable. Cette représentation des systèmes a gagné toutes ses lettres de noblesse, lorsqu'en 1981, Youla a donné une écriture simple de tous les contrôleurs propres qui stabilisent un système donné instable. Il semble que, depuis le milieu des années 80, cette approche ait livré tous ses résultats majeurs. Ce dernier chapitre de la thèse propose d'utiliser une approche module sur des algèbres de Banach pour reformuler de manière plus intrinsèque quelques résultats de cette théorie. De nombreux exemples de systèmes à paramètres distribués sont donnés. Nous répondons à la question posée par Vidyasagar, Schneider et Francis dans [150], qui est de savoir quand le fait qu'un système stabilisable de façon interne implique que le système et son contrôleur admettent des identités de Bezout généralisées. À notre connaissance, aucune réponse n'a été donnée à cette question.

Ce chapitre est composé du papier "Algebraic analysis of feedback stabilization" présenté pour publication au journal SIAM J. of Control and Optimization [126].

ALGEBRAIC ANALYSIS OF FEEDBACK STABILIZATION

Abstract In this paper, we show how module theory and homological algebra may enlight algebraic aspects of stabilization. We show how we can associate a module to any control system and depending on algebraic properties of this module, the system may or not be internal stabilizable, it admits or not generalized Bezout identity, and it is weakly left-prime or not... In particular, we give a general and intrinsic formulation of weakly left-primeness, an algebraic interpretation of the Youla parametrization of all proper stabilizing controllers.

Keywords: Stabilization over an integral domain, parametrization of stabilizing controllers, generalized Bezout identities, weakly primeness, module theory, homological algebra, distributed parameters systems, Banach algebras, $H_\infty(\mathbb{C}_+)$.

1. Introduction

In 1972, M. Vidyasagar [148] introduced the new idea of representing a set of linear control systems as the quotient field of a certain ring of stable and proper systems. Important examples of such rings encountered in the literature are the Banach algebra $H_\infty(D)$ of bounded analytic functions in a domain D [166, 167], the algebra RH_∞ of real rational $H_\infty(\mathbb{C}_+)$ functions [47, 152], and Callier-Desoer algebras [24, 25, 28] and convolution rings $(L_1 + \mathbb{C}\delta, l_1 + \mathbb{C}\delta, \dots)$ [10, 11, 152]. In the beginning of the eighties, this idea naturally led to the representation approach of synthesis problems, principally developed in [30, 148]. The main outcome of this point of view is a reformulation of various questions of feedback stabilization of linear systems in terms of algebraic properties of matrices over a ring of stable and proper systems (e.g. internal stability, doubly coprime factorizations, Youla parametrization of all proper stabilizing controllers, graph metric...). See the book [152] for more details.

Recently, the study of structural properties of multidimensional control systems has been revisited into the framework of module theory and homological algebra. In particular, the use of *algebraic analysis* — developed by B. Malgrange, V.P. Palamodov and M. Kashiwara in [85, 94, 106] — has shed more light on certain structural properties of linear multidimensional control systems such as controllability [39, 41, 104, 121], existence of generalized Bezout identities [117], pole-zero structure [17, 119, 161], and it has given a complete classification of various types of primeness [104, 119, 160] with new algebraic algorithms to check them [119].

The natural extension of these ideas to certain classes of distributed parameter systems is developed in this paper. In particular, we are mostly interested in algebraic aspect of feedback stabilization. The analytic aspect is just called to mind and will be treated in forthcoming publications, as it needs more sophisticated mathematics.

2. Modules and Systems

In the course of the text, we shall denote by A a commutative integral domain ($a, b \in A, ab = 0, a \neq 0 \Rightarrow b = 0$) representing a class of stable and proper systems.

In the literature, we usually encounter the following examples for such a ring A :

- the Banach algebra $H_\infty(D)$ of bounded analytic functions in a domain D of \mathbb{C} [28, 71],
- the RH_∞ algebra of real rational $H_\infty(\mathbb{C}_+)$ functions in $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$,
- Callier-Desoer algebras $\mathcal{A}, \mathcal{A}(\beta), \mathcal{A}_{-\beta}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{A}}(\beta), \hat{\mathcal{A}}_{-\beta}$ [24, 25, 28],
- convolution rings such as $L_1 + \mathbb{C}\delta$ or $l_1 + \mathbb{C}\delta$ [10, 11, 148]...

In the course of the paper, we shall denote by $M_{q \times p}(A)$ (resp. $M_p(A)$) the set of $q \times p$ (resp. $p \times p$) matrices with entries in A , by $\operatorname{GL}_p(A)$ the group of invertible elements of $M_p(A)$ and by I_p the unity of $\operatorname{GL}_p(A)$. Now, let $R \in M_{q \times p}(A)$ and let us consider the vectors of A^q and A^p as row vectors. Then, we may define the A -morphism $.R$ by:

$$\begin{aligned} .R: A^q &\longrightarrow A^p \\ z &\longrightarrow zR. \end{aligned}$$

Thus, the image $\operatorname{im}(.R)$ of this morphism is the A -module generated by the combinaisons A -linear of the rows of R . This module is used in control theory [100, 101, 146]. In algebraic geometry and in particular in algebraic analysis [85, 96, 106], one prefers to use the A -module:

$$M = \operatorname{coker}(.R) = A^p / A^q R.$$

One of the purpose of this article is to convince the reader that, if we are studying the structural properties of control systems, then it is more interesting to use M than $\operatorname{im}(.R)$.

REMARK 2.1. Even if we shall sometimes use Banach algebra for the ring A , we shall only consider modules over the structure of integral domain of A and not Banach modules over Banach algebras. Indeed, if we use Banach modules, we have to consider

$$\overline{M} = A^p / \overline{A^q R},$$

where $\overline{A^q R}$ denotes the closedness of $A^q R$ in A^p with respect to the norm of A^p . The reason to consider M instead of \overline{M} is that we shall study the algebraic properties of control systems and not topological ones. This will be treated in forthcoming publications.

Let us recall the definition of exact sequences. See [15, 135] for more details.

DEFINITION 2.1. A *complex* of A -modules is a sequence of A -modules F_i and morphisms $d_i : F_i \rightarrow F_{i-1}$, denoted by

$$(242) \quad \dots \rightarrow F_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \rightarrow \dots,$$

such that $d_i \circ d_{i+1} = 0$, i.e. $\text{im } d_{i+1} \subseteq \ker d_i$. The i^{th} A -module of homology of the complex (242) is $H(F_i) = \ker d_i / \text{im } d_{i+1}$. The sequence (242) is said to be *exact* at F_i if $H(F_i) = 0 \Leftrightarrow \ker d_i = \text{im } d_{i+1}$, and *exact* if $H(F_i) = 0, \forall i$.

Hence, the exact sequence $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M$ means that f is injective, whereas the exact sequence $M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ means that g is surjective.

Let π be the A -morphism which associates to any row vector of A^p its class in the A -module $M = A^p / A^q R$. We have the following exact sequence:

$$(243) \quad A^q \xrightarrow{R} A^p \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0.$$

Let $\{e_1, \dots, e_p\}$ be the canonical basis of A^p and $\{f_1, \dots, f_q\}$ the one of A^q . We denote by $y_i = \pi(e_i), 1 \leq i \leq p$. Then, we have:

$$\begin{aligned} f_i R &= (R_{i1} \dots R_{ip}) \in A^q R \\ &= \sum_{j=1}^p R_{ij} e_j \\ \Rightarrow \pi(f_i R) &= 0 = \sum_{j=1}^p R_{ij} \pi(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^p R_{ij} y_j, \quad 1 \leq j \leq q. \end{aligned}$$

Hence, we have in M the following equations

$$\sum_{j=1}^p R_{ij} y_j = 0, \quad 1 \leq i \leq q \Leftrightarrow R y = 0,$$

where $y = (y_1 \dots y_p)^t$. Moreover, we have $\forall m \in M = A^p / A^q R, \exists (a_1 \dots a_p) \in A^p$ such that:

$$m = \pi((a_1 \dots a_p)) = \pi\left(\sum_{i=1}^p a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^p a_i \pi(e_i) = \sum_{i=1}^p a_i y_i.$$

This means that any element m of M is a A -linear combination of the elements y_1, \dots, y_p and the A -module M is said to be *finitely generated*. We have in fact a little more information: we know that the module is defined by a finite number of equations (q equations) with a finite number of unknowns (p unknowns). In this case, we say that M is *finitely presented*, a fact which is equivalent to the existence of the exact sequence (243) [135].

EXAMPLE 2.1. Let us consider the ring $A = RH_\infty$ of stable and proper fractions (see [47, 169] for more details) and let the matrix R be defined by:

$$(244) \quad R = \begin{pmatrix} \frac{s}{(s+1)} & 0 & 1 & \frac{s^2}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{s^2}{(s+1)^2} & 0 & \frac{1}{(s+1)^2} \end{pmatrix}.$$

Therefore, the corresponding A -morphism $.R$ is defined by

$$.R: A^2 \longrightarrow A^4 \\ (z_1 \ z_2) \longrightarrow \left(z_1 \frac{s}{s+1} \quad z_2 \frac{s^2}{(s+1)^2} \quad z_1 \quad z_1 \frac{s^2}{(s+1)^2} + z_2 \frac{1}{(s+1)^2} \right),$$

and the A -module M is defined by $M = A^4/A^2 R$. Let us call $y_1 = \pi(e_1), y_2 = \pi(e_2), u_1 = \pi(e_3)$ and $u_2 = \pi(e_4)$, then we have in M the following equations

$$\begin{cases} \frac{s}{s+1} y_1 + u_1 + \frac{s^2}{(s+1)^2} u_2 = 0, \\ \frac{s^2}{(s+1)^2} y_1 + \frac{1}{(s+1)^2} u_2 = 0, \end{cases}$$

as well as their A -linear combinations.

EXAMPLE 2.2. Let us consider the Callier-Desoer algebra

$$A = \mathcal{A} = \{h(t) = f(t) + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \delta(t-t_i), f \in L_1(\mathbb{R}_+), (a_i)_{i \geq 0} \in l_1(\mathbb{N}), 0 = t_0 \leq \dots \leq t_i \leq t_{i+1} \leq \dots\},$$

where $+$ and \star are the internal operations, the external operation is the multiplication by scalars of \mathbb{R} and the Dirac distribution δ is the unity of \mathcal{A} . With the norm

$$\|h\|_A = \|f\|_{L_1} + \|(a_i)_{i \geq 0}\|_{l_1},$$

A becomes a Banach algebra [24, 25, 28, 70, 152]. Now, let R be the following matrix

$$R = \begin{pmatrix} \delta(t) - 2e^{-t}Y(t) & -e^{-t}Y(t) \star \delta(t-1) \end{pmatrix},$$

where $Y(t)$ denotes the Heaviside distribution, i.e., 1 for $t \geq 0$ and else 0, and let $M = A^2/AR$ be the A -module associated with R . If we call $y = \pi(e_1)$ and $u = \pi(e_2)$, where $\{e_1 = (\delta \ 0), e_2 = (0 \ \delta)\}$, then we have in M the following equation:

$$(\delta(t) - 2e^{-t}Y(t))y - ((e^{-t}Y(t)) \star \delta(t-1))u = 0.$$

We have the following exact sequence

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{.R} A^2 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

because the A -morphism $.R$ is injective ($a \star R = 0 \Rightarrow a \star (\delta(t) - 2e^{-t}Y(t)) = 0 \Rightarrow a = 0$ because $\delta(t) - 2e^{-t}Y(t) \neq 0$ and A is an integral domain [24, 25]).

Equivalently, we can use $A = \hat{\mathcal{A}} = \{\hat{f}(s) \mid f \in \mathcal{A}\}$, where $\hat{f}(s)$ denotes the Laplace transform of f , and the matrix:

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s+1} & -\frac{e^{-s}}{s+1} \end{pmatrix}.$$

In this case, we have in the A -module $\hat{M} = A^2/A\hat{R}$ the following equation:

$$\frac{(s-1)}{(s+1)} \hat{y} - \frac{e^{-s}}{(s+1)} \hat{u} = 0.$$

We have the following definitions of modules (see e.g. [15, 135]).

DEFINITION 2.2. Let M be a finitely generated A -module. Then, we have the following definitions:

- M is *free* if $M \cong A^r$ for a certain $r \in \mathbb{N}$,
- M is *stably-free* if there exist two integers r and s such that $M \oplus A^s \cong A^r$,
- M is *projective* if there exist an A -module N and an integer r such that $M \oplus N \cong A^r$,
- M is *reflexive* if $M \cong \text{hom}_A(\text{hom}_A(M, A), A)$, where $\text{hom}_A(M, A)$ denotes the A -module of the A -morphisms from M to A ,
- the *torsion part* of M is $t(M) = \{m \in M \mid \exists 0 \neq a \in A, am = 0\}$. Any element of $t(M)$ is called a torsion element and M is *torsion-free* if $t(M) = 0$. We have the following exact sequence

$$(245) \quad 0 \longrightarrow t(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/t(M) \longrightarrow 0,$$

and $M/t(M)$ is a torsion-free A -module.

Then, we have the following proposition which allows to give a classification of the modules.

PROPOSITION 2.1. *Let M be a finitely generated A -module, then we have*

- free \subseteq stably-free \subseteq projective $\subseteq \dots \subseteq$ reflexive \subseteq torsion-free.
- If A is a principal ideal domain (i.e. any proper ideal of A is generated by only one element of A), then $M \cong t(M) \oplus M/t(M)$ and any torsion-free module is free.

See any textbooks on modules for proofs (e.g. [15, 90, 135]). A second purpose of this article is to show how these definitions are connected with structural properties of control systems, and thus, how they give a natural classification of control systems.

3. Torsion-free modules and weakly primeness

3.1. An introducing example. Let us start with a simple example of torsion and torsion-free modules which will illustrate and enlight their algebraic definitions.

EXAMPLE 3.1. Let $A = RH_\infty$ be the ring of stable and proper lumped systems and let us consider the following system

$$(246) \quad \frac{(s+1)}{(s+2)} y - \frac{(s+1)}{(s+2)^2} u = 0,$$

corresponding to the A -module $M = A^2/AR$, with $R = \begin{pmatrix} \frac{(s+1)}{(s+2)} & -\frac{(s+1)}{(s+2)^2} \end{pmatrix}$. From (246), we have

$$\frac{(s+1)}{(s+2)} \left(y - \frac{1}{(s+2)} u \right) = 0,$$

and, we obtain $y - \frac{1}{(s+2)} u = 0$, because $\frac{(s+2)}{(s+1)} \in A$. In terms of modules, these algebraic manipulations mean that if we denote by $R' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{(s+2)} \end{pmatrix}$ and $M' = A^2/AR'$, then we have $M \cong M'$. Moreover, M is a free A -module with basis u because we have $y = \frac{1}{(s+2)} u$ in M . In

terms of transfer function, the previous manipulations mean that we can simplify the transfer function

$$h(s) = \frac{\frac{(s+1)}{(s+2)^2}}{\frac{(s+1)}{(s+2)}}$$

by the stable and proper common factor $\frac{(s+1)}{(s+2)}$ to obtain $h(s) = \frac{1}{(s+2)}$.

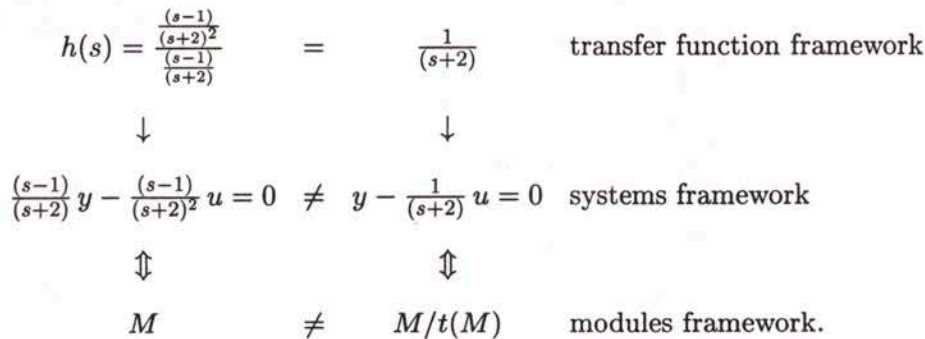
Now, let us consider the following system

$$(247) \quad \frac{(s-1)}{(s+2)}y - \frac{(s-1)}{(s+2)^2}u = 0,$$

corresponding to the A -module $M = A^2/AR$, with $R = \left(\begin{matrix} (s-1) & -\frac{(s-1)}{(s+2)^2} \end{matrix} \right)$. From (247), we obtain

$$\frac{(s-1)}{(s+2)}\left(y - \frac{1}{(s+2)}u\right) = 0.$$

But, $\frac{(s+2)}{(s-1)} \notin A$, and thus we cannot simplify by the common instable factor $\frac{(s-1)}{(s+2)}$. In terms of modules, this means that $z = y - \frac{1}{(s+2)}u \in M$ satisfies $\frac{(s-1)}{(s+2)}z = 0$ and z is a torsion element of the module M . Hence, the module framework allows to make a distinction between the control systems corresponding to the following transfer functions $\frac{(s-1)}{(s+2)^2} / \frac{(s-1)}{(s+2)}$ and $\frac{1}{(s+2)}$, which cannot be done using only transfer functions. To sum up, we have the following picture:



To conclude, the use of module over $A = RH_\infty$ avoids instable or unproper simplifications in transfer functions, while allowing simplifications by stable and proper fractions (compare with [16]).

REMARK 3.1. Let us notice that the same thing can be done with the ring $R_p = \left\{ \frac{a(s)}{b(s)} \mid a(s) \in \mathbb{R}[s], 0 \neq b(s) \in \mathbb{R}[s], \deg a(s) \leq \deg b(s) \right\}$ of proper lumped systems. In this case, the use of module over R_p avoids unproper simplifications in transfer functions, while allowing only simplifications by proper fractions. For the ring $R_s = \left\{ \frac{a(s)}{b(s)} \mid a(s) \in \mathbb{R}[s], 0 \neq b(s) \in \mathbb{R}[s], b(s_0) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} s_0 < 0 \right\}$ of stable lumped systems, we can easily see that the use of module avoids unstable simplifications by common factors while allowing only simplifications by stable fractions. Simple examples can be easily built for R_p and R_s in a similar way as previously. See also [39, 104, 113].

3.2. Weakly left-primeness. Let us suppose that $q \leq p$ and that R is a full rank $q \times p$ matrix over A . Then, up to a change of notation, we may suppose that $R = (R_1 \ R_2)$ where R_1 is a full rank $q \times q$ matrix. If we now consider the A -morphism $\cdot R$, then $\cdot R$ is injective because $zR = 0 \Rightarrow zR_1 = 0 \Rightarrow z \det R_1 = 0$, $\det R_1 \neq 0 \Rightarrow z = 0$. Hence, we have the following exact sequence:

$$0 \longrightarrow A^q \xrightarrow{\cdot R} A^p \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0.$$

Let us recall the definition of *weakly left-prime matrix*. See [47, 143] for more details and applications. In the course of the text, if A is a commutatif ring, then the *field of fractions* of A is defined by:

$$K = Q(A) = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in A, 0 \neq b \in A \right\}.$$

DEFINITION 3.1. A $q \times p$ ($q \leq p$) full rank matrix R is called *weakly left-prime* if R satisfies the following property:

$$z \in K^q \ zR \in A^p \Rightarrow z \in A^q.$$

EXAMPLE 3.2. We take again the system defined by (247). We easily verify that

$$\frac{(s+2)}{(s-1)} \begin{pmatrix} \frac{(s-1)}{(s+2)} & -\frac{(s-1)}{(s+2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{(s+2)} \end{pmatrix} \in A^2,$$

where $\frac{(s+2)}{(s-1)} \in K = Q(A) = \mathbb{R}(s)$ and $\frac{(s+2)}{(s-1)} \notin A = RH_\infty$. Thus, R is not weakly left-prime.

Let us try to explain into the module framework the concept of weakly left-primeness. First of all, we need some more technical tools as localization of modules [135]. See [41, 104, 118] for more informations and applications.

DEFINITION 3.2. Let M be a A -module and $S = A \setminus \{0\}$. We define on $S \times M$ an equivalence relation \sim , defined by:

$$(s, m) \sim (s', m') \Leftrightarrow \exists t \in S : t(sm' - s'm) = 0.$$

Then, we define the *localization* of the A -module M with respect to S to be the $K = S^{-1}A = \left\{ \frac{a}{s}, a \in A, 0 \neq s \in A \right\}$ -module $S^{-1}M = (S \times M) / \sim$ and, if we denote by $\frac{m}{s}$ the equivalence class of (s, m) in $S^{-1}M$, we have:

$$S^{-1}M = \left\{ \frac{a}{b} m, a \in A, 0 \neq b \in A, m \in M \right\}.$$

Hence, we have "extended the scalar" of the module M from A to $K = Q(A)$. Moreover, we have the following canonical A -morphism

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{i_S} & S^{-1}M, \\ m & \longmapsto & \frac{m}{1} \end{array}$$

from which we easily obtain $\ker i_S = \{m \in M \mid \exists 0 \neq a \in A, am = 0\} = t(M)$. Hence, we have a link between torsion part $t(M)$ of a module M and $S^{-1}M$. Let us try to show with an example why $\ker i_S$ is the torsion-part of M .

EXAMPLE 3.3. Let us consider the system defined by (247). With the same notation as precedingly, we have $K = S^{-1}A = \mathbb{R}(s)$, in which we can invert non zero elements of A . Hence,

we have in $S^{-1}M$ the following equation:

$$\frac{(s+2)}{(s-1)} \left(\frac{(s-1)}{(s+2)} y - \frac{(s-1)}{(s+2)^2} u \right) = y - \frac{1}{(s+2)} u = 0.$$

We find the concept of transfer function because we can simplify any equations of $S^{-1}M$ by any common factors. The K -vector space $S^{-1}M$ is then defined by the following exact sequence,

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{T} K^2 \longrightarrow S^{-1}M \longrightarrow 0,$$

with $T = (1 \quad -\frac{1}{s+2})$. We have seen in example 3.1 that $z = y - \frac{1}{(s+2)} u$ was a torsion element of M satisfying $\frac{(s-1)}{(s+2)} z = 0$. But, in $S^{-1}M$, we have $\frac{(s+2)}{(s-1)} \frac{(s-1)}{(s+2)} z = z = 0$ and we find that the kernel of i_S is exactly $t(M) = Az$.

Moreover, we have the following isomorphism (see [135] for more details)

$$\begin{aligned} S^{-1}M &\cong K \otimes_A M, \\ \frac{a}{b} m &\longleftrightarrow \frac{a}{b} \otimes m, \end{aligned}$$

which allows to see localization as a particular case of tensor product. Thus, we have the following proposition (see [135] for more details).

PROPOSITION 3.1. *With the same notation as before, we have the following exact sequence:*

$$0 \longrightarrow t(M) \longrightarrow M \longrightarrow K \otimes_A M \longrightarrow (K/A) \otimes_A M \longrightarrow 0.$$

Finally, we shall need another definition of modules [15, 135].

DEFINITION 3.3. An A -module N is *flat* if the tensor product $N \otimes_A \cdot$ transforms any exact sequence of A -modules $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ into an exact sequence of A -modules $0 \longrightarrow N \otimes_A M' \longrightarrow N \otimes_A M \longrightarrow N \otimes_A M'' \longrightarrow 0$.

We have the following proposition (see [15, 135] for more details).

PROPOSITION 3.2. *If A is an integral commutative domain, then $K = Q(A)$ is a flat A -module.*

Let us try now to understand weakly left-primeness in terms of modules. Let us start with a full $q \times p$ matrix R with entries in A and $q \leq p$. We have seen, at the beginning of this section, that, in this case, we have the following exact sequence:

$$(248) \quad 0 \longrightarrow A^q \xrightarrow{.R} A^p \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0.$$

Now, as K is a flat A -module [135], we have the following exact sequence

$$(249) \quad 0 \longrightarrow K^q \xrightarrow{\text{id}_K \otimes .R} K^p \longrightarrow K \otimes_A M \longrightarrow 0,$$

where $\text{id}_K \otimes .R : K^q \longrightarrow K^p$ is simply defined by:

$$z(\text{id}_K \otimes .R) = zR, \quad \forall z \in K^q.$$

Then, using the fact that the sequence $0 \rightarrow A \rightarrow K \rightarrow K/A \rightarrow 0$ is exact, we find the following exact and commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & A^q & \xrightarrow{\cdot R} & A^p & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 (250) & & 0 \longrightarrow & K^q & \xrightarrow{\text{id}_K \otimes R} & K^p & \longrightarrow & K \otimes_A M & \longrightarrow 0 \\
 & & & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi'' & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & L \longrightarrow & (K/A)^q & \xrightarrow{\tau} & (K/A)^p & \longrightarrow & (K/A) \otimes_A M & \longrightarrow 0, \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

where L is the kernel of the induced A -morphism $\tau : (K/A)^q \rightarrow (K/A)^p$ defined by

$$(251) \quad \tau(y) = \pi''(z(\text{id}_K \otimes \cdot R)) = \pi''(zR), \text{ with } z \in K^q, \text{ such that } y = \pi'(z),$$

and τ does not depend on the choice of the inverse image z of t (chase in the diagram). Notice that the kernel of the morphism $M \rightarrow K \otimes_A M$ is exactly the torsion part $t(M)$ of M . Now, a chase in the diagram or the use of *the snake lemma* (see [15, 135]) leads to:

$$L \cong t(M).$$

Let us suppose that R is not weakly left-prime, then there exists $z \in K^p$ such that $z \notin A^q$ and $zR \in A^p$. Hence, $\pi'(z) \neq 0$ and $\pi''(zR) = 0$, i.e. $\tau(\pi'(z)) = 0 \Leftrightarrow 0 \neq \pi'(z) \in L$. Conversely, if $0 \neq t \in L$ then $\tau(t) = 0$ and thus, for any $z \in K^q$ such that $\pi'(z) = t$, we have $\pi'(z(\text{id}_K \otimes \cdot R)) = 0 \Leftrightarrow z(\text{id}_K \otimes \cdot R) = zR \in A^p$. Moreover, $0 \neq t = \pi'(z) \Rightarrow z \notin A^q$ and thus R is not weakly left-prime. Hence, R is weakly left-prime if and only if $L = 0$. Hence, the obstruction for a matrix R to be weakly left-prime is given by a non zero $L = \ker \tau$. We have the following proposition.

THEOREM 3.1. *Let R be a $q \times p$ full rank matrix with entries in A ($q \leq p$) and $M = A^p/A^q R$ be the A -module, then the following two assertions are equivalent:*

1. R is weakly left-prime,
2. $t(M) \cong L = 0$.

We give an example taken from [1]. In [143], M.C. Smith used this example to show that, if A is not a GCDD (greatest common divisor domain), then an *irreducible* matrix R , namely a matrix R with no common factor in all its highest minors, is not necessary weakly left-prime. We have shown that the general concept of irreducible or left weakly-prime matrix for an arbitrary integral domain A is in fact the concept of torsion-freeness.

EXAMPLE 3.4. Let us take $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$, $R = \begin{pmatrix} 2 & 1 + i\sqrt{5} \end{pmatrix}$ and $M = A^2/A R$. We have in M the equation

$$2y + (1 + i\sqrt{5})u = 0,$$

where $y = \pi(e_1)$ and $u = \pi(e_2)$. There is no common factor between 2 and $1 + i\sqrt{5}$, but we cannot conclude that M has no torsion elements. Indeed, we have

$$\left(\frac{1 - i\sqrt{5}}{2}\right) \begin{pmatrix} 2 & 1 + i\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - i\sqrt{5} & 3 \end{pmatrix} \in A^2,$$

and $K \ni \frac{1-i\sqrt{5}}{2} \notin A$. Thus, R is not weakly left-prime and there exists a non zero torsion element in M . Indeed, we easily check that $0 \neq z = (1 - i\sqrt{5})y + 3u \in M$ satisfies $(1 + i\sqrt{5})z = 0$.

3.3. Tor functor.

DEFINITION 3.4. Let M be an A -module. We call a *free-resolution* of M an exact sequence of the type

$$\dots \rightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} F_{i-2} \xrightarrow{d_{i-2}} \dots \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0,$$

where F_i are free A -modules. If all the F_i are finitely free A -modules, then we say that M admits a *finite free-resolution*.

Notice that if M admits a finite free-resolution, then we obtain the following exact sequence

$$\dots \rightarrow A^{r_i} \xrightarrow{R_i} A^{r_{i-1}} \xrightarrow{R_{i-1}} A^{r_{i-2}} \xrightarrow{R_{i-2}} \dots \xrightarrow{R_1} A^{r_0} \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0,$$

where $R_i \in M_{r_i \times r_{i-1}}(A)$ corresponds to the matrix of the morphism d_i in the canonical basis of A^{r_i} . For example, the sequence (248) is a finite free resolution of the A -module M .

DEFINITION 3.5. Let M and N be two A -modules and

$$(252) \quad \dots \rightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} F_{i-2} \xrightarrow{d_{i-2}} \dots \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0,$$

a free-resolution of M , then we call the *truncated resolution* of M , the complex defined by:

$$\dots \rightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} F_{i-2} \xrightarrow{d_{i-2}} \dots \xrightarrow{d_1} F_0 \rightarrow 0.$$

The defect of exactness at $N \otimes_A F_i$ of the following of complex

$$\dots \rightarrow N \otimes_A F_i \xrightarrow{\text{id}_N \otimes d_i} N \otimes_A F_{i-1} \xrightarrow{\text{id}_N \otimes d_{i-1}} N \otimes_A F_{i-2} \xrightarrow{\text{id}_N \otimes d_{i-2}} \dots \xrightarrow{\text{id}_N \otimes d_1} N \otimes_A F_0 \rightarrow 0,$$

does depend only on M and N and not on the choice of the resolution (252). We denote:

$$H(N \otimes_A F_i) = \text{tor}_i^A(N, M) = \ker(\text{id}_N \otimes d_i) / \text{im}(\text{id}_N \otimes d_{i+1}).$$

In particular, we always have $\text{tor}_0^A(N, M) \cong N \otimes_A M$.

We have obtained the exact and commutative diagram (250) by passing to the quotient K/A on the exact sequences (248) and (249). But we can directly obtain the third horizontal sequence by taking the tensor product $(K/A) \otimes \cdot$ of the exact sequence (248) to obtain the complex

$$0 \rightarrow (K/A)^q \xrightarrow{\text{id}_{K/A} \otimes R} (K/A)^p \xrightarrow{\text{id}_{K/A} \otimes \pi} (K/A) \otimes_A M \rightarrow 0,$$

where $\text{id}_{K/A} \otimes R$ is defined by (251). The only defect of exactness which may appear is at $(K/A)^q$, i.e. the morphism $\text{id}_{K/A} \otimes R$ does need to be injective. We have seen that the obstruction to the injectivity of this morphism is the obstruction for a matrix to be weakly left-prime.

EXAMPLE 3.5. Let us consider again the A -module defined by (248), then by applying $(K/A) \otimes_A \cdot$, we obtain $\text{tor}_1^A(K/A, M) = \ker(\text{id}_{K/A} \otimes M) = L \cong t(M)$. Thus, R is weakly left-prime iff $\text{tor}_1^A(K/A, M) = 0$. In example 3.4, we have $\text{tor}_1^A(K/A, M) = (K/A)(\frac{1-i\sqrt{5}}{2})$ and in example 3.2, $\text{tor}_1^A(K/A, M) = (K/A)(\frac{s+2}{s-1})$.

In case where R is not a full rank matrix, the A -morphism $.R$ is no more injective, but we have the relation $\text{tor}_1^A(K/A, M) \cong t(M)$ as it is stated in the following theorem.

THEOREM 3.2. *Let A be an integral domain, $K = Q(A)$ its field of fractions and M a finitely generated A -module, then we have:*

$$(253) \quad \text{tor}_1^A(K/A, M) \cong t(M).$$

A proof of this theorem can be found in [135]. Moreover, we can prove that we have the following theorem (see [135] for more details). Hence, torsion-freeness is the right generalization of the concept weakly left-primeness for arbitrary integral domain and the computation of the $\text{tor}_1^A(K/A, M)$ is the way to check this intrinsic property.

THEOREM 3.3. *For any exact sequence $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ of A -modules, we have the following exact sequence:*

$$(254) \quad 0 \rightarrow \text{tor}_1^A(K/A, M') \rightarrow \text{tor}_1^A(K/A, M) \rightarrow \text{tor}_1^A(K/A, M'') \rightarrow (K/A) \otimes_A M' \\ \rightarrow (K/A) \otimes_A M \rightarrow (K/A) \otimes_A M'' \rightarrow 0,$$

4. Duality and formal parametrizations

4.1. Functor Ext. In homological algebra, another important functor is the ext functor. We shall show that it is strongly connected with the tor functor. It gives another way to check torsion-freeness and formal parametrizations of the system.

First of all, let S be a A -module. We usually encounter the following examples of A -module S in the literature.

EXAMPLE 4.1. - If $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$, then $S = H_2(\mathbb{C}_+)$ is a left $H_\infty(\mathbb{C}_+)$ -module because $\forall a \in H_\infty(\mathbb{C}_+), \forall f \in H_2(\mathbb{C}_+)$, we have $af \in H_2(\mathbb{C}_+)$. The space $H_2(\mathbb{C}_+)$ is even better, that is, it is a *Banach module* over the Banach algebra $H_\infty(\mathbb{C}_+)$, i.e.:

$$\|af\|_2 \leq \|a\|_\infty \|f\|_2.$$

- If $A = RH_\infty$, we can take as before $S = H_2(\mathbb{C}_+)$.

- Finally, if $A = \mathcal{A}$ is the Callier-Desoer algebra, we can choose $S = L_p(\mathbb{R}_+)$, for all $p \in [1, +\infty]$. Indeed, for any $a \in \mathcal{A}$ and $f \in L_p(\mathbb{R}_+)$, then the convolution product $a \star f \in L_p(\mathbb{R}_+)$ [29]. Moreover, $L_p(\mathbb{R}_+)$ is a Banach module over the Banach algebra \mathcal{A} , that is to say:

$$\|a \star f\|_p \leq \|a\|_{\mathcal{A}} \|f\|_p, \forall p \in [1, +\infty].$$

If $d_i : F_i \rightarrow F_{i-1}$ is an A -morphism between two free A -modules F_i and F_{i-1} and $\phi \in \text{hom}_A(F_{i-1}, S)$, then by composition, we obtain $d_i \circ \phi \in \text{hom}_A(F_i, S)$. We have the following diagram:

$$\begin{array}{ccc} F_i & \xrightarrow{d_i} & F_{i-1}, \\ d_i \circ \phi & \searrow & \downarrow \phi \\ & & S \end{array}$$

Hence, we have the following morphism:

$$\begin{array}{ccc} d_i^* : \text{hom}_A(F_{i-1}, S) & \rightarrow & \text{hom}_A(F_i, S) \\ \phi & \rightarrow & d_i^*(\phi) = d_i \circ \phi. \end{array}$$

DEFINITION 4.1. Let M and S be two A -modules and

$$\dots \rightarrow F_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \dots \xrightarrow{d_1} F_0 \rightarrow 0,$$

the *truncated resolution* of M (see definition 3.5). The defect of exactness at $\text{hom}_A(F_i, S)$ of the following complex

$$\dots \leftarrow \text{hom}_A(F_{i+1}, S) \xleftarrow{d_{i+1}^*} \text{hom}_A(F_i, S) \xleftarrow{d_i^*} \dots \xleftarrow{d_2^*} \text{hom}_A(F_1, S) \xleftarrow{d_1^*} \text{hom}_A(F_0, S) \leftarrow 0,$$

does depend only on M and S and not on the choice of the resolution (252). We denote it by:

$$H(\text{hom}_A(F_i, S)) = \text{ext}_A^i(M, S) = \ker d_{i+1}^* / \text{im } d_i^*.$$

In particular, we always have $\text{ext}_A^0(M, S) = \text{hom}_A(M, S)$.

Let us show why this definition is interesting. First of all, let us notice that if F_{i-1} is a finitely generated free A -module, i.e. $F \cong A^{r_{i-1}}$, then the knowledge of $\phi \in \text{hom}_A(F_{i-1}, S)$ is equivalent to the knowledge of $(\phi(e_1) \dots \phi(e_{r_{i-1}})) \in S^{r_{i-1}}$. Hence, we have the following isomorphism:

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}_A(F_{i-1}, S) & \rightarrow & S^{r_{i-1}} \\ \phi & \rightarrow & (\phi(e_1) \dots \phi(e_{r_{i-1}}))^t. \end{array}$$

Finally, if $d_i : F_i \rightarrow F_{i-1}$ is a A -morphism between two finitely generated free A -modules, and d_i is given by a $r_i \times r_{i-1}$ matrix R_i in the canonical basis, then an easy computation gives the following diagram:

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}_A(F_i, S) & \xleftarrow{d_i^*} & \text{hom}_A(F_{i-1}, S), \\ \parallel & & \parallel \\ S^{r_i} & \xleftarrow{R_i \cdot} & S^{r_{i-1}} \end{array}$$

where the A -morphism $R_i \cdot$ is defined by:

$$(255) \quad \begin{array}{ccc} R_i \cdot : S^{r_{i-1}} & \rightarrow & S^{r_i} \\ z & \rightarrow & R_i z. \end{array}$$

Thus, if

$$(256) \quad \dots \rightarrow A^{r_i} \xrightarrow{R_i \cdot} A^{r_{i-1}} \xrightarrow{R_{i-1} \cdot} A^{r_{i-1}} \xrightarrow{R_{i-2} \cdot} \dots \xrightarrow{R_1 \cdot} A^{r_0} \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$$

is a finite free resolution of M , then we have the following complex

$$\dots \leftarrow S^{r_{i+1}} \xleftarrow{R_{i+1} \cdot} S^{r_i} \xleftarrow{R_i \cdot} S^{r_i} \xleftarrow{R_{i-1} \cdot} \dots \xleftarrow{R_1 \cdot} S^{r_0} \leftarrow \text{hom}_A(M, S) \leftarrow 0,$$

and we say that we have applied the functor $\text{hom}_A(\cdot, S)$ to (256). The defect of exactness at S^{r_i} is given by $\text{ext}_A^i(M, S) = \ker (R_{i+1} \cdot) / \text{im } (R_i \cdot)$.

EXAMPLE 4.2. Let us consider $A = \mathcal{A}$ the Callier-Desoer algebra and the matrix

$$R = \left(\begin{array}{cc} \delta(t) & -e^{-at} b Y(t) \end{array} \right),$$

where a and b are two real constants with $a \geq 0$ and $Y(t)$ is the Heaviside distribution. Then, we can associate to R the A -module $M = A^2 / AR$, defined by the following exact sequence:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{R \cdot} A^2 \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0.$$

By applying $\text{hom}_A(\cdot, L_p(\mathbb{R}_+))$ to the finite free resolution of M , we obtain the sequence

$$(257) \quad 0 \longleftarrow L_p \xleftarrow{R} L_p^2 \longleftarrow \text{hom}_A(M, L_p(\mathbb{R}_+)) \longleftarrow 0,$$

where:

$$R. : (x \ u)^t \longrightarrow \left(\begin{array}{c} \delta(t) \quad -e^{-at} b Y(t) \end{array} \right) \star (x \ u)^t = x(t) - (e^{-at} b Y(t)) \star u(t) \\ = x(t) - \int_0^t e^{-a(t-s)} b u(s) ds.$$

The fact that $\text{ext}_A^0(M, S) = \text{hom}_A(M, S)$ means that sequence (257) is exact at L_p^2 , that is to say, we can identify $\text{hom}_A(M, L_p)$ to the space of solutions of the operator $R. : L_p^2 \rightarrow L_p$. In fact, (257) is an exact sequence of vector spaces for all $p \in [1, +\infty]$ because $\text{ext}_A^1(M, S) = L_p / R L_p^2$ measures the lack of surjectivity of the operator $R. : L_p^2 \rightarrow L_p$. But, $R.$ is surjective because $\forall y \in L_p, y = R \star (y \ 0)^t$, thus $\text{ext}_A^1(M, S) = 0$. We shall soon show that the exactness of sequence (257) comes from the fact that M has a good algebraic property, namely, M is a projective module.

EXAMPLE 4.3. Let us consider $f \in A = \mathcal{A}$ and the A -module M defined by $f \neq 0$, i.e., we have the following exact sequence

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\star f} A \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

because $a \star f = 0, f \neq 0 \Rightarrow a = 0$, and thus $\star f : A \rightarrow A$ is injective. By applying the functor $\text{hom}_A(\cdot, L_p(\mathbb{R}_+))$, we obtain

$$0 \longleftarrow L_p \xleftarrow{f \star} L_p \longleftarrow \text{hom}_A(M, L_p) \longleftarrow 0,$$

which is not exact because $\text{ext}_A^1(M, L_p) = L_p / f \star L_p \neq 0$ in general, except if $f^{-1} \in A \Rightarrow M = 0$ is a projective A -module ($f^{-1} \in A \Leftrightarrow \inf_{s \in \mathbb{C}_+} |\hat{f}(s)| > 0$, where \hat{f} is the Laplace transform of f [24, 28, 70]). Hence, L_p is not a "good space" in the sense that $\text{hom}_A(\cdot, L_p)$ transforms exact sequences into non exact sequences.

We can characterize "good spaces" S . Such a A -module S corresponds to the concept of *injective modules*.

DEFINITION 4.2. An A -module S is *injective* if for any exact sequence $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$ and any A -morphism $\phi : M \rightarrow S$, there exists $\psi : M' \rightarrow S$ such that $\psi = \phi \circ f$.

This definition looks like the Hahn-Banach theorem for modules (extension of monomorphisms). We then have the following proposition in every textbook on homological algebra [15, 135].

PROPOSITION 4.1. *We have the following assertions:*

- $\text{ext}_A^i(M, S) = 0, \forall i \geq 1, \forall A$ - module $S \Leftrightarrow M$ is a projective A -module.
- $\text{ext}_A^i(M, S) = 0, \forall i \geq 1, \forall A$ - module $M \Leftrightarrow S$ is an injective A -module.

REMARK 4.1. This proposition shows that if either S is a injective A -module, i.e. S has good analytic properties with respect to A , or the module M is projective, i.e. M has good algebraic properties with respect to A , then $\text{hom}_A(\cdot, S)$ transforms any exact sequence into an exact sequence. If the A -module M is defined by the exact sequence

$$A^r \xrightarrow{R_1} A^q \xrightarrow{R} A^p \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

then, by applying $\text{hom}_A(\cdot, S)$, we obtain the complex:

$$S^r \xleftarrow{R_1} S^q \xleftarrow{R} S^p \leftarrow \text{hom}_A(M, S) \leftarrow 0.$$

Therefore, if we want to solve the inhomogenous system $Ry = z$, where $z \in S$ is a given second member, the necessary condition is $R_1 z = 0$ because $\text{im}(R) \subseteq \ker(R_1)$. This necessary condition is sufficient iff $\text{im}(R) = \ker(R_1)$, i.e. $\text{ext}_A^1(M, S) = 0$, because $R_1 z = 0 \Rightarrow \exists y \in S$ such that $Ry = z$.

Contrary to the case of linear systems of differential equations with constant coefficients ($A = \mathbb{R}[d_1, \dots, d_n]$), where lots of injective A -modules S are known ($S = \mathcal{D}'(\Omega), C^\infty(\Omega)\dots$) [85, 104, 94], for $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$, \mathcal{A} , RH_∞ , we only know that $S = Q(H_\infty(\mathbb{C}_+))$, $S = Q(\mathcal{A})$, or $S = K(RH_\infty) = \mathbb{R}(s)$ and $S = \mathbb{R}(s)/RH_\infty$ are injective because for any domain A , $K = Q(A)$ is injective and if A is a principal ideal domain, then K/A is also injective [15]. We do not know if other injective modules exist or are known for these rings.

EXAMPLE 4.4. For a principal ideal domain A , a A -module S is injective iff it is *divisible* [13, 135], namely S satisfies the following property:

$$\forall 0 \neq a \in A, \forall u \in S, \exists y \in S \text{ such that } ay = u.$$

For example, let us take the principal ideal domain $A = RH_\infty$ [101]. The A -module $H_2(\mathbb{C}_+)$ is not injective because it is not divisible. Indeed, the equation

$$ay = u, \quad a^{-1} \notin A$$

has no solution in $H_2(\mathbb{C}_+)$, for any given $u \in H_2(\mathbb{C}_+)$.

In fact, we shall show in the section on free modules that any system which admits a generalized Bezout identity is a free A -module M and thus projective. In this case, we have $\text{ext}_A^i(M, S) = 0, \forall i \geq 1$ for any A -module S and we have a good duality in the sense that the functor $\text{hom}_A(\cdot, S)$ keeps the exactness (see remark 4.1).

4.2. **Formal Parametrizations.** Let $F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ be a finite presentation of the A -module M , then by applying the functor $\text{hom}_A(\cdot, A)$ to it, we obtain the following exact sequence $F_1^* \xleftarrow{d_1} F_0^* \leftarrow M^* \leftarrow 0$, where $M^* = \text{hom}_A(M, A)$ and $F_i^* = \text{hom}_A(F_i, A), i = 0, 1$. Let us call the A -module $N = \text{coker } d_1^*$, then we have the following exact sequence:

$$0 \leftarrow N \leftarrow F_1^* \xleftarrow{d_1^*} F_0^* \leftarrow M^* \leftarrow 0.$$

The sequence shows that the module N , associated with the dual morphism d_1^* , is not the dual of the module M associated with d_1 .

A delicate result is the fact that $\text{ext}_A^i(N, A), i \geq 1$, does not depend on the choice of the resolution of M (choice of R) but only on M . This result has been proved in [125] as well as the following theorem.

THEOREM 4.1. *Let M be a A -module defined by a finite presentation $F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$, such that $\text{ext}_A^1(N, A)$ is a torsion A -module, where $N = \text{coker } d_1^*$, then we have:*

$$t(M) \cong \text{ext}_A^1(N, A).$$

EXAMPLE 4.5. Let us take an example from [143]. The matrix $R = (e^{-s} \quad -\frac{1}{s+1})$ with entries in $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$ is weakly left-prime. Indeed, A is a greatest common divisor domain (see [143] for a proof), then weakly left-primeness is equivalent to have no common divisor between the highest minor of R [143]. Thus, using theorem 3.1, we obtain that the A -module $M = A^2/AR$, defined by

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot R} A^2 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

is a torsion-free A -module, i.e., $t(M) = 0$. Let us check it using the previous theorem. Let N be the A -module defined by

$$0 \longleftarrow N \longleftarrow A \xleftarrow{\cdot R} A^2,$$

thus $(a \ b)^t \in \ker(R) \Leftrightarrow e^{-s}a = (\frac{1}{s+1})b$, and using the fact that $\gcd(e^{-s}, \frac{1}{s+1}) = 1$, we obtain:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{s+1}c, \\ b = e^{-s}c, \end{cases} \quad c \in A.$$

Hence, we have the following exact sequence

$$0 \longleftarrow N \longleftarrow A \xleftarrow{\cdot R} A^2 \xleftarrow{\cdot R_{-1}} A \longleftarrow 0,$$

where $R_{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ e^{-s} \end{pmatrix}$. Applying $\text{hom}_A(\cdot, A)$ to this exact sequence, we obtain

$$0 \longrightarrow N^* \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot R} A^2 \xrightarrow{\cdot R_{-1}} A \longrightarrow 0,$$

but $\cdot R$ is an injective morphism (R is a full rank matrix), thus we obtain $N^* = 0$. This is coherent with the fact that N is a torsion A -module because we have the following equations in N

$$\begin{cases} ze^{-s} = 0, \\ z(-\frac{1}{s+1}) = 0, \end{cases}$$

and the fact that, for any torsion module N , we have $N^* = 0$ ($\forall f \in N^*, \forall n \in N, \exists 0 \neq a \in A, an = 0 \Rightarrow f(an) = af(n) = 0, f(n) \in A \Rightarrow f(n) = 0 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow N^* = 0$). Moreover, $\ker(\cdot R_{-1}) = \{(a \ b) \in A^2 \mid a(\frac{1}{s+1}) + be^{-s} = 0\}$. But reasoning as before, we obtain that $\ker(\cdot R_{-1}) = AR = \text{im}(\cdot R)$, i.e., $\text{ext}_A^1(N, A) = 0$, and thus M is a torsion-free A -module. In the next section, we shall see that $\text{ext}_A^2(N, A) = A/AR_{-1} \neq 0$ and thus M is not a projective module. Let us notice that we have the following commutative and exact diagram

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\cdot R} & A^2 & \xrightarrow{\cdot R_{-1}} & A \\ & & \parallel & & \parallel & & \uparrow \kappa \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\cdot R} & A^2 & \xrightarrow{\pi} & M \longrightarrow 0, \end{array}$$

where $\kappa : M \rightarrow A$ is an induced A -morphism, defined by $\kappa(m) = zR_{-1}$, with $\pi(z) = m$. This morphism does not depend on the choice of the inverse image z of m (chase in the diagram). Moreover, we have $\kappa(m) = 0 = zR_{-1} \Rightarrow \exists a \in A$ such that $z = aR \Rightarrow \pi(z) = \pi(aR) = 0$, thus κ is injective, showing that the torsion-free A -module M can be embedded into a free A -module.

EXAMPLE 4.6. Let us consider the system

$$\frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)^2}y - \frac{(s-2)}{(s+1)^2}u = 0,$$

and the corresponding A -module M , defined by

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot R} A^2 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

where $R = \begin{pmatrix} \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)^2} & -\frac{(s-2)}{(s+1)^2} \end{pmatrix}$. Let N be the A -module defined by

$$0 \longleftarrow N \longleftarrow A \xleftarrow{\cdot R} A^2,$$

thus $(a \ b)^t \in \ker(R) \Leftrightarrow \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)^2} a - \frac{(s-2)}{(s+1)^2} b = 0 \Leftrightarrow \frac{(s-2)}{(s+1)} \left(\frac{(s-1)}{(s+1)} a - \frac{1}{(s+1)} b \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{(s-1)}{(s+1)} a - \frac{1}{(s+1)} b = 0$. But, we have in $A = RH_\infty$, $\gcd\left(\frac{s-1}{s+1}, \frac{1}{s+1}\right) = 1$, thus we obtain:

$$\begin{cases} a = \left(\frac{1}{s+1}\right) c, \\ b = \left(\frac{s-1}{s+1}\right) c, \end{cases} \quad c \in A.$$

Thus, we have the following exact sequence

$$0 \longleftarrow N \longleftarrow A \xleftarrow{\cdot R} A^2 \xleftarrow{\cdot R_{-1}} A \longleftarrow 0,$$

where $R_{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{s-1}{s+1} \end{pmatrix}$. Applying the functor $\text{hom}_A(\cdot, A)$ to this exact sequence, we obtain

$$0 \longrightarrow N^* \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot R} A^2 \xrightarrow{\cdot R_{-1}} A \longrightarrow 0,$$

and, once again, as N is a torsion-module, $N^* = 0$. Moreover, $\ker(\cdot R_{-1}) = \{(a \ b) \in A^2 \mid a\left(\frac{1}{s+1}\right) = -b\left(\frac{s-1}{s+1}\right)\}$. But, $\gcd\left(\frac{1}{s+1}, \frac{s-1}{s+1}\right) = 1$ and thus, we obtain:

$$\begin{cases} a = c\left(\frac{s-1}{s+1}\right) \\ b = -c\left(\frac{1}{s+1}\right) \end{cases}$$

Finally, we have $\ker(\cdot R_{-1}) = A\left(\frac{s-1}{s+1} \ -\frac{1}{s+1}\right)$ and thus:

$$\text{ext}_A^1(N, A) = \ker(\cdot R_{-1})/\text{im}(\cdot R) = A\left(\frac{s-1}{s+1} \ -\frac{1}{s+1}\right) / A\left(\frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)^2} \ -\frac{(s-2)}{(s+1)^2}\right) \neq 0.$$

Let us denote by z the class of $R' = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s+1} & -\frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$ in $\text{ext}_A^1(N, A)$, then we have $\left(\frac{s-2}{s+1}\right)z = 0$. Hence, we have $t(M) = Az$ and:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot R'} A^2 \longrightarrow M/t(M) \longrightarrow 0.$$

$M/t(M)$ is a torsion-free A -module and A is a principal ideal domain [101, 152], then, using proposition 2.1, $M/t(M)$ is a free A -module.

Firstly, the interest of theorem 4.1 is that it can be applied to non full rank matrix, and secondly, if $\text{ext}_A^1(N, A) = 0$, then we have the following exact sequence

$$A^q \xrightarrow{\cdot R} A^p \xrightarrow{\cdot R_{-1}} A^r,$$

and thus $M = \text{coker}(\cdot R) \cong \text{im}(\cdot R_{-1})$. This means that, for any element $m \in M$, there exists $z \in A^p$ such that $m = z R_{-1}$. Hence, we have parametrized the system by means of R_{-1} . See [117, 118, 119] for more details.

5. Projective modules and vector bundles

5.1. Properties and examples. Let us give the definition of splitting exact sequence which is a key concept of the module theory and homological algebra [15, 135] and which will play a major role in the course of this paper.

DEFINITION 5.1. Let $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ be an exact sequence of A -modules. This exact sequence is said to be a *splitting exact* sequence if one of the following equivalent assertions is satisfied:

- there exists an A -morphism $h : M'' \rightarrow M$ such that $g \circ h = \text{id}_{M''}$,
- there exists an A -morphism $k : M \rightarrow M'$ such that $k \circ f = \text{id}_{M'}$,
- there exist $\phi = \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} : M \rightarrow M' \oplus M''$ and $\psi = (f \ h) : M' \oplus M'' \rightarrow M$ such that ϕ and ψ are isomorphisms and $\phi \circ \psi = \text{id}_{M' \oplus M''}$, $\psi \circ \phi = \text{id}_M$.

We can give a more interesting characterization of projective modules. See for example [15, 135] for a proof.

PROPOSITION 5.1. If M is A -module defined by $A^q \xrightarrow{R} A^p \rightarrow M \rightarrow 0$, then M is a projective A -module iff the following sequence is an exact splitting sequence:

$$0 \rightarrow A^q R \rightarrow A^p \rightarrow M \rightarrow 0.$$

In particular, if M is defined by the following short exact sequence

$$(258) \quad 0 \rightarrow A^q \xrightarrow{R} A^p \rightarrow M \rightarrow 0,$$

then, M is a projective A -module iff the sequence (258) is an exact splitting sequence, i.e., iff there exists a $p \times q$ matrix such that $R \circ S = I_q$.

Let us give another theorem characterizing projective modules defined by full rank matrix. A proof of this theorem can be found in [88].

THEOREM 5.1. Let M be a A -module finitely presented $0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$, where F_1 and F_0 are finitely generated free A -modules. Then, M is a projective A -module iff $N = \text{coker } d_1^* = 0$.

EXAMPLE 5.1. Let us consider the $A = RH_\infty$ -module M defined by the finite free resolution $0 \rightarrow A^2 \xrightarrow{R} A^4 \rightarrow M \rightarrow 0$, where R is defined by (244). The A -module N is then defined by

$$0 \leftarrow N \xleftarrow{\pi} A^2 \xleftarrow{R} A^4,$$

and if we call $z_1 = \pi(e_1)$ and $z_2 = \pi(e_2)$, we have in N the following equations:

$$(259) \quad \begin{cases} z_1 \frac{s}{(s+1)} = 0, \\ z_2 \frac{s^2}{(s+1)^2} = 0, \\ z_1 = 0, \\ z_1 \frac{s^2}{(s+1)^2} + z_2 \frac{1}{(s+1)^2} = 0. \end{cases}$$

It is not evident at first glance to see that the only solution of the preceding system is $z_1 = z_2 = 0$ and thus $N = 0$. In fact, if we put a second member v on the system (259), we obtain for example

$$\begin{cases} z_1 = v_3, \\ z_2 = -v_1 \frac{(3s^2+s)}{(s+1)^2} + v_2 \frac{(s+3)}{(s+1)} + v_4 \frac{(3s+1)}{(s+1)}, \end{cases}$$

which means that the morphism $S : A^2 \rightarrow A^4$, defined by the matrix $S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{(3s^2+s)}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{(s+3)}{(s+1)} \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{(3s+1)}{(s+1)} \end{pmatrix}$ is

a right inverse of the morphism $R : A^4 \rightarrow A^2$, i.e. $RS = I_2$, where I_2 is the unity 2×2 matrix. A consequence of this is that $(.R) \circ (.S) = .(RS) = .I_2$ and thus, the above free resolution of M splits and we obtain $A^4 \cong A^2 \oplus M$, which shows that M is a projective A -module. However, the ring $A = RH_\infty$ is a principal ideal domain [101, 152], thus, using proposition 2.1, we know that M is a free A -module.

EXAMPLE 5.2. Let us take again example 4.2. The A -module N is finitely presented by

$$0 \longleftarrow N \xleftarrow{\pi} A \xleftarrow{R} A^2.$$

Let us call $z = \pi(\delta)$, then we have in N the following equations:

$$\begin{cases} z = 0, \\ z e^{-at} b = 0 \end{cases} \Rightarrow N = 0.$$

Thus, M is a projective A -module. Using proposition 4.1, we have in particular $\text{ext}_A^1(M, L_p) = 0, \forall p \in [1, +\infty]$, i.e., the operator $L_p^2 \xrightarrow{R} L_p$ is surjective, for any $p \in [1, +\infty]$ (see example 4.2). In fact, we have $RS = \delta$ with $S = (\delta \ 0)^t : A^2 \rightarrow A$, and thus, $\forall y \in L_p, y = R(y \ 0)^t$.

Let us recall some basic statements about Banach algebras [52, 136, 152].

DEFINITION 5.2. A *maximal ideal* of a ring A is a proper ideal, i.e. an ideal different from A , which is not contained in any other ideal of A .

It is well known that if A is a commutative \mathbb{C} -Banach algebra, then the *maximal ideal space* $X(A)$ of A can be identified with the set of homomorphisms from A to \mathbb{C} [52, 136, 152]. Indeed, one can prove that the kernel of $\chi \in \text{hom}_A(A, \mathbb{C})$ is a maximal ideal of A and conversely, any maximal ideal of A is the kernel of a certain $\chi \in \text{hom}_A(A, \mathbb{C})$. Endowed with the weak \star topology, induced by the dual space of A , $X(A)$ is a compact Hausdorff space [52, 136].

DEFINITION 5.3. The *Gelfand transform* of $a \in A$ is defined by $\hat{a}(\chi) = \chi(a), \forall \chi \in X(A)$.

If A is *semisimple*, namely, the Gelfand transform is an isomorphism between A and $\hat{A} = \{\hat{a} \mid a \in A\}$, then any element a of A can be seen as a continuous function on $X(A)$, i.e. $\hat{a} \in C(X(A))$. One can prove that any \mathbb{C} -Banach algebra of functions is semisimple.

A basic result of commutative algebra says that an element $a \in A$ is invertible iff a does not belong to any maximal ideal of A , i.e., $\hat{a}(\chi) = \chi(a) \neq 0, \forall \chi \in X(A)$. More generally, if a_1, \dots, a_n is a finite family of A , then, there exist $b_1, \dots, b_n \in A$ such that $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 1$ iff the ideal $I = (a_1, \dots, a_n) = A$, that is to say, iff I is not contained in a maximal ideal of A . Hence,

one can easily prove (see e.g. [152]) that there exist $b_i \in A$, $i = 1, \dots, n$, such that $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 1$ iff $\inf_{\chi \in X(A)} \sum_{i=1}^n |\hat{a}_i(\chi)| > 0$. In fact, we do not have to check the "inf-condition" on all $X(A)$ but we can restrict ourself to a dense subset of $X(A)$.

EXAMPLE 5.3. Let us consider the matrix $R = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s+1} & -\frac{e^{-s}}{s+1} \end{pmatrix}$ with entries in $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$. Thus, the A -module M is defined by the following the finite free resolution

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{R} A^2 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

The A -module N is then defined by the finite free resolution

$$0 \longleftarrow N \xleftarrow{\pi} A \xleftarrow{R} A^2,$$

and if we denote by $z = \pi(1)$, then we have in N the following equations:

$$\begin{cases} z \left(\frac{s-1}{s+1} \right) = 0, \\ -z \left(\frac{e^{-s}}{s+1} \right) = 0. \end{cases}$$

As the matrix R is weakly left-prime, there is no common factor between $\frac{s-1}{s+1}$ and $\frac{e^{-s}}{s+1}$. Using the famous Carleson's corona theorem [51], namely \mathbb{C}_+ is dense in $X(H_\infty(\mathbb{C}_+))$, and verifying

$$\inf_{s \in \mathbb{C}_+} \left(\left| \frac{s-1}{s+1} \right| + \left| \frac{e^{-s}}{s+1} \right| \right) > 0,$$

then there exist a and b in $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$ such that we have the following Bezout identity:

$$\left(\frac{s-1}{s+1} \right) a + \left(-\frac{e^{-s}}{s+1} \right) b = 1.$$

A few computations show that we have in fact (see for more details [11]):

$$\left(\frac{s-1}{s+1} \right) \left(1 + 2 \frac{1 - e^{-s+1}}{s-1} \right) + \left(-\frac{e^{-s}}{s+1} \right) (-2e) = 1.$$

Hence, using the same arguments as for the above example, we find that $A^2 \cong A \oplus M$, and M is a projective A -module.

EXAMPLE 5.4. Let us consider again the system defined in example 4.5. We have shown that the $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$ -module M defined by this system was torsion-free. Let us show that M is not a projective A -module: we have the following exact sequence

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{R} A^2 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

with $R = \begin{pmatrix} e^{-s} & -\frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$, and thus, M is a projective A -module iff $N = 0$. But, we have in N , the following equations

$$(260) \quad \begin{cases} z e^{-s} = 0, \\ -z \left(\frac{1}{s+1} \right) = 0, \end{cases}$$

and $\inf_{s \in \mathbb{C}_+} (|e^{-s}| + |\frac{1}{s+1}|) = 0$. Hence, (260) does not imply $z = 0$, and thus $N \neq 0$, i.e. M is not a projective A -module.

5.2. Vectors bundles over $C(X(A))$. Let us point out the equivalence between projective modules over a Banach algebra and vector bundles over the ring of continuous functions on the maximal ideal space $X(A)$. This analogy will lead to a future introduction of the ideas of K -theory in control theory [4]. This link will be developed in forthcoming publications. In what follows, we shall denote by k the field \mathbb{C} or \mathbb{R} .

DEFINITION 5.4. 1. A k -vector bundle over X is a topological space E with a continuous map $p : E \rightarrow X$ such that:

- (a) for each $x \in X$, $E_x = p^{-1}(x)$ is a finite-dimensional k -vector space compatible with the induced topology,
 - (b) E is *locally trivial*, namely, for each $x \in X$, there exists a neighbourhood U of x such that $E|_U = p^{-1}(U)$ is isomorphic to a *trivial bundle* $U \times k^m$ over U , with $m \in \mathbb{N}$.
2. A *trivial k -vector bundle* is a vector bundle of the form $X \times k^m$, for some $m \in \mathbb{N}$.
3. A *section* s of a vector bundle E is a continuous map $s : X \rightarrow E$ such that $(p \circ s)(x) = x$, $\forall x \in X$.
4. If E and F are two vector bundles over X , then we can define the *Whitney sum*

$$E \oplus F = \{(e, f) \in E \times F \mid p(e) = q(f)\},$$

where p (resp. q) is the projection of E (resp. F) onto X .

Let E be a k -vector bundle over a compact Hausdorff space X and $C(X)$ denote the ring of continuous k -valued functions on X , with the norm:

$$\|f\|_{C(X)} = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Then, the set $\Gamma(E)$ of sections of E has a structure of $C(X)$ -module, determined by:

- $(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x)$, $\forall s_1, s_2 \in \Gamma(E)$, $\forall x \in X$,
- $(fs)(x) = f(x)s(x)$, $\forall f \in C(X)$, $s \in \Gamma(E)$.

We have the following theorem. See [4, 147] for a proof.

THEOREM 5.2. *If E is a vector bundle over a compact Hausdorff space, then there exists a vector bundle F such that $E \oplus F$ is a trivial one.*

Moreover, we have

$$\Gamma(E \oplus F) \cong \Gamma(E) \oplus \Gamma(F),$$

and, if $E = X \times k^m$ is a trivial vector bundle, then $\Gamma(E)$ is the finitely generated free $C(X)^m$. Thus, if E is a vector bundle, then there exists a $C(X)$ -module $\Gamma(F)$ such that $\Gamma(E) \oplus \Gamma(F) \cong C(X)^r$, for a certain $r \in \mathbb{N}$, and $\Gamma(E)$ is a projective $C(X)$ -module. Conversely, if M is a projective $C(X)$ -module, then there exist a $C(X)$ -module N and an integer r such that $M \oplus N \cong C(X)^r$. Let us denote by $e : C(X)^m \rightarrow C(X)^m$ the projection onto M , then $e \in M_m(C(X))$ is an idempotent, i.e. $e^2 = e$, and

$$E = \{(x, \xi) \in X \times k^m \mid \xi \in \text{im } e(x)\},$$

is a vector bundle over X such that $\Gamma(E) \cong M$. Using all the results, we obtain the following theorem due to Swan [147], which is a key-result of the K -theory (see also [4]).

THEOREM 5.3. *There is a one-one correspondence between the vector bundles over X and finitely generated projective module over $C(X)$.*

Finally, let us notice that if A is a semisimple commutative \mathbb{C} -Banach algebra, then the maximal ideal space $X(A)$ of A is an Hausdorff compact space, and, using the Gelfand transform, we have $A \cong \hat{A} \subseteq C(X(A))$, that is to say, any element of A can be seen as a continuous function on $X(A)$. Hence, there is a one-one correspondence between projective A -modules, i.e. projective $C(X(A))$ -modules and vector bundles over the maximal ideal space $X(A)$. Thus, one of the interests of theorem 5.3 is that we can deduce certain algebraic results from topological properties of $X(A)$. We have for example the following theorem [4, 91].

THEOREM 5.4. *Let E be a vector bundle over an Hausdorff compact X . If X is contractible, namely there exists $\chi_0 \in X$ and a continuous function $f : [0, 1] \times X \rightarrow X$ such that $f(0, \chi) = \chi$, $f(1, \chi) = \chi_0$, $\forall \chi \in X$, then E is trivial.*

Hence, if $X(A)$ is contractible, then any projective A -module M is free. See also [152].

EXAMPLE 5.5. The maximal ideal space X of $A = l_1(\mathbb{N})$ is the closed unit disc [152] which is contractible. Thus, any finitely generated projective A -module is free.

Other topological properties of $X(A)$ can be used to deduce algebraic results for A -module as we shall see for H_∞ in section 7.1.

Let E be a vector bundle over $X(A)$ then the rank of the fiber E_x over \mathbb{C} , defined by

$$\begin{aligned} \text{rk } E : X(A) &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \chi &\longmapsto \text{rk } E_\chi, \end{aligned}$$

is a locally constant integer-valued function, that is to say, a continuous function. But $X(A)$ is an Hausdorff compact, thus $(\text{rk } E)(X(A))$ is a compact of \mathbb{N} , i.e., $(\text{rk } E)(X(A)) = \cup_{i=1}^n m_i$, $m_i \in \mathbb{N}$. Then, $X_i = (\text{rk } E)^{-1}(m_i)$ is an open and closed subset of $X(A)$, and we have $X(A) = \cup_{i=1}^n X_i$. But, we have the following Shilov theorem [52].

THEOREM 5.5. *Let A be a commutative Banach algebra with the identity 1 and $X(A)$ its maximal ideal space. Then, there is a one-one correspondance between partitions $X(A) = \cup_{i=1}^n X_i$, where the X_i are open and closed subsets of $X(A)$ and decomposition of $A = \oplus_{i=1}^n A_i$, where $A_i = \{a \in A \mid \hat{a}(\chi) = 0, \forall \chi \notin X_i\}$ is an ideal of A and $A_i = e_i A$, where $1 = \sum_{i=1}^n e_i$ is the decomposition of the unit of A into idempotents elements $e_i \in A_i$.*

COROLLARY 5.1. *Let A be a unital commutative Banach algebra which is an integral domain. Thus, the maximal ideal space $X(A)$ is connected. In particular, if E is a vector bundle over $X(A)$, then the rank of E is a constant. Hence, if A is semisimple, then the matrix $R \in M_{q \times p}(A)$ defines a projective A -module $M = A^p / A^q R$ iff $\text{rk}(\hat{R}(\chi))$ is a constant function on $X(A)$.*

PROOF. A is an integral domain, thus the idempotents of A are only 0 and 1. Thus, by the Shilov theorem, $X(A)$ cannot be decomposed into a disjoint union of open and closed subset of $X(A)$. Thus, $X(A)$ is a connected space and the rank function of any vector bundle E over $X(A)$ is constant. Thus, if r is the rank of R , then R defines a projective A -module, iff

$$\inf_{\chi \in X(A)} \sum_{i \in I} |\hat{R}_i(\chi)| \geq \delta > 0,$$

where $\{\hat{R}_i\}_{i \in I}$ is the family of minors of R of order r . □

6. Freeness and internal stability

6.1. Free modules and generalized Bezout identities.

PROPOSITION 6.1. *Let M be a A -module defined by $A^q \xrightarrow{\cdot R} A^p \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$. Then, M is a free A -module of rank m iff there exists a $p \times m$ matrix R_{-1} such that we have the following exact sequence:*

$$(261) \quad A^q \xrightarrow{\cdot R} A^p \xrightarrow{\cdot R_{-1}} A^m \rightarrow 0.$$

PROOF. Let M be a free A -module of rank m , then there exists an isomorphism $\phi : M \rightarrow A^m$. Thus, the morphism $\pi \circ \phi : A^p \rightarrow A^m$ is surjective, and we call R_1 the matrix corresponding to $\pi \circ \phi$ in the canonical basis. Finally, we easily verify that the sequence (261) is exact. Conversely, if we have the exact sequence (261), then $M = \text{coker}(\cdot R) \cong \text{im}(\cdot R_{-1}) = A^m$, which proves the result. □

PROPOSITION 6.2. *Any SISO system which defines a projective A -module M is free.*

PROOF. The A -module M , corresponding to the SISO system, is defined by the following finite free resolution

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\cdot R} A^2 \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0,$$

where $R = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$. The A -module M is a projective module, then there exist x and y in A such that $ax + by = 1$. The kernel of $R : A^2 \rightarrow A$ is exactly the image of the morphism $R_{-1} : A \rightarrow A^2$, defined by $R_{-1} = \begin{pmatrix} -b & a \end{pmatrix}^t$. Indeed, using the commutativity of A , any solution $(c \ d)^t \in A^2$ of $ac + bd = 0$ satisfies $(c \ d)^t = \begin{pmatrix} -b & a \end{pmatrix}^t (xd - cy)$. Finally, using the fact that $N = 0 \Rightarrow \text{ext}_A^1(N, A) = 0, \text{ext}_A^2(N, A) = 0$, we obtain the following exact sequence

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\cdot R} A^2 \xrightarrow{\cdot R_{-1}} A \rightarrow 0,$$

which proves the proposition. □

EXAMPLE 6.1. Let us reconsider example 5.3. We have shown in this example that the control system

$$\left(\frac{s-1}{s+1}\right)y - \left(\frac{e^{-s}}{s+1}\right)u = 0$$

defined a projective A -module. Using proposition 6.2, M is thus a free A -module.

EXAMPLE 6.2. The SISO system, defined in example 5.2, determines a projective A -module and thus a free A -module.

PROPOSITION 6.3. *Let M be a A -module defined by $0 \rightarrow A^q \xrightarrow{\cdot R} A^p \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$. If M is a free A -module, then there exist three matrices R_{-1}, S_{-1} and S such that we have the following splitting exact sequence:*

$$0 \rightarrow A^q \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot R} \\ \xleftarrow{\cdot S} \end{array} A^p \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot R_{-1}} \\ \xleftarrow{\cdot S_{-1}} \end{array} A^{p-q} \rightarrow 0.$$

Hence, we have the following identities

$$1. \begin{pmatrix} S & R_{-1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} R \\ S_{-1} \end{pmatrix} = I_p,$$

$$2. \begin{pmatrix} R \\ S_{-1} \end{pmatrix} \circ (S \ R_{-1}) = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & I_{p-q} \end{pmatrix}.$$

called respectively reversed generalized Bezout identity and generalized Bezout identity [28, 81, 152].

PROOF. The A -module M is free and thus, by applying proposition 6.1, there exists a $p \times p-q$ matrix R_{-1} such that we have the exact sequence (261). The sequence (261) ends by a free A -module A^{p-q} , thus the sequence (261) splits (see proposition 5.1), i.e. there exists a $p-q \times p$ matrix S_{-1} such that $R_{-1} \circ S_{-1} = I_{p-q}$. Using definition 5.1, we finally obtain the identities 1 and 2. \square

REMARK 6.1. Let us notice that the above sequence $0 \leftarrow A^q \xleftarrow{.S} A^p \xleftarrow{S_{-1}} A^{p-q} \leftarrow 0$ is exact. Indeed, it is exact at A^q because we have the identity $R \circ S = I_q$, at A^{p-q} because we have the identity $S_{-1} \circ R_{-1} = I_{p-q}$ and exact at A^p because $S_{-1} \circ S = 0$ and $\lambda \in \ker(.S) \Rightarrow \lambda(S \circ R + R_{-1} \circ S_{-1}) = \lambda \Rightarrow \lambda = (\lambda R_{-1})S_{-1} \in \text{im}(.S_{-1})$.

EXAMPLE 6.3. We reconsider the example 5.3. We have seen in example 6.1 that it generated a free A -module. Using the proof of proposition 6.2, we obtain the following generalized Bezout identity:

$$\begin{pmatrix} \frac{s-1}{s+1} & -\frac{e^{-s}}{s+1} \\ 2e & 1 + 2\frac{1-e^{-s+1}}{s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + 2\frac{1-e^{-s+1}}{s-1} & \frac{e^{-s}}{s+1} \\ -2e & \frac{s-1}{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In particular, we have the following parametrization

$$\begin{cases} \frac{e^{-s}}{s+1} z = y, \\ \frac{s-1}{s+1} z = u, \end{cases}$$

of the system $(\frac{s-1}{s+1})y - (\frac{e^{-s}}{s+1})u = 0$ and $z = (2e)y + (1 + 2\frac{1-e^{-s+1}}{s-1})u$ is the basis of M .

6.2. Internal Stability. In this section, we establish a link between free modules and internal stability. Let us notice that related results have been found independently in [100, 146] using modules theory too. In [100, 146], only the A -modules $\text{im}(.R)$ or $\text{im}(R.)$ have been used and not the A -module $M = \text{coker}(.R)$, which is a key-concept of algebraic analysis [85, 96, 106]. As a consequence, there is no concept of torsion elements in their approach and therefore [100, 146] seems to be far from the approach developed in [143]. To our knowledge, the approach developed in [100, 146] can not give any answer to the question asked by Vidyasagar, Schneider and Francis in [150], contrary to ours, as we shall see after on. Links between these two approaches will be study in forthcoming publications.

Let us consider the closed loop formed by a plant P and a controller C (see figure 1). The equations of the closed loop are given by

$$\begin{cases} e_1 = u_1 + P e_2, \\ e_2 = u_2 + C e_1, \\ y_1 = e_2 - u_2, \\ y_2 = e_1 - u_1, \end{cases}$$

with $P \in M_{q \times (p-q)}(K)$ and $C \in M_{(p-q) \times q}(K)$. It is always possible to write P and C under the form $P = R'_p{}^{-1} R''_p$ and $C = R'_c{}^{-1} R''_c$, where R'_p, R''_p, R'_c, R''_c are matrices with entries in A .

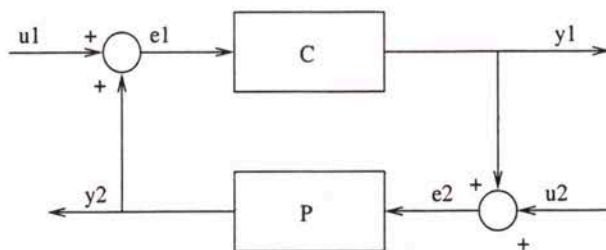


FIG. 1.

For example, we have $R'_p = d_p I_q$ and $R'_c = d_c I_{p-q}$, where d_p (resp. d_c) is the product of all the denominators of the entries of P (resp. of C). Finally, we have the following equations:

$$(262) \quad \begin{cases} R'_p e_1 - R''_p e_2 - R'_p u_1 = 0, \\ -R''_c e_1 + R'_c e_2 - R'_c u_2 = 0, \\ y_1 - e_2 + u_2 = 0, \\ y_2 - e_1 + u_1 = 0. \end{cases}$$

Let us define the following matrices $R_p = (R'_p \quad -R''_p)$, $R_c = (-R''_c \quad R'_c)$ and

$$R_s = \begin{pmatrix} R'_p & -R''_p & -R'_p & 0 \\ -R''_c & R'_c & 0 & -R'_c \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R'_p & -R''_p & -R'_p & 0 & 0 & 0 \\ -R''_c & R'_c & 0 & -R'_c & 0 & 0 \\ 0 & -I_{p-q} & 0 & I_{p-q} & I_{p-q} & 0 \\ -I_q & 0 & I_q & 0 & 0 & I_q \end{pmatrix},$$

as well as the A -modules:

$$M_p = A^p/A^q R_p, \quad M_c = A^p/A^{(p-q)} R_c, \quad M_s = A^{2p}/A^p R_s, \quad M = A^{3p}/A^{2p} R.$$

We have the following lemma.

LEMMA 6.1. *We have:*

$$M = M_s \cong M_p \oplus M_c.$$

PROOF. We have

$$(263) \quad \begin{pmatrix} R'_p & -R''_p & -R'_p & 0 \\ -R''_c & R'_c & 0 & -R'_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_q & 0 \\ 0 & I_{p-q} & 0 & 0 \\ -I_q & 0 & I_q & 0 \\ 0 & I_{p-q} & 0 & -I_{p-q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R'_p & -R''_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R''_c & R'_c \end{pmatrix}.$$

If we denote the second matrix in the left hand side of (263) by U , we can easily see that U is a unimodular matrix. Thus, we have the following diagram

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ 0 & \longrightarrow & A^p & \xrightarrow{\cdot R_s} & A^{2p} & \xrightarrow{\pi} & M_s \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \cdot U & & \\ 0 & \longrightarrow & A^p & \xrightarrow{\cdot (R_p \oplus R_c)} & A^{2p} & \xrightarrow{\pi'} & M_p \oplus M_c \longrightarrow 0, \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

which induces an isomorphism $\phi : M_s \rightarrow M_p \oplus M_c$, defined by $\phi(m) = \pi'(zU)$, with z any element of A^{2p} such that $\pi(z) = m$. Thus, $M_s \cong M_p \oplus M_c$.

We denote by π'' the A -morphism which associates to any element of A^{3p} its class in $M = A^{3p}/A^{2p}R$. Moreover, let us denote $\pi''(f_i) = e_1^i, 1 \leq i \leq q, \pi''(f_i) = e_2^i, q+1 \leq i \leq p, \pi''(f_i) = u_1^i, p+1 \leq i \leq p+q, \pi''(f_i) = u_2^i, p+q \leq i \leq 2p, \pi''(f_i) = y_1^i, 2p+1 \leq i \leq 3p-q$ and $\pi''(f_i) = y_2^i, 3p-q+1 \leq i \leq 3p$, where $\{f_1, \dots, f_{3p}\}$ is the canonical basis of A^{3p} . Then, we have the equations (262) in M . We can easily see that $M_s \subseteq M$ and $y_1^i = e_2^i - u_2^i \in M_s, 1 \leq i \leq p-q$ and $y_2^i = u_1^i - e_1^i \in M_s, 1 \leq i \leq q$, thus $M = M_s$. \square

DEFINITION 6.1. We say that M is *well-posed* if the family $\{u_1^1, \dots, u_1^{p-q}, u_2^1, \dots, u_2^q\}$ of elements of M is A -linearly independant.

This definition of well-posed system is equivalent to require that M_s/F is a torsion A -module, where $F = \bigoplus_{i=1}^{p-q} A u_1^i \oplus_{i=1}^q A u_2^i \cong A^p$, or equivalently, that:

$$\det \begin{pmatrix} R_p \\ R_c \end{pmatrix} \neq 0.$$

In this case, we have the following definition of internal stability which corresponds to the usual one (see [30, 152] for more details).

DEFINITION 6.2. Let M be well-posed. Then, it is *internally stable* or *A-stable* if:

$$(264) \quad \begin{pmatrix} I_p & -P \\ -C & I_{p-q} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} R_p \\ R_c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R'_p & 0 \\ 0 & R'_c \end{pmatrix} \in M_p(A).$$

6.2.1. *Torsion-free case.* If there are no instable poles/zeros simplifications, then we have the following theorem (see section 3 for more details).

THEOREM 6.1. *Let M be well-posed and a torsion-free A -module. Then, M is A -stable iff:*

$$(265) \quad \begin{pmatrix} R_p \\ R_c \end{pmatrix}^{-1} \in M_p(A) \text{ i.e. } \begin{pmatrix} R_p \\ R_c \end{pmatrix} \in GL_p(A).$$

In this case, the family $\{u_1^1, \dots, u_1^{p-q}, u_2^1, \dots, u_2^q\}$ is a basis of M .

PROOF. - Sufficiency. (265) implies trivially (264).

- Necessary. We can easily prove that $t(M_p \oplus M_c) \cong t(M_p) \oplus t(M_c)$. By hypothesis, M_p and M_c are torsion-free modules, thus $t(M) \cong t(M_p) \oplus t(M_c) = 0$, i.e. M is a torsion-free A -module. Now, (264) implies that:

$$\begin{pmatrix} R_p \\ R_c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R'_p & -R''_p & -R'_p & 0 \\ -R''_c & R'_c & 0 & -R'_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & - \begin{pmatrix} R_p \\ R_c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R'_p & 0 \\ 0 & R'_c \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in M_{p \times 2p}(A).$$

But, we have $\text{tor}_1^A(K/A, M) \cong t(M) = 0$, which implies:

$$\begin{pmatrix} R_p \\ R_c \end{pmatrix}^{-1} \in M_p(A) \text{ i.e. } \begin{pmatrix} R_p \\ R_c \end{pmatrix} \in GL_p(A).$$

\square

DEFINITION 6.3. An A -module M_p is said to be *internally stabilizable* if there exists an A -module M_c such that M is A -stable.

COROLLARY 6.1. Let M_p be a torsion-free A -module. Then, M_p is internally stabilizable by a torsion-free A -module M_c iff M_p is a free A -module.

PROOF. Let us suppose that M_p is stabilizable by a torsion-free M_c , then M is A -stable. Using proposition 6.1, M is A -stable iff we have (265). Let us suppose that (265) is satisfied. If we denote

$$\begin{pmatrix} R_p \\ R_c \end{pmatrix}^{-1} = (U \ V),$$

then we have

$$(266) \quad (U \ V) \begin{pmatrix} R_p \\ R_c \end{pmatrix} = I_p \Rightarrow U R_p + V R_c = I_p,$$

and

$$(267) \quad \begin{pmatrix} R_p \\ R_c \end{pmatrix} (U \ V) = \begin{pmatrix} R_p U & R_p V \\ R_c U & R_c V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & I_{p-q} \end{pmatrix}.$$

In particular, we have the complex $0 \rightarrow A^q \xrightarrow{R_p} A^p \xrightarrow{V} A^{p-q} \rightarrow 0$. It is an exact sequence, because if $z \in \ker V$ then $zV = 0$, and using (266), we obtain $(zU)R_p = z$, and thus there exists $y = zU$ such that $yR_p = z$. Finally, using (267), we have the following splitting exact sequence:

$$0 \rightarrow A^q \xrightarrow{R_p} A^p \xrightarrow{V} A^{p-q} \rightarrow 0.$$

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{U} & \xleftarrow{R_c} \\ & & \end{array}$$

Thus, $M_p = A^p/A^q R_p \cong A^{p-q}$, $M_c = A^p/A^{p-q} R_c \cong A^q$ and $M_p \oplus M_c \cong A^p$. Conversely, if M_p is a free A -module, then by proposition 6.3, it is internally stabilizable by a torsion-free A -module M_c . \square

If A is a Banach algebra and both the plant and the controller are stable, then $R'_p = I_q$ and $R'_c = I_{p-q}$. Hence, M is A -stable iff:

$$\begin{pmatrix} I_q & -R''_p \\ -R''_c & I_{p-q} \end{pmatrix}^{-1} \in M_p(A).$$

Standard operations on the determinants give [81]:

$$\delta = \det \begin{pmatrix} I_q & -R''_p \\ -R''_c & I_{p-q} \end{pmatrix} = \det (I_{p-q} - R''_c R''_p),$$

and thus, M is A -stable iff $\delta^{-1} \in A$, i.e., iff $(I_{p-q} - R''_c R''_p)^{-1} \in M_{p-q}(A)$. Moreover, the algebra $M_{p-q}(A)$ has a structure of Banach algebra, thus, if $\|R''_c R''_p\| < 1$, then $(I_{p-q} - R''_c R''_p)^{-1} \in M_{p-q}(A)$, i.e. $I_{p-q} - R''_c R''_p \in GL_{p-q}(A)$ and M is A -stable. This is the *small gain* theorem.

6.2.2. *Case with torsion.* Now, let us denote

$$H = \begin{pmatrix} I_p & -P \\ -C & I_{p-q} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} R_p \\ R_c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R'_p & 0 \\ 0 & R'_c \end{pmatrix} = N d^{-1},$$

where d is obtained by making all the entries of H under the same denominator. Thus, we have

$$\begin{pmatrix} R_p & -R'_p & 0 \\ R_c & 0 & -R'_c \end{pmatrix} d = \begin{pmatrix} R_p \\ R_c \end{pmatrix} (dI_p \ N),$$

and we have the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A^p & \xrightarrow{\begin{pmatrix} R_p & -R'_p & 0 \\ R_c & 0 & -R'_c \end{pmatrix}} & A^{2p} & \xrightarrow{\pi} & M_s \longrightarrow 0 \\ & & \left(\begin{matrix} R_p \\ R_c \end{matrix} \right) \downarrow & & \cdot dI_{2p} \downarrow & & \phi \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A^p & \xrightarrow{\cdot (dI_p \ N)} & A^{2p} & \xrightarrow{\pi'} & M_f \longrightarrow 0, \end{array}$$

where $M_f = A^{2p}/A^p (dI_p \ N)$ and $\phi : M_s \rightarrow M_f$ is defined by $\phi(m) = \pi'(v d)$, where $\pi(v) = m$. Using the Snake lemma [135], we finally obtain the two following exact sequences:

1. $0 \rightarrow \ker \phi \rightarrow M_s \xrightarrow{\phi} M_f \rightarrow \text{coker } \phi \rightarrow 0$,
2. $0 \rightarrow \ker \phi \rightarrow A^p/A^p (R_p \ R_c)^t \rightarrow A^{2p}/A^{2p} d \rightarrow \text{coker } \phi \rightarrow 0$.

The system M_p is internally stabilizable iff $d = 1$ and thus $M_f \cong A^p$, $A^{2p}/A^{2p} d = 0 \Rightarrow \text{coker } \phi = 0$ and:

$$\ker \phi \cong A^p/A^p (R_p \ R_c)^t.$$

Then, using the sequence 1, we obtain the exact sequence:

$$(268) \quad 0 \rightarrow A^p/A^p (R_p \ R_c)^t \rightarrow M_s \xrightarrow{\phi} M_f \rightarrow 0.$$

Moreover, the A -module $A^p/A^p (R_p \ R_c)^t$ is a torsion module and $M_f \cong A^p$ is a torsion-free A -module. Using (253) and (254), we finally obtain that $t(M) \cong A^p/A^p (R_p \ R_c)^t$ and:

$$M/t(M) \cong M_f \cong A^p.$$

But, $t(M) \cong t(M_p) \oplus t(M_c)$ and thus we have:

$$M/t(M) = (M_p \oplus M_c)/(t(M_p) \oplus t(M_c)) \cong M_p/t(M_p) \oplus M_c/t(M_c) \cong A^p.$$

Hence, $M_p/t(M_p)$ and $M_c/t(M_c)$ are two projective modules.

PROPOSITION 6.4. *If $t(M) \neq 0$ and M is well-posed and internally stabilizable, then $M_p/t(M_p)$ and $M_c/t(M_c)$ are two projective modules such that $M_p/t(M_p) \oplus M_c/t(M_c) \cong A^p$.*

Using the exact sequence $0 \rightarrow t(M_p) \rightarrow M_p \rightarrow M_p/t(M_p) \rightarrow 0$ and the fact that $M_p/t(M_p)$ is a projective A -module, then this exact sequence splits (see [135] for more details) and we have $M_p \cong t(M_p) \oplus M_p/t(M_p)$. Similarly, we have $M_c \cong t(M_c) \oplus M_c/t(M_c)$ and:

$$M \cong t(M_p) \oplus t(M_c) \oplus M_p/t(M_p) \oplus M_c/t(M_c) \cong t(M_p) \oplus t(M_c) \oplus A^p.$$

REMARK 6.2. Let us notice that if $t(M) = 0$ and M is internally stabilizable, then, from the exact sequence (268), we have $A^p/A^p \begin{pmatrix} R_p & R_c \end{pmatrix}^t = 0$, i.e. $\begin{pmatrix} R_p & R_c \end{pmatrix}^t \in GL_p(A)$, and we find theorem 6.1.

REMARK 6.3. Let us notice that we can answer the question asked by Vidyasagar, Schneider and Francis in [150], that is to know when the fact that a plant is internally stabilizable implies that it admits a generalized Bezout identities as well as its controller. If M_p is internally stabilizable by M_c , then $M/t(M)$ is a free A -module and thus it admits generalized Bezout identities. However, if $t(M) \cong t(M_p) \oplus t(M_c) \neq 0$, then at least one of the A -modules M_p and M_c is not torsion-free, and thus not free, and it does not admit generalized Bezout identities. Hence, an internally stabilizable plant M_p admits generalized Bezout identities iff M_p is a torsion-free A -module.

EXAMPLE 6.4. Let us consider the system

$$2y + (1 + i\sqrt{5})u = 0$$

defined in example 3.4. We have seen that the corresponding $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ -module M is not torsion-free and thus, even if it is stabilizable by the controller $2u + (1 - i\sqrt{5})y = 0$ (see [1]), it does not admit a generalized Bezout identity, because the free A -module is torsion-free. Hence, we conclude by a purely algebraic argument, without any computations [1], that this system does not admit a generalized Bezout identity.

6.3. Parametrization of all stabilizing controllers. The lift matrices S and S_{-1} , defined in proposition 6.3, are not uniquely determined. In fact, they are determined up to one degree of freedom which is nothing else than the degree of freedom in the *Youla parametrization*. The links between generalized Bezout identities and contracting homotopy [135] will be derived in forthcoming publications (see [125]).

COROLLARY 6.2. *With the same hypothesis and notations as in proposition 6.3, we have the following splitting exact sequence*

$$(269) \quad 0 \rightarrow A^q \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot R} \\ \xleftarrow{\cdot S'} \end{array} A^p \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot R_{-1}} \\ \xleftarrow{\cdot S'_{-1}} \end{array} A^{p-q} \rightarrow 0,$$

with

$$\begin{cases} S'_{-1} = S_{-1} + Q \circ R, \\ S' = S - R_{-1} \circ Q, \end{cases}$$

where $Q : A^{p-q} \rightarrow A^q$ is any A -morphism. In particular, we have the following generalized Bezout identities:

$$1. \begin{pmatrix} S' & R_{-1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} R \\ S'_{-1} \end{pmatrix} = I_p,$$

$$2. \begin{pmatrix} R \\ S'_{-1} \end{pmatrix} \circ (S' \ R_{-1}) = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & I_{p-q} \end{pmatrix}.$$

PROOF. We have the following identities which prove the result:

$$\begin{aligned} - S' \circ R + R_{-1} \circ S'_{-1} &= (S - R_{-1} \circ Q) \circ R + R_{-1} \circ (S_{-1} + Q \circ R) = S \circ R + R_{-1} \circ S_{-1} - \\ &R_{-1} \circ Q \circ R + R_{-1} \circ Q \circ R = I_p, \\ - R \circ S' &= R \circ S - R \circ R_{-1} \circ Q = R \circ S = I_q, \\ - S'_{-1} \circ R_{-1} &= S_{-1} \circ R_{-1} + Q \circ R \circ R_{-1} = S_{-1} \circ R_{-1} = I_{p-q}, \\ - S'_{-1} \circ S' &= S_{-1} \circ S - S_{-1} \circ R_{-1} \circ Q + Q \circ R \circ S - Q \circ R \circ R_{-1} \circ Q = Q - Q = 0. \end{aligned}$$

□

EXAMPLE 6.5. For the control system defined in example 5.3, we obtain the generalized bezout identity

$$\begin{pmatrix} \frac{s-1}{s+1} & -\frac{e^{-s}}{s+1} \\ 2e + \left(\frac{s-1}{s+1}\right)q & 1 + 2\frac{1-e^{-s+1}}{s-1} + \left(\frac{e^{-s}}{s+1}\right)q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + 2\frac{1-e^{-s+1}}{s-1} - \left(\frac{e^{-s}}{s+1}\right)q & \frac{e^{-s}}{s+1} \\ -2e - \left(\frac{s-1}{s+1}\right)q & \frac{s-1}{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

where q is any element of A .

COROLLARY 6.3. Let M_p be a free A -module defined by the presentation $0 \rightarrow A^q \xrightarrow{R} A^p \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$. Let us denote the left A -module defined by S'_{-1} by $M_c(Q) = A^p/A^m S'_{-1}$, i.e., the A -module defined by the following presentation

$$0 \rightarrow A^m \xrightarrow{S'_{-1}} A^p \xrightarrow{\pi'} M_c(Q) \rightarrow 0,$$

then we have in particular:

$$A^p \cong M_p \oplus M_c.$$

Hence, $M_c(Q)$ represents a stable and proper controller of M_p . Moreover,

$$K \mapsto M_c(Q)$$

is the parametrization of all the proper stabilizing controllers of M_p (Youla parametrization).

PROOF. From the splitting exact sequence (269), we obtain $M_p \cong A^m$ and $M_c(Q) \cong A^q$. But, $A^p \cong A^m \oplus A^q$, thus, we obtain $M_p \oplus M_c(Q) \cong A^p$. Hence, $M_c(Q)$ represents all the proper stabilizing controllers of M_p . □

EXAMPLE 6.6. We find that all the proper stabilizing controllers of $M_p = A^2/AR$, where $R = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s+1} & -\frac{e^{-s}}{s+1} \end{pmatrix}$, are defined by $M_c(Q) = A^2/AS'_{-1}$, with:

$$S'_{-1} = \left(2e + \left(\frac{s-1}{s+1}\right)q \quad 1 + 2\frac{1-e^{-s+1}}{s-1} + \left(\frac{e^{-s}}{s+1}\right)q \right), \quad q \in A.$$

Equivalently, this means that all the proper stabilizing controllers which stabilize the plant $p(s) = \frac{e^{-s}}{s-1}$ are defined by:

$$c(s) = \frac{2e + \left(\frac{s-1}{s+1}\right)q}{1 + 2\frac{(1-e^{-s+1})}{s-1} + \frac{e^{-s}}{s+1}q}, \quad q \in A.$$

6.4. Robustness. Now, let A be a Banach algebra and $R_p = \begin{pmatrix} R'_p & R''_p \end{pmatrix}$ and $M_p = A^p/A^q R_p$ is a torsion-free A -module stabilizable by the A -module $M_c = A^p/A^{p-q} R_c$, with $R_c = \begin{pmatrix} R'_c & R''_c \end{pmatrix}$. Let us denote:

$$\begin{pmatrix} U & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_p \\ R_c \end{pmatrix}^{-1}.$$

If ΔR_p is an additive perturbation of R_p , then we have:

$$\begin{pmatrix} R_p + \Delta R_p \\ R_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q + \Delta R_p U & \Delta R_p V \\ 0 & I_{p-q} \end{pmatrix}.$$

In particular, we have

$$\det \begin{pmatrix} I_q + \Delta R_p U & \Delta R_p V \\ 0 & I_{p-q} \end{pmatrix} = \det (I_q + \Delta R_p U),$$

and thus, if $(I_q + \Delta R_p U)^{-1} \in A^{q \times q}$ then $R_p + \Delta R_p$ is stabilizable. Hence, we obtain the following theorem.

THEOREM 6.2. *If $\| \Delta R_p \| < \frac{1}{\| U \|}$ then $R_p + \Delta R_p$ is internally stabilizable by R_c .*

Moreover, we have:

$$\begin{pmatrix} U & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_p + \Delta R_p \\ R_c \end{pmatrix} = U (R_p + \Delta R_p) + V R_c = I_p + U \Delta R_p.$$

Thus, if $I_p + U \Delta R_p$ is invertible, then R_c stabilizes internally $R_p + \Delta R_p$. Hence, if theorem 6.2 is satisfied then $R_p + \Delta R_p$ is internally stabilizable by R_c .

7. Examples

7.1. Internal stability over $H_\infty(\mathbb{C}_+)$. We have the following theorem proved by M.C. Smith in [143].

THEOREM 7.1. *Let R be a full rank $q \times p$ matrix, with $q \leq p$, and entries in $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$. Then, there exist a matrix $R' \in M_q(A)$ and $R'' \in M_{q \times p}(A)$ such that $R = R' R''$ and R'' is weakly left-prime.*

We can rewrite this theorem in terms of modules in the following way.

THEOREM 7.2. *Let M be a $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$ -module defined by the following finite free resolution $0 \rightarrow A^q \xrightarrow{R} A^p \rightarrow M \rightarrow 0$. Then, there exists a full rank $q \times p$ matrix R'' such that*

$$0 \rightarrow A^q \xrightarrow{R''} A^p \rightarrow M/t(M) \rightarrow 0,$$

that is to say, $M/t(M) = A^p/A^q R''$.

PROOF. We have the following commutative and exact diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A^q & \xrightarrow{\cdot R} & A^p & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cdot R' & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & A^q & \xrightarrow{\cdot R''} & A^p & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0, \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & M' & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

from which, using the snake lemma, we obtain the exact sequence:

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

The A -module M' is a torsion module because we have in M' the equation $R'y = 0$, where y_i is the class in M' of the vector e_i of the canonical basis of A^q . But, $\ker(\cdot R') \subseteq \ker(\cdot R) = 0$, which implies that $\det R' \neq 0$. Then, there exists a $q \times q$ cofactor matrix \tilde{R}' such that $\tilde{R}'R' = \det R' I_q$, where I_q is the $q \times q$ unity matrix (see e.g. [90]). Thus, we have in M' the set of equations $\det R' y = 0$ which proves that M' is a torsion A -module. Now, using the long exact sequence (254), and $\text{tor}_1^A(K/A, M') \cong M'$, because M' is a torsion module, $\text{tor}_1^A(K/A, M) \cong t(M)$ and $\text{tor}_1^A(K/A, M'') = 0$, because R'' is weakly-prime and thus $t(M'') = 0$, we finally obtain $t(M) \cong M'$. Hence, using the exact sequence (245), we obtain $M'' \cong M/t(M)$. \square

REMARK 7.1. The above theorem is important because it shows that for any $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$ -module M , defined by a full rank $q \times p$ matrix R , $M/t(M)$ is still defined by a $q \times p$ matrix. In general, this is not true, as we can easily see it by taking the module $M = A^3/A^2R$ over the polynomial ring $A = \mathbb{R}[\chi_1, \chi_2, \chi_3]$, where

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_3 & \chi_2 \\ \chi_3 & 0 & -\chi_1 \end{pmatrix}$$

is the matrix defined by the two first lines of the curl operator. Then, M is not torsion-free, and $M/t(M)$ is defined by the whole curl, that is to say, by the following matrix:

$$R'' = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_3 & \chi_2 \\ \chi_3 & 0 & -\chi_1 \\ -\chi_2 & \chi_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

See [117, 118, 119] for more details.

EXAMPLE 7.1. Let us consider an example of a transfer matrix taken in [30]:

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{-1/s}}{s+1} & \frac{s-1}{s+1} \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{pmatrix}.$$

We can take $A = H_\infty(\mathbb{C}_+)$ and write the previous transfer matrix in terms of:

$$(270) \quad \frac{s-1}{s+1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{(s+1)^2} e^{-1/s} & \left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Let us consider the A -module $M = A^4/A^2R$, where the matrix R is defined by:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s+1} & 0 & -\frac{(s-1)}{(s+1)^2} e^{-1/s} & -\frac{(s-1)^2}{(s+1)} \\ 0 & \frac{s-1}{s+1} & 0 & -\frac{1}{s+1} \end{pmatrix}.$$

We can easily see that we have

$$\begin{cases} z = y_1 - \frac{1}{s+1} e^{-1/s} u_1 - \frac{(s-1)}{(s+1)} u_2, \\ \frac{(s-1)}{(s+1)} z = 0, \end{cases}$$

and thus, z is a torsion element. We easily check that $M/t(M)$ is then defined by the matrix

$$(271) \quad R'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{e^{-1/s}}{s+1} & -\frac{s-1}{s+1} \\ 0 & \frac{s-1}{s+1} & 0 & -\frac{1}{s+1} \end{pmatrix},$$

i.e., $M/t(M) = A^4/A^2R''$ and $R = R'R''$ with $R' = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

The following proposition shows that we have a kind of *Quillen-Suslin theorem* [88, 164] for $H_\infty(\mathbb{C}_+)$, that is to say, any projective $H_\infty(\mathbb{C}_+)$ module defined by a full rank matrix is free.

PROPOSITION 7.1. *Let R be a full rank $q \times p$ ($q \leq p$) matrix with entries in $H_\infty(\mathbb{C}_+)$ with maximal rank and the A -module $M = A^p/A^qR$. Then, M is a projective A -module iff M is a free A -module.*

This proposition shows that if M is a projective A -module, i.e. if there exists $S \in M_{p \times q}(A)$ such that $RS = I_q$, then we can find a $(p-q) \times p$ matrix S_{-1} such that the matrix $(R \ S_{-1})^t$ is unimodular (see [91, 152] and the section on free modules). See the recent paper [21] for a proof of this proposition based on the fact that the *topological dimension* of the maximal ideal space $X(H_\infty(\mathbb{C}_+))$ is equal to 2 [145]. We conjecture that this result is also true for Callier-Desoer algebra \mathcal{A} and in particular that the topological dimension of $X(\mathcal{A})$ is two.

Finally, let us conclude this section by noticing that any transfer function T of A can be written under the form $T = R'^{-1}R''$, where $(R' \ R'')$ defined either a strictly torsion-free A -module or a free A -module. Hence, using corollary 6.1, we can stabilize the torsion-free M_p A -module, defined by $(R' \ R'')$, iff M is free A -module.

EXAMPLE 7.2. Let us reconsider the A -module $M/t(M) = A^4/A^2R''$ of example 7.1. The A -module $N = A^2/R''A^4$ is then defined by the equations:

$$(272) \quad \begin{cases} z_1 = 0, \\ z_2 \frac{(s-1)}{(s+1)} = 0, \\ -z_1 \frac{(e^{-1/s})}{(s+1)} = 0, \\ -z_1 \frac{(s-1)}{(s+1)} - z_2 \frac{1}{(s+1)} = 0. \end{cases}$$

We can easily see that $N = 0$ and thus $M/t(M)$ is an A -module projectif. If we put second members to the equations (272), we find that:

$$(273) \quad \begin{cases} z_1 = v_1, \\ z_2 = v_1 \left(-2 \frac{(s-1)}{(s+1)}\right) + v_2 + v_4 (-2), \end{cases}$$

and thus, if we define the matrix

$$S'' = \begin{pmatrix} 1 & -2\left(\frac{s-1}{s+1}\right) \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

then we have $R'' S'' = I_2$. Using the previous proposition, we finally find that $M/t(M)$ is a free A -module. Now, if we substitute equations (273) into (272), we obtain the equations

$$\begin{cases} v_3 + v_1 \left(\frac{e^{-1/s}}{s+1}\right) = 0, \\ v_1 \left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2 + v_2 \frac{1}{s+1} + v_4 \left(\frac{s-1}{s+1}\right) = 0, \end{cases}$$

Thus, we have the exact sequence $0 \leftarrow A^2 \xleftarrow{R''} A^4 \xleftarrow{R''_{-1}} A^2$ where

$$R''_{-1} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-1/s}}{s+1} & \left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{s-1}{s+1} \end{pmatrix}.$$

Moreover, we can easily see that $R''_{-1} : A^2 \rightarrow A^4$ is injective with left-inverse $S''_{-1} : A^4 \rightarrow A^2$ defined by:

$$S''_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dualizing the exact sequence $0 \leftarrow A^2 \xleftarrow{R''} A^4 \xleftarrow{R''_{-1}} A^2 \leftarrow 0$, we obtain the splitting exact sequence

$$0 \rightarrow A^2 \xrightarrow{R''} A^4 \xrightarrow{R''_{-1}} A^2 \rightarrow 0,$$

$$\xleftarrow{S''} \quad \quad \quad \xleftarrow{S''_{-1}}$$

as well as the following generalized Bezout identity [30]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{e^{-1/s}}{s+1} & -\frac{s-1}{s+1} \\ 0 & \frac{s-1}{s+1} & 0 & -\frac{1}{s+1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2\left(\frac{s-1}{s+1}\right) & \frac{e^{-1/s}}{s+1} & \left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{s+1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \frac{s-1}{s+1} \end{pmatrix} = I_4.$$

From this generalized Bezout identity, we easily find all the stabilizing controllers of (270).

7.2. Internal stability over RH_∞ . First of all, let us give a general result for principal ideal domain A . See for example [90] for a proof.

PROPOSITION 7.2. *If A is a principal ideal domain, R is a $q \times p$ full rank matrix ($q \leq p$) and $M = A^p/A^q R$ is the A -module associated with R , then it is well known that*

$$M \cong \sum_{i=1}^p A/A a_i,$$

where $a_{i+1} \in A a_i, \forall i = 1, \dots, p$, with the possibility to have $a_i = 0$.

This is the generalization of the *Smith form* [81] for an arbitrary principal ideal domain. By theorem 2.1, we know that $M \cong t(M) \oplus M/t(M)$, thus $t(M) \cong \sum_{i=p-q+1}^p A/A a_i$, where $a_1 = a_2 = \dots = a_{p-q} = 0$ and $a_{p-q+1} \neq 0$, and $M/t(M) \cong A^r$ ($A/0 \cong A$). We can easily prove, as we have done for $H_\infty(\mathbb{C}_+)$, that any transfer matrix H can be represented by $H = R'^{-1}R''$, where $(R' \ R'')$ defines a torsion-free and thus free A -module. Hence, any plant over a principal ideal ring A is internally stabilizable. For example, $A = RH_\infty$ is a principal ideal domain [101].

8. Conclusion

We hope to have convinced the reader that algebraic analysis may enlight algebraic aspects of stabilization such as instable poles/zeros simplifications in transfer functions, internal stability, generalized Bezout identities, parametrizations of all stabilizing controllers... To our knowledge, we have given the first general answer of the question asked by Viadysagar, Schneider and Francis about the link between internal stability and the existence of generalized Bezout identities. Lacking space, we were no able to give the link between graph topology and quotient topology of the module over a Banach algebra in this paper, as well as applications of K-theory arguments such that the Atiyah-Singer index theorem in internal stabilization theory. This will be treated in forthcoming publications.

CHAPITRE 11

Conclusion

1. Résumé et commentaires

Cette thèse a présenté les principales méthodes intrinsèques de l'analyse algébrique moderne, et en particulier la théorie des modules différentiels ou D -modules. En même temps, elle a donné le moyen de les utiliser dans l'étude des systèmes de contrôle linéaires multidimensionnels ou pour certaines classes de systèmes à paramètres distribués ($H_\infty(\mathbb{C}_+)$, algèbres de Callier-Desoer, algèbres de convolution...).

L'outil essentiel a été d'une part la dualité existant entre la théorie des modules différentiels et la théorie formelle des systèmes d'équations aux dérivées partielles et d'autre part les techniques classiques d'algèbre homologique telles que la localisation ou la construction des foncteurs torsion/extension. Cela a permis de donner un cadre naturel pour étudier la classification des modules (libre, projectif, réflexif, sans-torsion, ...) et a donné une classification des systèmes de contrôle. En conséquence, la thèse a reformulé et généralisé divers concepts qui peuvent être rencontrés dans la littérature sur les systèmes de contrôle multidimensionnels (contrôlabilité, observabilité, pôles et zéros, ...) ou sur les problèmes de stabilisation interne et de commande robuste.

En particulier, ce travail a unifié, pour la première fois à notre connaissance, les différentes définitions de primalité des systèmes multidimensionnels en les reliant à la précédente classification des modules et aux tests correspondants présentés dans les années 1970 par Palamodov et Kashiwara et jamais utilisés jusqu'ici en théorie du contrôle.

Parmi les résultats présentés, la thèse a décrit une nouvelle approche des identités de Bezout généralisées pour les systèmes contrôlables à coefficients variables et elle a montré que de telles identités étaient en fait équivalentes à la scission d'une suite différentielle exacte formée par l'opérateur définissant le système de contrôle et sa paramétrisation.

Utilisant la paramétrisation des systèmes contrôlables, la thèse a ensuite montré comment transformer un problème de commande optimale, avec fonction de coût quadratique et contrainte différentielle linéaire, en un problème variationnel sans contrainte. Cette approche formelle a utilisé la fonction de coût pour lier la suite différentielle formée par l'opérateur contrôlable et sa paramétrisation avec la suite différentielle formée par les opérateurs adjoints respectifs.

Nous avons finalement montré comment utiliser la théorie des modules et l'algèbre homologique pour reformuler de manière plus intrinsèque les problèmes de stabilisation interne, la primalité faible, les identités de Bezout généralisées et la paramétrisation de tous les contrôleurs stabilisants pour des systèmes définis sur des algèbres de Banach (H_∞ , algèbres de Callier-Desoer...).

L'une des caractéristiques les plus importantes de cette thèse est d'avoir présenté un grand nombre d'illustrations explicites des résultats précédents au moyen d'exemples provenant de différents domaines des sciences de l'ingénieur (élasticité, électromagnétisme, hydrodynamique).

Nous pouvons résumer les différentes étapes développées dans la thèse sous la forme suivante.

1. Tout d'abord, les systèmes de contrôle sont en général décrits par des systèmes d'équations à coefficients dans un anneau intègre A ($K[d_1, \dots, d_n], \mathbb{R}[\chi_1, \dots, \chi_n], H_\infty(\mathbb{C}_+), RH_\infty \dots$).
2. On associe alors à ce système un A -module M .

3. La classification des modules par des méthodes d'algèbre homologique donne alors une classification des systèmes suivant les propriétés algébriques des modules associés.
4. Nous développons alors des tests pour vérifier ces propriétés algébriques.
5. Nous utilisons alors cette classification naturelle des systèmes de contrôle pour :
 - la contrôlabilité,
 - les paramétrisations des systèmes contrôlables,
 - les différentes primalités des systèmes multidimensionnels,
 - les pôles et les zéros des systèmes multidimensionnels,
 - les identités de Bezout généralisées,
 - la commande optimale,
 - les problèmes de stabilisation interne et de robustesse...

Nous espérons avoir convaincu le lecteur, grâce aux nombreuses applications que nous avons développées au cours de cette thèse, de l'intérêt des méthodes de l'analyse algébrique dans l'étude des propriétés structurelles des systèmes de contrôle linéaires. Nous espérons qu'à l'avenir, ces méthodes joueront un rôle majeur dans l'étude des systèmes de contrôle linéaires.

2. Diverses perspectives

Nous donnons quelques points qui seront développés dans de futurs travaux sur les systèmes de contrôle linéaires multidimensionnels.

- Implémentation dans une boîte à outils pour l'automatique linéaires des différents tests effectifs présentés dans cette thèse (paramétrisations, classification des modules, identités de Bezout généralisées, forme canonique de Brunovsky, placement de pôles...) ainsi que ceux proposés dans [32, 33]. L'idée d'une telle boîte à outils vient de S. Diop et les bases ont été posées dans [123].
- Suivant la classification précédente des modules, nous pouvons montrer que tout opérateur différentiel surjectif (ou toute matrice $n - D$ de rang générique maximal) admet des identités de Bezout généralisées modulo un opérateur scalaire comportant plus ou moins de dérivées [127]. Ce résultat provient du fait que tout D -module M de type-fini peut être rendu libre par localisation d'un élément de D . Ces types de résultats ont été longuement étudiés et appliqués dans [43, 44, 102, 163]. Nous développerons dans [127] les résultats que nous avons obtenus dans cette voie et nous nous attacherons à donner des tests effectifs permettant de déterminer ces opérateurs scalaires.
- Les liens entre les systèmes de contrôle à paramètres distribués et les systèmes multidimensionnels seront étudiés à l'aide de certains résultats sur les D -modules développés dans [85].

Pour finir, proposons quelques problèmes de commande robuste qui nous semblent intéressants et dont les solutions seront développées dans de futures communications.

- Les liens entre la pré-norme du A -module M et la topologie du graphe [151, 153] seront bientôt étudiés.
- L'étude des liens possibles entre la dimension projective [66, 67, 68, 69] de certaines algèbres de Banach ($H_\infty, \mathcal{A}...$) et le nombres de primalités existantes dans cette algèbre nous semble un problème intéressant et encore jamais étudié.

- Nous développerons dans de futures communications les liens entre les modules projectifs sur une algèbre de Banach A , les fibrés vectoriels sur l'espace des idéaux maximaux $X(A)$ de A et les idempotents de $M_p(A)$, à l'aide la K-théorie [4].
- Nous étudierons à l'aide du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer [4] les liens possibles entre la caractérisation algébrique de la stabilisation interne donnée au chapitre 10 et celle développée par Vinnicombe dans [157] à l'aide des opérateurs de Toeplitz et des indices des opérateurs de Fredholm (généralisation du théorème de Nyquist pour la dimension infinie),
- Finalement, nous étudierons la conjecture que nous avons proposée sur la dimension topologique des algèbres de Callier-Desoer (voir chapitre 10)...

Bibliographie

- [1] Anantharam, V. (1985). "On stabilization and existence of coprime factorizations", *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-30, pp. 1030-1031.
- [2] d'Andréa-Novel, B. et Praly, L. (1991). "Playing with the regulation zeros in the stabilization of double inverted pendulum", *Kybernetika*, Vol. 27, pp. 213-224.
- [3] d'Andréa-Novel, B. et Cohen de Lara, M. (1994). *Commande linéaire des systèmes dynamiques*, Masson.
- [4] Atiyah, M. F. (1969). *K-Theory*, Addison-Wesley.
- [5] Barnett, S. (1990). *Matrices and Applications*, Clarendon Press.
- [6] S. Bennett, *A Brief History of Automatic Control Engineering*, dans *Systèmes de régulation*, coordonné par A. Rachid, Masson (1996), 403-411.
- [7] Bjork, J. E. (1979). *Rings of Differential Operators*, North Holland.
- [8] Bjork, J. E. (1993). *Analytic D-modules and Applications*, Kluwer.
- [9] Blomberg, H. et Ylinen, R. (1983). *Algebraic Theory for Multivariable Linear Systems*, Academic Press.
- [10] Bonnet, C. et Partington, J. F. (1997). "Robust stabilization in the BIBO gap topology", *International J. of Robust and Nonlinear Control*, vol. 7, pp. 429-447.
- [11] Bonnet, C. et Partington, J. F. (1999). "Bezout factors and L^1 -optimal controllers for delay systems using a two-parameter compensator scheme", à paraître dans *IEEE Trans. Automat. Contr.*
- [12] Boulier, F., Lazard, D., Ollivier, F. et Petitot, M. (1995). "Representation for the radical of a finitely generated differential ideal", ISSAC'95, A. Levelt ed., ACM Press, pp. 158-166.
- [13] Bourbaki, N. (1980). *Algèbre homologique*, chap. X, Masson.
- [14] Bourbaki, N. (1985). *Algèbre commutative*, chap. I-IV, Masson.
- [15] Bourbaki, N. (1970). *Algèbre Commutative I*, Chapitres I-III, CCCLS.
- [16] Bourlès, H., (1994). "Semi-cancellable fractions in systems theory", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-39, pp. 2148-2153.
- [17] Bourlès, H. et Fliess, M. (1997). "Finite poles and zeros of linear systems: an intrinsic approach", *International Journal of Control*, Vol. 68, No. 4, pp. 897-922.
- [18] Bose, N. K. (1982). *Applied Multidimensional Systems Theory*, Van Nostrand Reinhold.
- [19] Bose, N. K. (1985). *Multidimensional Systems Theory*, D. Reidel.
- [20] Brethe, D. et Loiseau, J.-J. (1997). "Stabilization of linear time-delay systems". *JESA-RAIRO-APII*, 6, pp. 1025-1047.
- [21] Brudnyi, A. (1999). "Matrix-valued corona theorem for multiply connected domains". [//xxx.lpthe.jussieu.fr/abs/math/9902046](http://xxx.lpthe.jussieu.fr/abs/math/9902046).
- [22] Buchberger, B. (1985). "An algorithmic method in polynomial ideal theory", dans N. Bose ed. *Multidimensional Systems Theory*, D. Reidel, 1985, pp. 184-232.
- [23] Brunovsky, P. (1970). "A classification of linear controllable systems", *Kybernetika*, Vol. 3, pp. 173-188.
- [24] Callier, F. M. et Desoer, C. A. (1978). "An algebra of transfer functions for distributed linear time-invariant systems", *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol 25, pp 651-662.
- [25] Callier, F. M. et Desoer, C. A. (1980). "Stabilization, tracking and disturbance rejection in multivariable convolution systems", *Ann. Soc. Sc. Bruxelles*, 94, I, pp. 5-51.
- [26] Cartan, E. (1945). *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Hermann.
- [27] Claude, D. (1993). *Automatique théorique, systèmes linéaires en temps continu, représentation d'état*, Université Paris XIII (Orsay).
- [28] Curtain, R. F. et Zwart, H. J. (1991). *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, TAM 21, Springer-Verlag.
- [29] Desoer, C. A. et Vidyasagar, M. (1975). *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press.
- [30] Desoer, C. A., Liu, R.-W., Murray, J. et Saeks, R. (1980). "Feedback system design: the fractional representation approach to analysis and synthesis", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 25, No. 3, pp. 399-412.
- [31] Douglas, J. (1941). "Solutions of the inverse problem of the calculus of variations", *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 50, pp. 71-128.
- [32] Diop, S. (1991). "Elimination in control theory", *Math. Control Signals Systems*, Vol. 4, pp. 17-32.

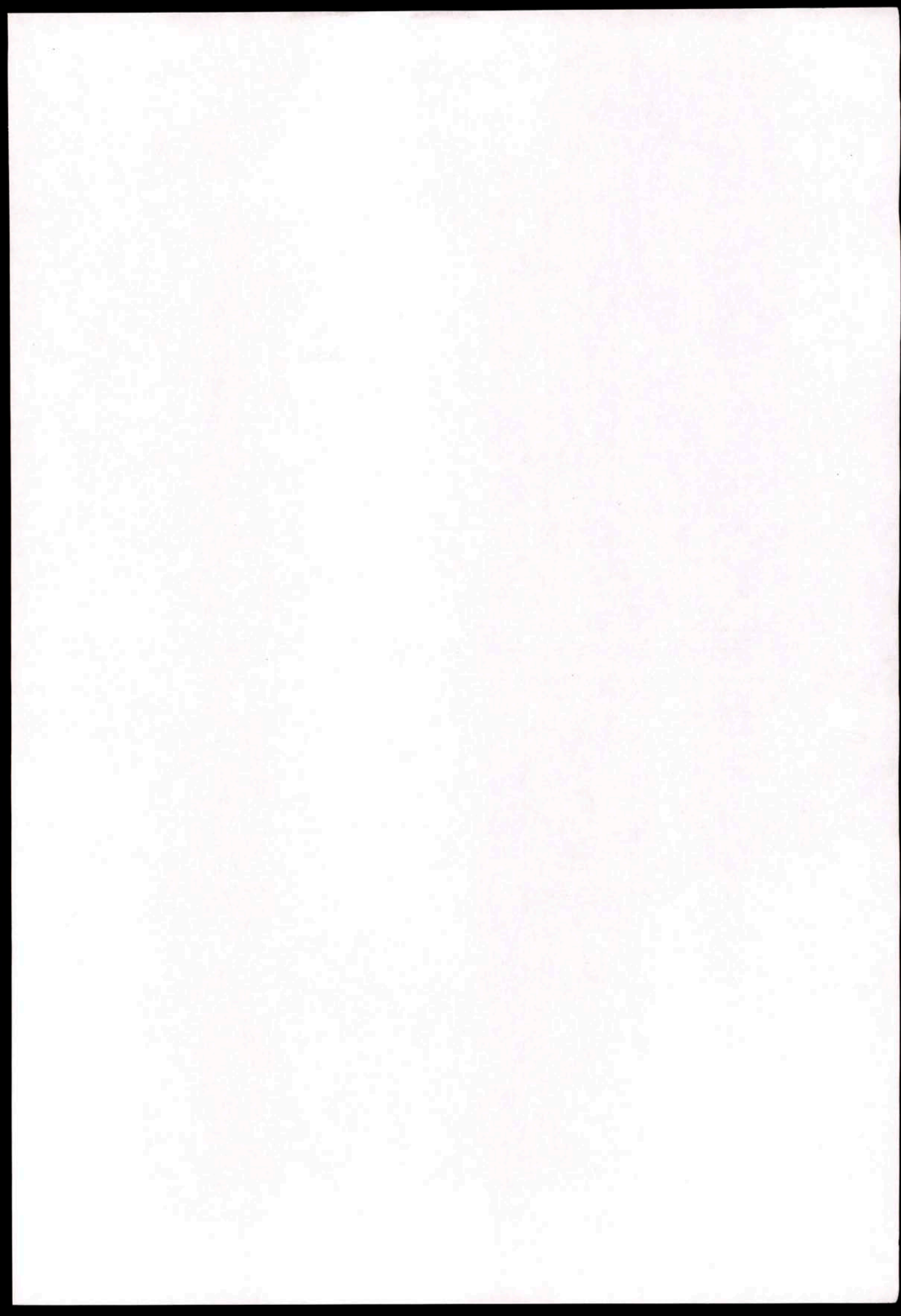
- [33] Diop, S. (1992). "Differential algebraic decision methods and some applications to system theory", *Theoret. Comput. Sci.*, Vol. 98, pp. 137-161.
- [34] Doyle, J. C., Georgiou T. C. et Smith, M. C. (1993). "The parallel projection operators of a nonlinear feedback system", *Systems & Control Letters*, Vol. 20, pp. 79-85.
- [35] Einstein, A. (1953). *The Meaning of Relativity*, 4th edn. Princeton, Appendix II.
- [36] Ehrenpreis, L. (1970). *Fourier Analysis in Several Complex Variables*, Wiley Interscience.
- [37] Faurre, R. et Robin, M. (1984). *Eléments d'automatique*, Dunod.
- [38] Fliess, M. (1990). "Some basic structural properties of generalized linear systems", *Systems and Control Letters*, Vol. 15, pp. 391-396.
- [39] Fliess, M. (1991). "Controllability revisited", dans *The Influence of R. E. Kalman*, édité par A. C. Antoulas, Springer-Verlag, pp. 463-474.
- [40] Fliess, M. (1992). "A remark on Willems' trajectory characterization of linear controllability", *Systems & Control Letters*, Vol. 19, pp. 43-45.
- [41] Fliess, M. (1994). "Une interprétation algébrique de la transformation de Laplace et des matrices de transfert", *Linear Algebra and its Applications*, pp. 429-442.
- [42] Fliess, M., Lévine, J., Martin, Ph. et Rouchon, P. (1995). "Flatness and defect of nonlinear system: introduction theory and examples", *Int. J. Control*, Vol. 61, pp. 1327-1361.
- [43] Fliess, M. et Mounier, H. (1995). "Interpretation and comparison of various types of delay system controllabilities", IFAC conf. "System Structure and Control theory", édité par M. Guglielmi, Nantes, 5-7 Juillet 1995, Ecole Centrale de Nantes, France, pp. 330-335.
- [44] Fliess, M. et Mounier, H. (1998). "Controllability and observability of linear delay systems: an algebraic approach", *ESAIM Control, Optimization and Calculus of Variations*, Vol. 3, pp. 301-314.
- [45] Fliess, M., Mounier, H., Rouchon, P. et Rudolph, J. (1997). "Systèmes linéaires sur les opérateurs de Mikusiński et commande d'une poutre flexible", *ESAIM Proc.*, Vol. 2, pp. 183-193.
- [46] Fornasini, E. et Valcher, M. E. (1997). "n-D polynomial matrices with applications to multidimensional signal analysis", *Multidimensional Systems and Signal Processing*, Vol. 8, No. 4, pp. 387-408.
- [47] Francis, B. (1986). *A course in H_∞ Control Theory*, Lecture Notes in Control and Information Sciences 88, Springer-Verlag.
- [48] Friedland, B. (1986). *Control System Design. An Introduction to State-Space Methods*, Mc Graw Hill.
- [49] Fröhler, S. et Oberst, U. (1998). "Continuous time-varying linear systems", *Systems and Control Letters*, Vol. 35, pp. 97-110.
- [50] Gantmacher, F. R. (1959). *The Theory of Matrices*, Vol. 1 et 2, Chelsea.
- [51] Garnett, J. B. (1981). *Bounded Analytic Functions*, Academic Press.
- [52] Gelfand, I. M., Raikov, D. A. et Chilov, G. E. (1964). *Commutative Normed Rings*, Chelsea Publishing Company.
- [53] Georgiou, T. T. et Smith, M. (1990). "Optimal robustness in the gap metric", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 35, No. 6, pp. 673-685.
- [54] Georgiou, T. T. et Smith, M.C. (1992). "Robust stabilization in the gap metric: controller design for distributed Plants", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 37, No. 8, pp. 1133-1143.
- [55] Gerdt, V. P. et Blinkoov, Y. A. (1995). "Involutive polynomial bases", *Rapport du Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille*, France.
- [56] Gerdt, V. P. (1995). "Computer algebra and nonlinear equations: recent achievements", *Rapport du Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille*, France.
- [57] Godement, R. (1958). "Topologie algébrique et théorie des faisceaux", Hermann, nouveau tirage.
- [58] Gille, J. C., Pélegrin, M. et Decaulne, P. (1956). *Théorie et technique des asservissements*, Dunod.
- [59] Goldschmidt, H. (1967). "Existence theorems for analytic linear partial differential equations", *Annals of Math.*, Vol. 86, pp. 246-270
- [60] Goldschmidt, H. (1968). "Prolongation of linear partial differential equations: I a conjecture of Elie Cartan, II inhomogeneous equations", *Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup.*, Vol. 1, pp. 417-444, pp. 617-625.
- [61] Goldschmidt, H. (1969). "Integrability criterion for systems of nonlinear partial differential equations", *J. Differential Geom.*, Vol. 1, pp. 269-307.

- [62] Goldschmidt, H. (1970). "Points singuliers d'un opérateur différentiel analytique", *Inventiones math.*, Vol. 9, pp. 165-174.
- [63] Guiver, J. P. et Bose, N. K. (1985). "Causal and weakly causal 2-D filters with applications in stabilization", dans N. Bose ed. *Multidimensional Systems Theory* D. Reidel, pp. 53-99.
- [64] Guiver, J. P. (1985). "The equation $Ax = b$ over the ring $\mathbb{C}[z, w]$ ", dans N. Bose ed. *Multidimensional Systems Theory*, D. Reidel, pp. 232-244.
- [65] J. Hautus, M. L. "Controllability and Observability Conditions of Linear Autonomous Systems", Proc. Ned. Akad. Wetensch., A-72, pp. 443-448.
- [66] Helemskii, A. Ya. (1970). "The homological dimension of normed modules over Banach algebras", *Math. USSR Sb.*, Vol. 10, pp. 399-411.
- [67] Helemskii, A. Ya. (1970). "The homological dimension of Banach algebras of analytic functions", *Math. USSR Sb.*, Vol. 12, pp. 221-233.
- [68] Helemskii, A. Ya. (1972). "The global dimension of a Banach function algebra is different to one", *Functional Anal. Appl.*, Vol. 6, pp. 166-168.
- [69] Helemskii, A. Ya. *The Homology in Algebras of Analysis*, à paraître dans.
- [70] Hille, E. et Phillips, R.S. (1957). *Functional Analysis and Semigroups*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 31, Providence, R.I.
- [71] Hoffman, K. (1962). *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall.
- [72] Hörmander, L. (1983). *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I & II*, 256-257, Springer-Verlag.
- [73] Hu, S. T. (1968). *Introduction to Homological Algebra*, Holden Day.
- [74] Janet, M. (1920). "Sur les systèmes aux dérivées partielles", *Journal de Math.*, 8^{ème} série, III, pp. 65-151.
- [75] Janet, M. (1924). "Les modules de formes algébriques et la théorie générale des systèmes différentiels", *Ann. Ec. Normale*, 3^{ème} série, 41, pp. 27-65.
- [76] Janet, M. (1929). *Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Cahiers Scientifiques IV, Gauthier-villars.
- [77] Janet, M. (1921). "Sur les systèmes aux dérivées partielles comprenant autant d'équations que de fonctions inconnues", CRAS 172, pp. 1637-1639.
- [78] Jebli, A. (1993). *Algèbre commutative*, Scientifika.
- [79] Jebli, A. (1993). *Théorie de la dimension*, Scientifika.
- [80] Johnson, J. (1978). "Systems of n partial differential equations in n unknown functions: the conjecture of M. Janet", *Trans. AMS*, Vol. 242, pp.
- [81] Kailath, T. (1980). *Linear Systems*, Prentice-Hall.
- [82] Kalman, R. E. (1961). "On the general theory of control systems", Proc. 1st International Congress on Automat. Contr., Moscow, 1960, Butterwoths, 1961.
- [83] Kalman, R. E., Ho, Y.C. et Narendra, K. S. (1963). "Controllability of linear dynamical systems", *Contrib. Diff. Equations*, Vol. 1, No. 2, pp. 189-213.
- [84] R. E. Kalman, P.L. Falb et M.A. Arbib, *Topics in Mathematical System Theory*, McGraw-Hill (1969).
- [85] Kashiwara, M. (1970). *Algebraic Study of Systems of Partial Differential Equations*, Mémoires de la Société Mathématiques de France, no. 63 (1995).
- [86] Kleon, S. et Oberst, U. (1998). "Transfer operators and state spaces for discrete multidimensional linear systems", *seminary rapport of the University of Hagen*, Vol. 63, pp. 409-426.
- [87] Kolchin, E. R. (1973). *Differential Algebra and Algebraic Groups*, Pure Appl. Math., No. 54, Academic Press.
- [88] Kunz, E. (1985). *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Birkhäuser.
- [89] Lafon, J. P. (1974). *Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative*, Hermann.
- [90] Lang, S. (1984). *Algebra*, Addison-Wesley.
- [91] Lin, V. Ya. (1973). "Holomorphic fiberings and multivalued functions of elements of a Banach algebra", *Funct. Anal. and its Appl.* English translation, Vol. 7, 122-128.
- [92] Mac Lane, S. (1994). *Homology*, Classic in Mathematics, Springer-Verlag.
- [93] Maisonobe, P. et Sabbah, C. (1993). *D-Modules Cohérents et Holonomes*, Travaux en cours No. 45, Hermann.
- [94] Malgrange, B. (1962/63). "Systèmes à coefficients constants", Séminaire Bourbaki, 246, pp. 1-11.
- [95] Malgrange, B. (1966). *Ideals of Differentiable Functions*, Oxford University Press.

- [96] Malgrange, B. (1966). "Cohomologie de Spencer (d'après Quillen)", *Sém. Math. Orsay*, France.
- [97] Malgrange, B. (1966-67). "Théorie analytique des équations différentielles", *Séminaire Bourbaki*, No. 329, pp. 1-13.
- [98] Malgrange, B. (1975-1976). "Opérateurs différentiels et pseudodifférentiels", *Séminaire de l'université scientifique et médicale de Grenoble*, France.
- [99] Morf, M., Lévy, B. C. et Kung, S.-Y. (1977). "New results in 2-D systems theory, part I: 2-D polynomial matrices, factorization, and coprimeness", *Proceedings of IEEE*, pp. 54-65.
- [100] Mori, K. et Abe, K. (1999). "Feedback stabilization over commutative rings: further study of coordinate-free approach", soumis à *SIAM J. Control and Optimization*.
- [101] Morse, A.S. (1976). "System invariants under feedback and cascade control", *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 131, Springer-Verlag.
- [102] Mounier, H. (1995). *Propriétés structurelles des systèmes linéaires à retards: aspects théoriques et pratiques*, Thèse de doctorat, Université de Paris XI, Orsay, France.
- [103] Northcott, D. G. (1976). *Finite Free Resolutions*, 71, Cambridge University Press.
- [104] Oberst, U. (1990). "Multidimensional Constant Linear Systems", *Acta Appl. Math.*, Vol. 20, pp. 1-175.
- [105] Oberst, U. (1996). "Finite Dimensional Systems of Partial Differential or Difference Equations", *Advances in Applied Mathematics*, 17, pp. 337-356.
- [106] Palamodov, V. P. (1970). *Linear Differential Operators with Constant Coefficients*, 168, Springer-Verlag.
- [107] Pham, F. (1980). *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*, Progress in Math. Vol. 1 et 2, Birkhäuser.
- [108] Pillai, H. K. et Shankar, S. (1999). "A behavioural approach to control of distributed systems", *SIAM J. Control Optim.*, Vol. 37, No. 2, pp. 388-408.
- [109] Pillai, H. K. et Willems, J. C. (1999). "Optimal LQ control for n-D systems", ECC'99, août 1999.
- [110] Pommaret, J. F. (1978). *Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups*, Gordon and Breach.
- [111] Pommaret, J. F. (1983). *Lie Pseudogroups and Mechanics*, Gordon and Breach.
- [112] Pommaret, J. F. (1992). "New perspectives in control theory for partial differential equations", *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, Vol. 9, pp. 305-330.
- [113] Pommaret, J. F. (1994). *Partial Differential Equations and Group Theory: New Perspectives for Applications*, Kluwer.
- [114] Pommaret, J. F. (1995). "Dualité différentielle et applications", C.R.A.S. Paris, t. 320, Série I, pp. 1225-1230.
- [115] Pommaret, J. F. (1995). "Duality for control systems revisited", *IFAC conf. System Structure and Control*, édité par M. Guglielmi, Nantes, France, 5-7 Juillet, Ecole Centrale de Nantes, France, pp. 438-443.
- [116] Pommaret, J.F. (1996). "Differential freedom for nonlinear partial differential control theory", *IMACS conf. Computational Engineering in Sys. Applications*, édité par P. Borne, M. Staroswiecki, J.P. Cassar and S. El Khattabi, Lille, France, Juillet, pp. 9-12.
- [117] Pommaret, J. F. et Quadrat, A. (1997). "Formal obstructions to the controllability of partial differential control systems", *IMACS World Congress*, édité par A. Sydow, Berlin, août, Vol. 5, pp. 209-214.
- [118] Pommaret, J. F. et Quadrat, A. (1998). "Generalized Bezout identity", *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, Vol. 9 (2), pp. 91-116.
- [119] Pommaret, J. F. et Quadrat, A. (1999). "Localization and parametrization of linear multidimensional control systems", *Systems and Control Letters*, Vol. 37 (1999), pp. 247-260.
- [120] Pommaret, J. F. et Quadrat, A. (1999). "Algebraic analysis of linear multidimensional control systems", *IMA J. Control and Information*, Vol. 16, pp. 275-297.
- [121] Pommaret, J. F. et Quadrat, A. (1998). "Formal elimination theory. Applications for control theory", *preprint CERMICS*, No. 97-108, présenté à *Mathematics of Control, Signals, and Systems*.
- [122] Pommaret, J. F. et Quadrat, A. (1999). "Equivalences of linear control systems", présenté au congrès MTNS 2000, Perpignan.
- [123] Quadrat, A. (1996). "Mise en oeuvre d'une boîte à outils pour l'automatique linéaire à l'aide des méthodes de décision différentielles algébriques". Rapport de DEA, Supelec-LSS.
- [124] Quadrat, A. (1998). "Riquier and Janet theory of partial differential equations", 4 exposés au séminaire interne de l'Université d'Innsbruck.

- [125] Quadrat, A. (1999). "Analyse algébrique des systèmes de contrôle linéaires multidimensionnels", PhD Thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France, to appear.
- [126] Quadrat, A. (1999). "Algebraic analysis of feedback stabilization", présenté pour publication à SIAM J. of Control and Optimization.
- [127] Quadrat, A. (1999). "Locally free multidimensional control systems", en préparation.
- [128] Quillen, D. (1964). *Formal Properties of Overdetermined Systems of Linear Partial Differential Equations*, thèse, Harvard.
- [129] Reid, G. J. (1991). "Algorithms for reducing a system of PDEs to standard form, determining the dimension of its solutions of space and calculating its Taylor series solution", *Eur. J. Appl. Math.*, Vol. 2, pp. 293-318.
- [130] Riquier, Ch. (1910). *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Gauthier-Villars.
- [131] Riquier, Ch. (1928). *La méthode des fonctions majorantes et les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Mémorial Sci. Math. XXXII, Gauthier-Villars.
- [132] Ritt, J. F. (1950). *Differential Algebra*, AMS Colloq. Publ., Vol. 33.
- [133] Rocha, P. et Willems, J. C. (1991). "Controllability of 2-D systems", *IEEE Trans. on Automat. Control*, Vol. 36, pp. 413-423.
- [134] Rosenbrock, H. H. (1970). *State-Space and Multivariable Theory*, Wiley.
- [135] Rotman, J. J. (1979). *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press.
- [136] Rudin, W. (1987). *Real and Complex Analysis*, Mc Graw-Hill.
- [137] Seidenberg, A. (1956). "An elimination theory for differential algebra", *Univ. California Publication in Math.*, Vol. 3, pp. 31-65.
- [138] Schü, J., Seiler, W. M. et Calmet, J. (1993). "Algorithmic methods for Lie pseudogroups", dans *Proc. Modern Group Analysis: Advanced Analytical and Computational Methods in Mathematical Physics*, N. Ibragimov, M. Torrisi, et A. Valenti eds, Kluwer, pp. 337-344.
- [139] Serre, J. -P. (1989). *Algèbre locale multiplicités*, Lecture Notes in Mathematics 11, Springer-Verlag.
- [140] Shankar, S. et Sule, V. R. (1992). "Algebraic geometric aspects of feedback stabilization", *SIAM J. Control Optim.*, Vol. 30, pp. 11-30.
- [141] Shankar, S. (1998). "Can one control the vibrations of a drum?", preprint Indian Institute of Technology, Bombay.
- [142] Shankar, S. (1999). "Complexes of partial differential operators", preprint Indian Institute of Technology, Bombay.
- [143] Smith, M. C. (1989). "On stabilization and the existence of coprime factorizations", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 34, No. 9, pp. 1005-1007.
- [144] Spencer, D. C. (1965). "Overdetermined Systems of Partial Differential Equations", *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 75, pp. 1-114.
- [145] Suárez, F. D. (1994). "Cech cohomology and covering dimension for the H^∞ maximal ideal space", *Journal of Functional Analysis*, Vol. 123, 233-263.
- [146] Sule, V. R. (1994). "Feedback stabilization over commutative rings: the matrix case", *SIAM J. Control Optim.*, Vol. 32, pp. 1675-1695.
- [147] Swan, R. G. (1962). "Vector bundles and projective modules", *Trans. AMS*, Vol. 105, 264-277.
- [148] Vidyasagar, M. (1972). "Input-Output stability of a broad class of linear time-invariant multivariable systems", *SIAM J. Control*, Vol. 10, No. 1, pp. 203-209.
- [149] Vidyasagar, M. (1975). "Coprime factorizations and stability of multivariable distributed feedback systems", *SIAM J. Control*, Vol. 13, No. 6, pp. 1144-1155.
- [150] Vidyasagar, M., Schneider, H. et Francis, B. A. (1982). "Algebraic and topological aspects of feedback stabilization", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-27, No. 4, pp. 880-894.
- [151] Vidyasagar, M. (1984). "The graph metric for unstable plants and robustness estimates for feedback stability", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-29, No. 4, pp. 403-417.
- [152] Vidyasagar, M. (1985). *Control System Synthesis. A Factorization Approach*, MIT Press, Cambridge.
- [153] Vidyasagar, M. et Kimura, H. (1986). "Robust controllers for uncertain linear multivariable systems", *Automatica*, Vol. 22, No. 1, pp. 85-94.
- [154] Vidyasagar, M. et Anderson, B. D. O. (1989). "Approximation and stabilization of distributed systems by lumped systems", *Systems & Control Letters*, Vol. 12, pp. 95-101.

- [155] Vidyasagar, M. (1991). "Further results on the optimal rejection of persistent bounded disturbances", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 36, No. 6, pp. 642-652.
- [156] Vidyasagar, M. (1996). "A brief history of the graph topology", *European Journal of Control*, Vol. 2, pp. 80-87.
- [157] Vinnicombe, G., "Measuring the Robustness of Feedback Systems", accessible sur le site <http://www-control.eng.cam.ac.uk/Homepage/Papers.html>.
- [158] Willems, J. C. (1989). "Models for dynamics", *Dynamics Reported*, Vol. 2, pp. 171-269.
- [159] Willems, J. C. (1991). "Paradigms and puzzles in theory of dynamical systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 36, pp. 259-294.
- [160] Wood, J., Rogers, E. et Owens, D. (1998). "Formal theory of matrix primeness", *Mathematics of Control Signals, and Systems*, Vol. 11, pp. 40-78.
- [161] Wood, J., Oberst, U., Rogers, E. et Owens, D. (1999). "A behaviour approach to the pole structure of 1-D and n-D linear systems", à paraître dans *SIAM J. Control and Optimization*.
- [162] Wonham, W. M. (1985). *Linear Multivariable Control. A Geometric Approach*, Appl. Math., Springer-Verlag.
- [163] Youla, D. C. et Gnani, G. (1979). "Notes on n-dimensional system theory", *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Vol. CAS-26, No. 2, pp. 105-111.
- [164] Youla, D. C. et Pickel, P. F. (1984). "The Quillen-Suslin theorem and the structure of n-dimensional elementary polynomial matrices", *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Vol. CAS-31, No. 6, pp. 513-518.
- [165] Youla, D., Jabr, H. et Bongiorno, J. (1981). "Wiener Hopf design of optimal controllers, part ii: the multi-variable case", *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 26, pp. 301-320.
- [166] Zames, G. (1981). "Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 26, No. 2, pp. 301-320.
- [167] Zames, G. et Francis, B. A. (1983). "Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 28, No. 5, pp. 585-601.
- [168] Zerz, E. (1996). "Primeness of multivariate polynomial matrices", *Systems & Control Letters*, Vol. 29, No. 3, pp. 139-145.
- [169] Zhou, K., Doyle, C. et Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall.
- [170] Zhu, S. Q. (1991). "On normalized Bezout fractions of distributed LTI systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 36, No. 4, pp. 489-491.
- [171] Zhu, S. Q., Hautus, M. L. J. et Praagman, C. (1988). "Sufficient conditions for robust BIBO stabilization: given by gap metric", *Systems & Control Letters*, Vol. 11, pp. 53-59.



Résumé: Cette thèse présente les principales méthodes intrinsèques de l'analyse algébrique moderne, en particulier la théorie des modules différentiels ou D -modules. En même temps, elle présente le moyen de les utiliser dans l'étude des systèmes de contrôle linéaires multidimensionnels à coefficients constants ou variables, lorsque les relations entrées/sorties sont définies par des systèmes d'équations aux dérivées partielles dans le cas continu ou par des équations aux différences dans le cas discret.

L'outil essentiel est la dualité existant entre la théorie des modules différentiels et la théorie formelle des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Combiné à la technique classique de la localisation et à la construction des foncteurs torsion/extension en algèbre homologique, il donne un cadre naturel pour étudier la classification des modules (libre, projectif, réflexif, sans-torsion, ...) et son interprétation en théorie du contrôle. En conséquence, la thèse reformule et généralise divers concepts qui peuvent être rencontrés dans la littérature sur les systèmes de contrôle multidimensionnels (contrôlabilité, observabilité, pôles et zéros, ...). En particulier, ce travail unifie les différentes définitions de primalité en les reliant à la précédente classification des modules et aux tests correspondants présentés dans les années 1970 par Palamodov et Kashiwara.

Parmi les résultats présentés, la thèse décrit une nouvelle approche des identités de Bezout généralisées pour les systèmes contrôlables à coefficients variables et elle montre que de telles identités sont en fait équivalentes à la scission d'une suite différentielle exacte formée par l'opérateur définissant le système de contrôle et sa paramétrisation.

Utilisant la paramétrisation des systèmes contrôlables, nous montrons comment transformer un problème de commande optimale, avec fonction de coût quadratique et contrainte différentielle linéaire, en un problème variationnel sans contrainte. Cette approche formelle utilise la fonction de coût pour lier la suite différentielle formée par l'opérateur contrôlable et sa paramétrisation avec la suite différentielle formée par les opérateurs adjoints respectifs.

Nous montrons finalement comment utiliser la théorie des modules et l'algèbre homologique pour reformuler de manière plus intrinsèque les problèmes de stabilisation interne, la primalité faible, les identités de Bezout généralisées et la paramétrisation de tous les contrôleurs stabilisants pour des systèmes définis sur des algèbres de Banach (H_∞ , algèbres de Callier-Desoer...).

Summary: This thesis presents the main intrinsic methods of modern algebraic analysis, in particular the theory of differential modules or D -modules, with the way to use them within the framework of linear multidimensional control systems with constant or variable coefficients, when the input/output relations are defined by systems of partial differential equations in the continuous case or by difference equations in the discrete case.

The main tool is the duality existing between the theory of differential modules and the formal theory of systems of partial differential equations or differential operators. Combined with the standard localization technique and with the construction of torsion/extension functors in homological algebra, it provides a natural setting for studying the classification of modules (free, projective, reflexive, torsion-free, ...) and its control interpretation. As a byproduct, this thesis reformulates and generalizes various concepts that can be found in the literature on multidimensional control systems (controllability, observability, poles and zeros, ...). In particular, this work unifies the different definitions of primeness by relating them to the previous classification of modules and to the corresponding tests presented in the early 1970's by Palamodov and Kashiwara.

Among the results presented, the thesis describes a new approach to the generalized Bezout identities for controllable systems with variable coefficients and it shows that such identities are equivalent to the splitting of an exact sequence formed by the controllable operator and its parametrization.

Using the parametrization of controllable systems, the thesis finally shows how to transform a problem of optimal control with quadratic cost function and linear differential constraint into a variational problem without constraint. This formal approach uses the cost function in order to link the differential sequence formed by the controllable operator and its parametrization to the differential sequence formed by their respective adjoint operators.

We finally shows how to use modules theory and homological algebra to reformulate in a more intrinsic way the internal stabilization, the weakly primeness, the generalized Bezout identities and the parametrizations of all the stabilizing controllers for systems defined over Banach algebras (H_∞ , Callier-Desoer algebras...).