



**HAL**  
open science

## Dé laminage des matériaux multicouches

Alberto Diaz Diaz

► **To cite this version:**

Alberto Diaz Diaz. Dé laminage des matériaux multicouches : Phénomènes, modèles et critères. Sciences de l'ingénieur [physics]. École des Ponts ParisTech, 2001. Français. NNT : 2001ENPC0014 . tel-04547446

**HAL Id: tel-04547446**

**<https://enpc.hal.science/tel-04547446>**

Submitted on 15 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THESE**  
présentée pour l'obtention du diplôme de  
**DOCTEUR**  
**DE**  
**L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES**

**Spécialité : Structures et Matériaux**

présentée par

**Alberto DIAZ DIAZ**

Sujet de la thèse :

**DELAMINAGE DES MATERIAUX MULTICOUCHES :  
PHENOMENES, MODELES ET CRITERES.**

Soutenue le 29 novembre 2001  
devant le jury composé de :

Président : **H. D. BUI**  
Rapporteurs : **O. ALLIX**  
**D. LEGUILLON**  
Examineurs : **Q.-C. HE**  
**R. HARRY**  
**J.-F. CARON**



X

**THESE**  
présentée pour l'obtention du diplôme de  
**DOCTEUR**  
**DE**  
**L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES**

Spécialité : Structures et Matériaux

présentée par

**Alberto DIAZ DIAZ**

Sujet de la thèse :

**DELAMINAGE DES MATERIAUX MULTICOUCHES :  
PHENOMENES, MODELES ET CRITERES.**

Soutenue le 29 novembre 2001  
devant le jury composé de :



Président : **H. D. BUI**

Rapporteurs : **O. ALLIX**  
**D. LEGUILLON**

Examineurs : **Q.-C. HE**  
**R. HARRY**  
**J.-F. CARON**

# Remerciements

Je tiens à remercier Jean François CARON qui a dirigé mon travail de thèse et qui m'a témoigné de sa confiance et de son aide scientifique. Sans lui, la rédaction de ce mémoire n'aurait pas été réalisée. Sa créativité et sa patience dans l'expérimental ainsi que ses qualités humaines m'ont énormément appris.

Je remercie Alain EHRLACHER de m'avoir accueilli au Laboratoire Analyse des Matériaux et Identification (LAMI). Au cours de ma thèse il a su être toujours disponible pour m'orienter, me conseiller et m'offrir son soutien scientifique. Enfin, je tiens à rendre hommage à ses qualités humaines et pédagogiques.

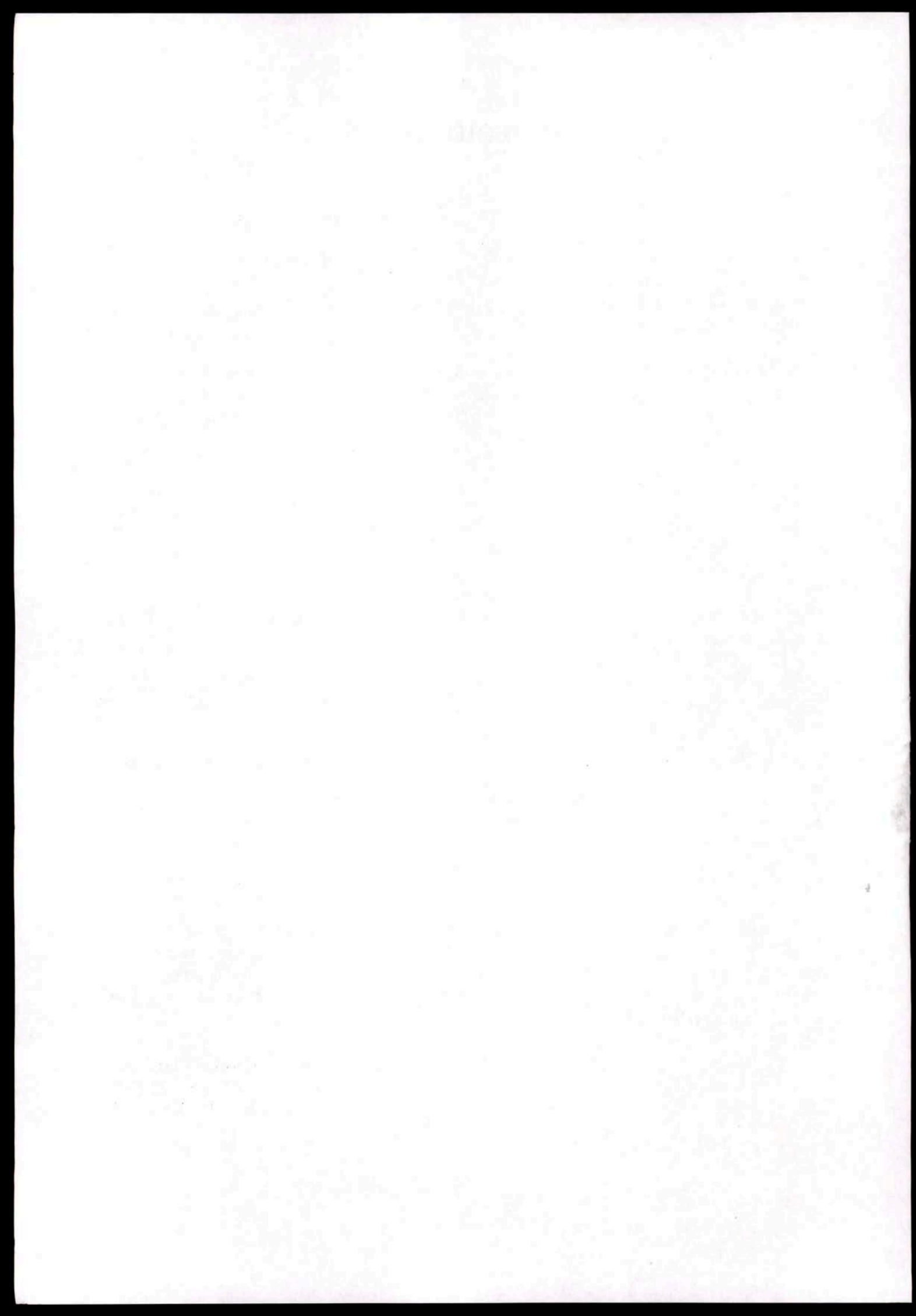
Messieurs Dominique LEGUILLON et Olivier ALLIX ont accepté de me consacrer un peu de leur temps en rapportant sur cette thèse malgré leur charge de travail. J'en suis honoré et je les en remercie sincèrement.

J'adresse de sincères remerciements à Monsieur Huy Duong BUI pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

Mes plus vifs remerciements vont également à Messieurs Roland HARRY et Qi-Chang HE qui ont accepté de participer au jury et qui ont bien voulu juger mon travail.

Je voudrais remercier chaleureusement tous les membres du LAMI, doctorants, permanents ou stagiaires, avec qui les échanges scientifiques, techniques ou amicaux ont été très formateurs pour ma vie professionnelle et ont fait de ces trois années une belle étape de ma vie.

Je remercie de tout mon cœur ma famille, qui a su me donner sans cesse son soutien et son amour au cours de ma vie pour former ma personnalité et pour rendre possible mes études et par conséquent, ce mémoire de thèse. Je remercie aussi María Fernanda pour sa compréhension et ses encouragements. Merci à tous mes amis pour la motivation que leur amitié m'a apportée. Enfin et surtout, merci à Dieu.





# Résumé

On propose dans ce travail des essais, des modèles et des critères pour mieux appréhender les phénomènes de délaminage dans les multicouches.

Les essais sur des multicouches en carbone-époxy mettent en évidence un phénomène de glissement plastique d'interface avant l'amorçage du délaminage et une valeur critique de glissement semble gouverner le délaminage en mode III. Un effet d'épaisseur sur l'initiation de ce mode d'endommagement est remarqué.

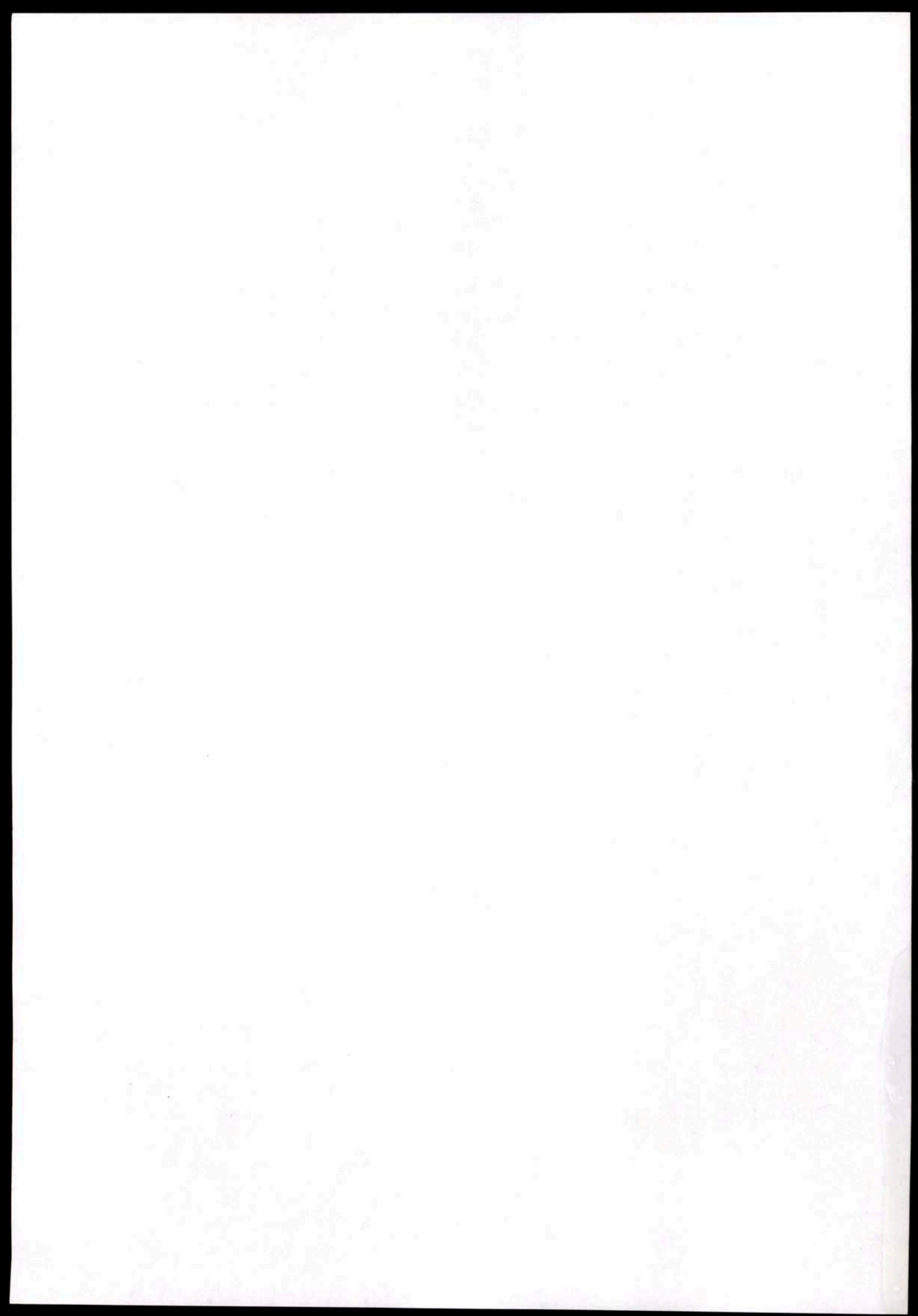
Deux modèles simplifiés, dits multiparticulaires, sont alors proposés pour l'évaluation des efforts d'interface responsables du délaminage et du glissement d'interface. Ces modèles prennent en compte la présence d'éventuels champs anélastiques dans les couches et aux interfaces. On applique ensuite les équations des modèles à un problème de traction d'un multicouche rectangulaire quelconque avec, sur chacune des couches, des conditions de bord quelconques. La programmation de ces équations a donné lieu à deux logiciels de calcul d'effet de bord. Les calculs prouvent l'absence de singularités pour nos modèles.

Deux types d'analyse sont ensuite proposés pour établir des critères de délaminage: l'une élastique fragile et l'autre plastique fragile. La première consiste à adopter des critères empiriques en contrainte maximale et donne des résultats de très bonne qualité pour les différents empilements testés. Le calcul analytique des taux de restitution d'énergie permet de valider énergétiquement ces critères en contrainte maximale. Le deuxième type d'analyse, consiste à calculer le glissement d'interface et à proposer des critères de délaminage en glissement maximal. Ceux-ci donnent aussi des résultats très précis.

La comparaison des énergies dissipées par le délaminage calculées par les deux analyses permet de montrer pourquoi des critères si différents s'avèrent quasi équivalents.

## Mots clés

MATÉRIAUX MULTICOUCHES - COMPOSITES - DÉLAMINAGE - ESSAIS - GLISSEMENT D'INTERFACE - PLASTICITÉ - MODÈLES MULTIPARTICULAIRES - EFFET DE BORD - CRITÈRES - TAUX DE RESTITUTION D'ÉNERGIE - ÉNERGIE DISSIPÉE





# Abstract

Within this thesis, tests, models and criteria are proposed for a better understanding of delamination in laminates.

The tests on carbon-epoxy laminates reveal a plastic interface sliding before delamination onset. A critical sliding value seems to provoke mode III delamination. A thickness effect on delamination onset is observed as well.

Two simplified models, called multiparticle, are then proposed for evaluating the interfacial stresses which are responsible of delamination and interfacial sliding. These models take into account eventual inelastic fields in the layers and at the interfaces. The equations of the models are then applied to a problem of a rectangular laminate under a tensile loading and with any boundary conditions for each layer. These equations are programmed and a software is created for each model for evaluating the edge effects. Calculations show that no singularities exist for our models.

Two kinds of analysis are proposed for delamination prediction. The first one is a brittle elastic approach and empirical criteria involving the maximum values of interfacial stresses are used. The predictions of the first analysis are very accurate and the thickness effect is taken into account. A supplementary analysis of the strain energy release rates validates the maximum stress criteria. The second analysis consists on calculating the interface sliding by means of elastic-plastic conditions and the use of a critical sliding criterion predicts accurately delamination too.

By comparing the dissipated energies by delamination calculated by the two analysis, we conclude that the two criteria are quasi equivalent.

## Keywords

LAMINATES - COMPOSITES - DELAMINATION - TESTS - INTERFACE SLIDING - PLASTICITY - MULTIPARTICLE MODELS - EDGE EFFECT - CRITERIA - STRAIN ENERGY RELEASE RATE - DISSIPATED ENERGY

and the elderly. The authors argue that the current research on aging and aging-related issues is largely based on a deficit model of aging, which focuses on the negative aspects of aging and the decline of physical and cognitive abilities. They argue that this deficit model is not only inaccurate but also stigmatizing, as it implies that aging is a process of loss and decline. Instead, they propose a strengths-based approach to aging, which focuses on the positive aspects of aging and the resilience of older adults. This approach recognizes that aging is a process of growth and development, and that older adults have a wealth of experiences, skills, and resources that can be used to contribute to society and improve their own quality of life.

The authors also discuss the importance of social support and community engagement for older adults. They argue that social support is a key factor in promoting well-being and resilience in later life, and that older adults should be encouraged to participate in social activities and community organizations. They also discuss the importance of addressing the needs of diverse older adults, including those with chronic health conditions, cognitive impairments, and social isolation. They argue that a comprehensive approach to aging should take into account the unique needs and experiences of all older adults, and should aim to promote a positive and meaningful aging experience for everyone.

In conclusion, the authors argue that a strengths-based approach to aging is essential for promoting well-being and resilience in later life. This approach recognizes that aging is a process of growth and development, and that older adults have a wealth of experiences, skills, and resources that can be used to contribute to society and improve their own quality of life. It also emphasizes the importance of social support and community engagement, and the need to address the needs of diverse older adults. The authors call for a comprehensive approach to aging that takes into account the unique needs and experiences of all older adults, and that aims to promote a positive and meaningful aging experience for everyone.

**Keywords:** aging, strengths-based approach, social support, community engagement, resilience, well-being, quality of life, older adults, diversity, chronic health conditions, cognitive impairments, social isolation

**Introduction**

The field of aging studies has traditionally focused on the decline of physical and cognitive abilities in later life, and on the negative aspects of aging. This deficit model of aging has been widely accepted, and has led to a focus on medical and social interventions aimed at reducing the negative impacts of aging. However, in recent years, there has been a growing interest in a strengths-based approach to aging, which focuses on the positive aspects of aging and the resilience of older adults. This approach recognizes that aging is a process of growth and development, and that older adults have a wealth of experiences, skills, and resources that can be used to contribute to society and improve their own quality of life.

The strengths-based approach to aging is based on the idea that older adults have a wealth of experiences, skills, and resources that can be used to contribute to society and improve their own quality of life. This approach recognizes that aging is a process of growth and development, and that older adults have a wealth of experiences, skills, and resources that can be used to contribute to society and improve their own quality of life. It also emphasizes the importance of social support and community engagement, and the need to address the needs of diverse older adults.

The current research on aging and aging-related issues is largely based on a deficit model of aging, which focuses on the negative aspects of aging and the decline of physical and cognitive abilities. This deficit model is not only inaccurate but also stigmatizing, as it implies that aging is a process of loss and decline. Instead, we propose a strengths-based approach to aging, which focuses on the positive aspects of aging and the resilience of older adults. This approach recognizes that aging is a process of growth and development, and that older adults have a wealth of experiences, skills, and resources that can be used to contribute to society and improve their own quality of life.

The authors argue that the current research on aging and aging-related issues is largely based on a deficit model of aging, which focuses on the negative aspects of aging and the decline of physical and cognitive abilities. This deficit model is not only inaccurate but also stigmatizing, as it implies that aging is a process of loss and decline. Instead, we propose a strengths-based approach to aging, which focuses on the positive aspects of aging and the resilience of older adults. This approach recognizes that aging is a process of growth and development, and that older adults have a wealth of experiences, skills, and resources that can be used to contribute to society and improve their own quality of life.



# Table des matières

Introduction générale.	11
<b>1 Etude expérimentale du mécanisme d'initiation du délaminage.</b>	<b>15</b>
1.1 Introduction et bibliographie. . . . .	15
1.1.1 Dispositifs expérimentaux pour étudier le délaminage. . . . .	15
1.1.2 Essais mécaniques pour l'étude du délaminage. . . . .	17
1.2 Préparation des éprouvettes en composite multicouche. . . . .	18
1.2.1 Mise en oeuvre des plaques multicouche. . . . .	18
1.2.2 Découpe et polissage des éprouvettes. . . . .	22
1.3 Dispositifs de contrôle et de mesure. . . . .	23
1.3.1 Machines de traction et systèmes d'acquisition. . . . .	23
1.3.2 Microscopie optique in-situ. . . . .	23
1.3.3 Microscopie électronique. . . . .	26
1.4 Résultats expérimentaux. . . . .	26
1.4.1 Déroulement d'un essai. . . . .	26
1.4.2 Etude du glissement d'interface. . . . .	26
1.4.3 Amorce du délaminage. . . . .	34
1.5 Conclusions. . . . .	38
<b>2 Adaptation de deux modèles multiparticulaires de multicouches.</b>	<b>39</b>
2.1 Introduction. . . . .	39
2.2 Les modèles multiparticulaires. . . . .	41
2.2.1 Définitions et bibliographie. . . . .	41
2.2.2 Méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner. . . . .	43
2.2.3 Position du problème. . . . .	44
2.3 Approximation des champs de contraintes 3D. . . . .	46
2.3.1 Champ de contraintes approché du modèle $\mathcal{M}_{4-5n}$ . . . . .	47
2.3.2 Champ de contraintes approché du modèle $\mathcal{M}_{4-2n+1}$ . . . . .	48
2.4 Equations d'équilibre et conditions aux limites cohérentes avec l'approximation en contraintes. . . . .	49
2.4.1 Modèle $\mathcal{M}_{4-5n}$ . . . . .	50
2.4.2 Modèle $\mathcal{M}_{4-2n+1}$ . . . . .	53
2.5 Ecriture du comportement cohérent avec les approximations . . . . .	55
2.5.1 Modèle $\mathcal{M}_{4-5n}$ . . . . .	57
2.5.2 Modèle $\mathcal{M}_{4-2n+1}$ . . . . .	61
2.6 Recapitulatif des équations et des champs généralisés. . . . .	63
2.6.1 Modèle $\mathcal{M}_{4-5n}$ . . . . .	63

2.6.2	Modèle $\mathcal{M}_{4-2n+1}$ . . . . .	64
2.7	Conclusion. . . . .	65
<b>3</b>	<b>Calcul d'effet de bord et le logiciel DEILAM.</b>	<b>67</b>
3.1	Introduction et bibliographie. . . . .	67
3.1.1	Outil éléments finis 3D. . . . .	68
3.1.2	Outils de calcul par théories de couche limite. . . . .	68
3.1.3	Outils de calcul multiparticulaires. . . . .	70
3.2	Traction d'un multicouche avec bords chargés et résolution par le $\mathcal{M}_{4-5n}$ . . . . .	71
3.2.1	Description du problème. . . . .	71
3.2.2	Champs inconnus. . . . .	74
3.2.3	Equations du modèle $\mathcal{M}_{4-5n}$ appliquées au problème. . . . .	76
3.2.4	Extraction d'un système différentiel du second ordre. . . . .	79
3.2.5	Résolution numérique du système différentiel. . . . .	82
3.3	Description du logiciel. . . . .	82
3.4	Conditions de bord, maillage et convergence pour des problèmes usuels. . . . .	85
3.4.1	Problème de bord libre. . . . .	85
3.4.2	Chargement thermique uniforme avec extrémités libres d'effort. . . . .	87
3.4.3	Structure élastique multicouche de géométrie quelconque avec bords libres. . . . .	89
3.5	Validation de DEILAM. . . . .	91
3.5.1	Essai de traction sans variation de température. . . . .	91
3.5.2	Variation de température sur empilement libre. . . . .	93
3.6	Conclusion. . . . .	97
<b>4</b>	<b>Critères de délaminage pour les matériaux élastiques fragiles.</b>	<b>99</b>
4.1	Introduction et bibliographie. . . . .	99
4.1.1	Critères de délaminage pour les matériaux composites multicouches. . . . .	101
4.2	Critère de fissuration en mode I dans un $(\pm 25_n, 90_{n/2})_s$ . . . . .	105
4.2.1	Maillage multiparticulaire pour les matériaux fragiles. . . . .	106
4.2.2	Non pertinence d'un critère en valeurs maximales d'efforts d'arrachement. . . . .	107
4.2.3	Effet d'échelle de volume et critère de fissuration dans le $(\pm 25_n, 90_{n/2})_s$ . . . . .	109
4.3	Critère d'initiation de délaminage en effort maximal. . . . .	111
4.3.1	Proposition d'un critère en cisaillement maximal. . . . .	111
4.3.2	Application et validation sur des empilements $(\pm \theta_n)_s$ . . . . .	112
4.4	Taux de restitution d'énergie et critère de délaminage. . . . .	120
4.4.1	Position du problème d'un multicouche délaminé. . . . .	121
4.4.2	Equations du modèle appliqué au multicouche délaminé. . . . .	121
4.4.3	Expression du taux de restitution d'énergie. . . . .	123
4.4.4	Propositions de critères de délaminage en taux de restitution d'énergie. . . . .	129
4.5	Application du critère à l'initiation du délaminage d'un $(\pm \theta_n)_s$ . . . . .	130
4.6	Conclusion. . . . .	134
<b>5</b>	<b>Glissement d'interface et critère de délaminage.</b>	<b>137</b>
5.1	Introduction et bibliographie. . . . .	137
5.2	Calcul du glissement d'interface. . . . .	138
5.2.1	Description du problème. . . . .	139
5.2.2	Résolution en fonction des variables d'état. . . . .	140
5.2.3	Résolution complète pour plasticité parfaite et avec écrouissage négatif. . . . .	145



5.3	Simulation d'un cycle de chargement. . . . .	152
5.4	Identification et critères de délaminage en glissement. . . . .	159
5.4.1	Identification à partir de la valeur d'initiation du glissement. . . . .	160
5.4.2	Identification à partir du chargement qui initie le délaminage. . . . .	161
5.5	Equivalence des critères en taux de restitution d'énergie et en glissement plastique. . . . .	167
5.5.1	Calcul d'un multicouche fissuré en traction avec plasticité d'interface. . . . .	167
5.5.2	Calcul des énergies dissipées et comparaison des critères. . . . .	171
5.6	Conclusion. . . . .	176
<b>Conclusions et perspectives.</b>		<b>177</b>
<b>Références bibliographiques.</b>		<b>183</b>
<b>Annexes.</b>		<b>193</b>
<b>A</b>	<b>Traction d'un multicouche avec bords chargés et résolution par le <math>M_4-5n</math>.</b>	<b>193</b>
A.1	Extraction du système différentiel du second ordre. . . . .	193
A.1.1	Ecriture de toutes les inconnues en fonction des inconnues principales. . . . .	194
A.1.2	Ecriture du système différentiel. . . . .	196
A.2	Conditions aux limites du système différentiel. . . . .	198
A.3	Résolution du système différentiel par une formulation variationnelle. . . . .	200
A.3.1	Ecriture d'une première formulation variationnelle. . . . .	200
A.3.2	Approximation de la solution dans un espace discret et nouvelle formulation variationnelle. . . . .	201
<b>B</b>	<b>Détail des calculs pour la résolution du problème de traction.</b>	<b>205</b>
B.1	Expression des matrices et des vecteurs connus du système différentiel. . . . .	205
B.2	Calculs correspondants à la formulation variationnelle. . . . .	211
B.2.1	Coefficients de la matrice de rigidité $\tilde{R}$ . . . . .	211
B.2.2	Second membre. . . . .	212
<b>C</b>	<b>Détail des calculs pour l'expression du taux de restitution d'énergie.</b>	<b>215</b>
C.1	Détermination des discontinuités des déplacements dans le plan. . . . .	215
C.2	Détermination de la discontinuité du déplacement hors plan. . . . .	218





# Table des figures

1.1	Modes de fissuration. . . . .	16
1.2	Empilement des couches. . . . .	19
1.3	Moulage des plaques multicouches. . . . .	19
1.4	Qualité des interfaces (bord d'un $(\pm 25_2)_s$ ). . . . .	20
1.5	Cycle de cuisson des multicouches dans l'autoclave. . . . .	21
1.6	Dispositif de polissage du bord des éprouvettes. . . . .	22
1.7	Éprouvette polie avec talons. . . . .	23
1.8	Microscopie optique in-situ. . . . .	24
1.9	Bord d'un $(\pm 20_3)_s$ délaminé (microscopie in-situ + traitement des contrastes). . . . .	25
1.10	Mise en évidence du glissement à l'interface 20/ - 20 d'un $(\pm 20)_s$ . . . . .	27
1.11	Deux types de glissement au bord d'un $(\pm 20_3)_s$ (microscopie in-situ). . . . .	28
1.12	Profondeur des microfissures dans un $(\pm 10)_s$ avant délaminage (MEB). . . . .	28
1.13	Microfissuration de l'interface dans un $(\pm 10)_s$ juste avant délaminage (observations au MEB des bords polis). . . . .	29
1.14	Plasticité de la résine sous cisaillement au bord poli d'un $(\pm 10)_s$ (MEB). . . . .	29
1.15	Glissement à l'interface 10/-10 d'un $(\pm 10_3)_s$ pour un cycle de chargement. . . . .	30
1.16	Glissement à l'interface 10/-10 d'un $(\pm 10)_s$ jusqu'au délaminage. . . . .	31
1.17	Glissement à l'interface 10/-10 d'un $(\pm 10_2)_s$ jusqu'au délaminage. . . . .	31
1.18	Glissement à l'interface 10/-10 d'un $(\pm 10_3)_s$ jusqu'au délaminage. . . . .	32
1.19	Glissement à l'interface 20/-20 d'un $(\pm 20)_s$ jusqu'au délaminage. . . . .	32
1.20	Glissement à l'interface 20/-20 d'un $(\pm 20_2)_s$ jusqu'au délaminage. . . . .	33
1.21	Glissement à l'interface 20/-20 d'un $(\pm 20_3)_s$ jusqu'au délaminage. . . . .	33
1.22	Courbes d'essais de traction avec apparition du délaminage. . . . .	34
1.23	Délaminage accompagné par une fissure transverse. . . . .	35
1.24	Allure des surfaces de fracture. . . . .	36
1.25	Allure des zones délaminées. . . . .	37
2.1	Approche multiparticulaire des multicouches. . . . .	41
2.2	Multicouches étudiés. . . . .	44
3.1	Couche limite. . . . .	69
3.2	Disposition des couches. . . . .	72
3.3	Chargement sur un multicouche symétrique. . . . .	72
3.4	Description globale de DEILAM. . . . .	83
3.5	Problème de bord libre. . . . .	86
3.6	Empilement $(\pm 10)_s$ en traction pour $\frac{\Delta}{L} = 1$ : deux types de maillage. . . . .	87
3.7	Détermination de $\frac{\Delta}{L}$ pour le problème thermique. . . . .	89



3.8	Problème de bord libre. . . . .	90
3.9	Effet de bord libre. . . . .	90
3.10	Cisaillement $\tau_{yz}$ à l'interface 0/90 du $(0, 90)_s$ pour $\frac{\Delta}{L} = 1$ . . . . .	92
3.11	Cisaillement $\tau_{xz}$ à l'interface 45/-45 du $(45, -45)_s$ pour $\frac{\Delta}{L} = 1$ . . . . .	93
3.12	Cisaillement $\tau_{xz}$ à l'interface 45/-45 du $(45, -45, 0, 90)_s$ pour $\frac{\Delta}{L} = 1$ . . . . .	94
3.13	Arrachements $\nu$ aux interfaces 45/-45 et -45/-45 du $(90, 0, 45, -45)_s$ pour $\frac{\Delta}{L} = 1$ . . . . .	94
3.14	Cisaillement $\tau_{yz}$ à l'interface 0/90 du $(0, 90)_s$ pour $\delta T = 1^\circ C$ . . . . .	95
3.15	Arrachements $\nu$ aux interfaces 0/90 et 90/90 du $(0, 90)_s$ pour $\delta T = 1^\circ C$ . . . . .	96
3.16	Cisaillement $\tau_{xz}$ à l'interface 45/-45 du $(45, -45)_s$ pour $\delta T = 1^\circ C$ . . . . .	96
3.17	Arrachements $\nu$ aux interfaces du $(45, -45)_s$ pour $\delta T = 1^\circ C$ . . . . .	97
4.1	Effet d'échelle de volume. . . . .	100
4.2	Position du multicouche par rapport au repère global. . . . .	101
4.3	Allure du "délaminage" au bord d'un $(\pm 25_n, 90_{n/2})_s$ . . . . .	103
4.4	Modélisation des multicouches $(\pm 25_n, 90_{n/2})_s$ en traction. . . . .	107
4.5	Efforts d'arrachement aux interfaces -25/90 et 90/90 d'un $(\pm 25_4, 90_2)_s$ en traction ( $\epsilon = 1$ ). . . . .	108
4.6	Valeurs aux bords (valeurs maximales) des arrachements calculés aux interfaces -25/90 et 90/90 d'un $(\pm 25_n, 90_{n/2})_s$ en traction ( $\epsilon = 1$ ). . . . .	109
4.7	Effet d'échelle de volume pour la sollicitation des plis à 90 au bord. . . . .	110
4.8	Charges critiques moyennes des multicouches $(\pm 25_n, 90_{n/2})_s$ en traction. . . . .	111
4.9	Multicouche étudié. . . . .	112
4.10	Modélisation des multicouches $(\pm \theta_n)_s$ en traction. . . . .	113
4.11	Efforts d'interface du $\mathcal{M}_4-5n$ dans un $(\pm \theta_n)_s$ en traction pour une déformation unitaire (matériau T700/CTE1-15). . . . .	115
4.12	Efforts d'interface du $\mathcal{M}_4-5n$ dans un $(\pm \theta_n)_s$ en traction pour une déformation unitaire (matériau T800-914). . . . .	115
4.13	Cisaillements $\tau_1$ aux bords à l'interface $\theta/ - \theta$ d'un $(\pm \theta_n)_s$ en traction pour une déformation unitaire (matériau T700/CTE1-15). . . . .	116
4.14	Cisaillements $\tau_1$ aux bords à l'interface $\theta/ - \theta$ d'un $(\pm \theta_n)_s$ en traction pour une déformation unitaire (matériau T800-914). . . . .	116
4.15	Cisaillements $\tau_1$ aux interfaces $\theta/ - \theta$ d'un $(\pm \theta_n)_s$ calculés par le $\mathcal{M}_4-5n$ (matériau T700/CTE1-15). . . . .	117
4.16	Cisaillements $\tau_1$ aux interfaces $\theta/ - \theta$ d'un $(\pm \theta_n)_s$ calculés par le $\mathcal{M}_4-2n+1$ (matériau T700/CTE1-15). . . . .	117
4.17	Charges critiques des multicouches $(\pm \theta_n)_s$ en traction (matériau T700/CTE1-15). . . . .	119
4.18	Charges critiques des multicouches $(\pm \theta_n)_s$ en traction (matériau T800-914). . . . .	120
4.19	Multicouche délaminé. . . . .	122
4.20	Propagation de fissure. . . . .	123
4.21	Charges critiques des multicouches $(\pm \theta_n)_s$ en traction (matériau T700/CTE1-15). . . . .	133
4.22	Charges critiques des multicouches $(\pm \theta_n)_s$ en traction (matériau T800-914). . . . .	134
5.1	Comportement de l'interface. . . . .	138
5.2	Géométrie. . . . .	139
5.3	Problème simplifié. . . . .	140
5.4	Ecrouissage. . . . .	149
5.5	Cycle de chargement. . . . .	153
5.6	Cisaillements $\tau_1$ à l'interface 10/ - 10 d'un $(\pm 10)_s$ : plasticité parfaite. . . . .	154



5.7	Cisaillements $\tau_1$ à l'interface 10/ - 10 d'un $(\pm 10)_s$ : plasticité avec écrouissage négatif.	155
5.8	Glissements $\gamma_1$ à l'interface 10/ - 10 d'un $(\pm 10)_s$ : plasticité parfaite. . . . .	155
5.9	Glissements $\gamma_1$ à l'interface 10/ - 10 d'un $(\pm 10)_s$ : plasticité avec écrouissage négatif.	156
5.10	Discontinuités $\gamma_1$ à l'interface 10/ - 10 au bord d'un $(\pm 10)_s$ . . . . .	157
5.11	Largeurs des bandes plastifiées : plasticité parfaite. . . . .	158
5.12	Largeurs des bandes plastifiées : plasticité avec écrouissage négatif. . . . .	158
5.13	Courbe contrainte/déformation d'un $(\pm 10)_s$ en traction avec interfaces plastifiables.	159
5.14	Glissements au bord d'un $(\pm 10)_3$ avec identification par la valeur d'initiation du glissement. . . . .	160
5.15	Glissements au bord d'un $(\pm 20)_3$ avec identification par la valeur d'initiation du glissement. . . . .	161
5.16	Glissements $\gamma_1$ à l'interface 10/ - 10 au bord d'un $(\pm 10)_s$ : modèles et essai. . . . .	162
5.17	Glissements $\gamma_1$ à l'interface 10/ - 10 au bord d'un $(\pm 10)_2$ : modèles et essai. . . . .	163
5.18	Glissements $\gamma_1$ à l'interface 10/ - 10 au bord d'un $(\pm 10)_3$ : modèles et essai. . . . .	163
5.19	Glissements $\gamma_1$ à l'interface 20/ - 20 au bord d'un $(\pm 20)_s$ : modèles et essai. . . . .	164
5.20	Glissements $\gamma_1$ à l'interface 20/ - 20 au bord d'un $(\pm 20)_2$ : modèles et essai. . . . .	164
5.21	Glissements $\gamma_1$ à l'interface 20/ - 20 au bord d'un $(\pm 20)_3$ : modèles et essai. . . . .	165
5.22	Courbes contrainte/déformation d'un $(\pm 10)_s$ et d'un $(\pm 20)_s$ en traction avec interfaces plastifiables. . . . .	166
5.23	Glissements $\gamma_1$ au bord d'un $(\pm 20)_s$ pour un chargement cyclique : modèles et essai.	166
5.24	3 zones d'étude pour le multicouche élastoplastique fissuré. . . . .	168
5.25	Définitions des longueurs de fissure $h^p = c - b$ et des zones II+III $k = c - a$ dans les cas plastiques. . . . .	170
5.26	Evolution de la longueur de fissure ( $h^p$ ) et de la zone II+III ( $k$ ) en fonction de la déformation dans un $(\pm 10)_s$ (plasticité parfaite). . . . .	170
5.27	Evolution des longueurs du maillon plastique ( $k - h^p$ ) et de la fissure ( $h^p$ ) en fonction de $k$ dans un $(\pm 10)_s$ (plasticité parfaite). . . . .	171
5.28	Evolutions du travail et de l'énergie élastique en fonction de la déformation dans un $(\pm 10)_s$ (plasticité parfaite). . . . .	173
5.29	Comparaison des énergies dissipées dans un $(\pm 10)_s$ : modèle élastique ( $E_G^d$ ) et modèle plastique parfait $E_\gamma^d$ fragiles. . . . .	174
5.30	Comparaison des énergies dissipées par délaminage dans un $(\pm 10)_s$ : plasticité parfaite - plasticité avec écrouissage négatif. . . . .	176





# Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques du pli carbone-époxy T700/CTE1-15. . . . .	21
1.2	Longueurs des fissures transverses. . . . .	37
1.3	Charges critiques. . . . .	38
3.1	Dilatation globale $\alpha_x$ due à une variation $\delta T = 1^\circ C$ . . . . .	96
4.1	Caractéristiques du carbone-époxy T800-914 [Marion, 2000]. . . . .	105
4.2	Charges de traction au moment de la fissuration d'un $(\pm 25_n, 90_{n/2})_s$ [Marion, 2000].	105
4.3	Charges de traction critiques pour le T700/CTE1-15. . . . .	113
4.4	Charges de traction critiques pour le T800-914. . . . .	113
4.5	Valeurs au bord théoriques des cisaillements aux interfaces $\theta/ - \theta$ à l'initiation du délaminage (matériau T700/CTE1-15). . . . .	118
4.6	Valeurs au bord théoriques des cisaillements aux interfaces $\theta/ - \theta$ à l'initiation du délaminage (matériau T800-914). . . . .	118
4.7	Cisaillements critiques. . . . .	119
4.8	Erreurs des prédictions. . . . .	119
4.9	Valeurs du coefficient $c$ dans l'expression du taux de restitution d'énergie (matériau T700/CTE1-15). . . . .	132
4.10	Valeurs du coefficient $c$ dans l'expression du taux de restitution d'énergie (matériau T800-914). . . . .	132
4.11	Valeurs de $G_{III}^c$ pour chaque modèle. . . . .	133
4.12	Erreurs des prédictions. . . . .	133
5.1	Cisaillements critiques moyens pour les deux types de plasticité. . . . .	161
5.2	Chargement au moment du délaminage : prédictions et essais. . . . .	162
5.3	Largeurs des bandes plastifiées à l'initiation du délaminage. . . . .	165
5.4	Taux de restitution d'énergie critiques moyens calculés par le $\mathcal{M}_{4-2n+1}$ . . . . .	172
5.5	Taux d'énergie dissipée pour les empilements $(\pm \theta_n)_s$ par l'approche élastique fragile et les approches plastiques fragiles. . . . .	175





# Introduction générale.

Le développement technologique dans la construction a connu un essor très important au cours des dernières décennies. La mise au point exigeante de nouveaux matériaux a accompagné ce progrès. Les cahiers des charges des matériaux ne cessent d'évoluer en fonction de leurs applications. Les matériaux sont choisis suivant leur densité, leurs caractéristiques mécaniques, leur tenue à la corrosion, leur prix, etc. Si dans la pratique l'acier reste la référence en terme de résistance mécanique, il est souvent inadapté pour des structures légères et de bonne résistance à la corrosion, comme par exemple dans la construction aéronautique. Les matériaux composites sont alors une alternative qui respecte ces impératifs tout en garantissant d'excellentes propriétés mécaniques. La gamme de ces matériaux est très large et les applications augmentent de plus en plus. Néanmoins, mis à part quelques matériaux comme le verre-époxy (fibre de verre, matrice époxy), leur prix est élevé par rapport aux matériaux usuels. De plus, ils sont difficiles à mettre en oeuvre dans le cadre de la fabrication en série de pièces mécaniques. Enfin, les caractéristiques mécaniques de ces matériaux sont souvent bien complexes pour être modélisées aisément et prises en compte dans un logiciel de calcul ou de dimensionnement de structures.

Malgré tout, les matériaux composites sont devenus incontournables, voire irremplaçables pour de nombreuses applications, ce qui nécessite l'étude de leur comportement, de leur endommagement et de leur ruine. Dans les matériaux composites multicouches, les modes d'endommagement sont très complexes. Nous trouvons notamment la rupture des fibres, la fissuration transverse qui est une fissuration de la résine au sein d'une couche et le délaminage qui va faire l'objet de ce mémoire. Le délaminage est une décohésion des couches dans un multicouche qui entraîne le plus souvent la ruine des stratifiés. Ce phénomène est en général dû à un état de contraintes tridimensionnel près des bords libres où les efforts aux interfaces deviennent ainsi non nuls. L'étude de l'initiation et de la propagation du délaminage a fait l'objet de très nombreuses études expérimentales [Brewer et Lagace, 1988], [Sun et Zhou, 1988], [Kim, 1989], [Wang, 1989], [Whitney, 1989], [Wooh et Wei, 1999], [Benmedakhene et al., 1999], [Marion, 2000]. Pour prendre en compte ces phénomènes les concepteurs utilisent souvent des méthodes de calcul et des logiciels s'appuyant sur des modèles classiques des plaques en élasticité et utilisent des coefficients de sécurité importants si le risque de délaminage est grand. Cette approche n'est pas toujours optimale. Afin d'établir des critères fiables, on fait alors appel à d'autres méthodes comme les calculs éléments finis 3D [Wang et Crossman, 1977a], [Yin, 1997] ou les calculs de plaques avec raccordement d'un champ correcteur [Engrand, 1981], [Allix, 1989], [Lécuyer, 1991]. Il s'agit alors de proposer des approximations 3D sur les bords de la plaque afin de mieux vérifier les conditions aux limites. L'utilisation des éléments finis 3D quant à elle présente cependant l'inconvénient de résultats non convergents au voisinage des bords aux interfaces à cause de la présence de singularités [Leguillon et Sanchez-Palencia, 1987]. Les maillages doivent donc être suffisamment raffinés pour que les résultats convergent suffisamment près du bord. L'analyse des multicouches comportant un grand nombre de couches est donc difficilement envisageable par cette méthode. On



peut alors proposer les méthodes simplifiées en ce sens que les modèles proposés sont des modèles de plaques 2D (faisant intervenir des efforts généralisés de tension, flexion, etc.) mais proposant une cinématique par couche [Pagano, 1978], [Pagano et Soni, 1983], [Kassapoglou et Lagace, 1987], [Caron et Ehlacher, 1997], [Caron et al., 1999].

Toutes ces approches du délaminage doivent au final proposer des indicateurs (contraintes, taux de restitution d'énergie, etc.) qui seront pertinents pour la prédiction du délaminage et pour la proposition de critères opératoires, destinés aux concepteurs et utilisateurs de ces matériaux.

Il s'agit bien là de l'objectif de ce mémoire de proposer dans le cadre d'approches simplifiées (modèles de plaque 2D), des critères de délaminage efficaces. Pour déterminer ces critères nous allons développer des modèles simplifiés qui donneront lieu à des logiciels de calcul d'effet de bord. Les modèles et les logiciels permettront d'établir des critères. Ces critères seront validés expérimentalement grâce à des campagnes d'essais et d'observation.

Ce mémoire se compose de cinq chapitres :

Le premier chapitre est une étude expérimentale de l'initiation du délaminage. Les matériaux choisis pour l'étude sont des empilements  $(\pm\theta_n)_s$  élaborés à base de couches de composite carbone-époxy unidirectionnel. Les multicouches sont testés en traction et le délaminage qui apparaît dans ces matériaux est de type mode III. Pour détecter le délaminage et étudier les phénomènes qui le précèdent, nous polissons les bords des éprouvettes et les inspectons au microscope. Nous mettons en évidence un glissement plastique aux interfaces  $\theta/ - \theta$  qui apparaît avant le délaminage et qui semble gouverner l'initiation du délaminage car il existe une valeur critique identique pour tous les empilements testés. Des courbes de chargement en fonction du glissement sont tracées pour les empilements testés jusqu'à l'initiation du délaminage. Nous donnons aussi les valeurs critiques de chargement qui provoquent le délaminage et nous constatons un effet d'épaisseur. Nous présentons aussi quelques images au microscope électronique qui illustrent la plasticité d'interface et qui montrent l'allure microscopique des délaminages.

Le chapitre 2 est un travail théorique destiné à l'adaptation et modification de deux modèles élastiques simplifiés dits M4 (Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches) développés au LAMI pour l'analyse des efforts d'interface dans les multicouches. Il s'agit de prendre en compte d'éventuels phénomènes anélastiques dans les couches et aux interfaces (comme la plasticité d'interface). Ces modèles multiparticulaires sont le  $M4-5n$  et le  $M4-2n+1$  et ils comportent respectivement  $5n$  et  $2n+1$  champs cinématiques pour un multicouche à  $n$  couches. La construction de ces modèles dans le cadre de l'élasticité linéaire est trouvée dans [Chabot, 1997] et les équations sont obtenues à partir de la méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner [Reissner, 1950]. Nous repreneons dans ce chapitre la construction de ces modèles et faisons une adaptation de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner pour introduire des déformations anélastiques dans les couches et des discontinuités des déplacements aux interfaces (les discontinuités modélisent l'anélasticité aux interfaces) dans la formulation. Ces champs anélastiques sont supposés connus au cours de la modélisation. Un champ de contraintes approché est ensuite déterminé pour chaque modèle à partir de la définition préalable des efforts intérieurs généralisés. La méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner est alors suivie pour identifier les déplacements et déformations généralisés cohérents avec l'approximation en contrainte. Puis, par l'utilisation du théorème variationnel de Reissner nous déterminons



les équations d'équilibre, les conditions aux limites, et les équations de comportement élastique faisant intervenir des déformations anélastiques généralisées. Les champs anélastiques donnés jouent le rôle de variables d'état.

Au chapitre 3, nous considérons le problème d'un multicouche rectangulaire soumis à une traction uniforme suivant sa longueur et avec, sur chacune des couches des conditions de bords quelconques, et ce, en présence de champs anélastiques dans les couches et aux interfaces. Ces champs anélastiques sont supposés connus. Nous présentons alors une méthode de résolution semi-analytique des équations de nos deux modèles  $\mathcal{M}_{4-5n}$  et  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  appliqués au problème. Les équations finales sont exposées afin de programmer la résolution dans deux logiciels dont l'un est appelé DELAM (Détermination des Efforts d'Interface dans un Laminé) et correspond au modèle  $\mathcal{M}_{4-5n}$ . Les champs anélastiques que nous pouvons prendre en compte sont aujourd'hui des déformations anélastiques constantes par couche (comme les dilatations hygrothermiques). Les calculs sont validés par une comparaison avec plusieurs techniques de résolution glanées dans la littérature pour divers problèmes. Les applications possibles des logiciels sont très variées et des critères de délaminage seront développés dans le chapitre suivant.

Le chapitre 4 est destiné à la détermination de critères de délaminage par l'analyse des champs à l'aide des modèles  $\mathcal{M}_{4-5n}$  et  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  dans le cadre de l'élasticité linéaire. Deux types de critères sont proposés, des critères en contrainte (les singularités n'existent pas dans nos modèles) et des critères en taux de restitution d'énergie issus de la mécanique linéaire de la rupture. Les essais du chapitre 1 sont alors analysés par une première approche élastique et on applique les critères trouvés. Les critères sont aussi appliqués aux essais d'initiation du délaminage en mode III de [Marion, 2000]. Pour chaque modèle, les deux critères donnent des prédictions de très bonne qualité et une comparaison énergétique met en évidence leur équivalence pour les matériaux testés. De plus, les critères reproduisent correctement les effets d'épaisseur constatés expérimentalement. Concernant le délaminage en mode I, on analyse l'effet d'échelle constaté expérimentalement par ce mode de délaminage, et on conclut à un effet d'échelle de volume qui sera modélisé par une approche probabiliste.

En vue d'établir un lien entre les critères élastiques fragiles précédents et les glissements d'interface constatés expérimentalement dans le premier chapitre, nous proposerons au dernier chapitre à l'aide du  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$ , une méthode analytique pour calculer ces glissements aux interfaces  $\theta / -\theta$  afin de déterminer des critères de délaminage en glissement critique. Les champs sont exprimés en fonctions des variables d'état anélastiques et du chargement. Puis, par le choix d'un critère de plasticité parfaite ou d'un critère de plasticité avec écrouissage négatif, conjugués avec une loi d'écoulement normal, nous terminons la résolution du problème et les champs de glissement sont aussi déterminés. Les prédictions donnent de très bons résultats. Nous terminons donc par une corrélation énergétique entre les critères en glissement critique (calculé par nos deux modèles de plasticité) et les critères en taux de restitution d'énergie calculés avec le  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  au chapitre 4 dans le cadre d'un comportement élastique fragile. Nous démontrons une équivalence entre ces deux approches du comportement du même matériau qui pourraient a priori sembler contradictoires.





# Chapitre 1

## Etude expérimentale du mécanisme d'initiation du délaminage.

### 1.1 Introduction et bibliographie.

La détermination de critères de délaminage nécessite une bonne compréhension du mécanisme de fissuration et des données expérimentales à partir d'essais sur des échantillons pour pouvoir ensuite prédire le délaminage dans des structures multicouches réelles. Pour le cas des matériaux composites multicouches, ce travail s'avère difficile compte tenu des facteurs qui peuvent influencer sur l'initiation et la propagation du délaminage. Parmi ces facteurs on peut citer, par exemple, le type de résine pour les composites à matrice organique [Lee, 1990], l'orientation des couches [Tao et Sun, 1998], les conditions d'essai (température et humidité) [Asp, 1998] et l'épaisseur des couches [Brewer et Lagace, 1988]. Ce dernier facteur est communément appelé effet d'épaisseur. Dans [Rodini et Eisenmann, 1978], [Brewer et Lagace, 1988], [Kim, 1989] et [Marion, 2000], on observe que pour des multicouches avec bords libres en traction, la contrainte de traction parallèlement au bord à l'initiation du délaminage diminue lorsque l'épaisseur des couches augmente.

Pour les matériaux composites multicouches, la réalisation d'essais de délaminage pour la détermination de la résistance des interfaces se fait par un choix judicieux du type d'essai et des empilements à tester. Ces choix sont difficiles puisque, si on veut conférer un caractère purement interfacial au délaminage, on doit veiller à ce qu'aucun autre mode d'endommagement n'apparaisse avant le délaminage. Des fissures dans les couches peuvent avoir lieu en même temps ou avant le délaminage. On doit alors utiliser des dispositifs expérimentaux capables de distinguer le délaminage et les fissures transverses. Pour détecter l'initiation du délaminage et mesurer sa propagation, les méthodes expérimentales sont assez variées. Ces méthodes peuvent être destructives ou non destructives, les deuxièmes étant plus intéressantes que les premières car le chargement peut être poursuivi après le contrôle de l'échantillon.

Nous proposons, dans la suite de cette analyse bibliographique, une description des moyens expérimentaux les plus usuels pour l'étude du délaminage et des essais effectués classiquement pour faire apparaître un délaminage découplé des fissures intralaminaires.

#### 1.1.1 Dispositifs expérimentaux pour étudier le délaminage.

La méthode destructive la plus connue est l'observation au microscope électronique. Les problèmes d'encombrement dans la chambre à vide de ce dispositif entraînent la découpe d'échantillons de petite taille contenant les zones à observer. L'avantage majeur de ce système est la possibilité de



regarder les zones fissurées avec des agrandissements et des profondeurs de champ considérables. De plus, ce dispositif est le seul qui permet de déterminer par l'observation des zones délaminées, le mode de fissuration qui a eu lieu, à savoir I, II, III ou mixte. Les modes de fissuration I, II et III sont décrits sur la figure 1.1. Dans [Purslow, 1986], on trouve une description approfondie de l'allure des fissures dans des composites suivant les natures du chargement et du matériau. Le microscope électronique est ainsi un outil d'expertise puissant complémentaire des méthodes non destructives de détection et d'évaluation du délaminage.

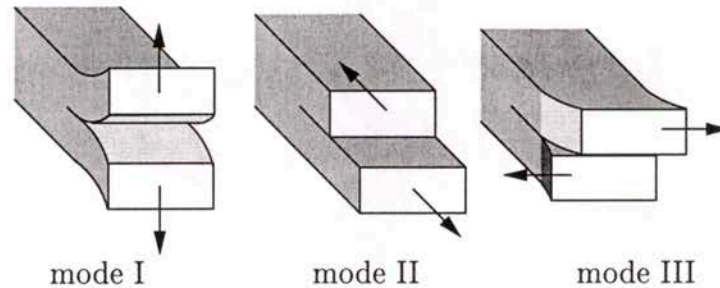


FIG. 1.1 – Modes de fissuration.

L'analyse aux rayons X est souvent utilisée pour évaluer les surfaces de délaminage et pour détecter l'apparition d'éventuelles fissures transverses ([Crossman et Wang, 1982], [Wang, 1989], [Lévêque, 1998] ...). Le principe de cette méthode non destructive est basé sur l'utilisation d'un liquide opaque aux rayons X qui par capillarité pénètre dans les fissures débouchant à l'extérieur du multicouche. L'analyse aux rayons X sur le plan du multicouche révèle alors les zones fissurées. Cette méthode est cependant incapable de détecter la position des zones fissurées suivant l'épaisseur du multicouche. L'échographie, un autre dispositif médical non destructif, peut alors être utilisée. L'envoi de signaux suivant l'épaisseur du multicouche et l'analyse des signaux réfléchis aux interfaces permettent de localiser suivant l'épaisseur et de quantifier les délaminages ([Ourak et al., 1990], [Woo et Wei, 1999] ...).

Par ailleurs, l'émission acoustique est une technique très utilisée puisqu'elle permet de déterminer, à partir des bruits émis par les fissures, l'apparition et l'évolution des endommagements et notamment du délaminage. Marion se sert de ce dispositif pour déterminer l'initiation du délaminage dans des multicouches en traction [Marion, 2000]. Dans [Benmedakhene et al., 1999] on trouve une application de cette technique pour l'étude de la propagation du délaminage. Cette technique requiert plusieurs réglages afin de pouvoir distinguer les bruits émis par une fissure transversale et par un délaminage. Les inconvénients de ce moyen expérimental sont l'incapacité à localiser les endommagements et la sensibilité des mesures par rapport aux bruits extérieurs comme par exemple les bruits provenant des talons ou des attaches dans un essai de traction. L'utilisation de ce moyen expérimental suppose donc la connaissance de l'endroit où les endommagements prennent naissance.

La détection du délaminage à partir des perturbations sur les courbes de réponse globale charge-déplacement suppose aussi la connaissance de la position où les fissures apparaissent. L'apparition du délaminage se traduit en général par une rupture de pente ou par une discontinuité de la courbe [Rodini et Eisenmann, 1978]. Cette technique est utilisée par [Brewer et Lagace, 1988] et [Lee, 1990] pour détecter le délaminage dans des multicouches en traction. Cependant, cette méthode de détection n'est pas infaillible puisqu'il existe des empilements qui présentent des délaminages sans qu'aucune perturbation sur la courbe n'ait eu lieu [Kim, 1989].

Un autre dispositif de détection et de localisation du délaminage est l'observation de bords polis par microscopie optique. Cet outil est adéquat pour la détection du délaminage qui s'initie par effet



de bord. Par ailleurs, même si cette méthode ne donne des renseignements qu'au niveau du bord des stratifiés, elle est très simple à utiliser et les résultats sont faciles à interpréter. Sun et Zhou utilisent cette méthode pour suivre l'évolution des endommagements sur une éprouvette en traction [Sun et Zhou, 1988]. Takeda et al. conjuguent cette méthode avec l'utilisation de micro-grilles pour suivre l'évolution des déplacements au bord d'un multicouche délaminé [Takeda et al., 1998].

### 1.1.2 Essais mécaniques pour l'étude du délaminage.

Divers types d'essais mécaniques sont réalisés pour étudier le délaminage. On peut néanmoins les classer en trois types suivant le type de chargement : dynamiques (choc), quasi-statiques ou cycliques (fatigue). On ne détaillera ici que les essais quasi-statiques. Ces essais peuvent être effectués avec des multicouches prédélaminés et avec des multicouches sains. Les premiers servent plutôt à étudier la propagation du délaminage et les deuxièmes sont destinés à l'étude de l'initiation et éventuellement à la propagation du délaminage.

Parmi les tests effectués avec des multicouches fissurés nous trouvons, sans être exhaustifs :

- les essais de traction perpendiculairement à la fissure de poutres DCB (Double Cantilever Beam) pour la mesure de la résistance en mode I [Whitney, 1989]
- les essais de flexion 3 points avec des poutres délaminées à l'un de leurs bouts (essai ENF : End Notched Flexure) pour la mesure de la résistance en mode II [Carlson et Pipes, 1987]
- les essais CLS (Cracked Lap Shear) de traction suivant la longueur d'une éprouvette délaminée à l'une des extrémités, l'une des lèvres de la fissure est libre d'effort [Carlson et Pipes, 1987]. Ces essais permettent de mesurer la résistance en mode I-II mixte
- les essais de torsion ECT (Edge Crack Torsion) sur des multicouches délaminés à l'un de leurs bords [Suemasu, 1999] pour mesurer la résistance en mode III.

La progression des fissures est en général stable pour les tests ci-dessus.

Les tests les plus classiques sur des multicouches sains pour l'étude du délaminage sont les essais de traction sur des éprouvettes trouées et non trouées. Le délaminage, quand il a lieu, s'amorce aux bords droits ou au bord du trou des éprouvettes. Dans [Jen et al., 1993], nous trouvons des essais de traction sur des plaques trouées pour étudier l'initiation et la propagation du délaminage au bord du trou et déterminer un critère d'initiation de délaminage à peu près fiable pour les essais effectués. Les zones délaminées sont mesurées à l'aide de l'analyse aux rayons X. Nous pouvons voir dans [Jen et al., 1993] que les mécanismes de délaminage sont très complexes et très dépendants des empilements. Par ailleurs, le bord du trou ne peut pas être inspecté avec une méthode non destructive afin de voir quelles sont les interfaces délaminées et de vérifier qu'il n'y ait pas de fissures intralaminaires locales avant le délaminage. Les essais de traction EDT (Edge Delamination Tests) sur des éprouvettes non trouées avec bords droits font apparaître aussi des mécanismes de délaminage très complexes. L'avantage de ces essais est le fait qu'on peut cette fois-ci observer le bord où le délaminage risque d'apparaître et de vérifier ainsi l'apparition du délaminage avant des fissures intralaminaires. Plusieurs travaux ont été dédiés à l'étude du délaminage par ce type d'essais [Brewer et Lagace, 1988], [Kim, 1989], [Marion, 2000]. Les empilements sont choisis de façon à voir apparaître le délaminage découplé des autres types d'endommagement et à provoquer le délaminage sur une interface particulière suivant un mode de fissuration. Les empilements testés sont élaborés pour la plupart à partir de composites carbone-époxy (fibre de carbone, résine époxy) unidirectionnels. Les séquences d'empilement les plus usuels sont

- les  $(\pm\theta)_s$ , avec des valeurs de  $\theta$  inférieures à  $25^\circ$  (environ). Le délaminage, de type mode III, a lieu au niveau des interfaces  $\theta/ -\theta$  et est accompagné par une fissure transverse [Brewer et Lagace, 1988], [Marion, 2000]. L'étude de la propagation ne peut donc pas être



effectuée pour ces empilements sans tenir compte de la fissuration transverse. Ces empilements présentent un comportement global linéaire alors que des valeurs de  $\theta$  plus importantes induisent un comportement non linéaire avant l'initiation du délaminage [Marion, 2000].

- les  $(\pm 25, 90_{1/2})_s$ , qui présentent des fissures non transverses dans le pli à 90 degrés à partir des bords [Crossman et Wang, 1982], [Marion, 2000], [Wang, 1989]. On dit souvent que cet empilement délamine en mode I mais il ne nous semble pas correct d'attribuer le terme délaminage aux fissures qui n'ont pas lieu aux interfaces entre les couches. En effet, les fissures ne sont pas localisées aux interfaces et apparaissent sur toute l'épaisseur du pli. Marion a déjà soulevé cette ambiguïté dans [Marion, 2000]. Cet aspect fera l'objet d'une étude plus approfondie au chapitre 4.

On peut trouver d'autres empilements dans la littérature qui fissurent en mode I, I-II mixte, ou I-III mixte mais aucun ne présente des fissures confinées aux interfaces [Kim, 1989], [Marion, 2000].

Dans le but de comprendre le mécanisme de l'amorçage de délaminage, nous avons choisi d'effectuer des essais classiques de traction (voir par exemple [Marion, 2000], [Brewer et Lagace, 1988]) sur des multicouches  $(\pm \theta_n)_s$  en composite carbone-époxy. Nous nous intéressons donc ici au délaminage en mode III dû aux cisaillements hors plan. Le choix de ce type d'essais nous a donc permis d'inspecter les bords des éprouvettes pendant l'essai à l'aide d'un dispositif de microscopie in-situ. Nous avons mis en évidence par ce biais un phénomène de plasticité d'interface avant l'initiation du délaminage.

Dans ce premier chapitre nous faisons une description du matériau étudié en détaillant sa mise en œuvre et la préparation d'éprouvettes. Ensuite, nous présentons les moyens utilisés pour effectuer les essais, pour contrôler les interfaces au bord des éprouvettes et pour détecter l'apparition du délaminage. Finalement, nous détaillons les phénomènes observés pendant les essais et donnons des résultats qui seront exploités dans les autres chapitres pour établir des critères de délaminage.

## 1.2 Préparation des éprouvettes en composite multicouche.

Dans cette partie, on décrit les moyens mis en œuvre pour obtenir des éprouvettes multicouche sur lesquelles on effectuera des essais de traction. Egalement, on expose la méthode du polissage des bords des éprouvettes qui permet l'observation des phénomènes d'interface (glissement d'interface et délaminage).

### 1.2.1 Mise en œuvre des plaques multicouche.

Le matériau choisi pour les essais est le carbone-époxy (matrice CTE1 15, fibre T700) fourni par STRUCTIL. Le matériau à l'état brut se présente sous la forme de rouleaux de fibres en carbone préimprégnées de résine époxy. Des couches rectangulaires découpées avec une orientation donnée sont empilées suivant la figure 1.2 pour constituer la plaque de multicouche non polymérisée. Cette étape est effectuée avec un soin très particulier. En effet, il faut s'assurer que les interfaces entre les couches soient propres pour ne pas provoquer des délaminages prématurés. En plus, il faut aussi que l'erreur angulaire dans l'orientation des fibres de chaque couche soit suffisamment faible. Ces erreurs angulaires influent considérablement sur les raideurs apparentes des plaques. Par exemple, nous avons montré qu'une imprécision de  $1^\circ$  sur chaque couche pour une plaque  $(\pm 20)_s$  peut influencer de 4% sur la raideur [Py, 2000]. L'étape suivante consiste à mettre la plaque dans le moule décrit par la figure 1.3. Les tissus d'arrachage ou d'absorption servent à absorber la résine en excès dans

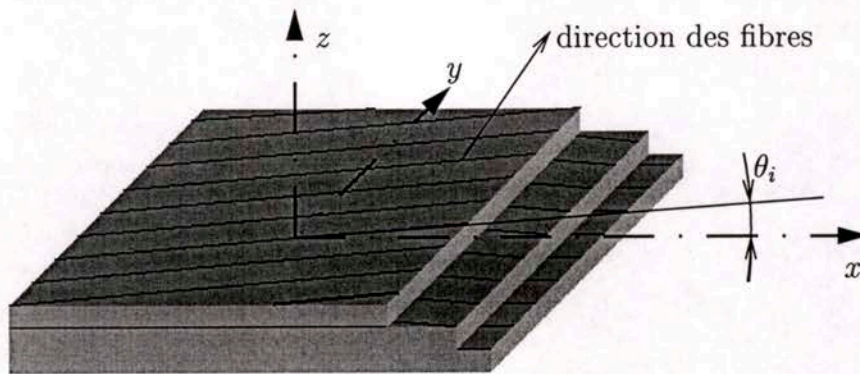


FIG. 1.2 - Empilement des couches.

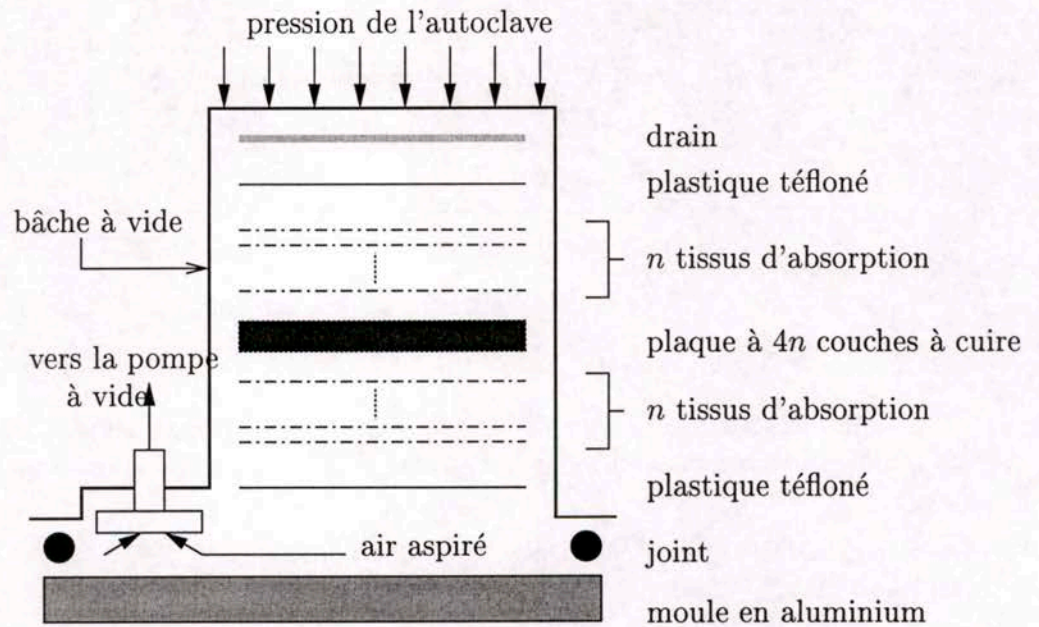


FIG. 1.3 - Moulage des plaques multicouches.



le matériau brut. Le nombre de tissus doit être suffisant pour avoir une bonne densité de fibres. Cependant il ne faut pas trop en mettre car cela peut engendrer dans le matériau polymérisé des défauts dus à une absorption trop importante de résine. On trouve dans [Brellier, 2000] les plans d'expérience effectués pour déterminer et caractériser le moulage optimal de nos matériaux. Le rapport nombre de tissus par nombre de plis optimal est égal à  $1/2$  et le moulage à réaliser pour la cuisson des plaques est décrit dans la figure 1.3.

Le rapport optimal assure en plus une épaisseur de couche égale à  $0,13\text{ mm}$  pour des empilements quelconques [Brellier, 2000]. Par ailleurs, avec ce type de moulage, l'épaisseur de l'interface entre les couches vaut en moyenne  $3\ \mu\text{m}$ . Comme proposé dans [Carlson et Pipes, 1987], les épaisseurs de couche et d'interface sont mesurées au microscope optique à partir d'échantillons polis (voir figure 1.4).

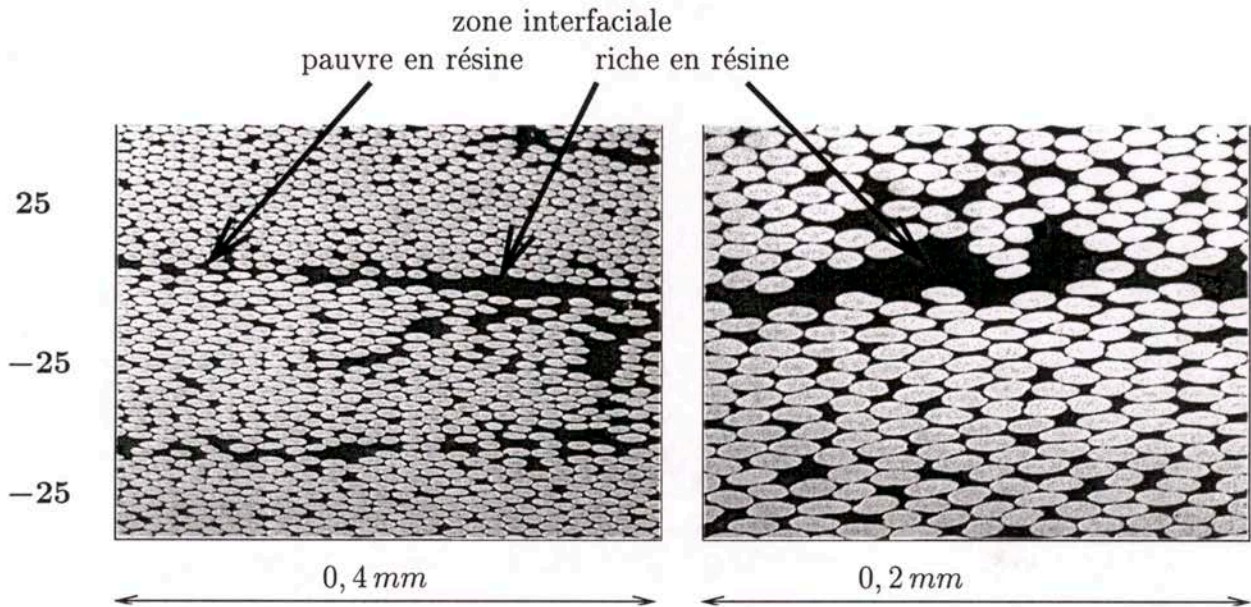


FIG. 1.4 – Qualité des interfaces (bord d'un  $(\pm 25_2)_s$ ).

L'étape finale consiste à cuire la plaque dans un autoclave suivant les cycles de pression et de température recommandés par le fournisseur. Sur la figure 1.5 nous avons une description des cycles.

Les caractéristiques du pli constitutif des multicouches ainsi réalisés sont resumées dans le tableau 1.1.

Pour déterminer les caractéristiques mécaniques du pli constitutif des multicouches, nous avons effectué une dizaine d'essais de traction sur des empilements  $(0_4)$ ,  $(90_8)$  et  $(45_2, -45_2)_s$ . Le premier empilement donne  $E_L$  et  $\nu_{LT}$ , le deuxième  $E_T$  et le troisième  $G_{LT}$  ([Carlson et Pipes, 1987]). Les autres caractéristiques sont déduites du fait de l'isotropie transverse du matériau (donc  $E_N = E_T$ ,  $\nu_{LN} = \nu_{LT}$ ,  $G_{LN} = G_{LT}$  et  $\alpha_{NN} = \alpha_{TT}$ ) et par la supposition que  $\nu_{TN} \simeq \nu_{LT}$  et  $G_{TN} \simeq G_{LT}$ . Cette dernière supposition est classique dans la littérature [Pagano, 1978], [Wang, 1989].

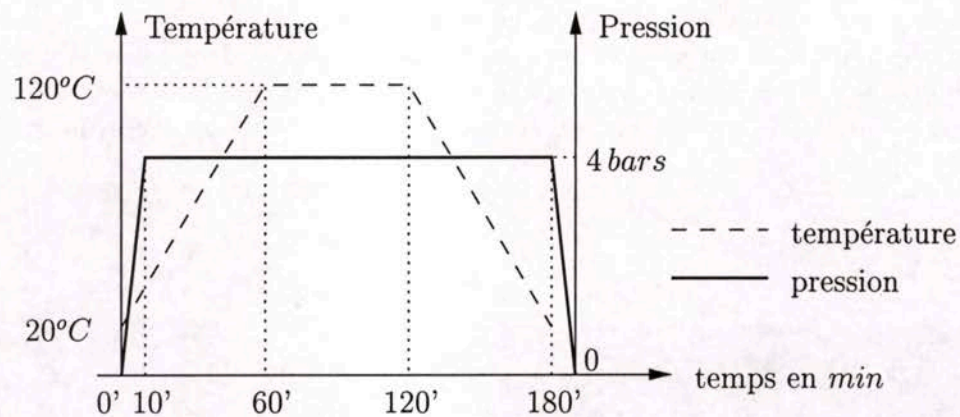


FIG. 1.5 – Cycle de cuisson des multicouches dans l'autoclave.



épaisseur de couche	0,13 mm
masse surfacique du pli	0,205 kg/m <sup>2</sup>
diamètre moyen des fibres	7 μm
densité volumique des fibres	66 %
densité volumique des défauts	1,4 %
modules d'Young	$E_L = 153,8 \text{ GPa}$ , $E_T = 10,6 \text{ GPa}$ , (mesurés) $E_N = 10,6 \text{ GPa}$ (supposé)
coefficients de Poisson	$\nu_{LT} = 0,314$ , (mesuré) $\nu_{LN} = \nu_{TN} = 0,314$ (supposés)
modules de cisaillement	$G_{LT} = 5,58 \text{ GPa}$ (mesuré) $G_{LN} = G_{TN} = 5,58 \text{ GPa}$ (supposés)
contraintes à rupture (notations de [Tsai, 1988])	$X = 2,5 \text{ GPa}$ , $Y = 61 \text{ MPa}$ , (éprouvettes testées 0 <sub>4</sub> et 90 <sub>8</sub> ) $S = 50 \text{ MPa}$ (déduit par traction d'éprouvettes 45 <sub>8</sub> )
coefficients de dilatation thermique [Brellier, 2000]	$\alpha_{LL} = -0,3 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}$ , $\alpha_{TT} = 28,1 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}$ (mesurés) $\alpha_{NN} = \alpha_{TT}$ (supposé)

TAB. 1.1 – Caractéristiques du pli carbone-époxy T700/CTE1-15.



### 1.2.2 Découpe et polissage des éprouvettes.

Une fois les plaques démoulées, on découpe des éprouvettes de 20 mm de largeur et de 200 mm de longueur à l'aide d'une meule diamantée destinée à la découpe fine de pièces. Cette étape doit être effectuée avec soin car une découpe en oblique change l'orientation du multicouche et donc sa raideur apparente. Les éprouvettes sont ensuite regroupées en deux paquets que l'on fixe dans un porte-éprouvettes que nous avons spécialement conçu pour le polissage des bords des éprouvettes (cf. figure 1.6). Ce porte-éprouvettes est positionné sur une polisseuse. Le polissage consiste à

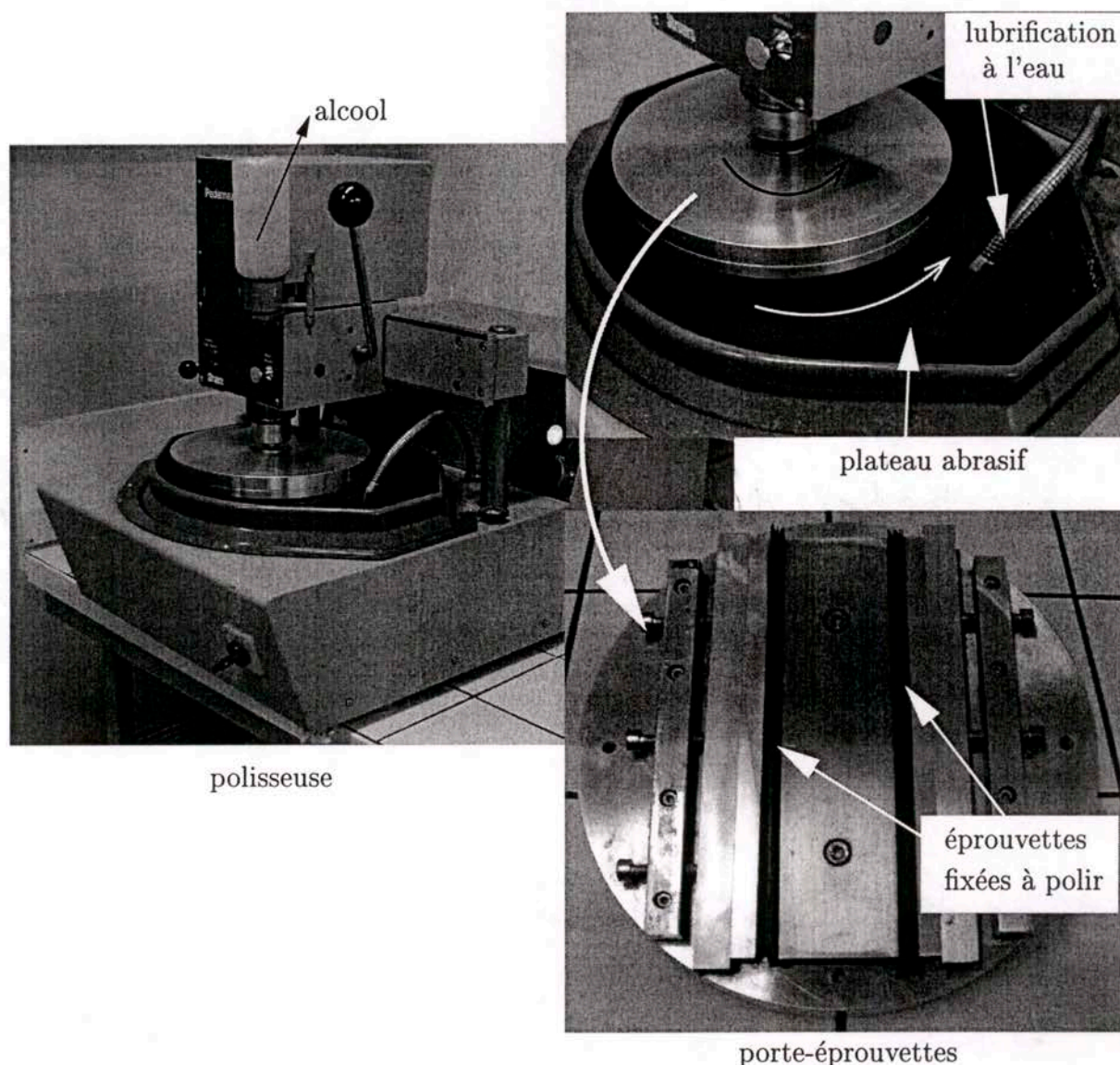


FIG. 1.6 – Dispositif de polissage du bord des éprouvettes.

utiliser des grains de plus en plus fins (jusqu'à  $1\mu m$  de diamètre) pour avoir une finition correcte des surfaces. Entre chaque étape (correspondant à un type de grain), on contrôle le polissage par un microscope optique et on nettoie les surfaces avec de l'eau (pour des grains de diamètre  $> 9\mu m$ ) ou avec de l'alcool (pour des grains de diamètre  $\leq 9\mu m$ ). Après le polissage on enlève les deux



paquets d'éprouvettes et on colle des talons en verre-époxy tissé (élaborés de la même façon que le carbone-époxy). Les éprouvettes sont maintenant prêtes à être utilisées (voir figure 1.7) pour des essais de traction et le polissage des bords en permet l'inspection.

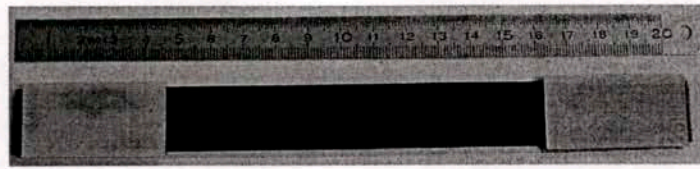


FIG. 1.7 – Epreuve polie avec talons.

### 1.3 Dispositifs de contrôle et de mesure.

Dans cette partie, nous décrivons les appareils utilisés pour réaliser l'essai de traction et les dispositifs pour inspecter ou expertiser les interfaces au bord des éprouvettes.

#### 1.3.1 Machines de traction et systèmes d'acquisition.

Les essais de traction sont effectués à déplacement imposé par des machines de traction (ADAMEL, INSTRON et MTS) équipées de cellules de force de 1KN, 2KN, 10KN, 20KN et 100KN. Toutes ces machines sont équipées de mors autoserrants. Des jauges extensiométriques reliées à des ponts de jauges permettent de mesurer la déformation des éprouvettes au cours d'un essai de traction (déformations longitudinale et transversale par exemple). La cellule de force des machines de traction et la sortie des ponts de jauges sont reliées à un système d'acquisition Labview (National Instruments) installé dans un ordinateur standard.

Par ce système, en contrôlant la courbe force-déformation pour un essai de traction à faible vitesse, nous pouvons détecter l'apparition d'un endommagement critique (tel que le délaminage, [Brewer et Lagace, 1988]) et tirer des conclusions sur le comportement global des multicouches testés (voir figure 1.22). En effet, sur la courbe, la perturbation due à l'endommagement est une chute de la raideur instantanée puisque les essais sont pilotés en déplacement [Brewer et Lagace, 1988].

#### 1.3.2 Microscopie optique in-situ.

##### Description du dispositif.

De façon à surveiller l'état des interfaces au niveau du bord poli des éprouvettes sous chargement, nous avons conçu un système d'observation in-situ. Ce système comporte un microscope optique élémentaire Nikon muni d'une caméra noir et blanc Sony, le tout monté sur un support 3D permettant la mise au point et l'inspection de tout le bord de l'éprouvette (voir figure 1.8). Les grossissements à réaliser et la taille des phénomènes à observer imposent le choix du microscope sur les autres moyens existants (zoom, endoscopes, etc.). La caméra est reliée à une carte d'acquisition d'images installée sur un ordinateur standard, lui-même équipé d'un logiciel d'acquisition IMAQ-Vision Builder (National Instruments). Le microscope a été choisi pour sa légèreté et sa petite taille. Il permet en plus l'utilisation de plusieurs objectifs de façon à avoir l'agrandissement souhaité. La caméra, légère et de petite taille, a été choisie pour sa définition et pour sa sensibilité.

Le logiciel d'acquisition permet de visualiser en temps réel l'objet devant le microscope et de faire l'acquisition d'images que l'on juge intéressantes. Ces images peuvent être traitées par ce



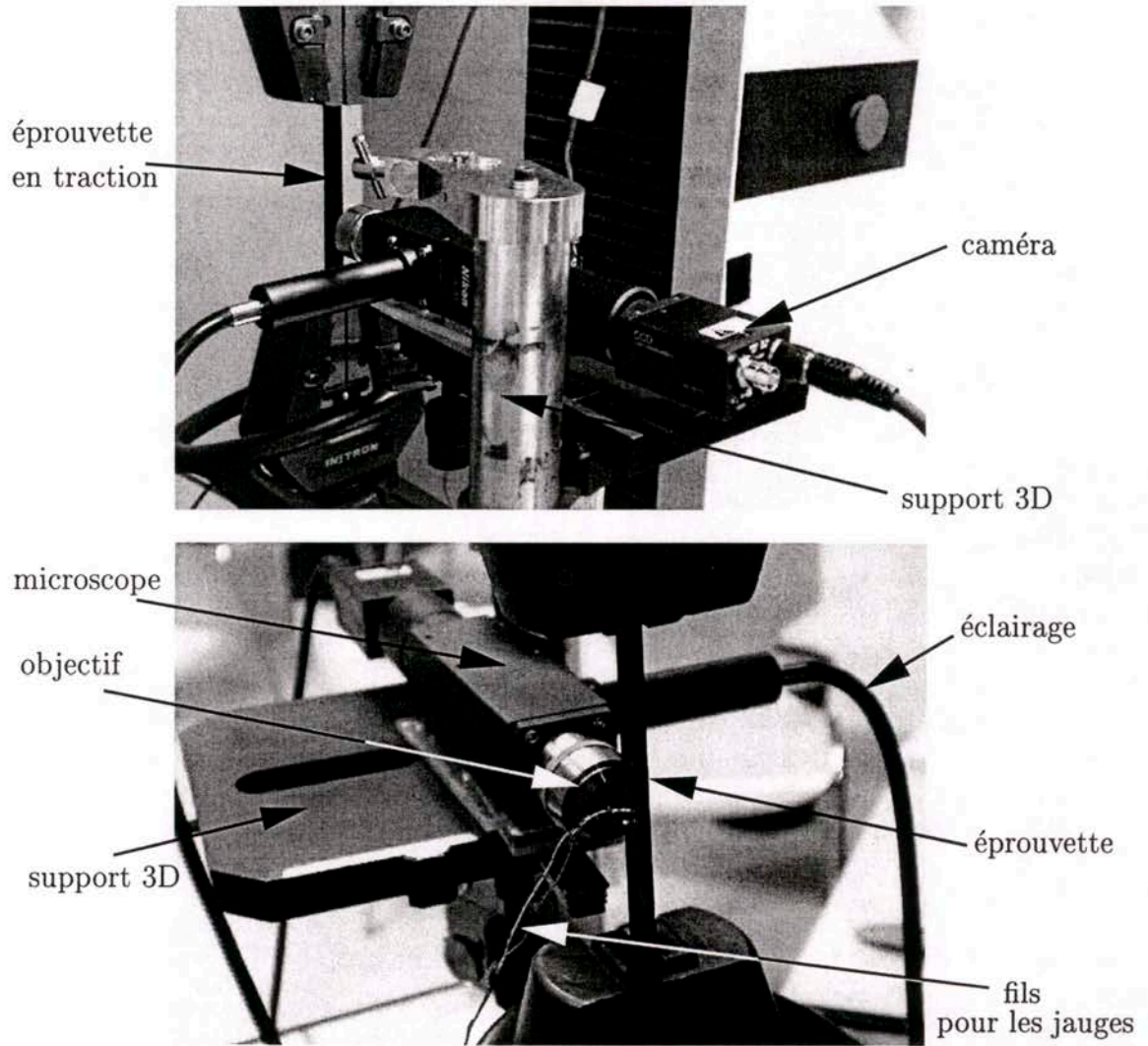


FIG. 1.8 – Microscopie optique in-situ.

logiciel de façon à rendre plus nettes les images ou à faire ressortir des détails. On peut aussi faire des opérations telles que la binarisation, la mesure de surfaces ou de distances.

### Phénomènes observés par la microscopie optique in-situ.

Avec ce système nous pouvons détecter l'apparition du délaminage en balayant le bord de l'éprouvette. Les bords doivent être parfaitement polis car le microscope optique a une très faible profondeur de champ et du relief ne permettrait pas la mise au point de l'image. De plus, ainsi le délaminage devrait apparaître à l'écran sous la forme d'une ligne floue et sombre au niveau de l'interface (voir figure 1.9).

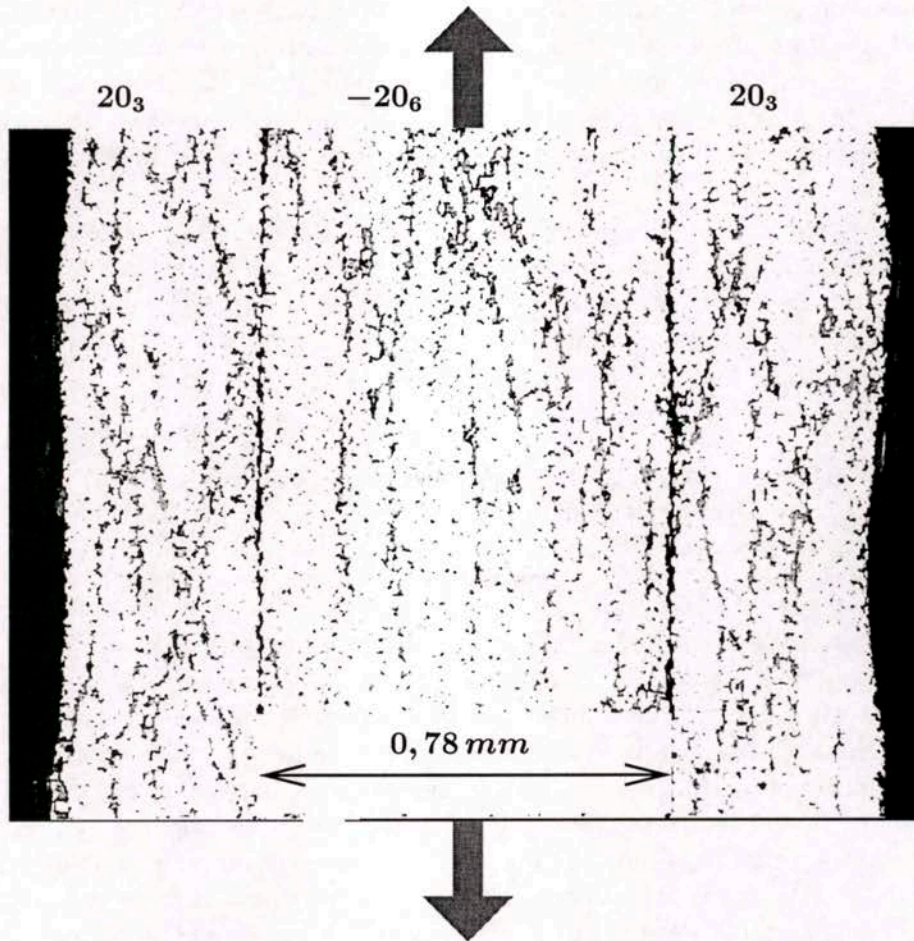


FIG. 1.9 - Bord d'un  $(\pm 20_3)_s$  délaminé (microscopie in-situ + traitement des contrastes).

Il est d'ailleurs difficile d'affirmer sans une expertise approfondie que cette ligne est autre chose qu'un relief consécutif au chargement. On verra en effet que ce contraste apparaît bien avant le délaminage et qu'il est dû à de grandes déformations irréversibles au niveau des interfaces que l'on qualifiera de plasticité d'interface ou de glissement. On reviendra plus loin sur ce point.

Pour mesurer le glissement on procède comme suit : on trace perpendiculairement à la longueur de l'éprouvette des traits droits sur le bord poli à l'aide d'un feutre fin (pointe de  $0,2\text{ mm}$  d'épaisseur). Pour ce faire, le feutre est fixé sur le support 3D du microscope et grâce à la rotation des bagues du support on effectue des déplacements droits du feutre. Un exemple de trait avant es-



sai est montré sur la figure 1.10. Au cours de l'essai de traction le trait peut subir un saut au niveau des interfaces entre les couches tout en restant perpendiculaire à la longueur de l'éprouvette dans chaque couche (voir figure 1.10). La localisation de ce saut au niveau de l'interface justifie la qualification de glissement d'interface. Le glissement est ensuite mesuré à l'aide du traitement d'image du logiciel d'acquisition. Nous verrons dans la partie "résultats expérimentaux" que ce glissement suit une évolution plastique lorsque l'on fait des cycles de charge et décharge de l'éprouvette, ce qui justifie la terminologie plasticité d'interface.

### 1.3.3 Microscopie électronique.

Nous disposons en outre d'un microscope électronique à balayage (MEB) permettant de faire l'expertise des matériaux. Ce dispositif est un moyen de contrôle destructif et ceci constitue en fait l'inconvénient majeur de son utilisation. En effet, la taille de la chambre à vide ne permet pas l'observation d'éprouvettes entières et on doit donc découper des échantillons de petite taille. Ces échantillons sont ensuite métallisés (dépose d'une couche d'or de très faible épaisseur) pour palier au problème de visualisation d'échantillons non conducteurs.

Malgré tout, cet appareil est de grande utilité pour expertiser les éprouvettes qu'on teste et donc pour savoir si des endommagements non visibles au microscope optique apparaissent avant délaminage. Les avantages de ce dispositif sur la microscopie optique sont la capacité de visualiser l'échantillon avec une grande profondeur de champ et les grands agrandissements qu'on peut atteindre avec l'appareil (jusqu'à  $10^4$  fois la taille réelle).

## 1.4 Résultats expérimentaux.

### 1.4.1 Déroulement d'un essai.

On commence par mesurer la section de l'éprouvette et on colle une jauge extensiométrique sur l'éprouvette. L'éprouvette est ensuite installée dans la machine de traction et le réglage est effectué. Ensuite, afin de mesurer le glissement d'interface, on fait une dizaine de traits sur le chant, tout au long de l'éprouvette à des endroits suffisamment espacés pour calculer une moyenne et un écart type des mesures effectuées. Les traits sont comme déjà dit, perpendiculaires à l'axe de l'éprouvette et donc aux interfaces entre les couches. On commence alors l'acquisition et l'essai de traction à une vitesse moyenne ( $= 0,2 \text{ mm/min}$ ) pour atteindre rapidement les valeurs de déformation ou de contrainte au delà desquelles le phénomène que l'on veut observer ou mesurer risque d'apparaître. On fait ensuite des pas de chargement à faible vitesse ( $0,01 \text{ mm/min}$ ) et après chaque pas on fait la mise au point du microscope sur le bord de l'éprouvette et on inspecte le bord tout en mesurant le glissement pour chaque trait. Si on le juge utile on peut faire des cycles de décharge et de recharge. Finalement, à un moment donné, l'amorçage du délaminage a lieu, et si l'éprouvette ne s'est pas rompue, on peut poursuivre l'essai pour constater comment les fractures apparaissent et évoluent.

### 1.4.2 Etude du glissement d'interface.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution des traits tracés sur des éprouvettes ( $\pm\theta_n$ )<sub>s</sub> en traction (voir figure 1.10) avant l'apparition des endommagements classiques (fissuration transverse et délaminage). L'évolution des traits nous a permis de mettre en évidence un glissement plan aux interfaces  $\theta/ - \theta$ . Sur la figure 1.10, pour une éprouvette ( $\pm 20$ )<sub>s</sub> nous avons tracé la courbe moyenne contrainte de traction/glissement pour des traits à différentes positions sur la longueur



de l'éprouvette. Nous voyons que *les glissements sont à peu près uniformes sur la longueur de l'éprouvette.*

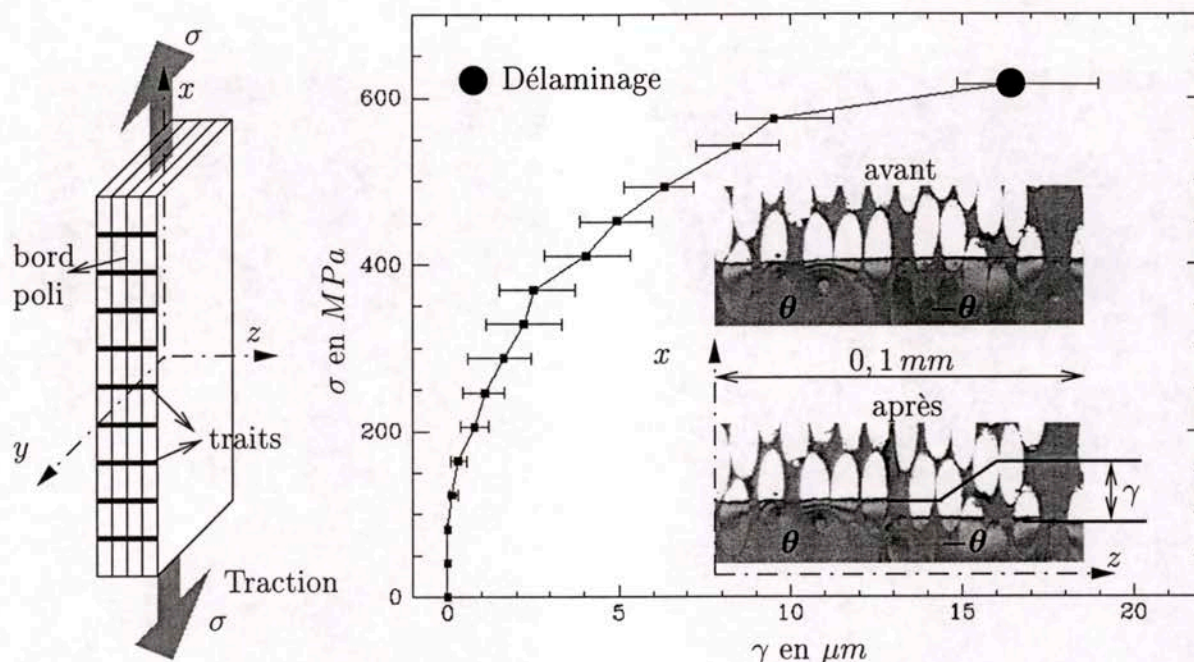


FIG. 1.10 – Mise en évidence du glissement à l'interface 20/ - 20 d'un  $(\pm 20)_s$ .

Ce glissement d'interface a eu lieu avant tout bruit, fissure sur le bord ou rupture de pente de la courbe force/déformation. Comme son nom l'indique, il s'agit d'un *phénomène lié aux cisaillements d'interface et donc concentré sur l'interface et sur les bords.* En effet, les traits sur les couches n'évoluent pas, ils restent droits et perpendiculaires à l'axe de traction alors qu'aux interfaces  $\theta/ - \theta$  le trait subit une discontinuité plus ou moins franche suivant la richesse de résine dans l'interface. Il est évident qu'aux endroits riches en résine (espacement important entre deux fibres de plis adjacents) le trait passe d'une couche à une autre assez progressivement sur une zone de quelques microns, et la résine semble bien supporter la déformation  $\varepsilon_{13}$  imposée (voir figure 1.11). Par contre, pour les interfaces pauvres en résine (les fibres des couches adjacentes se touchent ou sont peu espacées), il y a microfissuration de l'interface et le trait passe d'une couche à une autre de façon discontinue (cf. figure 1.11 et 1.13).

En ce qui concerne les microfissures aux interfaces pauvres en résine, nous pouvons dire que leur profondeur est très faible puisqu'on n'observe rien par la méthode des rayons X avant délaminage [Marion, 2000]. Nous avons confirmé cela moyennant l'observation au MEB d'un échantillon d'éprouvette (voir figure 1.12) découpé suivant la largeur de l'éprouvette, puis enrobé et poli. La profondeur de la microfissure est de l'ordre du diamètre de la fibre, à savoir  $7 \mu m$ .

Pour identifier la nature du glissement ci-dessus, nous avons réalisé des cycles de charge et décharge. Sur la figure 1.15, nous avons tracé l'évolution du glissement moyen  $\gamma$  (calculé sur dix traits) pour des cycles de charge et de décharge. On s'aperçoit qu'au début d'une décharge ou d'une recharge, le glissement n'évolue plus. Ceci est un argument suffisant pour dire que *le glissement est d'origine plastique.* Ce qui paraît logique puisque la résine, élément présent à l'interface entre les couches, présente un comportement plastique en cisaillement [Allix et al., 1995]. L'observation au MEB d'une interface riche en résine ayant subi un glissement, confirme le phénomène plastique (voir



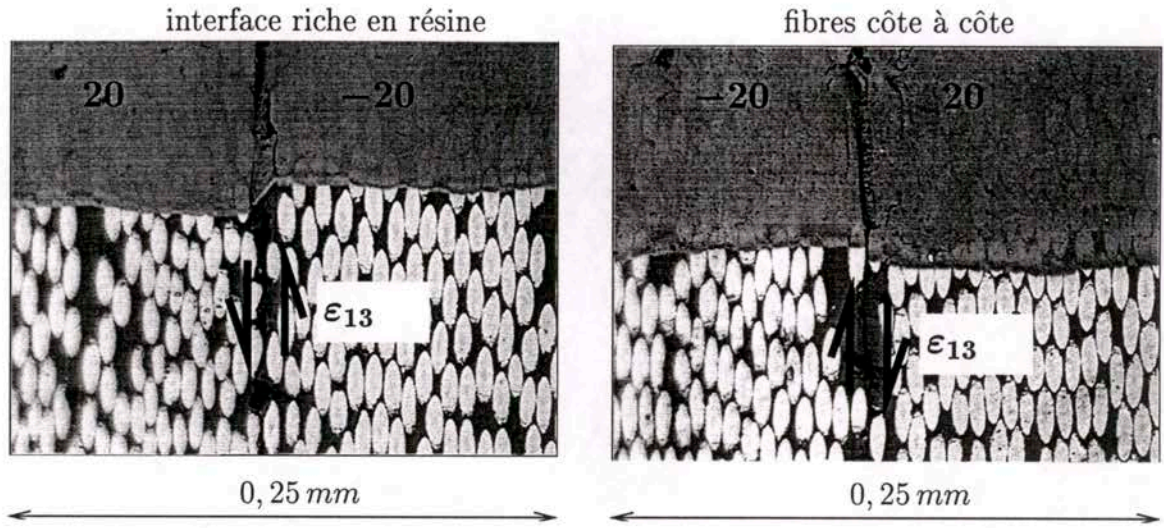


FIG. 1.11 – Deux types de glissement au bord d'un  $(\pm 20_3)_s$  (microscopie in-situ).

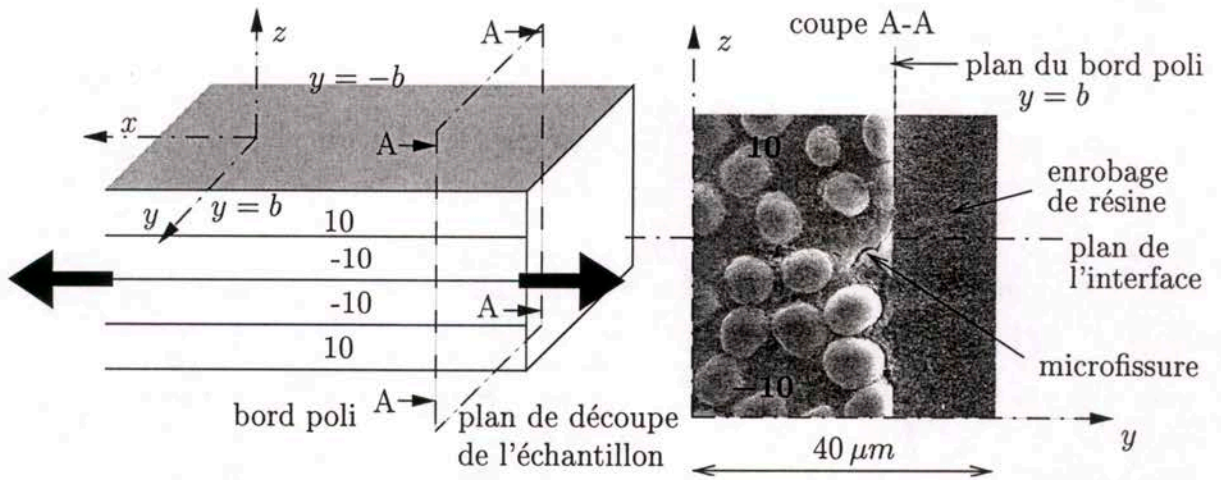


FIG. 1.12 – Profondeur des microfissures dans un  $(\pm 10)_s$  avant délamination (MEB).

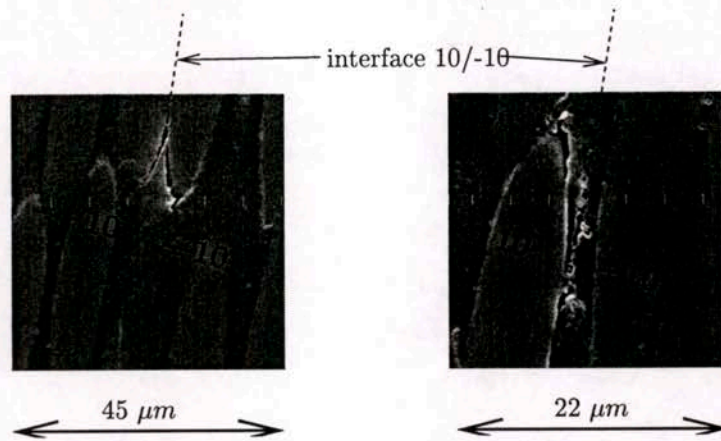


FIG. 1.13 – Microfissuration de l'interface dans un  $(\pm 10)_s$  juste avant délaminage (observations au MEB des bords polis).

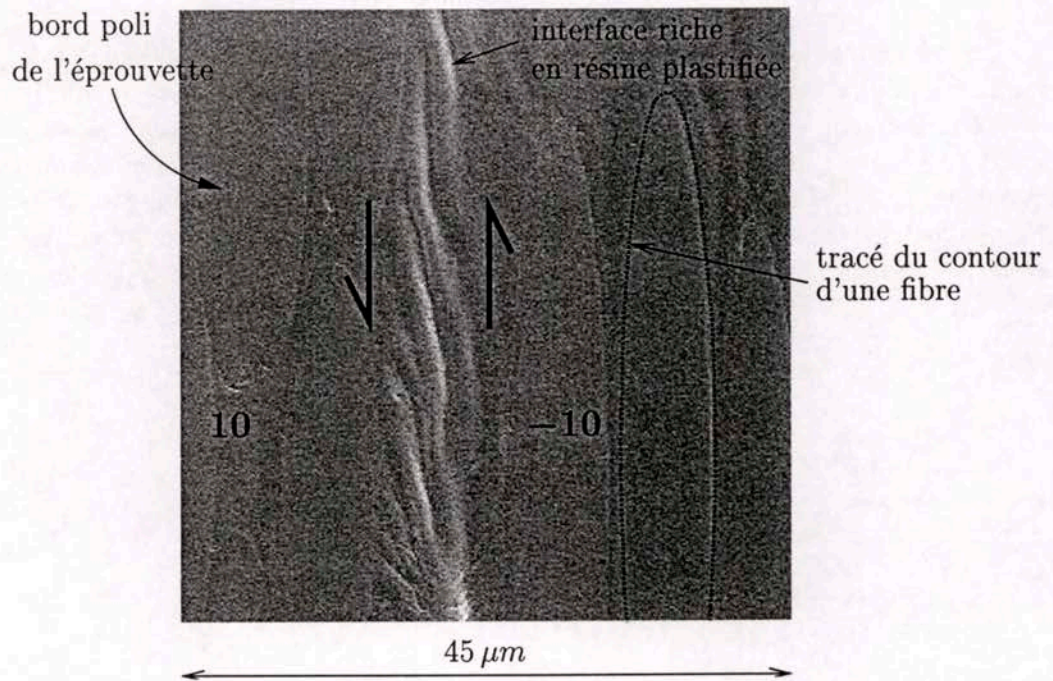


FIG. 1.14 – Plasticité de la résine sous cisaillement au bord poli d'un  $(\pm 10)_s$  (MEB).



figure 1.14). En effet, les lignes à  $45^\circ$  sont classiques du comportement plastique de la matrice sous cisaillement [Purslow, 1986]. *Dorénavant nous désignerons par plasticité d'interface ce phénomène de glissement.* D'autre part, sur la figure 1.15 on remarque que les longueurs des paliers au début de la décharge et de la recharge sont plus faibles qu'à l'initiation du glissement. Il existe donc un écrouissage négatif dû sûrement à l'endommagement et au comportement plastique de la résine à l'interface.

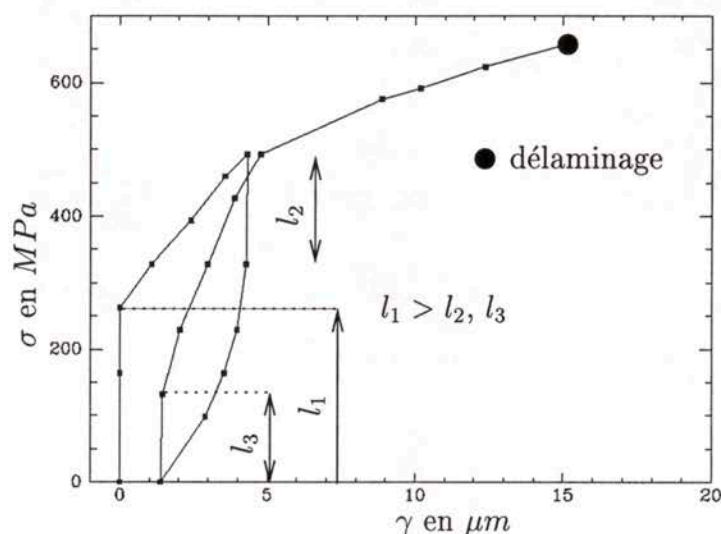


FIG. 1.15 – Glissement à l'interface 10/-10 d'un  $(\pm 10_3)_s$  pour un cycle de chargement.

Sur les figures 1.16 à 1.21, nous avons tracé les courbes chargement/glissement moyen pour les familles d'empilements  $(\pm 10_n)_s$  et  $(\pm 20_n)_s$  ( $n$  variant de 1 à 4). Nous constatons sur ces courbes que *le phénomène est quasiment le même pour les deux familles d'empilements choisis  $(\pm 10_n)_s$  et  $(\pm 20_n)_s$ .* On note un effet d'échelle, une cinétique plus rapide pour les empilements les plus épais, et surtout *une valeur de glissement au délaminage quasi constante pour tous les empilements.* Cela peut nous faire penser que le délaminage s'amorce lorsque le glissement atteint une valeur critique. Nous construirons au chapitre 5 un critère de délaminage portant sur le glissement plastique.

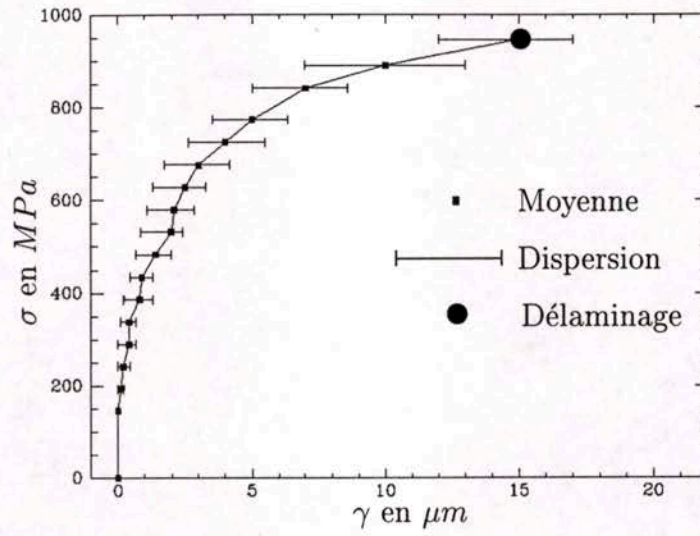


FIG. 1.16 - Glissement à l'interface 10/-10 d'un  $(\pm 10)_s$  jusqu'au délaminage.

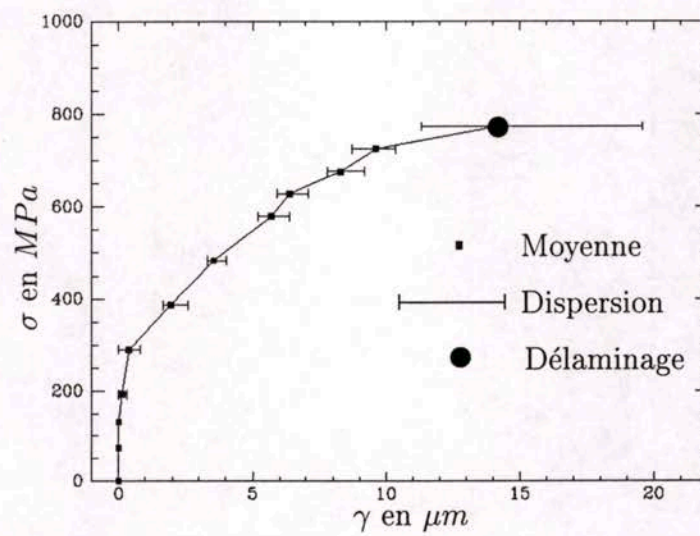


FIG. 1.17 - Glissement à l'interface 10/-10 d'un  $(\pm 10_2)_s$  jusqu'au délaminage.



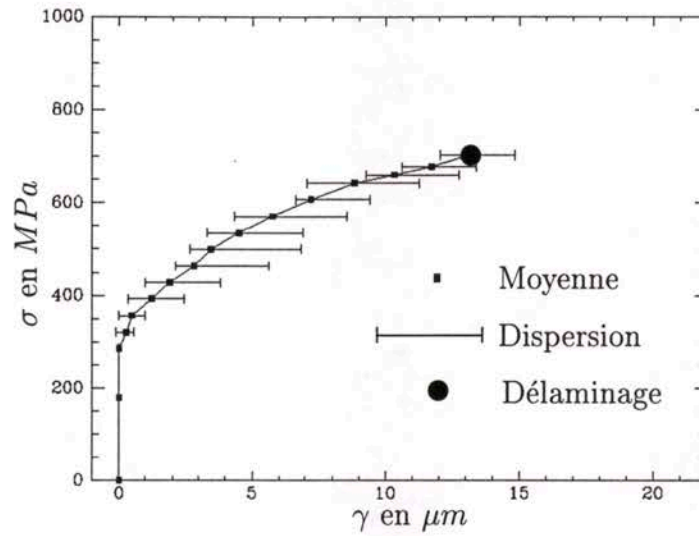


FIG. 1.18 - Glissement à l'interface 10/-10 d'un  $(\pm 10_3)_s$  jusqu'au délaminage.

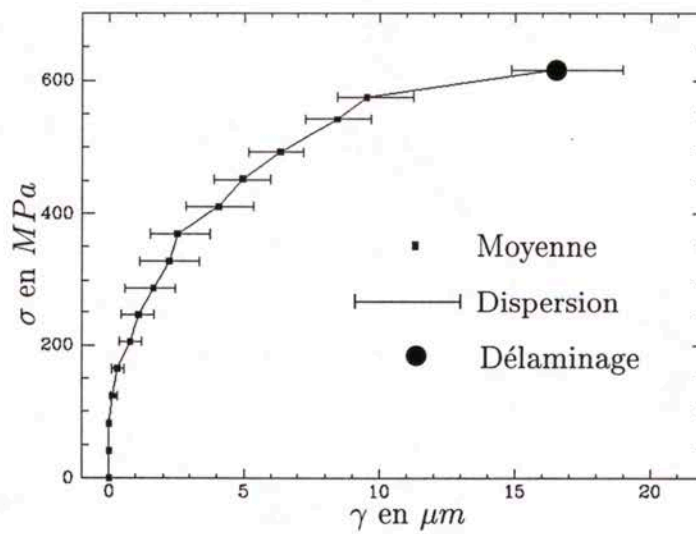


FIG. 1.19 - Glissement à l'interface 20/-20 d'un  $(\pm 20)_s$  jusqu'au délaminage.

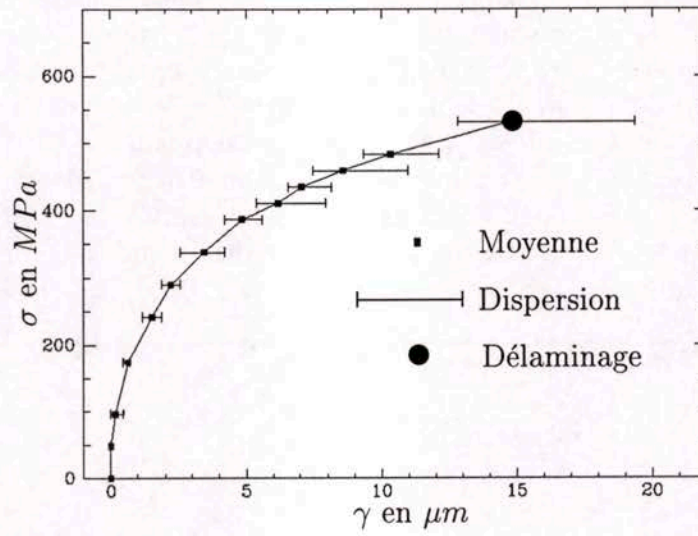


FIG. 1.20 - Glissement à l'interface 20/-20 d'un  $(\pm 20_2)_s$  jusqu'au délaminage.

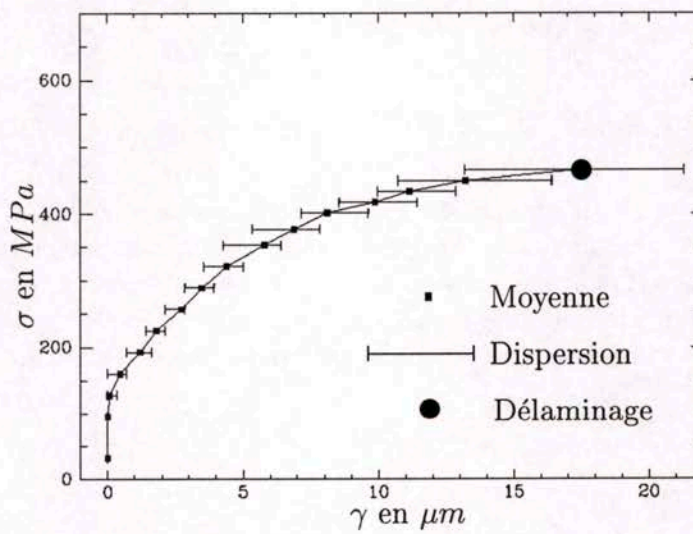


FIG. 1.21 - Glissement à l'interface 20/-20 d'un  $(\pm 20_3)_s$  jusqu'au délaminage.



### 1.4.3 Amorce du délaminage.

Nous avons vu précédemment qu'il existe des microfissures avant l'apparition du délaminage. Leur coalescence donne lieu à une fissure à l'interface appelée délaminage de la taille de l'ordre de l'épaisseur du pli ( $0,13\text{ mm}$  pour nous) ou plus. Pour tous les tests que nous avons effectués, l'amorçage du délaminage est accompagné d'un bruit sec et d'une perturbation sur la courbe contrainte/déformation axiale (voir figure 1.22). Sur cette figure, on peut voir que *le comportement global des empilements est pratiquement élastique linéaire avant initiation du délaminage*. La plasticité d'interface ne perturbe donc pas la linéarité du comportement global. Pour les éprouvettes  $(\pm 10_n)_s$  et  $(\pm 20_n)_s$  pour  $n$  variant de 1 à 3, le délaminage apparaît de façon stable et on peut poursuivre le chargement sur les éprouvettes après apparition du délaminage. Par contre, l'amorce du délaminage entraîne la rupture totale des éprouvettes  $(\pm 10_4)_s$  et  $(\pm 20_4)_s$ .

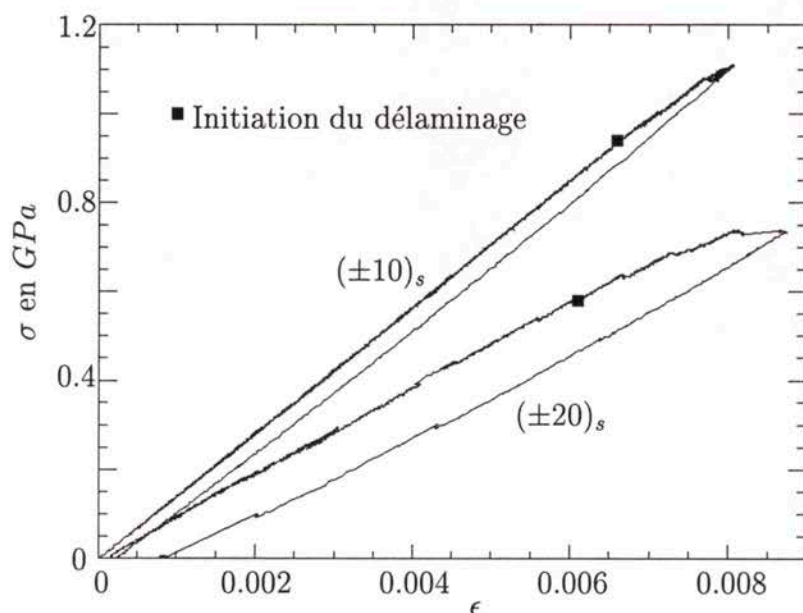


FIG. 1.22 – Courbes d'essais de traction avec apparition du délaminage.

Par ailleurs, comme le montre la figure 1.23, l'amorce du délaminage des empilements  $(\pm \theta_n)_s$  testés est aussi toujours accompagnée d'une fissuration transverse des deux paquets de plis  $\theta_n$  extérieurs. Après délaminage et avant la rupture totale, les plis intérieurs se fissurent aussi. L'aspect des zones de fracture est décrit dans la figure 1.24. Les "copeaux" de résine dans la zone délaminée et dans le plan de la fissure transverse sont caractéristiques d'une fracture par cisaillement [Purslow, 1986].

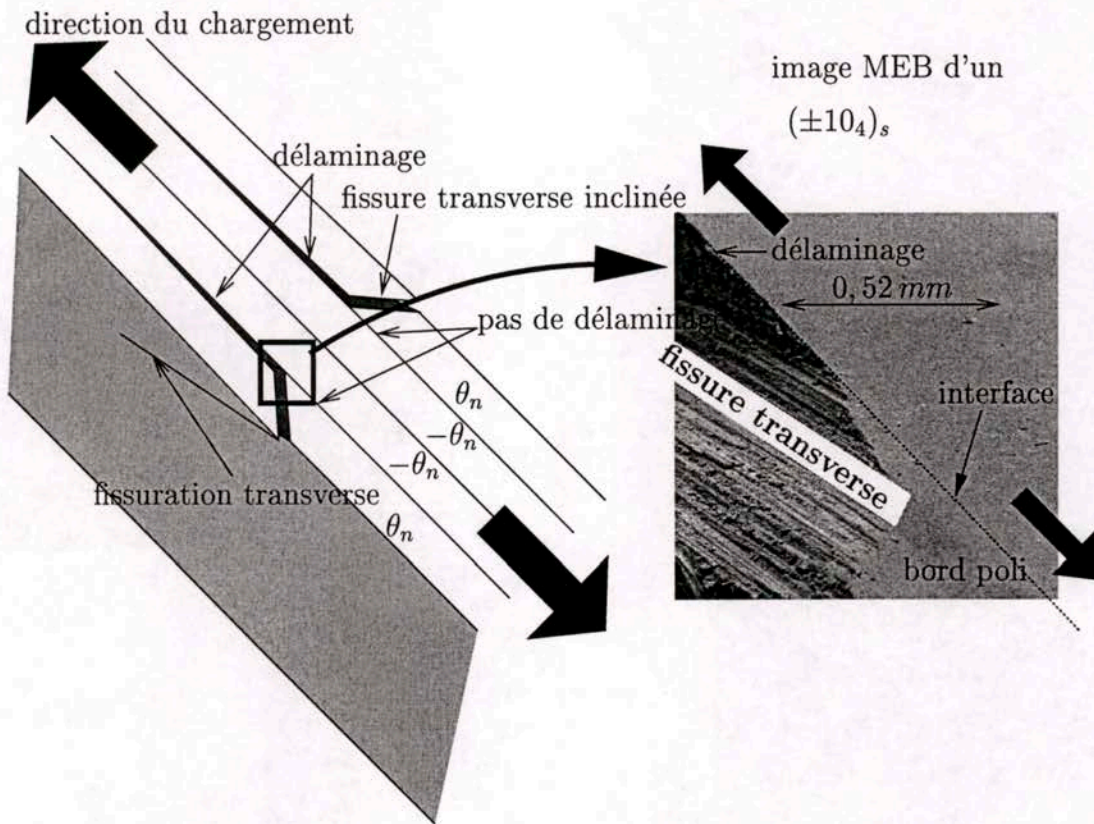


FIG. 1.23 – Délaminage accompagné par une fissure transverse.



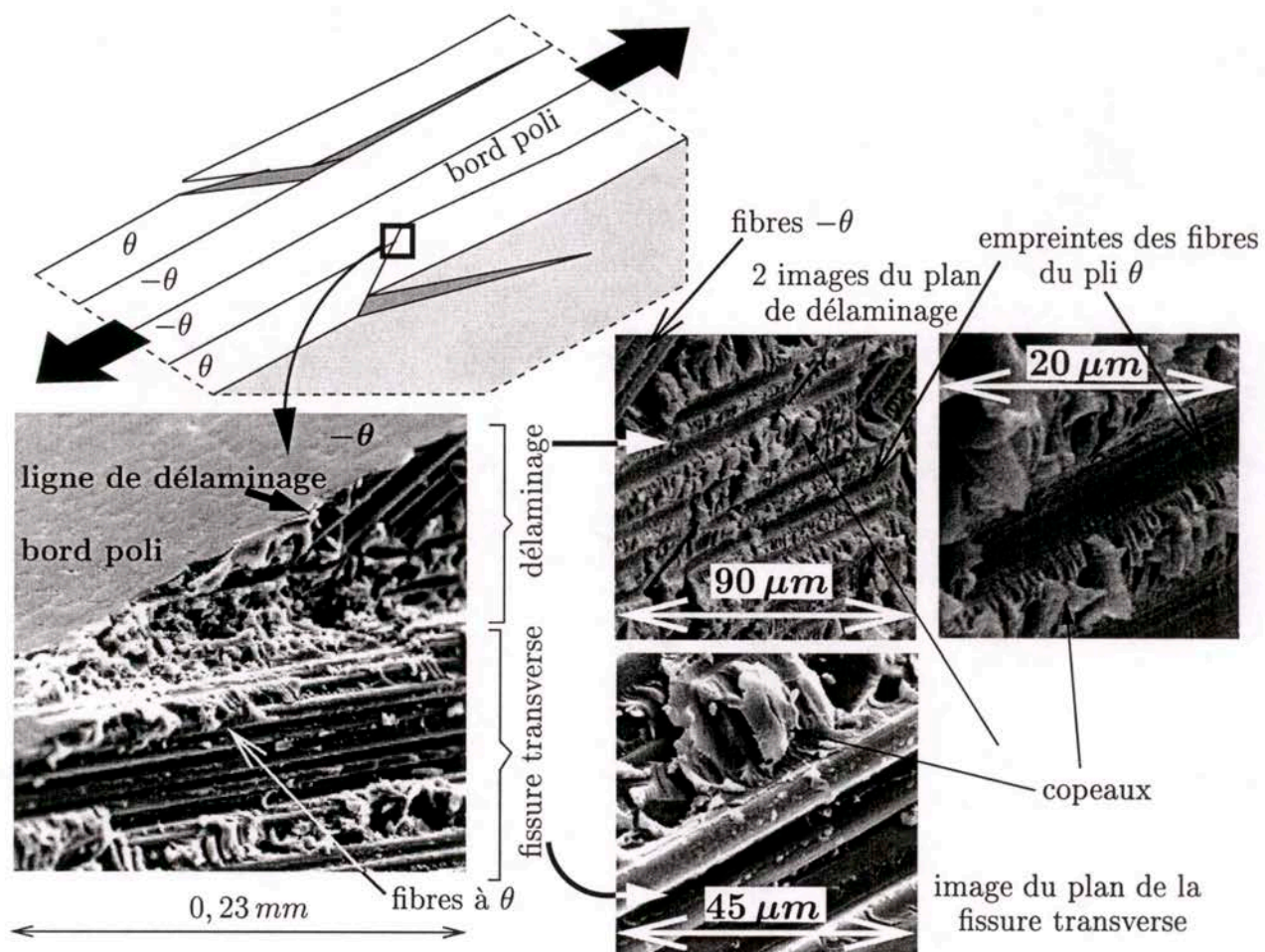


FIG. 1.24 - Allure des surfaces de fracture.

Avant la rupture totale, les surfaces de délaminage sont limitées et ont les formes triangulaires de la figure 1.25 [Bhat, 1993]. Les valeurs des moyennes des longueurs  $l$  des fissures transverses

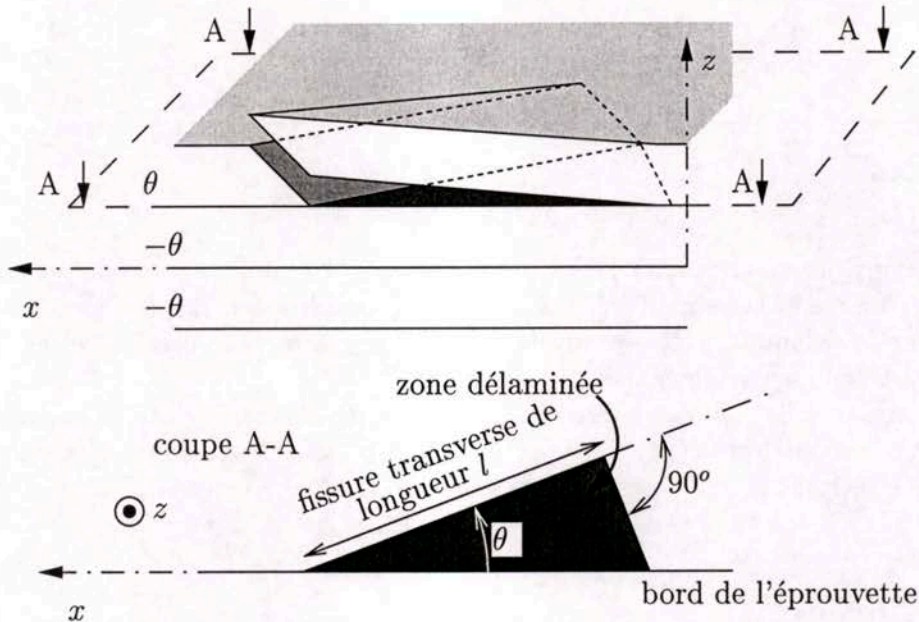


FIG. 1.25 - Allure des zones délaminées.

(voir figure 1.25) à l'amorce du délaminage sont écrites sur le tableau 1.2. Dans ce tableau, les empilements  $(\pm 10_4)_s$  et  $(\pm 20_4)_s$  ne sont pas pris en compte puisqu'il y a rupture totale de l'éprouvette à l'initiation du délaminage.

Longueur $l$ en $mm$ de la fissure transverse	empilements $(\pm 10_n)_s$	empilements $(\pm 20_n)_s$
$n = 1$	9	7
$n = 2$	13	9
$n = 3$	22	15

TAB. 1.2 - Longueurs des fissures transverses.

Comme les fissures transverses apparaissent au même moment que le délaminage, *il est naturel de se poser la question si c'est le délaminage qui entraîne la fissuration transverse ou si c'est l'inverse*. Il faut savoir que nous n'avons pas réussi à voir le délaminage sans la fissuration transverse et que donc nous ne pouvons pas donner une preuve irréfutable de l'apparition d'un mode d'endommagement avant l'autre. Cependant, nous disposons de deux arguments pour penser que c'est le délaminage qui a lieu le premier. L'aspect incliné de toutes les fissures transverses (voir figure 1.23) dans la direction du front de délaminage est un premier argument pour dire que la fissure d'interface est apparue en premier et que le front de la fissure s'est déviée dans la couche puisqu'il a rencontré une zone plus résistante à l'interface. Un deuxième argument est le fait que la valeur du glissement d'interface est pratiquement la même pour tous les empilements lorsque le délaminage a lieu (voir figures 1.16 à 1.21). Ce glissement étant un mécanisme d'interface, *il est donc vraisemblable que c'est le délaminage qui apparaît le premier*.

Sur le tableau 1.3, nous avons écrit les valeurs des contraintes de traction à l'initiation du délaminage. Les valeurs calculées ont été déterminées sur cinq essais.



Contrainte à l'initiation du délaminage $\sigma$ (MPa)	empilements $(\pm 10_n)_s$		empilements $(\pm 20_n)_s$	
	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type
$n = 1$	941	19	601	37
$n = 2$	765	35	503	41
$n = 3$	731	31	459	13
$n = 4$	679	5	479 ??	15

TAB. 1.3 – Charges critiques.

Nous vérifions par ces résultats l'effet d'épaisseur sur l'amorçage du délaminage déjà mis en évidence par [Brewer et Lagace, 1988], [Marion, 2000]. Néanmoins, il est important de souligner que l'initiation du délaminage des éprouvettes  $(\pm 20_4)_s$  n'est pas conforme à cet effet d'épaisseur. Dans [Marion, 2000] nous retrouvons cette singularité.

Aux chapitres 5 et 4, nous allons établir des critères de délaminage qui utilisent les remarques et les résultats de ce chapitre expérimental. Mais avant il faudra savoir évaluer les contraintes aux interfaces des multicouches, et pour ce faire, nous construirons au chapitre suivant deux modèles simplifiés.

## 1.5 Conclusions.

Dans ce chapitre, nous avons décrit et quantifié le mécanisme d'initiation du délaminage en mode III moyennant des essais de traction sur des multicouches  $(\pm \theta_n)_s$  en carbone-époxy. Nous avons détaillé la mise en œuvre des multicouches et nous avons déterminé les caractéristiques du pli. Nous avons aussi proposé des dispositifs de polissage des bords des éprouvettes et de microscopie in-situ pour inspecter les interfaces aux bords. A l'aide de ces dispositifs et d'un microscope électronique à balayage, nous avons mis en évidence l'existence d'une plasticité d'interface pour les interfaces soumises à des cisaillements importants. Pour les empilements  $(\pm \theta_n)_s$  testés en traction, ce phénomène est assez uniforme sur la longueur de l'éprouvette et a lieu avant l'initiation du délaminage. De plus, pour les matériaux utilisés, la plasticité présente un écrouissage négatif, c'est à dire un seuil plastique qui diminue au cours du chargement. D'autre part, à déformation de traction fixée, les glissements aux interfaces augmentent plus vite lorsque le nombre de plis augmente.

Cependant, au moment où le délaminage apparaît, les glissements sont pratiquement les mêmes pour tous les empilements. On peut donc parler d'un glissement critique qui piloterait l'amorce du délaminage.

Par ailleurs, la plasticité d'interface n'influe pas sur la quasi élasticité linéaire du comportement global des multicouches testés. Le comportement reste pratiquement élastique linéaire jusqu'à l'apparition du délaminage. Enfin, nos essais confirment l'effet d'épaisseur sur l'initiation du délaminage déjà mentionné dans la littérature.

Nous allons présenter dans le chapitre suivant les modèles mécaniques qui nous permettront de quantifier ces phénomènes et d'évaluer les contraintes aux bords au niveau des interfaces.



## Chapitre 2

# Adaptation de deux modèles multiparticulaires de multicouches.

### 2.1 Introduction.

Nous allons dans ce chapitre, reprendre la construction de deux modèles simplifiés de multicouches élastiques, l'un étant plus simplifié que l'autre. L'enrichissement de ces modèles permettra d'évaluer les contraintes aux interfaces et d'étudier des phénomènes anélastiques dans les couches et aux interfaces entre les couches du stratifié. Nous serons ainsi capables de modéliser par exemple, des chargements hygro-thermiques et la plasticité d'interface que nous avons mise en évidence par les essais du paragraphe 1.4.2 du chapitre précédent. Nous commençons par une analyse bibliographique non exhaustive des modèles pour déterminer les contraintes dans un multicouche.

Afin de connaître le comportement du multicouche, il est nécessaire de passer par la modélisation des couches élémentaires. Lorsque les couches sont constituées d'un matériau hétérogène, on effectue souvent une homogénéisation du matériau [He, 1999] afin de rendre possible le calcul des structures multicouches. Notons cependant qu'il est aussi intéressant de passer à l'échelle microscopique et d'étudier des phénomènes mécaniques du système fibre/interface/matrice pour faire ensuite des corrélations à l'échelle macroscopique de la couche [Chaboche et al., 1998], [Lane et al., 2001]. Après homogénéisation, les couches deviennent souvent orthotropes, voire isotropes transverses comme c'est le cas du matériau que nous avons testé au chapitre 1 (carbone-époxy T700/CTE1-15 unidirectionnel). Le comportement de la couche homogénéisée fait l'objet de plusieurs recherches. Pour les matériaux composites à matrice organique, le comportement est souvent non-linéaire [Dvorak, 2000]. Pour introduire l'endommagement dans le comportement des composites on utilise souvent le modèle de Ladevèze [Ladevèze et Le Dantec, 1992]. Les lois de plasticité sont très variées et peuvent être, par exemple, avec écrouissage isotrope [Sun et Chen, 1989] ou de type bimodal [Nigam et al., 1994a], [Nigam et al., 1994b]. Un modèle encore plus complet est celui d'Allix qui prend en compte le caractère plastique endommageable du matériau [Allix et al., 1995]. Plusieurs auteurs travaillent encore pour modéliser les non-linéarités du comportement des composites unidirectionnels sous divers types de chargement [Nguyen, 2001].

En ce qui concerne le multicouche formé de couches homogénéisées, on distingue deux types d'entités : les couches et les interfaces entre les couches. Pour tous les modèles, les couches sont à la base, des milieux 3D. Par contre, les interfaces peuvent être modélisées de différentes façons. Un



premier modèle consisterait à considérer les interfaces comme des couches de faible épaisseur dont les caractéristiques mécaniques sont propres à chaque type d'interface [Haboussi et al., 2001]. Un deuxième modèle, dit mésoscopique, fait des interfaces un milieu bidimensionnel endommageable afin de rendre compte du délaminage et de son initiation. Nous pouvons citer à ce sujet les travaux d'Allix [Allix, 1989]. Dans ces travaux, les couches et les interfaces sont respectivement des milieux 3D et 2D, tous les deux endommageables.

Dans ce chapitre, nous modéliserons les interfaces par des milieux 2D, les déplacements 3D peuvent y être discontinus.

La plupart des modèles de multicouches sont destinés au dimensionnement en raideur des structures multicouches. La description est alors globale, les couches sont remplacées par une couche (une cinématique) homogène équivalente. Parmi les modèles les plus simples nous trouvons les modèles de Love-Kirchoff (théorie classique des plaques) [Love, 1934], [Kirchoff, 1850] et de Reissner-Mindlin [Reissner, 1945], [Mindlin, 1951]. Ces deux modèles sont dits du premier ordre puisque la cinématique est affine en  $z$ . Par exemple, les champs de déplacement dans la théorie de Reissner-Mindlin sont

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} .$$

Il s'agit d'une théorie à 5 champs cinématiques qui se différencie de la théorie de Love-Kirchoff par la manière de prendre en compte l'énergie de cisaillement. Ces modèles donnent des résultats très précis pour des multicouches peu épais. Cependant, puisque la cinématique est affine en  $z$ , la description des champs dans l'épaisseur est insuffisante pour des multicouches épais. D'où l'idée de développer des modèles de plaque d'ordre supérieur, notamment en déplacement ou en contrainte.

Les modèles de plaque d'ordre supérieur en déplacement font un développement en série de Taylor en  $z$  à un ordre  $n > 1$  (polynômes de degrés  $n$ ). Ainsi, plus  $n$  est grand, meilleure est l'approximation. Dans [Whitney et Sun, 1973] et [Reddy, 1984] nous pouvons trouver quelques exemples de modèles de plaque d'ordre supérieur. De façon à bien approcher les champs sans avoir besoin de prendre de grandes valeurs de  $n$ , Reddy propose dans [Reddy, 1989] une forme de champ de déplacement de type

$$\begin{cases} u(x, y, z) = \sum_{i=0}^{i=n} u_i(x, y)\phi_i(z) \\ v(x, y, z) = \sum_{i=0}^{i=n} v_i(x, y)\phi_i(z) \\ w(x, y, z) = \sum_{i=0}^{i=n} w_i(x, y)\phi_i(z) \end{cases} ,$$

$\phi_i(z)$  étant des fonctions d'interpolation mieux adaptées au problème que les polynômes en  $z$ .

De façon analogue, les modèles d'ordre supérieur en contrainte approchent les contraintes sur toute l'épaisseur du multicouche par des séries de Taylor en  $z$  [Tang, 1975], [Flanagan, 1994]. Les équations de ces modèles sont obtenues par les équations d'équilibre 3D et les équations de compatibilité du champ de déformation déduit de l'approximation en contrainte et du comportement 3D. Les conditions aux limites 3D sont vérifiées en moyenne.

Nous pouvons trouver d'autres types d'approches telles que des approches mixtes [Verchery, 1974] ou les modèles Zig-Zag [Icardi, 2001] dont la richesse provient de l'utilisation de fonctions discontinues suivant l'épaisseur.



Cependant, ces modèles à cinématique globale, ne sont pas destinés à l'étude de singularités comme les effets de bord sur les contraintes aux interfaces. Depuis plusieurs années l'évaluation de l'état de contraintes près des bords dans les multicouches fait l'objet de nombreuses études. Des solutions analytiques exactes n'existent que pour quelques cas particuliers de chargement et de géométrie [Pagano, 1969]. Une première méthode est le raccordement de solutions 3D données par exemple par des théories de couche limite ou par des calculs éléments finis 3D. Ces méthodes seront décrites en détail dans l'introduction du chapitre 3.

Une autre approche est l'utilisation de modèles simplifiés plus riches et proposant une cinématique par couche. C'est le type de modèles que nous appelons multiparticulaires et que nous étudierons dans la suite.

## 2.2 Les modèles multiparticulaires.

### 2.2.1 Définitions et bibliographie.

Comme déjà dit précédemment, ces modèles font une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale. En fait, avec les modèles multiparticulaires, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface. Le multicouche devient ainsi un objet 2D dont chaque point géométrique est le siège d'une superposition de particules matérielles correspondant aux plaques modélisant les couches (on a donc autant de particules que de couches, voir figure 2.1). Cette propriété justifie la dénomination "modèles multiparticulaires". Les modèles servent surtout à évaluer correctement les contraintes aux interfaces entre les couches. Ci-dessous, nous proposons une brève bibliographie des modèles multiparticulaires.

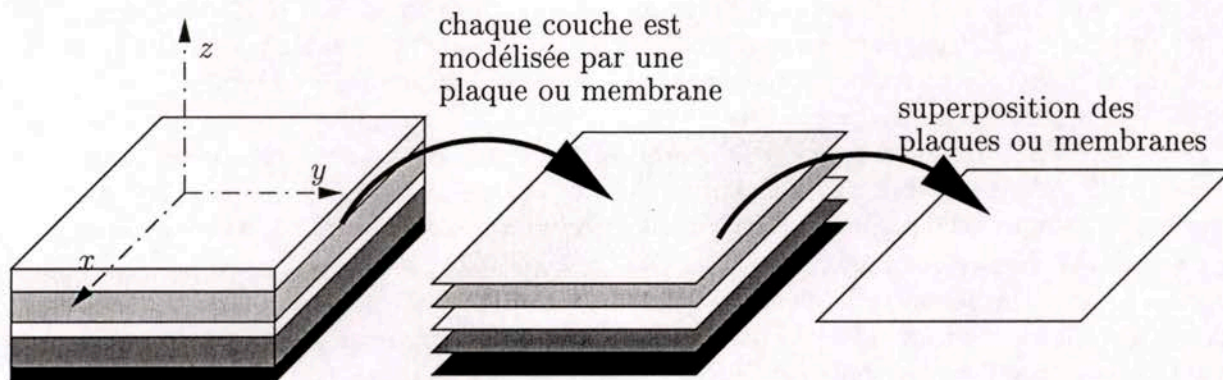


FIG. 2.1 - Approche multiparticulaire des multicouches.

L'une des premières approches simplifiées qu'on peut appeler multiparticulaire est celle de Puppo et Evensen [Puppo et Evensen, 1970] pour des multicouches chargés dans leur plan. Les champs par couche sont approchés par des champs moyens dans chaque couche. Le modèle prend en compte des efforts de cisaillement d'interface reliés dans le comportement aux différences de déplacement moyen des couches adjacentes. Garrett et Bailey reprennent cette idée et développent le très connu Shear Lag Analysis pour modéliser la fissuration transverse dans des empilements  $(0, 90)_s$  [Garrett et Bailey, 1977]. Le modèle Shear Lag est le modèle multiparticulaire le plus simple que l'on puisse considérer.



Pagano construit ensuite le modèle local [Pagano, 1978], le plus complet des modèles multiparticulaires élastiques, à partir de la méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner que nous rappellerons plus loin. Dans ce modèle, chaque couche est modélisée par une plaque à 7 champs cinématiques (plaque du troisième ordre). Le modèle est construit à partir d'une approximation en contrainte injectée dans la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner. Les contraintes sont approchées par des polynômes en  $z$ . Les équations du modèle sont obtenues par le théorème variationnel de Reissner [Reissner, 1950]. Pagano fait apparaître dans son modèle des efforts généralisés d'interface et souligne l'absence de singularités pour ces champs. Le modèle local est malgré tout un peu lourd à manipuler pour des multicouches constitués d'un grand nombre de couches. Pagano et Soni développent alors un modèle élastique plus opérationnel : le modèle global-local [Pagano et Soni, 1983]. Dans ce modèle, on privilégie certaines interfaces et les couches les plus proches de ces interfaces sont modélisées par le modèle local. Les couches restantes sont regroupées en paquets qui sont ensuite approchés par une plaque homogène. L'avantage de ce modèle global-local par rapport au modèle local est la diminution du nombre d'inconnues et la précision de ce modèle dépend du choix des interfaces privilégiées. Les interfaces les plus sollicitées doivent être les premières à être privilégiées.

Kassapoglu et Lagace proposent une approche en contrainte par couche sous forme polynomiale en  $z$  avec des coefficients exponentiels [Kassapoglou et Lagace, 1987]. Les équations du modèle sont obtenues par minimisation de l'énergie complémentaire.

À l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Caron étudie la cinétique de fissuration transverse dans le pli à 90 d'une éprouvette  $(0, 90)_s$ , avec un Shear Lag 2D bâti par le principe des puissances virtuelles [Caron et Ehrlicher, 1997]. Puis, Naciri et al. s'inspirent des travaux de Pagano dans [Naciri et al., 1998] et construisent un modèle multiparticulaire plus complet que le Shear Lag mais plus simple que le modèle local de Pagano. Les équations sont encore obtenues par la méthode des puissances virtuelles. Chabot formalise ensuite la construction d'une famille de modèles multiparticulaires élastiques dits  $M_4$  (Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches) [Chabot, 1997], à partir de la méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner. Le modèle le plus complet est identique au modèle local de Pagano et on déduit à partir de celui-ci les autres modèles moyennant des approximations successives des multicouches minces. Dans cette famille de modèles, on trouve les modèles  $M_4-5n$  et  $M_4-2n+1$  comportant respectivement  $5n$  et  $2n+1$  champs cinématiques pour un multicouche à  $n$  couches. Le premier modèle approche chaque couche par une plaque de Reissner ; en revanche, le second modèle approche chaque couche par une membrane. Les deux modèles font figurer des efforts d'interface dans leurs efforts généralisés.

Carreira fait ensuite une validation des modèles  $M_4-5n$  et  $M_4-2n+1$  en comparant les résultats des modèles et ceux obtenus par éléments finis pour les problèmes de quadricouches en traction avec bord droit ou avec un trou [Carreira, 1998]. La comparaison est aussi effectuée pour le cas d'un  $(0, 90)_s$  en traction. Les deux modèles donnent de bons résultats.

Hadj-Ahmed utilise le modèle  $M_4-2n+1$  pour analyser les contraintes dans un joint de colle [Hadj-Ahmed et al., 2001]. De nouvelles comparaisons par rapport aux éléments finis sont effectuées et la bonne description des champs par les modèles est confirmée.

Plus récemment, Limam utilise le modèle  $M_4-2n+1$  pour étudier la réparation de poutres et de dalles en béton armé par des composites en carbone-époxy [Limam et al., 2001]. Moyennant la théorie du calcul à la rupture de Salençon [Salençon, 1983] adaptée au modèle  $M_4-2n+1$ , Limam distingue plusieurs mécanismes de ruine dans les matériaux réparés et propose un dimensionnement en contrainte ultime.

La construction de certains des modèles ci-dessus utilisent la formulation mixte d'Hellinger-Reissner pour obtenir une approximation des déplacements et des contraintes 3D cohérente et pour déterminer les équations des modèles. Il en sera de même pour les modèles que nous allons



développer dans ce chapitre. Il nous semble donc pertinent de rappeler la méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner des problèmes élastiques.

### 2.2.2 Méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner.

On considère un volume de matière  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ . Le matériau est supposé élastique et on désigne par

- $\underline{x}$  la variable d'espace,
- $\underline{\underline{\underline{S}}}$  le tenseur d'ordre quatre des souplesses en  $\underline{x}$ ,
- $\underline{\bar{\sigma}}$  le tenseur des contraintes 3D en  $\underline{x}$ ,
- $\underline{\bar{\sigma}}^*$  un champ de tenseur d'ordre 2 symétrique, de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\Omega$ ,
- $\underline{U}$  le vecteur déplacement 3D en  $\underline{x}$ ,
- $\underline{U}^*$  un champ de vecteur 3D continu sur  $\Omega$ , de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\Omega$
- $\underline{\bar{\varepsilon}}$  le tenseur des déformations 3D en  $\underline{x}$ ,
- $\underline{U}^d$  les déplacements imposés sur la partie  $\partial\Omega_U$  de la frontière  $\partial\Omega$ ,
- $\underline{T}^d$  les efforts imposés sur la partie  $\partial\Omega_T$  de la frontière  $\partial\Omega$ ,
- $\underline{f}$  les forces de volume en  $\underline{x}$ .

On définit alors la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner sur le couple  $((\underline{U}^*, \underline{\bar{\sigma}}^*))$  :

$$\begin{aligned}
 H.R.(\underline{U}^*, \underline{\bar{\sigma}}^*) &= \int_{\Omega} \left[ \underline{\bar{\sigma}}^*(\underline{x}) : \underline{\bar{\varepsilon}}(\underline{U}^*)(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}) \cdot \underline{U}^*(\underline{x}) - \frac{1}{2} \underline{\bar{\sigma}}^*(\underline{x}) : \underline{\underline{\underline{S}}}(\underline{x}) : \underline{\bar{\sigma}}^*(\underline{x}) \right] d\Omega \\
 &\quad - \int_{\partial\Omega_U} (\underline{\bar{\sigma}}^* \cdot \underline{n})(\underline{x}) \cdot (\underline{U}^* - \underline{U}^d)(\underline{x}) dS - \int_{\partial\Omega_T} \underline{T}^d(\underline{x}) \cdot \underline{U}^*(\underline{x}) dS. \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Le théorème de Reissner est le suivant :

*La solution du problème élastique est le couple  $(\underline{U}, \underline{\bar{\sigma}})$  qui rend stationnaire la fonctionnelle H.R. [Reissner, 1950].*

Dans [Chabot, 1997], la méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner pour les multicouches est présentée en détail, nous n'en montrons ici qu'un résumé. Pour construire des solutions approchées à partir d'une approximation en contraintes, on effectue les étapes suivantes :

1. On définit les efforts intérieurs généralisés et on écrit l'approximation en contrainte sous forme polynomiale en  $z$ . Les coefficients des polynômes font intervenir les efforts intérieurs généralisés.
2. On injecte le champ de contraintes approchées dans la fonctionnelle H.R. et on identifie les déplacements généralisés et les déformations généralisées cohérentes avec l'approximation en contrainte.



3. En faisant une variation de  $H.R.$  par rapport aux déplacements intérieurs généralisés, on obtient les équations d'équilibre généralisé et les conditions aux limites généralisées.
4. La stationnarité de la fonctionnelle  $H.R.$  par rapport à une variation des efforts intérieurs généralisés donnent les équations de comportement.

Nous allons maintenant adapter à nos besoins les modèles  $\mathcal{M}_4-5n$  et  $\mathcal{M}_4-2n+1$  construits dans [Chabot, 1997] pour des multicouches élastiques. Rappelons nous qu'il est nécessaire, au moins de tenir compte du glissement d'interface pour modéliser les essais du chapitre précédent. Nous reprendrons donc la construction de ces modèles et en profiterons pour introduire des discontinuités quelconques (dans le plan et hors plan) des déplacements aux interfaces et des déformations anélastiques dans les couches pour pouvoir modéliser d'éventuels chargements thermiques ou phénomènes plastiques dans les couches. La démarche d'Hellinger-Reissner sera adoptée pour faire apparaître des champs anélastiques dans la modélisation.

### 2.2.3 Position du problème.

On considère le multicouche formé de  $n$  couches d'épaisseur  $e^i$  dont les interfaces sont notées  $\Gamma_{i,i+1}$ . Le volume occupé par le multicouche est noté  $\Omega = \omega \times [h_0^-; h_n^+]$ . Pour pouvoir tenir compte

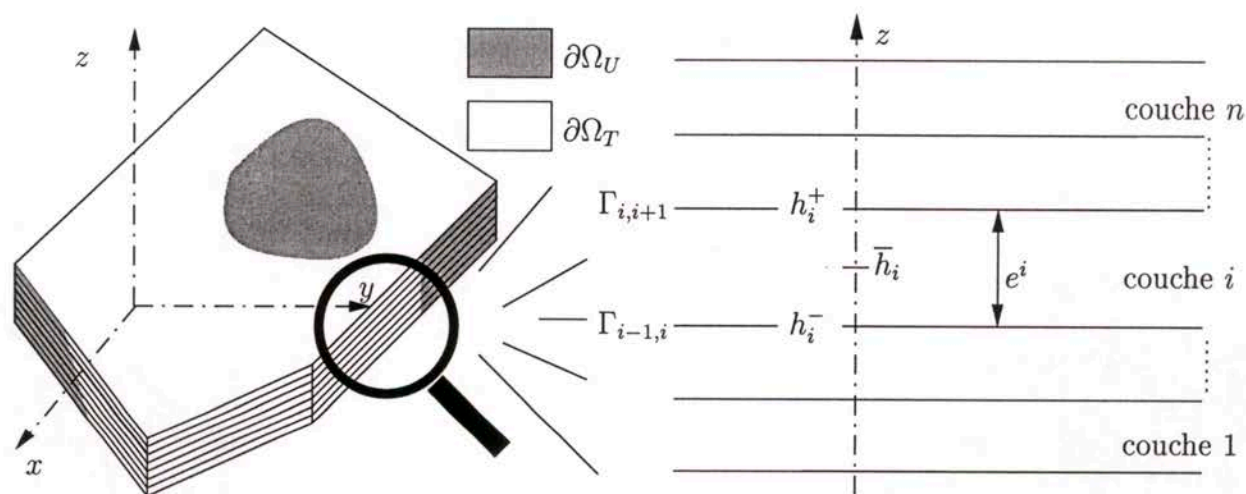


FIG. 2.2 – Multicouches étudiés.

des aspects thermoélastiques et des comportements anélastiques éventuels de plis sous certaines orientations (par exemple, unidirectionnel carbone-époxy 45° en traction...) on introduit un champ de déformation anélastique  $\bar{\varepsilon}^{an}(\underline{x})$  dans le multicouche. De façon à quantifier les glissements d'interface constatés expérimentalement (cf. chapitre 1), les champs de déplacement aux interfaces  $\Gamma_{i,i+1}$  peuvent être discontinus et la discontinuité vaut  $\underline{\gamma}^{i,i+1}(\underline{x})$ . Nous supposons que ces champs sont connus.

Le problème à résoudre est le suivant :

Etant donnés les champs de déformation anélastique  $\bar{\bar{\epsilon}}^{an}$  et de discontinuités des déplacements  $\underline{\gamma}^{i,i+1}$  aux interfaces  $\Gamma_{i,i+1}$ , trouver les champs de déplacement  $\underline{U}$  et de contrainte  $\bar{\bar{\sigma}}$ , dans le domaine tridimensionnel  $\Omega$ , de frontière  $\partial\Omega$  satisfaisant les équations suivantes :

- équation de compatibilité :

$$\bar{\bar{\epsilon}}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\overline{\overline{\text{grad}}}\underline{U} + {}^t\overline{\overline{\text{grad}}}\underline{U}) \quad (2.2)$$

- équation d'équilibre quasi-statique :

$$\text{div}\bar{\bar{\sigma}}(\underline{x}) + \underline{f}(\underline{x}) = 0 \quad (2.3)$$

où  $\underline{f}(\underline{x})$  est le champ de forces de volume

- équation de comportement

$$\bar{\bar{\epsilon}}(\underline{x}) - \bar{\bar{\epsilon}}^{an}(\underline{x}) = \bar{\bar{\mathbf{S}}}(\underline{x}) : \bar{\bar{\sigma}}(\underline{x}) \quad (2.4)$$

où  $\bar{\bar{\mathbf{S}}}(\underline{x})$  est le tenseur d'ordre quatre des souplesses du matériau en  $\underline{x}$

- conditions aux limites

$$\underline{U}(\underline{x}) = \underline{U}^d(\underline{x}) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_U \quad (2.5)$$

$$(\bar{\bar{\sigma}} \cdot \underline{n})(\underline{x}) = \underline{T}^d(\underline{x}) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_T \quad (2.6)$$

avec  $\partial\Omega_U \cap \partial\Omega_T = \emptyset$  et  $\partial\Omega_U \cup \partial\Omega_T = \partial\Omega$ .  $\underline{U}^d(\underline{x})$  est le déplacement imposé sur la partie  $\partial\Omega_U$  de la frontière  $\partial\Omega$  et  $\underline{T}^d(\underline{x})$  est le vecteur contrainte imposé sur la partie  $\partial\Omega_T$  de la frontière  $\partial\Omega$ .

- discontinuités des déplacements aux interfaces

$$[\underline{U}^*]_{\underline{e}_z}(\underline{x}) = \underline{\gamma}^{i,i+1}(\underline{x}) \quad \text{sur} \quad \Gamma_{i,i+1} \quad (2.7)$$

Pour résoudre le problème, nous nous inspirons de la démarche proposée en élasticité dans [Pagano, 1978], [Chabot, 1997]. Nous utilisons une adaptation de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner des problèmes d'élasticité 3D [Reissner, 1950]. L'expression de la fonctionnelle classique d'Hellinger Reissner pour un problème élastique a été rappelée en (2.1). Dans la formulation, le champ de déformation élastique est  $\bar{\bar{\epsilon}} - \bar{\bar{\epsilon}}^{an}$  et les discontinuités des champs de déplacement  $\underline{\gamma}^{j,j+1}$  aux interfaces  $\Gamma^{j,j+1}$  interviennent comme une sorte de conditions aux limites en déplacement. Nous considérons donc l'adaptation de la fonctionnelle H.R. d'Hellinger-Reissner définie sur le couple de champs  $(\underline{U}^*, \bar{\bar{\sigma}}^*)$  dans l'équation (2.8). Le champ  $\underline{U}^*$  est un champ de vecteur 3D,  $C^1$  par morceaux sur  $\Omega$  et le champ de contraintes  $\bar{\bar{\sigma}}^*$  est un champ de tenseur d'ordre 2 symétrique,  $C^1$  par morceaux sur  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} H.R.(\underline{U}^*, \bar{\bar{\sigma}}^*) &= - \int_{\Omega} \left[ \text{div}\bar{\bar{\sigma}}^*(\underline{x}) \cdot \underline{U}^*(\underline{x}) + \bar{\bar{\sigma}}^* : \bar{\bar{\epsilon}}^{an} + \underline{f}(\underline{x}) \cdot \underline{U}^*(\underline{x}) + \frac{1}{2} \bar{\bar{\sigma}}^*(\underline{x}) : \bar{\bar{\mathbf{S}}}(\underline{x}) : \bar{\bar{\sigma}}^*(\underline{x}) \right] d\Omega \\ &- \sum_{i=1}^{n-1} \left( \int_{\Gamma_{i,i+1}} (\bar{\bar{\sigma}}^* \cdot \underline{e}_z)(\underline{x}) \cdot \underline{\gamma}^{i,i+1}(\underline{x}) dS \right) + \int_{\partial\Omega_U} (\bar{\bar{\sigma}}^* \cdot \underline{n})(\underline{x}) \cdot \underline{U}^d(\underline{x}) dS \\ &+ \int_{\partial\Omega_T} \left( (\bar{\bar{\sigma}}^* \cdot \underline{n}) - \underline{T}^d \right) (\underline{x}) \cdot \underline{U}^*(\underline{x}) dS \end{aligned} \quad (2.8)$$

Le théorème de Reissner [Reissner, 1950] permet de trouver le couple solution  $(\underline{U}, \bar{\bar{\sigma}})$  du problème.



En effet, on voit que la stationnarité par rapport à une variation quelconque du champ de déplacement tridimensionnel  $\underline{U}^*$  donne les équations d'équilibre et les conditions aux limites en contrainte sur  $\partial\Omega_T$  :

$$\begin{aligned} & \forall \partial\underline{U}^* \\ & - \int_{\Omega} [\underline{\text{div}} \bar{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \partial\underline{U}^*(\underline{x}) + \underline{f}(\underline{x}) \cdot \partial\underline{U}^*(\underline{x})] d\Omega + \int_{\partial\Omega_T} ((\bar{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) - \underline{T}^d)(\underline{x}) \cdot \partial\underline{U}^*(\underline{x}) dS = 0 \\ & \iff \begin{cases} \underline{\text{div}} \bar{\underline{\sigma}}(\underline{x}) + \underline{f}(\underline{x}) = 0 \\ (\bar{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n})(\underline{x}) = \underline{T}^d(\underline{x}) \text{ sur } \partial\Omega_T \\ \bar{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \text{ continu sur les surfaces de discontinuité de } \bar{\underline{\sigma}} \end{cases} \end{aligned}$$

La stationnarité par rapport à une variation quelconque du champ de contrainte tridimensionnel  $\bar{\underline{\sigma}}$  donne le comportement élastique linéaire et les conditions aux limites en déplacement sur  $\partial\Omega_U$  :

$$\begin{aligned} & \forall \partial\bar{\underline{\sigma}}^* \\ & - \int_{\Omega} \left[ \underline{\text{div}} \partial\bar{\underline{\sigma}}^*(\underline{x}) \cdot \underline{U}(\underline{x}) + \partial\bar{\underline{\sigma}}^*(\underline{x}) : \bar{\underline{\varepsilon}}^{an}(\underline{x}) + \partial\bar{\underline{\sigma}}^*(\underline{x}) : \bar{\underline{\mathbf{S}}}(\underline{x}) : \bar{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \right] d\Omega \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} \left( \int_{\Gamma_{i,i+1}} (\partial\bar{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{e}_z)(\underline{x}) \cdot \underline{\gamma}^{i,i+1}(\underline{x}) dS \right) + \int_{\partial\Omega_U} (\partial\bar{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n})(\underline{x}) \cdot \underline{U}^d(\underline{x}) dS \\ & + \int_{\partial\Omega_T} (\partial\bar{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n})(\underline{x}) \cdot \underline{U}(\underline{x}) dS = 0 \\ & \iff \begin{cases} \bar{\underline{\mathbf{S}}}(\underline{x}) : \bar{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \bar{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}(\underline{x})) - \bar{\underline{\varepsilon}}^{an}(\underline{x}) \\ \underline{U}(\underline{x}) = \underline{U}^d(\underline{x}) \text{ sur } \partial\Omega_U \\ [\underline{U}]_{\underline{e}_z}(\underline{x}) = \underline{\gamma}^{i,i+1}(\underline{x}) \text{ sur } \Gamma_{i,i+1} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour simplifier les écritures, dans tout ce chapitre on suppose que  $\partial\Omega_U = \emptyset$  et que les forces de volume  $\underline{f}$  sont négligeables. Les conditions aux limites en déplacement ne posent aucune difficulté technique; on verra dans d'autres chapitres, des applications où l'on impose les déplacements aux bords.

Puisque les champs anélastiques  $\underline{\gamma}^{i,i+1}$  et  $\bar{\underline{\varepsilon}}^{an}$  sont supposés donnés, ils vont jouer le rôle de variables d'état du multicouche dans toutes les équations qu'on écrira dans la suite.

#### Notations.

D'une manière générale, nous adoptons dans ce chapitre les notations suivantes :

- l'exposant  $i$  désigne la couche  $i$  et varie de 1 à  $n$ ,
- l'exposant  $j, j+1$  désigne l'interface entre les couches  $j$  et  $j+1$  et varie de 1 à  $n-1$ ,
- les indices grecs  $\alpha$  et  $\beta$  varient de 1 à 2 et serviront à exprimer les composantes des champs dans le plan  $(x, y)$ .

### 2.3 Approximation des champs de contraintes 3D.

Nous proposerons deux types d'approximation du champ de contraintes 3D, l'une étant plus précise que l'autre. Le premier modèle est le  $\mathcal{M}_4\text{-}5n$  qui approche chaque couche par une plaque

de Reissner [Reissner, 1945] et le deuxième modèle est le  $\mathcal{M}_4-2n+1$  qui approche chaque couche par une membrane. Le multicouche (objet 3D) devient ainsi une superposition de plaques ou de membranes couplées entre elles par des efforts d'interface. L'entité 2D qui modélise le multicouche est constituée de points géométriques occupés par  $n$  particules matérielles. L'approximation des contraintes sera exactement la même que dans le cadre de l'élasticité [Chabot, 1997].

### 2.3.1 Champ de contraintes approché du modèle $\mathcal{M}_4-5n$ .

Nous approchons les contraintes dans le plan par des polynômes en  $z$  du premier degré. On les notera  $\sigma_{\alpha\beta}$  ( $(\alpha, \beta) \in \{1, 2\}$ ). En utilisant les équations d'équilibre 3D, nous déduisons que les degrés des polynômes en  $z$  approchant les contraintes  $\sigma_{\alpha 3}$  et  $\sigma_{33}$  sont respectivement 2 et 3. On choisit les coefficients des polynômes qui apparaissent dans l'écriture des contraintes approchées de manière à faire intervenir les champs suivants qu'on appelle efforts intérieurs généralisés :

- le tenseur plan  $\tilde{N}^i$  d'ordre 2 des efforts membranaires de la couche  $i$  (avec  $1 \leq i \leq n$ ) :

$$N_{\alpha\beta}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz; \quad (2.9)$$

- le tenseur plan  $\tilde{M}^i$  d'ordre 2 des moments de flexion de la couche  $i$  par rapport au plan médian de la couche (avec  $1 \leq i \leq n$ ) :

$$M_{\alpha\beta}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i) \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz; \quad (2.10)$$

- le vecteur plan  $\tilde{Q}^i$  d'effort tranchant de la couche  $i$  (avec  $1 \leq i \leq n$ ) :

$$Q_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha 3}(x, y, z) dz; \quad (2.11)$$

- le vecteur plan  $\tilde{\tau}^{j,j+1}$  d'effort intérieur de cisaillement à l'interface  $j, j+1$  (avec  $1 \leq j \leq n-1$ )

$$\tau_{\alpha}^{j,j+1}(x, y) = \sigma_{\alpha 3}(x, y, h_j^+) \quad (2.12)$$

- le scalaire  $\nu^{j,j+1}$  d'effort d'arrachement à l'interface  $j, j+1$  (avec  $1 \leq j \leq n-1$ )

$$\nu^{j,j+1}(x, y) = \sigma_{33}(x, y, h_j^+). \quad (2.13)$$

On définit une base  $(P_j^i)_{0 \leq j \leq 3}$  des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 avec

$$\begin{cases} P_0^i = 1 \\ P_1^i = \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \\ P_2^i = 6 \left( \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^2 + \frac{1}{2} \\ P_3^i = -2 \left( \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^3 + \frac{3}{10} \left( \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^2 \end{cases} \quad (2.14)$$



Ces polynômes ainsi définis sont orthogonaux entre eux, c'est à dire que :

$$\int_{h_i^-}^{h_i^+} P_\alpha^i(z) P_\beta^i(z) dz = 0 \quad \text{si } \alpha \neq \beta.$$

Les contraintes approchées dans la couche  $i$  s'écrivent alors :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{5n}(x, y, z) = N_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i2}} M_{\alpha\beta}^i(x, y) P_1^i(z) \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^{5n}(x, y, z) = & Q_\alpha^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + (\tau_\alpha^{i,i+1}(x, y) - \tau_\alpha^{i-1,i}(x, y)) P_1^i(z) \\ & + \left( Q_\alpha^i(x, y) - \frac{e^i}{2} (\tau_\alpha^{i,i+1}(x, y) + \tau_\alpha^{i-1,i}(x, y)) \right) \frac{P_2^i(z)}{e^i} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{5n}(x, y, z) = & \left( \frac{\nu^{i,i+1}(x, y) + \nu^{i-1,i}(x, y)}{2} + \frac{e^i}{12} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) \right) P_0^i(z) \\ & + \left( \frac{e^i}{10} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) - \frac{\operatorname{div} \tilde{Q}^i(x, y)}{5} + \nu^{i,i+1}(x, y) - \nu^{i-1,i}(x, y) \right) P_1^i(z) \\ & + \frac{e^i}{12} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) P_2^i(z) \\ & + \left( \frac{e^i}{2} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) - \operatorname{div} \tilde{Q}^i(x, y) \right) P_3^i(z) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Puisque les polynômes  $(P_j^i)_{0 \leq j \leq 3}$  sont donnés, la connaissance des efforts intérieurs généralisés définis ci-dessus (des champs en  $(x, y)$ ) permet de déterminer l'état de contraintes 3D approché du modèle  $\mathcal{M}_{4-5n}$ .

*Remarque 1.* Dans ce qui précède, les efforts intérieurs  $\tilde{\tau}^{i,i+1}$  et  $\nu^{i,i+1}$  sont définis pour  $i$  variant de 1 à  $n-1$  (les interfaces entre les couches). Cependant il est commode de noter :  
 -  $\tilde{\tau}^{0,1}$  et  $\tilde{\tau}^{n,n+1}$  les efforts extérieurs de cisaillement sur la face inférieure de la couche 1 et supérieure de la couche  $n$   
 -  $\nu^{0,1}$  et  $\nu^{n,n+1}$  l'effort extérieur normal sur la face inférieure de la couche 1 et supérieure de la couche  $n$ .

Les efforts  $\tilde{\tau}^{0,1}$ ,  $\tilde{\tau}^{n,n+1}$ ,  $\nu^{0,1}$  et  $\nu^{n,n+1}$  sont donc des données. Si nous notons  $T_k^-$  (respectivement  $T_k^+$ )  $k \in \{1, 3\}$  la composante suivant  $k$  du vecteur contrainte imposé sur la face externe inférieure (respectivement supérieure) du multicouche, nous avons :

$$\begin{cases} \tau_1^{0,1}(x, y) = -T_1^-(x, y) \\ \tau_2^{0,1}(x, y) = -T_2^-(x, y) \\ \nu^{0,1}(x, y) = -T_3^-(x, y) \end{cases} \quad \text{respectivement} \quad \begin{cases} \tau_1^{n,n+1}(x, y) = T_1^+(x, y) \\ \tau_2^{n,n+1}(x, y) = T_2^+(x, y) \\ \nu^{n,n+1}(x, y) = T_3^+(x, y) \end{cases}$$

### 2.3.2 Champ de contraintes approché du modèle $\mathcal{M}_{4-2n+1}$ .

Pour ce modèle  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  plus grossier dans sa description des champs, nous approchons les contraintes  $\sigma_{\alpha\beta}$  par un polynôme en  $z$  de degré 0 ( $(\alpha, \beta) \in \{1, 2\}$ ); c'est à dire que la couche est modélisée par une membrane qui ne reprend donc pas la flexion. Cependant, compte tenu de l'empilement des membranes reliées par des efforts d'interface, le multicouche accepte ce type de

chargement. En utilisant les équations d'équilibre 3D, nous déduisons que les degrés des polynômes en  $z$  approchant les contraintes  $\sigma_{\alpha 3}$  et  $\sigma_{33}$  sont respectivement 1 et 2. Les contraintes approchées dans la couche  $i$  s'écrivent :

$$\sigma_{\alpha\beta}^a(x, y, z) = N_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} \tag{2.18}$$

$$\sigma_{\alpha 3}^a(x, y, z) = \frac{1}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) + \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)) P_0^i(z) + (\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) - \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)) P_1^i(z) \tag{2.19}$$

$$\sigma_{33}^a(x, y, z) = \left[ \begin{aligned} & \frac{T_3^+(x, y) - T_3^-(x, y)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n \left[ \frac{e^j}{2} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x, y)) \right] \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \frac{e^j}{2} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x, y)) \right] \\ & + \frac{e^i}{12} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) \end{aligned} \right] P_0^i(z) \\ - \frac{e^i}{2} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) P_1^i(z) \tag{2.20} \\ + \frac{e^i}{12} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) P_2^i(z)$$

où  $T_3^+(x, y) = \underline{T}^d(x, y) \cdot \underline{e}_z$  sur la face supérieure  $z = h_n^+$ ,  $T_3^-(x, y) = \underline{T}^d(x, y) \cdot \underline{e}_z$  sur la face inférieure  $z = h_1^-$ ,  $(P_j^i)_{0 \leq j \leq 3}$  est la base orthogonale de polynômes de degré inférieur ou égal à 3 définie par

la relation (2.14) et les efforts généralisés  $\tilde{N}^i, \tilde{\tau}_1^{i,i+1}, \tilde{\tau}_2^{i,i+1}$  par (2.9) et (2.12).

En faisant la même remarque qu'on a faite pour le  $\mathcal{M}_{4-5n}$  concernant les efforts  $\tilde{\tau}^{0,1}$  et  $\tilde{\tau}^{n,n+1}$ , on écrit aussi :

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_1^{0,1}(x, y) &= -T_1^-(x, y) \\ \tau_2^{0,1}(x, y) &= -T_2^-(x, y) \end{aligned} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{aligned} \tau_1^{n,n+1}(x, y) &= T_1^+(x, y) \\ \tau_2^{n,n+1}(x, y) &= T_2^+(x, y) \end{aligned} \right.$$

## 2.4 Equations d'équilibre et conditions aux limites cohérentes avec l'approximation en contraintes.

Si nous suivons la démarche proposée par le théorème de Reissner [Reissner, 1950] pour déterminer les équations d'équilibre et les conditions aux limites, nous aurons à faire une variation de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner par rapport aux déplacements. Nous devons donc dans un premier temps déterminer l'approximation des déplacements qui est cohérente avec l'approximation en contrainte; et ce, moyennant l'écriture de la fonctionnelle d'Hellinger Reissner.

Dans l'écriture de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner (équation (2.8)), on ne prendra en compte que les termes qui font apparaître le champ de déplacements  $\underline{U}^*$ . On obtient ainsi une fonctionnelle  $T$  sur  $(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*)$  définie par

$$T(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*) = - \int_{\Omega} [\operatorname{div} \bar{\sigma}^*(\underline{x}) \cdot \underline{U}^*(\underline{x})] d\Omega + \int_{\partial\Omega_T} ((\bar{\sigma}^* \cdot \underline{n}) - \underline{T}^d)(\underline{x}) \cdot \underline{U}^*(\underline{x}) dS \tag{2.21}$$



2.4.1 Modèle  $\mathcal{M}_4\text{-}5n$ .

## Déplacements généralisés.

Grâce à la remarque du paragraphe 1.1 concernant les données  $\tilde{\tau}^{0,1}$ ,  $\tilde{\tau}^{n,n+1}$ ,  $\nu^{0,1}$  et  $\nu^{n,n+1}$  et en introduisant l'approximation en contrainte du  $\mathcal{M}_4\text{-}5n$  dans l'écriture de  $\bar{\sigma}^*$  (cf. équations (2.15 à 2.17)), la fonctionnelle  $T$  devient

$$T(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*) = - \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[ \begin{aligned} & \left( \operatorname{div} \tilde{N}^{i*}(x, y) + \tilde{\tau}^{i,i+1*}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i*}(x, y) \right) \cdot \tilde{U}^{i*}(x, y) \\ & + \left( \operatorname{div} \tilde{M}^{i*}(x, y) - \tilde{Q}^{i*}(x, y) \right. \\ & \quad \left. + \frac{e^i}{2} \left( \tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*} \right)(x, y) \right) \cdot \tilde{\Phi}^{i*}(x, y) \\ & + \left( \operatorname{div} \tilde{Q}^{i*} + \nu^{i,i+1}(x, y) - \nu^{i-1,i}(x, y) \right) \cdot U_3^{i*}(x, y) \end{aligned} \right] d\omega \quad (2.22)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left[ \begin{aligned} & \left( \tilde{N}^{i*} \cdot \underline{n} \right) \cdot \tilde{U}^{i*} + \left( \tilde{M}^{i*} \cdot \underline{n} \right) \cdot \tilde{\Phi}^{i*} + \left( \tilde{Q}^{i*} - \frac{e^i}{2} \left( \tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*} \right) \right) \cdot \underline{n} \hat{U}_3^{i*} \\ & + \tilde{Q}^{i*} \cdot \underline{n} U_3^{i*} + e^i \left( \tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*} \right) \cdot \underline{n} \bar{U}_3^{i*} - \int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{T}^d \cdot \underline{U}^* dz \end{aligned} \right] ds$$

où nous avons introduit les notations suivantes pour  $i \in [1, n]$  :

- $\tilde{U}^{i*}$  est le champ de déplacements membranaires de la couche  $i$  (champ de vecteurs du plan) de composantes  $U_{\alpha}^{i*}$   $\alpha \in \{1, 2\}$  avec :

$$U_{\alpha}^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_{\alpha}^*(x, y, z) dz \quad (2.23)$$

$\underline{U}^*$  étant le champ de déplacements 3D

- $\tilde{\Phi}^{i*}$  est le champ de rotations de la couche  $i$  (champ de vecteurs du plan) de composantes  $\Phi_{\alpha}^{i*}$   $\alpha \in \{1, 2\}$  avec :

$$\Phi_{\alpha}^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12}{e^i} P_1^i(z) U_{\alpha}^*(x, y, z) dz \quad (2.24)$$

- $U_3^{i*}$  est le champ de déplacement moyen normal de la couche  $i$  avec :

$$U_3^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_3^*(x, y, z) dz \quad (2.25)$$

- $\bar{U}_3^{i*}$  est un champ scalaire que nous pourrions appeler premier moment du déplacement normal de la couche  $i$  avec :

$$\bar{U}_3^{i*}(x, y) = \frac{1}{e^i} \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_1^i(z) U_3^*(x, y, z) dz \quad (2.26)$$

- $\hat{U}_3^{i*}$  est un champ scalaire que nous pourrions appeler, de même, second moment du déplacement normal de la couche  $i$  avec :

$$\hat{U}_3^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_2^i(z)}{e^i} U_3^*(x, y, z) dz \quad (2.27)$$

Nous voyons que la contribution des déplacements 3D  $\underline{U}^*$  dans le terme de surface  $\int_{\omega}$  est contenue dans ce qu'on appellera les déplacements généralisés du modèle. Il s'agit des  $5n$  champs en  $(x, y)$  suivants :

$$\tilde{U}^{i*}, \tilde{\Phi}^{i*} \quad \text{et} \quad U_3^{i*}.$$

## Equations d'équilibre.

Nous allons maintenant appliquer le théorème de Reissner pour déterminer les équations d'équilibre du modèle. Pour une variation quelconque des déplacements 3D  $\underline{U}^*$ , et donc des déplacements généralisés, on trouve dans le terme de surface de l'équation (2.22) les  $5n$  équations d'équilibre généralisé -des équations en  $(x, y)$ - du modèle  $\mathcal{M}_4\text{-}5n$ , ce qui légitime son appellation :

$$\begin{aligned} \tilde{div} \tilde{N}^i(x, y) + \tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y) &= 0 \quad \text{sur } \omega \\ div \tilde{Q}^i + \nu^{i,i+1}(x, y) - \nu^{i-1,i}(x, y) &= 0 \quad \text{sur } \omega \\ \tilde{div} \tilde{M}^i(x, y) - \tilde{Q}^i(x, y) + \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) &= 0 \quad \text{sur } \omega \end{aligned} \quad (2.28)$$

Les équations d'équilibre généralisé sont du type "Reissner par couche" et cohérentes avec l'équation d'équilibre 3D local

$$div \bar{\sigma}^{5n}(x, y, z) = 0.$$

En effet, le calcul de  $div \bar{\sigma}^{5n}(x, y, z)$  à partir des équations (2.15) à (2.17) donne après simplification

$$\begin{aligned} div \bar{\sigma}^{5n}(x, y, z) \cdot e_\alpha &= \left( \left( \tilde{div} \tilde{N}^i(x, y) + \tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y) \right) \frac{P_0^i(z)}{e^i} \right) \cdot e_\alpha \\ &+ \left( \frac{12}{e^{i2}} \left( \tilde{div} \tilde{M}^i(x, y) - \tilde{Q}^i(x, y) + \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i})(x, y) \right) \right) P_1^i(z) \cdot e_\alpha \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$div \bar{\sigma}^{5n}(x, y, z) \cdot e_z = \left( div \tilde{Q}^i + \nu^{i,i+1}(x, y) - \nu^{i-1,i}(x, y) \right) \frac{P_0^i(z)}{e^i} \quad (2.30)$$

Sachant que les deux polynômes  $P_0^i$  et  $P_1^i$  sont linéairement indépendants, on retrouve les  $5n$  équations d'équilibre du modèle  $\mathcal{M}_4\text{-}5n$ .

## Conditions aux limites en contrainte.

Ces conditions vont découler du théorème de Reissner et nous allons les obtenir dans le terme de bord de l'expression de  $T$  dans l'équation (2.22). Nous nous intéressons donc à ce terme de bord. Afin de pouvoir dériver le terme de bord par rapport aux déplacements généralisés nous décomposons sous forme polynomiale le champ de déplacements 3D  $\underline{U}^*(x, y, z)$  de la manière suivante pour  $z \in [h_i^-, h_i^+]$  :

$$\underline{U}^*(x, y, z) = \begin{cases} U_\alpha^*(x, y, z) = P_0^i(z)U_\alpha^{i*}(x, y) + e^i P_1^i(z)\Phi_\alpha^{i*}(x, y) + \Delta U_\alpha^{i*}(x, y, z) \\ U_3^*(x, y, z) = P_0^i(z)U_3^{i*}(x, y) + \Delta U_3^{i*}(x, y, z) \end{cases} \quad (2.31)$$

avec  $\Delta U_\alpha^{i*}(x, y, z)$  orthogonal à  $P_0^i(z)$  et  $P_1^i(z)$  et  $\Delta U_3^{i*}(x, y, z)$  orthogonal à  $P_0^i(z)$ .

**Hypothèse 1** La contribution des termes de perturbation  $\Delta U_\alpha^{i*}$  et  $\Delta U_3^{i*}$  dans les termes de bord est supposée négligeable devant celle des déplacements généralisés.

Le terme de bord  $-\int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{T}^d \cdot \underline{U}^* dz$  s'écrit alors :

$$-\tilde{T}_d^i \tilde{U}^{i*} - \tilde{M}_d^i \tilde{\Phi}^{i*} - Q_{3d}^i U_3^{i*} \quad (2.32)$$



où

$$\begin{cases} T_{d\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_\alpha^d \cdot P_0^i(z) dz \\ M_{d\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} e^i T_\alpha^d \cdot P_1^i(z) dz \\ Q_{3d}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_3^d \cdot P_0^i(z) dz \end{cases} \quad (2.33)$$

Si maintenant nous modifions la fonctionnelle  $T(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*)$  écrite en (2.22) en négligeant les termes de bord faisant intervenir les composantes  $\bar{U}_3^{i*}$  et  $\hat{U}_3^{i*}$  et qui font partie des termes de perturbation du champ de déplacements (cf. hypothèse 1), nous obtenons grâce à la stationnarité de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner les conditions aux limites sur la frontière  $\partial\omega$  ci-dessous :

$$\begin{cases} \tilde{N}^i \cdot \underline{n} = \tilde{T}_d^i \\ \tilde{M}^i \cdot \underline{n} = \tilde{M}_d^i \\ \tilde{Q}^i \cdot \underline{n} = Q_{3d}^i \end{cases} \quad (2.34)$$

### Déformations généralisées

En faisant une intégration par parties sur les divergences l'équation (2.22) devient d'après l'hypothèse 1 :

$$\begin{aligned} T(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*) &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[ \tilde{N}^{i*} : \tilde{\varepsilon}^{i*} + \tilde{M}^{i*} : \tilde{\chi}^{i*} + \tilde{Q}^{i*} \cdot (\tilde{\Phi}^{i*} + G\tilde{\text{rad}}U_3^{i*}) \right] d\omega \\ &+ \sum_{i=0}^n \int_{\omega} \tilde{\tau}^{i,i+1*} \cdot \left( \tilde{U}^{i+1*} - \tilde{U}^{i*} - \frac{e^i}{2} \tilde{\Phi}^{i*} - \frac{e^{i+1}}{2} \tilde{\Phi}^{i+1*} \right) d\omega \\ &+ \sum_{i=0}^n \int_{\omega} \nu^{i,i+1*} (U_3^{i+1*} - U_3^{i*}) d\omega \\ &- \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left( \int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{T}^d \cdot \underline{U}^* dz \right) ds \end{aligned} \quad (2.35)$$

avec les notations

- $\tilde{\varepsilon}^{i*}$  est le champ tensoriel d'ordre 2 de déformation membranaire de la couche  $i$  de composantes :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{i*}(x, y) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_\alpha^{i*}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta^{i*}}{\partial x_\alpha} \right) \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (2.36)$$

- $\tilde{\chi}^{i*}$  est le champ tensoriel d'ordre 2 de courbure de la couche  $i$  de composantes :

$$\chi_{\alpha\beta}^{i*}(x, y) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi_\alpha^{i*}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \Phi_\beta^{i*}}{\partial x_\alpha} \right) \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (2.37)$$

On peut en déduire la dualité énergétique entre efforts et déformations généralisés pour  $i \in [1, n]$  et  $j \in [1, n-1]$  :

$$\tilde{N}^i \longleftrightarrow \tilde{\varepsilon}^i = \frac{1}{2} \left( G\tilde{\text{rad}}\tilde{U}^i + {}^T G\tilde{\text{rad}}\tilde{U}^i \right)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{M}^i &\longleftrightarrow \tilde{\chi}^i = \frac{1}{2} \left( \tilde{G}rad\tilde{\Phi}^i + {}^T \tilde{G}rad\tilde{\Phi}^i \right) \\
\tilde{Q}^{i*} &\longleftrightarrow \tilde{d}_{\Phi}^i = \tilde{\Phi}^i + \tilde{G}radU_3^i \\
\tilde{\tau}^{j,j+1} &\longleftrightarrow \tilde{D}^{j,j+1} = \tilde{U}^{j+1} - \tilde{U}^j - \frac{e^j}{2} \tilde{\Phi}^j - \frac{e^{j+1}}{2} \tilde{\Phi}^{j+1} \\
\nu^{j,j+1} &\longleftrightarrow D_{\nu}^{j,j+1} = U_3^{j+1} - U_3^j
\end{aligned} \tag{2.38}$$

### 2.4.2 Modèle $\mathcal{M}_4-2n+1$ .

Nous procédons de la même manière que nous avons fait pour le  $\mathcal{M}_4-5n$ .

#### Déplacements généralisés.

On définit en plus des notations (2.23) à (2.27), le déplacement normal moyen du multicouche :

$$W_3^*(x, y) = \frac{U_3^*(x, y, h_n^+) + U_3^*(x, y, h_1^-)}{2} \tag{2.39}$$

Après introduction des contraintes approchées  $\bar{\sigma}^{2n}$ , la fonctionnelle  $T$  de l'équation (2.21) devient alors

$$\begin{aligned}
T(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*) &= - \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[ \left( \tilde{div} \tilde{N}^{i*}(x, y) + \tilde{\tau}^{i,i+1*}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i*}(x, y) \right) \cdot \tilde{U}^{i*}(x, y) \right] d\omega \\
&\quad - \int_{\omega} \left[ T_3^+(x, y) + T_3^-(x, y) + \sum_{j=1}^n \left[ \frac{e^j}{2} div (\tilde{\tau}^{j,j+1*}(x, y) + \tilde{\tau}^{j-1,j*}(x, y)) \right] \right] W_3^* d\omega \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left[ \begin{aligned} &(\tilde{N}^{i*} \cdot \underline{n}) \cdot \tilde{U}^{i*} + \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \underline{n} U_3^{i*} \\ &+ e^i (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \underline{n} \bar{U}_3^{i*} - \int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{T}^d \cdot \underline{U}^* dz \end{aligned} \right] ds
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Nous voyons que la contribution des déplacements 3D  $\underline{U}^*$  dans le terme de surface  $\int_{\omega}$  est contenue dans ce qu'on appelle les déplacements généralisés du modèle. Il s'agit des  $2n+1$  champs en  $(x, y)$  suivants :

$$\tilde{U}^{i*} \quad \text{et} \quad W_3^*.$$

#### Equations d'équilibre.

Comme pour le cas du modèle  $\mathcal{M}_4-5n$ , nous appliquons le théorème de Reissner pour déterminer les équations d'équilibre du modèle. On trouve dans le terme de surface de l'équation (2.40) les  $2n+1$  équations d'équilibre généralisé -des équations en  $(x, y)$ - du modèle  $\mathcal{M}_4-2n+1$ , ce qui légitime son appellation :

$$\boxed{
\begin{aligned}
&\tilde{div} \tilde{N}^i(x, y) + \tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y) = 0 \quad \text{sur } \omega \\
&T_3^+(x, y) + T_3^-(x, y) + \sum_{j=1}^n \left[ \frac{e^j}{2} div (\tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x, y)) \right] = 0 \quad \text{sur } \omega
\end{aligned} \tag{2.41}$$



Les équations d'équilibre généralisé sont cohérentes avec l'équation d'équilibre 3D local

$$\underline{\text{div}} \bar{\sigma}^{2n+1}(x, y, z) = 0.$$

En effet, le calcul de  $\underline{\text{div}} \bar{\sigma}^{2n+1}(x, y, z)$  à partir des équations (2.18) à (2.20) donne après simplification

$$\underline{\text{div}} \bar{\sigma}^{2n+1}(x, y, z) \cdot e_\alpha = \left( \left( \tilde{\text{div}} \tilde{N}^i(x, y) + \tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y) \right) \frac{P_0^i(z)}{e^i} \right) \cdot e_\alpha \quad (2.42)$$

$$\underline{\text{div}} \bar{\sigma}^{2n+1}(x, y, z) \cdot e_z = 0 \quad (2.43)$$

On remarque alors que les équations d'équilibre généralisé du  $\mathcal{M}_4-2n+1$  donnent une condition de plus que les équations d'équilibre local. Cette équation en plus est celle qui assure l'équilibre global du multicouche en translation suivant l'axe des  $z$ .

### Conditions aux limites en contrainte.

En appliquant le théorème de Reissner, ces conditions sont obtenues dans le terme de bord de l'expression de  $T$  dans l'équation (2.40). Pour donner l'expression généralisée du terme de bord, nous décomposons le champ de déplacements 3D  $\underline{U}^*(x, y, z)$  de la manière suivante pour  $z \in [h_i^-, h_i^+]$  :

$$\underline{U}^*(x, y, z) = \begin{cases} U_\alpha^*(x, y, z) = P_0^i(z)U_\alpha^{i*}(x, y) + \Delta U_\alpha^{i*}(x, y, z) \\ U_3^*(x, y, z) = W_3^*(x, y) + \Delta U_3^*(x, y, z) \end{cases}, \quad (2.44)$$

avec  $\Delta U_\alpha^{i*}(x, y, z)$  orthogonal à  $P_0^i(z)$ .

En faisant la même hypothèse que pour le cas du  $\mathcal{M}_4-5n$ , on néglige la contribution des termes de perturbation  $\Delta U_\alpha^{i*}$  et  $\Delta U_3^*$  dans les termes de bord devant celle des déplacements généralisés. Puisque  $U_3^{i*}$  fait partie des termes de perturbation  $\Delta U_3^*$ , il est négligé dans les termes de bord.

Enfin,  $U_3^{i*}$  est approximé par  $W_3^*$  dans les termes de bord. Le terme de bord  $-\sum_{i=1}^n \int_{h_i^-}^{h_i^+} T^d \cdot \underline{U}^* dz$  s'écrit alors :

$$-\sum_{i=1}^n \tilde{T}_d^i \tilde{U}^{i*} - Q_{3d} W_3^*, \quad (2.45)$$

où

$$\begin{cases} T_{d\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_\alpha^d \cdot P_0^i(z) dz \\ Q_{3d} = \int_{h_1^-}^{h_n^+} T_3^d dz \end{cases} \quad (2.46)$$

Si maintenant nous modifions la fonctionnelle  $T(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*)$  écrite en (2.40) en en négligeant les termes de bord faisant intervenir la composante  $\bar{U}_3^{i*}$  du champ de déplacements (cf. hypothèse 1), nous obtenons grâce à la stationnarité de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner les conditions aux limites sur la frontière  $\partial\omega$  ci-dessous :

$$\begin{cases} \tilde{N}^i \cdot \underline{n} = \tilde{T}_d^i \\ \left( \sum_{i=1}^n \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \right) \cdot \underline{n} = Q_{3d} \end{cases} \quad (2.47)$$

## Déformations généralisées

En faisant une intégration par parties sur les divergences, l'équation (2.40) devient d'après l'hypothèse 1 :

$$\begin{aligned}
 T(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*) &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \tilde{N}^{i*} : \tilde{\varepsilon}^{i*} d\omega + \sum_{j=0}^n \int_{\omega} \tilde{\tau}^{j,j+1*} \cdot \left( \tilde{U}^{j+1*} - \tilde{U}^{j*} + \frac{e^j + e^{j+1}}{2} \widetilde{\text{Grad}}(W_3^*) \right) \\
 &\quad - \int_{\omega} (T_3^+(x, y) + T_3^-(x, y)) W_3^* d\omega \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left[ \begin{array}{l} (\tilde{N}^{i*} \cdot \underline{n}) \cdot \tilde{U}^{i*} + \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \underline{n} U_3^{i*} \\ + e^i (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \underline{n} \bar{U}_3^{i*} - \int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{T}^d \cdot \underline{U}^* dz \end{array} \right] ds
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

où le champ de déformation membranaire  $\tilde{\varepsilon}^{i*}$  de la couche  $i$  est défini dans l'équation (2.36). On peut déduire de l'équation (2.48) la correspondance entre efforts et déformations généralisés pour  $i \in [1, n]$  et  $j \in [1, n-1]$  :

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}^i &\longleftrightarrow \tilde{\varepsilon}^i = \frac{1}{2} \left( \widetilde{\text{Grad}} \tilde{U}^i + {}^T \widetilde{\text{Grad}} \tilde{U}^i \right) \\
 \tilde{\tau}^{j,j+1} &\longleftrightarrow \tilde{D}^{j,j+1} = \tilde{U}^{j+1} - \tilde{U}^j + \frac{e^j + e^{j+1}}{2} \widetilde{\text{Grad}}(W_3)
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

## 2.5 Ecriture du comportement cohérent avec les approximations

Le comportement généralisé reliant les efforts intérieurs généralisés aux déformations généralisées s'obtient en écrivant la stationnarité de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner par rapport à une variation des contraintes approchées et donc des efforts intérieurs généralisés. On s'intéresse donc à la fonctionnelle  $T'$  déduite de la fonctionnelle  $H.R.$  en ne prenant en compte que les termes faisant intervenir le champ de contrainte  $\bar{\sigma}$  :

$$\begin{aligned}
 T'(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*) &= - \int_{\Omega} \left[ \text{div} \bar{\sigma}^*(\underline{x}) \cdot \underline{U}^*(\underline{x}) + \bar{\sigma}^*(\underline{x}) : \bar{\varepsilon}^{an}(\underline{x}) + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^*(\underline{x}) : \bar{\mathbb{S}}(\underline{x}) : \bar{\sigma}^*(\underline{x}) \right] d\Omega \\
 &\quad - \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \int_{\Gamma_{i,i+1}} (\bar{\sigma}^* \cdot \underline{e}_z)(\underline{x}) \cdot \underline{\gamma}^{i,i+1}(\underline{x}) dS \right] + \int_{\partial\Omega_T} (\bar{\sigma}^* \cdot \underline{n})(\underline{x}) \cdot \underline{U}^*(\underline{x}) dS
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Le terme  $\frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{\sigma}^*(\underline{x}) : \bar{\mathbb{S}}(\underline{x}) : \bar{\sigma}^*(\underline{x}) d\Omega$  n'est autre que l'énergie élastique  $W_{3D}^{a*}$  écrite en contrainte. Donnons une décomposition de  $W_{3D}^{a*}$  qui nous permettra de mieux comprendre nos deux modèles. Nous notons  $\bar{\mathbb{S}}(z)$  le tenseur d'ordre 4 des souplesses du matériau.  $\bar{\mathbb{S}}(z)$  est constant dans chaque couche et est égal au tenseur  $\bar{\mathbb{S}}^i$  de composantes  $\mathbf{S}_{mnop}^i$  avec  $m, n, o, p \in \{1, 2, 3\}^4$ .  
Compte tenu des matériaux qu'on étudie, on considère des couches orthotropes admettant l'axe  $\underline{e}_3$



comme axe d'orthotropie. Alors, les composantes de la matrice de souplesse contenant un nombre impair d'indice 3 sont nulles.

Nous notons  $\tilde{\tilde{S}}^i$  le tenseur d'ordre quatre plan des souplesses sur les efforts tridimensionnels membranaires,  $S_\nu^i$  le scalaire de souplesse sur les efforts tridimensionnels d'arrachement,  $\tilde{S}_Q^i$  le tenseur d'ordre 2 plan de souplesse sur les efforts tridimensionnels de cisaillement et  $\tilde{S}_3^i$  le tenseur d'ordre 2 plan de souplesse caractéristique du couplage entre les efforts tridimensionnels membranaires et d'arrachement. Ces tenseurs ont pour composantes :

$$\left(\tilde{\tilde{S}}^i\right)_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}^i; (S_\nu^i) = \mathbf{S}_{3333}^i; \left(\tilde{S}_Q^i\right)_{\alpha\beta} = 4\mathbf{S}_{\alpha 3\beta 3}^i \text{ et } \left(\tilde{S}_3^i\right)_{\alpha\beta} = 2\mathbf{S}_{\alpha\beta 33}^i \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \{1, 2\}^4.$$

On montre alors que, l'énergie en contrainte du champ de contrainte tridimensionnel approché s'exprime sur chacune des couches en fonction de quatre termes :

$$W_{3D}^{a*} = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[ w_c^{ai*} + w_\nu^{ai*} + w_3^{ai*} + w_Q^{ai*} \right] ds \quad (2.51)$$

où

-  $w_c^{ai*}$  est l'énergie élastique des contraintes membranaires  $\sigma_{\alpha\beta}$  de la couche  $i$  :

$$w_c^{ai*} = \frac{1}{2} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \tilde{\sigma}^a : \tilde{\tilde{S}}^i : \tilde{\sigma}^a dz \quad (2.52)$$

-  $w_\nu^{ai*}$  est l'énergie élastique de la contrainte  $\sigma_{33}$  normale à la couche  $i$  :

$$w_\nu^{ai*} = \frac{1}{2} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{33}^a S_\nu^i \sigma_{33}^a dz \quad (2.53)$$

-  $w_3^{ai*}$  est l'énergie élastique de couplage entre les contraintes membranaires  $\sigma_{\alpha\beta}$  et la contrainte normale  $\sigma_{33}$  de la couche  $i$  :

$$w_3^{ai*} = \frac{1}{2} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left( \tilde{\sigma}^a : \tilde{S}_3^i \right) \sigma_{33}^a dz \quad (2.54)$$

-  $w_Q^{ai*}$  est l'énergie élastique du cisaillement perpendiculaire au plan de la couche  $i$  :

$$w_Q^{ai*} = \frac{1}{2} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha 3}^a \cdot \left( \tilde{S}_Q^i \right)_{\alpha\beta} \cdot \sigma_{\beta 3}^a dz \quad (2.55)$$

A ce stade, nous devons injecter l'expression des champs de contraintes approchés pour chaque modèle de façon à avoir l'expression généralisée de l'énergie élastique. Il ne manquera plus qu'à expliciter dans  $T'$  (cf. équation (2.50)), les termes faisant intervenir les variables d'état du multicouche  $\bar{\varepsilon}^{an}$  et  $\underline{\gamma}^{j,j+1}$  afin d'exploiter la stationnarité de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner. Cela nous conduira à étudier la fonctionnelle  $T''$ , partie de  $T'$ , définie comme suit

$$T'' = \int_{\Omega} \bar{\sigma}^*(\underline{x}) : \bar{\varepsilon}^{an}(\underline{x}) d\Omega + \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \int_{\Gamma_{i,i+1}} (\bar{\sigma}^* \cdot \underline{e}_z)(\underline{x}) \cdot \underline{\gamma}^{i,i+1}(\underline{x}) dS \right]. \quad (2.56)$$

On a donc

$$T'(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*) = - \int_{\Omega} [\text{div } \bar{\sigma}^*(\underline{x}) \cdot \underline{U}^*(\underline{x})] d\Omega + \int_{\partial\Omega_T} (\bar{\sigma}^* \cdot \underline{n})(\underline{x}) \cdot \underline{U}^*(\underline{x}) dS - T'' - W_{3D}^{a*} \quad (2.57)$$

## 2.5.1 Modèle M4-5n.

## Expression de l'énergie élastique écrite en contrainte.

Si nous injectons l'expression des contraintes approchées de (2.15 à 2.17) dans les expressions (2.52 à 2.55) des énergies élastiques, nous obtenons

$$w_c^{5n i^*} = \frac{1}{2} \left( \tilde{N}^{i^*} : \frac{\tilde{S}^i}{e^i} : \tilde{N}^{i^*} + \tilde{M}^{i^*} : \frac{12}{e^{i^3}} \tilde{S}^i : \tilde{M}^{i^*} \right) \quad (2.58)$$

$$w_\nu^{5n i^*} = \frac{1}{2} S_\nu^i \left[ \begin{aligned} & e^i \left( \frac{\nu^{i,i+1^*} + \nu^{i-1,i^*}}{2} + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} - \tilde{\tau}^{i-1,i^*}) \right)^2 \\ & + \frac{e^i}{12} \left( \frac{e^i}{10} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} + \tilde{\tau}^{i-1,i^*}) + \frac{6}{5}(\nu^{i,i+1^*} - \nu^{i-1,i^*}) \right)^2 \\ & + \frac{e^i}{5} \left( \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} - \tilde{\tau}^{i-1,i^*}) \right)^2 \\ & + \frac{e^i}{700} \left( (\nu^{i,i+1^*} - \nu^{i-1,i^*}) + \frac{e^i}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} + \tilde{\tau}^{i-1,i^*}) \right)^2 \end{aligned} \right] \quad (2.59)$$

$$w_3^{5n i^*} = \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} & \tilde{N}^{i^*} : \tilde{S}_3^i \left( \left( \frac{\nu^{i,i+1^*} + \nu^{i-1,i^*}}{2} \right) + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} - \tilde{\tau}^{i-1,i^*}) \right) \\ & + \frac{\tilde{M}^{i^*}}{e^i} : \tilde{S}_3^i \left( \frac{6}{5}(\nu^{i,i+1^*} - \nu^{i-1,i^*}) + \frac{e^i}{10} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} + \tilde{\tau}^{i-1,i^*}) \right) \end{aligned} \right] \quad (2.60)$$

$$w_Q^{5n i^*} = \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} & \tilde{Q}^{i^*} \cdot \left( \frac{\tilde{S}_Q^i}{e^i} \right) \cdot \tilde{Q}^{i^*} + (\tilde{\tau}^{i,i+1^*} - \tilde{\tau}^{i-1,i^*}) \cdot \frac{e^i}{12} \tilde{S}_Q^i \cdot (\tilde{\tau}^{i,i+1^*} - \tilde{\tau}^{i-1,i^*}) \\ & + \left( \tilde{Q}^{i^*} - \frac{e^i}{2}(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} + \tilde{\tau}^{i-1,i^*}) \right) \cdot \frac{\tilde{S}_Q^i}{5e^i} \cdot \left( \tilde{Q}^{i^*} - \frac{e^i}{2}(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} + \tilde{\tau}^{i-1,i^*}) \right) \end{aligned} \right] \quad (2.61)$$

*Remarque 2.* Dans le calcul de  $w_\nu^{5n i^*}$  intervient un terme en  $-\operatorname{div} \tilde{Q}^i$  que nous avons remplacé par  $\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}$  d'après la deuxième équation d'équilibre (2.28).

Le comportement généralisé déduit des expressions ci-dessus donne des calculs trop lourds. Nous simplifions donc l'expression des énergies élastiques approchées en négligeant certaines contributions.

**Hypothèse 2** Nous négligeons les énergies  $w_3^{5n i^*}$  de couplage entre les efforts membranaires et les contraintes perpendiculaires aux couches. Cela revient à négliger en quelque sorte les effets Poisson dus au "pincement" des couches. Cette hypothèse est habituelle dans la plupart des théories de plaque et a été validée par le travail de Carreira [Carreira, 1998].

De plus, les termes  $\operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1} \pm \tilde{\tau}^{i-1,i})$  et  $\operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1} \pm \tilde{\tau}^{i-1,i})^2$  dans l'écriture de  $w_\nu^{5n i^*}$  compliquent beaucoup les calculs alors que multipliés par  $e^{i^2}$  ou  $e^{i^3}$ , leur contribution à l'énergie est probablement faible, ainsi :

**Hypothèse 3** On néglige les termes en  $e^{i^2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1} \pm \tilde{\tau}^{i-1,i})$  et  $e^{i^3} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1} \pm \tilde{\tau}^{i-1,i})^2$  dans l'expression de  $W_{3D}^{5n i^*}$ .

Après ces simplifications, on est déjà capable de donner la contribution de l'énergie élastique  $W_{3D}^{5n i^*}$  dans  $T'$  pour ensuite déterminer les équations de comportement.



**$T''$  et déformations anélastiques généralisées.**

En injectant l'approximation en contrainte du modèle  $\mathcal{M}_{4-5n}$  dans l'expression de  $T''$  écrite en (2.56), on peut écrire

$$\begin{aligned}
 T'' &= \sum_{i=1}^n \left[ \int_{\omega} \left( \int_{h_i^-}^{h_i^+} \bar{\sigma}^* : \bar{\varepsilon}^{an} dz \right) d\omega \right] + \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \int_{\Gamma_{i,i+1}} (\bar{\sigma}^* \cdot e_z)(\underline{x}) \cdot \underline{\gamma}^{i,i+1}(\underline{x}) dS \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[ \begin{aligned}
 &N_{\alpha\beta}^{i*} \varepsilon_{\alpha\beta}^{i an} + M_{\alpha\beta}^{i*} \chi_{\alpha\beta}^{i an} + 2Q_{\alpha}^{i*} \varepsilon_{\alpha 3}^{i an} \\
 &+ 2e^i (\tau_{\alpha}^{i,i+1*} - \tau_{\alpha}^{i-1,i*}) \bar{\varepsilon}_{\alpha 3}^{i an} \\
 &+ 2 \left( Q_{\alpha}^{i*} - \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1*} + \tau_{\alpha}^{i-1,i*}) \right) \hat{\varepsilon}_{\alpha 3}^{i an} \\
 &e^i \left( \frac{\nu^{i,i+1*} + \nu^{i-1,i*}}{2} + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\bar{\tau}^{i,i+1*} - \bar{\tau}^{i-1,i*}) \right) \varepsilon_{33}^{i an} \\
 &e^i \left( \frac{e^i}{10} \operatorname{div}(\bar{\tau}^{i,i+1*} + \bar{\tau}^{i-1,i*}) - \frac{\operatorname{div} \tilde{Q}^{i*}}{5} + \nu^{i,i+1*} - \nu^{i-1,i*} \right) \bar{\varepsilon}_{33}^{i an} \\
 &e^i \left( \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\bar{\tau}^{i,i+1*} - \bar{\tau}^{i-1,i*}) \right) \hat{\varepsilon}_{33}^{i an} \\
 &e^i \left( \frac{e^i}{2} \operatorname{div}(\bar{\tau}^{i,i+1*} + \bar{\tau}^{i-1,i*}) - \operatorname{div} \tilde{Q}^{i*} \right) \tilde{\varepsilon}_{33}^{i an}
 \end{aligned} \right] d\omega \\
 &+ \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \int_{\omega} \tau_{\alpha}^{i,i+1*} \gamma_{\alpha}^{i,i+1} + \nu^{i,i+1*} \gamma_3^{i,i+1} dS \right] \tag{2.62}
 \end{aligned}$$

avec les notations et définitions suivantes

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{i an}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_i^0(z)}{e^i} \varepsilon_{\alpha\beta}^{an}(x, y, z) dz \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \tag{2.63}$$

$$\chi_{\alpha\beta}^{i an}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12}{e^{i2}} P_i^1(z) \varepsilon_{\alpha\beta}^{an}(x, y, z) dz \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \tag{2.64}$$

$$\varepsilon_{\alpha 3}^{i an}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} \varepsilon_{\alpha 3}^{an}(x, y, z) dz \quad \alpha \in \{1, 2\} \tag{2.65}$$

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha 3}^{i an}(x, y) = \frac{1}{e^i} \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_1^i(z) \varepsilon_{\alpha 3}^{an}(x, y, z) dz \quad \alpha \in \{1, 2\} \tag{2.66}$$

$$\hat{\varepsilon}_{\alpha 3}^{i an}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_2^i(z)}{e^i} \varepsilon_{\alpha 3}^{an}(x, y, z) dz \quad \alpha \in \{1, 2\} \tag{2.67}$$

$$\varepsilon_{33}^{i an}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} \varepsilon_{33}^{an}(x, y, z) dz \tag{2.68}$$

$$\bar{\varepsilon}_{33}^{i an}(x, y) = \frac{1}{e^i} \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_1^i(z) \varepsilon_{33}^{an}(x, y, z) dz \tag{2.69}$$

$$\varepsilon_{33}^{i an}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_2^i(z)}{e^i} \varepsilon_{33}^{an}(x, y, z) dz \quad (2.70)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{33}^{i an}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_3^i(z)}{e^i} \varepsilon_{33}^{an}(x, y, z) dz \quad (2.71)$$

Les termes en  $\text{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1} \pm \tilde{\tau}^{i-1,i})$  compliquent le calcul de  $\int_{\Omega} \bar{\sigma}^*(\underline{x}) : \bar{\varepsilon}^{an}(\underline{x}) d\Omega$ , alors qu'étant multipliés par  $e^{i^2}$  leur contribution est probablement faible, ainsi :

**Hypothèse 4** Comme dans l'expression de l'énergie élastique  $W_{3D}$ , nous négligeons les termes  $e^{i^2} \text{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1} \pm \tilde{\tau}^{i-1,i})$  dans l'expression de  $T''$  (équation (2.62)).

Dans l'équation (2.62) on remplace le terme  $-\text{div}\tilde{Q}^i$  par  $\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}$  d'après la deuxième équation d'équilibre dans (2.28) et on obtient après simplification

$$\begin{aligned} T'' &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left( \tilde{N}^{i*} : \tilde{\varepsilon}^{i an} + \tilde{M}^{i*} : \tilde{\chi}^{i an} + \tilde{Q}^{i*} \cdot \tilde{d}_{\Phi}^{i an} \right) d\omega \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\omega} \left( \tilde{\tau}^{j,j+1*} \cdot \tilde{D}^{j,j+1 an} + \nu^{j,j+1*} D_{\nu}^{j,j+1 an} \right) d\omega \\ &+ \int_{\omega} \left( e^n \tau_{\alpha}^{n,n+1} (2\bar{\varepsilon}_{\alpha 3}^{n an} - \hat{\varepsilon}_{\alpha 3}^{n an}) - e^1 \tau_{\alpha}^{0,1} (2\bar{\varepsilon}_{\alpha 3}^{1 an} + \hat{\varepsilon}_{\alpha 3}^{1 an}) \right) d\omega \\ &+ \int_{\omega} \left( e^n \nu^{n,n+1} \left( \frac{\varepsilon_{33}^{n an}}{2} + \frac{6}{5} \bar{\varepsilon}_{33}^{n an} + \check{\varepsilon}_{33}^{n an} \right) + e^1 \nu^{0,1} \left( \frac{\varepsilon_{33}^{1 an}}{2} - \frac{6}{5} \bar{\varepsilon}_{33}^{1 an} - \check{\varepsilon}_{33}^{1 an} \right) \right) d\omega \end{aligned} \quad (2.72)$$

où  $\tilde{\varepsilon}^{i an}$ ,  $\tilde{\chi}^{i an}$ ,  $\tilde{d}_{\Phi}^{i an}$ ,  $\tilde{D}^{j,j+1 an}$  et  $D_{\nu}^{j,j+1 an}$  sont les déformations anélastiques généralisées définies pour  $i \in [1, n]$  et  $j \in [1, n-1]$  par les équations (2.63), (2.64) et par :

$$d_{\Phi \alpha}^{i an} = 2(\varepsilon_{\alpha 3}^{i an} + \hat{\varepsilon}_{\alpha 3}^{i an}) \quad (2.73)$$

$$D_{\alpha}^{j,j+1 an} = \gamma_{\alpha}^{j,j+1} + e^j (2\bar{\varepsilon}_{\alpha 3}^{j an} - \hat{\varepsilon}_{\alpha 3}^{j an}) - e^{j+1} (2\bar{\varepsilon}_{\alpha 3}^{j+1 an} + \hat{\varepsilon}_{\alpha 3}^{j+1 an}) \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} D_{\nu}^{j,j+1 an} &= \gamma_3^{j,j+1} + e^j \left( \frac{\varepsilon_{33}^{j an}}{2} + \frac{6}{5} \bar{\varepsilon}_{33}^{j an} + \check{\varepsilon}_{33}^{j an} \right) \\ &+ e^{j+1} \left( \frac{\varepsilon_{33}^{j+1 an}}{2} - \frac{6}{5} \bar{\varepsilon}_{33}^{j+1 an} - \check{\varepsilon}_{33}^{j+1 an} \right) \end{aligned} \quad (2.75)$$

avec  $\alpha \in \{1, 2\}$ .

Les termes faisant intervenir les données  $\tilde{\tau}^{0,1}$ ,  $\tilde{\tau}^{n,n+1}$ ,  $\nu^{0,1}$  et  $\nu^{n,n+1}$  dans (2.72) ne seront pas pris en compte dans la suite puisque nous ferons une variation par rapport aux efforts intérieurs généralisés pour obtenir les équations de comportement.



## Equations de comportement.

Revenons au calcul de  $T'(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*)$  dans (2.57). En introduisant l'expression des efforts intérieurs et des déplacements généralisés nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 T'(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*) = & - \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[ \begin{aligned} & \left( \tilde{div} \tilde{N}^{i*}(x, y) + \tilde{\tau}^{i, i+1*}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1, i*}(x, y) \right) \cdot \tilde{U}^{i*}(x, y) \\ & + \left( \tilde{div} \tilde{M}^{i*}(x, y) - \tilde{Q}^{i*}(x, y) \right. \\ & \quad \left. + \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i, i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1, i*})(x, y) \right) \cdot \tilde{\Phi}^{i*}(x, y) \\ & + \left( \tilde{div} \tilde{Q}^{i*} + \nu^{i, i+1}(x, y) - \nu^{i-1, i*}(x, y) \right) \cdot U_3^{i*}(x, y) \end{aligned} \right] d\omega \\
 & + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left[ \begin{aligned} & (\tilde{N}^{i*} \cdot \underline{n}) \cdot \tilde{U}^{i*} + (\tilde{M}^{i*} \cdot \underline{n}) \cdot \tilde{\Phi}^{i*} + \left( \tilde{Q}^{i*} - \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i, i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1, i*}) \right) \cdot \underline{n} \hat{U}_3^{i*} \\ & + \tilde{Q}^{i*} \cdot \underline{n} U_3^{i*} + e^i (\tilde{\tau}^{i, i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1, i*}) \cdot \underline{n} \bar{U}_3^{i*} \end{aligned} \right] ds \\
 & - T'' - W_{3D}^{5n*} \tag{2.76}
 \end{aligned}$$

Les termes de bord en  $\bar{U}_3^{i*}$  et  $\hat{U}_3^{i*}$  sont négligés d'après l'hypothèse 1. En injectant l'expression de  $T''$  écrite en (2.72) et en faisant une intégration par parties sur les divergences on obtient

$$\begin{aligned}
 T'(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*) = & \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[ \tilde{N}^{i*} : (\tilde{\varepsilon}^{i*} - \tilde{\varepsilon}^{ia}) + \tilde{M}^{i*} : (\tilde{\chi}^{i*} - \tilde{\chi}^{ia}) + \tilde{Q}^{i*} \cdot (\tilde{d}_{\Phi}^{i*} - \tilde{d}_{\Phi}^{ia}) \right] d\omega \tag{2.77} \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\omega} \tilde{\tau}^{i, i+1*} \cdot (\tilde{D}^{i, i+1*} - \tilde{D}^{i, i+1a}) + \nu^{i, i+1*} (D_{\nu}^{i, i+1*} - D_{\nu}^{i, i+1a}) d\omega - W_{3D}^{5n*}
 \end{aligned}$$

Finalement, l'expression de  $W_{3D}^{5n*}$  dans (2.51) déduite de (2.58) à (2.61) et la stationnarité de  $T'$  par rapport à n'importe quelle variation des efforts généralisés nous permettent d'aboutir aux équations de comportement généralisé :

- loi de comportement des efforts normaux de membrane de la couche  $i$  pour  $1 \leq i \leq n$  :

$$\tilde{\varepsilon}^i(x, y) - \varepsilon^{ia}(x, y) = \frac{\tilde{\tilde{\tilde{S}}^i}}{e^i} : \tilde{N}^i(x, y); \tag{2.78}$$

- loi de comportement des moments de flexion et de torsion dans le plan de la couche  $i$  pour  $1 \leq i \leq n$  :

$$\tilde{\chi}^i(x, y) - \chi^{ia}(x, y) = \frac{12 \tilde{\tilde{\tilde{S}}^i}}{e^{i3}} : \tilde{M}^i(x, y); \tag{2.79}$$

- loi de comportement des efforts de cisaillement hors plan de la couche  $i$  pour  $1 \leq i \leq n$  :

$$\tilde{d}_{\Phi}^i(x, y) - \tilde{d}_{\Phi}^{ia}(x, y) = \frac{6}{5e^i} \tilde{S}_{\tilde{Q}}^i \cdot \tilde{Q}^i - \frac{1}{10} \tilde{S}_{\tilde{Q}}^i \cdot (\tilde{\tau}^{i, i+1} + \tilde{\tau}^{i-1, i}); \tag{2.80}$$

- loi de comportement des efforts de cisaillement à l'interface  $i, i+1$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  :

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}^{i, i+1}(x, y) - \tilde{D}^{i, i+1a}(x, y) = & -\frac{1}{10} \tilde{S}_{\tilde{Q}}^i \cdot \tilde{Q}^i - \frac{1}{10} \tilde{S}_{\tilde{Q}}^{i+1} \cdot \tilde{Q}^{i+1} - \frac{e^i}{30} \tilde{S}_{\tilde{Q}}^i \cdot \tilde{\tau}^{i-1, i} \\
 & + \frac{2}{15} \left( e^i \tilde{S}_{\tilde{Q}}^i + e^{i+1} \tilde{S}_{\tilde{Q}}^{i+1} \right) \cdot \tilde{\tau}^{i, i+1} - \frac{e^{i+1}}{30} \tilde{S}_{\tilde{Q}}^{i+1} \cdot \tilde{\tau}^{i+1, i+2}; \tag{2.81}
 \end{aligned}$$

- loi de comportement des efforts d'arrachement à l'interface  $i, i+1$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  :

$$D_{\nu}^{i,i+1}(x,y) - D_3^{i,i+1a}(x,y) = \frac{9}{70} e^i S_{\nu}^i \nu^{i-1,i} + \frac{13}{35} (e^i S_{\nu}^i + e^{i+1} S_{\nu}^{i+1}) \nu^{i,i+1} + \frac{9}{70} e^{i+1} S_{\nu}^{i+1} \nu^{i+1,i+2}. \quad (2.82)$$

### 2.5.2 Modèle $M4-2n+1$ .

#### Expression de l'énergie élastique écrite en contrainte

Pour ce modèle, nous adoptons les mêmes hypothèses faites pour le modèle  $M4-5n$ . En injectant l'expression des contraintes approchées de (2.18 à 2.20) dans les expressions (2.52 à 2.55) des énergies élastiques, nous obtenons

$$w_c^{2n+1 i^*} = \frac{1}{2} \tilde{N}^{i^*} : \frac{\tilde{S}^i}{e^i} : \tilde{N}^{i^*} \quad (2.83)$$

$$w_{\nu}^{2n+1 i^*} = 0 \quad (2.84)$$

$$w_3^{2n+1 i^*} = 0 \quad (2.85)$$

$$w_Q^{2n+1 i^*} = \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}}{2} \right) \cdot e^i \tilde{S}_Q^i \cdot \left( \frac{\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}}{2} \right) \\ & + (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \frac{e^i}{12} \tilde{S}_Q^i \cdot (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \end{aligned} \right]. \quad (2.86)$$

A ce stade, on est déjà capable de donner la contribution de l'énergie élastique  $W_{3D}^{2n+1*}$  dans  $T'$  pour ensuite déterminer les équations de comportement.

#### $T''$ et déformations anélastiques généralisées.

En injectant l'approximation en contrainte du modèle  $M4-2n+1$  dans l'expression de  $T''$  écrite en (2.56), on peut écrire

$$\begin{aligned} T'' &= \sum_{i=1}^n \left[ \int_{\omega} \left( \int_{h_i^-}^{h_i^+} \bar{\sigma}^* : \bar{\varepsilon}^{an} dz \right) d\omega \right] + \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \int_{\Gamma_{i,i+1}} (\bar{\sigma}^* \cdot e_z)(\underline{x}) \cdot \underline{\gamma}^{i,i+1}(\underline{x}) dS \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[ \begin{aligned} & N_{\alpha\beta}^{i*} \varepsilon_{\alpha\beta}^{ian} + e^i (\tau_{\alpha}^{i,i+1*} + \tau_{\alpha}^{i-1,i*}) \varepsilon_{\alpha 3}^{ian} + 2e^i (\tau_{\alpha}^{i,i+1*} - \tau_{\alpha}^{i-1,i*}) \bar{\varepsilon}_{\alpha 3}^{ian} \\ & + \left[ \frac{T_3^+ - T_3^-}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n \left[ \frac{e^j}{2} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{j,j+1*} + \tilde{\tau}^{j-1,j*}) \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \frac{e^j}{2} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{j,j+1*} + \tilde{\tau}^{j-1,j*}) \right] + \frac{e^i}{12} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \right] e^i \varepsilon_{33}^{ian} \\ & - \frac{e^{i2}}{2} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \bar{\varepsilon}_{33}^{ian} + \frac{e^{i2}}{12} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \varepsilon_{33}^{ian} \end{aligned} \right] d\omega \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\omega} \tau_{\alpha}^{i,i+1*} \cdot \gamma_{\alpha}^{i,i+1} dS \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\omega} \tilde{\tau}^{i,i+1*} \cdot \left[ \frac{1}{4} \widetilde{\operatorname{Grad}} \left( (-e^i + e^{i+1}) \gamma_3^{i,i+1} + (e^i + e^{i+1}) \left( \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_3^{j,j+1} - \sum_{j=i+1}^{n-1} \gamma_3^{j,j+1} \right) \right) \right] dS \end{aligned} \quad (2.87)$$



avec les mêmes notations définies en (2.63), (2.65), (2.66), (2.68), (2.69) et (2.70).

Les termes en  $e^{i2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1} \pm \tilde{\tau}^{i-1,i})$  sont négligés d'après l'hypothèse 4. On obtient donc

$$T'' = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \tilde{N}^{i*} : \tilde{\varepsilon}^{i an} d\omega + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\omega} \tilde{\tau}^{j,j+1*} \cdot \tilde{D}^{j,j+1 an} d\omega + \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left( \frac{T_3^+ - T_3^-}{2} \right) e^i \varepsilon_{33}^{i an} d\omega \quad (2.88)$$

$$+ \int_{\omega} [(e^1 \varepsilon_{\alpha 3}^{1 an} - 2e^1 \bar{\varepsilon}_{\alpha 3}^{1 an}) \tau_{\alpha}^{0,1} + (e^n \varepsilon_{\alpha 3}^{n an} + 2e^n \bar{\varepsilon}_{\alpha 3}^{n an}) \tau_{\alpha}^{n,n+1}] d\omega$$

où  $\tilde{\varepsilon}^{i an}$  et  $\tilde{D}^{j,j+1 an}$  sont les déformations anélastiques définies par (2.63) et par :

$$D_{\alpha}^{j,j+1 an} = \gamma_{\alpha}^{j,j+1} + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( (-e^j + e^{j+1}) \gamma_3^{j,j+1} + (e^j + e^{j+1}) \left( \sum_{k=1}^{j-1} \gamma_3^{k,k+1} - \sum_{k=j+1}^{n-1} \gamma_3^{k,k+1} \right) \right)$$

$$+ e^j \varepsilon_{\alpha 3}^{j an} + e^{j+1} \varepsilon_{\alpha 3}^{j+1 an} + 2e^j \bar{\varepsilon}_{\alpha 3}^{j an} - 2e^{j+1} \bar{\varepsilon}_{\alpha 3}^{j+1 an} \quad (2.89)$$

avec  $\alpha \in \{1, 2\}$ .

Les termes faisant intervenir les données  $\tilde{\tau}^{0,1}$  et  $\tilde{\tau}^{n,n+1}$ ,  $T_3^+$  et  $T_3^-$  dans (2.88) ne seront pas pris en compte dans la suite puisque nous ferons une variation par rapport aux efforts intérieurs généralisés pour obtenir les équations de comportement.

### Equations de comportement.

On revient au calcul de  $T'(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*)$ . En introduisant l'expression des efforts intérieurs et des déplacements généralisés dans (2.57) nous pouvons écrire

$$T'(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*) = - \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[ \left( \operatorname{div} \tilde{N}^{i*}(x, y) + \tilde{\tau}^{i,i+1*}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i*}(x, y) \right) \cdot \tilde{U}^{i*}(x, y) \right] d\omega \quad (2.90)$$

$$- \int_{\omega} \left[ T_3^+(x, y) + T_3^-(x, y) + \sum_{j=1}^n \left[ \frac{e^j}{2} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{j,j+1*}(x, y) + \tilde{\tau}^{j-1,j*}(x, y)) \right] \right] W_3^* d\omega$$

$$+ \sum_{i=1}^n \int_{\partial \omega} \left[ \begin{aligned} & (\tilde{N}^{i*} \cdot \underline{n}) \cdot \tilde{U}^{i*} + \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \underline{n} W_3^* \\ & + e^i (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \underline{n} \bar{U}_3^{i*} \end{aligned} \right] ds - T'' - W_{3D}^{2n+1*}$$

Les termes de bord en  $\bar{U}_3^{i*}$  sont négligés d'après l'hypothèse 1. En injectant l'expression de  $T''$  écrite en (2.88) et en faisant une intégration par parties sur les divergences on obtient

$$T'(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*) = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \tilde{N}^{i*} : (\tilde{\varepsilon}^{i*} - \tilde{\varepsilon}^{ia}) d\omega + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\omega} \tilde{\tau}^{i,i+1*} \cdot (\tilde{D}^{i,i+1*} - \tilde{D}^{i,i+1a}) d\omega - W_{3D}^{2n+1*} \quad (2.91)$$

Finalement, l'expression de  $W_{3D}^{2n+1*}$  dans (2.51) déduite de (2.83) à (2.86) et la stationnarité de  $T'$  par rapport à n'importe quelle variation des efforts généralisés nous permettent d'aboutir aux équations de comportement généralisé :

- loi de comportement des efforts normaux de membrane de la couche  $i$  pour  $1 \leq i \leq n$  :

$$\tilde{\varepsilon}^i(x, y) - \varepsilon^{ia}(x, y) = \frac{\tilde{S}^i}{e^i} : \tilde{N}^i(x, y); \quad (2.92)$$

– loi de comportement des efforts de cisaillement à l'interface  $i, i+1$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  :

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{i,i+1}(x,y) - \tilde{D}^{i,i+1a}(x,y) &= \frac{e^i}{6} \tilde{S}_Q^i \cdot \tilde{\tau}^{i-1,i} + \frac{1}{3} \left( e^i \tilde{S}_Q^i + e^{i+1} \tilde{S}_Q^{i+1} \right) \cdot \tilde{\tau}^{i,i+1} \\ &\quad + \frac{e^{i+1}}{6} \tilde{S}_Q^{i+1} \cdot \tilde{\tau}^{i+1,i+2}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

## 2.6 Recapitulatif des équations et des champs généralisés.

On approche les champs des contraintes dans chaque couche  $i$  par les polynômes en  $z$  (orthogonaux) suivants (cf. équations 2.14) :

$$\begin{cases} P_0^i = 1 \\ P_1^i = \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \\ P_2^i = 6 \left( \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^2 + \frac{1}{2} \\ P_3^i = -2 \left( \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^3 + \frac{3}{10} \left( \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^2 \end{cases} \quad (2.94)$$

### 2.6.1 Modèle $M4-5n$ .

Champs généralisés pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n-1$  :

- efforts intérieurs généralisés  $\tilde{N}^i, \tilde{M}^i, \tilde{Q}^i, \tilde{\tau}^{j,j+1}$  et  $\nu^{j,j+1}$  définis aux équations (2.9) à (2.13)
- déplacements généralisés  $\tilde{U}^i, \tilde{\Phi}^i$  et  $U_3^i$  définis aux équations (2.23), (2.24) et (2.25)
- déformations généralisées  $\tilde{\varepsilon}^i, \tilde{\chi}^i, \tilde{d}_\Phi^i, \tilde{D}^{j,j+1}$  et  $D_\nu^{j,j+1}$  définies aux équations (2.38)
- déformations anélastiques généralisées  $\tilde{\varepsilon}^{ian}, \tilde{\chi}^{ian}, \tilde{d}_\Phi^{ian}, \tilde{D}^{j,j+1an}$  et  $D_\nu^{j,j+1an}$  définies aux équations (2.63), (2.64), (2.73), (2.74) et (2.75)

Equations d'équilibre sur  $\omega$  pour  $1 \leq i \leq n$  (cf. équations (2.28)) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{N}^i(x,y) + \tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y) &= 0 \\ \operatorname{div} \tilde{Q}^i + \nu^{i,i+1}(x,y) - \nu^{i-1,i}(x,y) &= 0 \\ \operatorname{div} \tilde{M}^i(x,y) - \tilde{Q}^i(x,y) + \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)) &= 0 \end{aligned}$$

Equations de comportement sur  $\omega$  pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n-1$  (cf. équations (2.78) à (2.82)) :

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}^i(x,y) - \tilde{\varepsilon}^{ia}(x,y) &= \frac{\tilde{S}^i}{e^i} : \tilde{N}^i(x,y); \\ \tilde{\chi}^i(x,y) - \tilde{\chi}^{ia}(x,y) &= \frac{12}{e^{i3}} \tilde{S}^i : \tilde{M}^i(x,y); \\ \tilde{d}_\Phi^i(x,y) - \tilde{d}_\Phi^{ia}(x,y) &= \frac{6}{5e^i} \tilde{S}_Q^i \cdot \tilde{Q}^i - \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^i \cdot (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}); \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \tilde{D}^{j,j+1}(x,y) - \tilde{D}^{j,j+1a}(x,y) &= -\frac{1}{10}\tilde{S}_Q^j \cdot \tilde{Q}^j - \frac{1}{10}\tilde{S}_Q^{j+1} \cdot \tilde{Q}^{j+1} - \frac{e^j}{30}\tilde{S}_Q^j \cdot \tilde{\tau}^{j-1,j} \\ &\quad + \frac{2}{15}\left(e^j\tilde{S}_Q^j + e^{j+1}\tilde{S}_Q^{j+1}\right) \cdot \tilde{\tau}^{j,j+1} - \frac{e^{j+1}}{30}\tilde{S}_Q^{j+1} \cdot \tilde{\tau}^{j+1,j+2}; \\ D_\nu^{j,j+1}(x,y) - D_3^{j,j+1a}(x,y) &= \frac{9}{70}e^j S_\nu^j \nu^{j-1,j} + \frac{13}{35}\left(e^j S_\nu^j + e^{j+1}S_\nu^{j+1}\right) \nu^{j,j+1} \\ &\quad + \frac{9}{70}e^{j+1}S_\nu^{j+1} \nu^{j+1,j+2}. \end{aligned}$$

Conditions aux limites en effort généralisé sur  $\partial\omega$  pour  $1 \leq i \leq n$  (cf. équations (2.34)) :

$$\begin{cases} \tilde{N}^i \cdot \underline{n} = \tilde{T}_d^i \\ \tilde{M}^i \cdot \underline{n} = \tilde{M}_d^i \\ \tilde{Q}^i \cdot \underline{n} = Q_{3d}^i \end{cases}$$

### 2.6.2 Modèle $\mathcal{M}_{4-2n+1}$ .

Champs généralisés pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n-1$  :

- efforts intérieurs généralisés  $\tilde{N}^i$  et  $\tilde{\tau}^{j,j+1}$  définis aux équations (2.9) et (2.12)
- déplacements généralisés  $\tilde{U}^i$  et  $W_3$  définis aux équations (2.23) et (2.39)
- déformations généralisées  $\tilde{\varepsilon}^i$  et  $\tilde{D}^{j,j+1}$  définies aux équations (2.49)
- déformations anélastiques généralisées  $\tilde{\varepsilon}^{ian}$  et  $\tilde{D}^{j,j+1an}$  définies aux équations (2.63) et (2.89)

Equations d'équilibre sur  $\omega$  pour  $1 \leq i \leq n$  (cf. équations (2.41)) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{N}^i(x,y) + \tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y) &= 0 \\ T_3^+(x,y) + T_3^-(x,y) + \sum_{j=1}^n \left[ \frac{e^j}{2} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y)) \right] &= 0 \end{aligned}$$

Equations de comportement sur  $\omega$  pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n-1$  (cf. équations (2.92) et (2.93)) :

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}^i(x,y) - \tilde{\varepsilon}^{ia}(x,y) &= \frac{\tilde{S}^i}{e^i} : \tilde{N}^i(x,y); \\ \tilde{D}^{j,j+1}(x,y) - \tilde{D}^{j,j+1a}(x,y) &= \frac{e^j}{6}\tilde{S}_Q^j \cdot \tilde{\tau}^{j-1,j} + \frac{1}{3}\left(e^j\tilde{S}_Q^j + e^{j+1}\tilde{S}_Q^{j+1}\right) \cdot \tilde{\tau}^{j,j+1} \\ &\quad + \frac{e^{j+1}}{6}\tilde{S}_Q^{j+1} \cdot \tilde{\tau}^{j+1,j+2}. \end{aligned}$$

Conditions aux limites en effort généralisé sur  $\partial\omega$  pour  $1 \leq i \leq n$  (cf. équations (2.47)) :

$$\begin{cases} \tilde{N}^i \cdot \underline{n} = \tilde{T}_d^i \\ \left( \sum_{i=1}^n \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \right) \cdot \underline{n} = Q_{3d} \end{cases}$$

## 2.7 Conclusion.

Nous avons repris la construction deux modèles multiparticulaires pour évaluer les efforts d'interface dans un multicouche comportant des déformations anélastiques dans les couches et des discontinuités des déplacements aux interfaces connues. Le premier modèle, le  $\mathcal{M}_4-5n$ , approche chaque couche par une plaque de Reissner [Reissner, 1945] alors que le deuxième modèle, le  $\mathcal{M}_4-2n+1$ , approche chaque couche par une membrane. Le multicouche devient ainsi une superposition de plaques ou de membranes couplées par des efforts d'interface. Dans le modèle  $\mathcal{M}_4-2n+1$ , les contraintes normales aux interfaces entre les couches ne figurent pas parmi les efforts généralisés. Le modèle  $\mathcal{M}_4-5n$  est plus complet et fait apparaître les contraintes normales d'interface dans les efforts intérieurs généralisés et ces contraintes sont alors appelées efforts d'arrachement. La construction des deux modèles est fondée sur la méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner. L'introduction des contraintes approchées à partir des efforts généralisés dans une adaptation de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner a permis d'identifier les déplacements et les déformations généralisés. L'application du théorème de Reissner et de l'hypothèse de multicouches minces, donne ensuite les équations de comportement et d'équilibre et les conditions aux limites. Les déformations anélastiques généralisées sont aussi identifiées grâce à l'adaptation de la méthode d'Hellinger-Reissner et leur expression est déterminée en fonction des déformations anélastiques dans les couches et des discontinuités des déplacements aux interfaces. Ces déformations anélastiques généralisées, supposées connues, jouent le rôle de variables d'état du multicouche.

La résolution complète du problème anélastique nécessite des équations supplémentaires permettant de déterminer les variables d'état. Par exemple, pour le cas de la plasticité dans les couches, il faut un critère de plasticité et une loi d'écoulement. Ces équations caractéristiques du problème anélastique devront s'écrire en déformations anélastiques généralisées de façon à pouvoir être exploitées facilement. Nous verrons au chapitre suivant le cas de déformations anélastiques dues à une variation uniforme de température et au chapitre 5, nous résoudrons le problème de la plasticité d'interface mise en évidence au chapitre 1 (paragraphe 1.4.2).

Notons que les phénomènes anélastiques que nous sommes en mesure de prendre en compte par ces modèles sont par exemple la viscosité, la plasticité ou le délaminage. Ce sont des phénomènes dans lesquels les caractéristiques élastiques du matériau n'évoluent pas au cours du chargement. Par conséquent, des phénomènes d'endommagement ne peuvent pas être pris en compte à ce jour. Pour introduire l'endommagement dans les modèles, il suffirait de faire les modifications adéquates directement dans les souplesses qui apparaissent dans les équations de comportement.

La résolution des équations des modèles que nous avons développés permettra d'évaluer les effets de bord sur les contraintes. Nous proposons au chapitre suivant une méthode de résolution des équations et un logiciel de calcul d'effet de bord pour chaque modèle.





## Chapitre 3

# Calcul d'effet de bord et le logiciel DEILAM.

### 3.1 Introduction et bibliographie.

Nous présentons dans ce chapitre un logiciel appelé DEILAM ("Détermination des Efforts d'Interface dans un Laminé") dans lequel nous avons programmé les équations du modèle  $\mathcal{M}_4-5n$ , développé au chapitre 2, pour un problème de multicouche rectangulaire en traction suivant la longueur et avec des conditions de bord quelconques en présence de champs anélastiques. Un logiciel analogue mais construit à partir du modèle  $\mathcal{M}_4-2n+1$  a également été créé. Soucieux de la clarté et de la simplicité de la présentation, nous avons choisi de présenter uniquement le logiciel DEILAM.

Avant de présenter le logiciel, il est intéressant de décrire brièvement quelques méthodes et logiciels utilisés pour la conception de structures multicouches.

Aujourd'hui, la plupart des logiciels éléments finis (EF) offrent à l'utilisateur la possibilité d'utiliser des éléments 2D de type plaque ou coque pour des calculs élastiques linéaires de structures multicouches. Parmi ceux-ci, peu sont capables d'introduire des non-linéarités dans leurs calculs. Le logiciel DAMLAM peut évaluer les dégradations *locales* dans les couches [Bahlouli et Gaignebet, 1991]. DAMLAM fonctionne comme post-processeur des calculs éléments finis 2D élastiques linéaires et les seules données qu'il nécessite sont les efforts généralisés des modèles classiques des plaques aux points considérés. Les calculs supposent une faible non-linéarité globale pour que l'utilisation des efforts généralisés globaux soit correcte. Enfin, DAMLAM utilise un modèle élasto-plastique endommageable [Ladevèze et Le Dantec, 1992], [Allix et al., 1995]. Un exemple de logiciel EF capable d'effectuer à la fois des calculs élastiques linéaires et des calculs non-linéaires (pouvant être très non-linéaires) est le logiciel DAMSTRAT [Girard et Louis, 1993]. Il utilise les hypothèses de Reissner-Mindlin et analyse les dégradations intralaminaires *globales* dans une structure multicouche moyennant un modèle d'endommagement 2D [Gilletta, 1987]. DAMSTRAT permet en outre de prendre en compte des non-linéarités géométriques. Ce logiciel est donc un logiciel très complet. Cependant, il ne permet pas d'étudier le délaminage puisque ce phénomène nécessite une étude locale au bord.

L'étude des effets de bord nécessite des post-processeurs permettant de réaliser une analyse plus *locale*. Compte tenu de la multiplicité des formes du bord, la plupart des post-processeurs utilisent les hypothèses et la démarche de Raju et Crews pour affronter les problèmes de bord [Raju et Crews, 1982]. On suppose que la courbure du bord est faible de sorte que les éléments infinitésimaux près des bords sont équivalents à des plaques semi-infinies avec un bord libre sou-



mises à des déformations axiales (traction ou compression). La valeur de la déformation axiale est déterminée moyennant un calcul éléments finis utilisant la théorie classique des plaques ou par les formules analytiques de [Lekhnitskii, 1968] pour des plaques trouées. De plus, il n'est pas nécessaire de prendre en compte les gradients de cette déformation le long du bord. La déformation axiale à laquelle est soumise chaque plaque est donc uniforme.

Dans la suite de cette bibliographie, nous décrivons 3 types de techniques de résolution du problème de bord : les méthodes éléments finis 3D, les techniques de résolution par les théories de couche limite et les calculs par des modèles multiparticulaires (décrits dans l'introduction du chapitre 2).

### 3.1.1 Outil éléments finis 3D.

Le premier réflexe pour aborder le problème d'effet de bord consiste à effectuer des calculs par éléments finis. Parmi les premiers calculs par éléments finis pour l'étude des effets de bord, nous trouvons les travaux de Wang et Crossman [Wang et Crossman, 1977a], [Wang et Crossman, 1977b]. Ces auteurs étudient le cas de multicouches en traction dans leurs plan ou subissant une variation uniforme de température. Afin de simplifier les maillages et permettre des maillages suffisamment fins pour l'effet de bord, les auteurs supposent une uniformité des champs de contrainte et de déformation suivant la longueur de l'éprouvette. Cette hypothèse est bien justifiée pour les éprouvettes suffisamment longues. De cette sorte, le problème devient plan et l'analyse des champs est plus simple. Néanmoins, d'autres auteurs font une véritable résolution 3D sans prendre en considération l'hypothèse simplificatrice d'invariance par translation. Nous pouvons citer par exemple les travaux de Yin [Yin, 1997] pour évaluer les effets du gradient de température sur les champs de contrainte dans le multicouche et particulièrement aux bords. Ce même auteur étudie aussi le cas d'une plaque multicouche avec bords et extrémités libres d'effort soumise à une variation uniforme de température. La précision des résultats au niveau de la section transversale au milieu de la longueur du multicouche n'est pas aussi précise que les résultats de [Wang et Crossman, 1977b] puisque le maillage suivant la largeur n'est pas très fin.

Par ailleurs, la présence de singularités aux interfaces [Leguillon et Sanchez-Palencia, 1987], [Wang et Choi, 1982] compliquent énormément l'utilisation des éléments finis 3D pour l'analyse des effets de bord. Dans [Carreira, 1998], on trouve une approche originale qui permet une détermination élégante des contraintes aux interfaces. L'auteur introduit le concept d'effort généralisé d'interface déduit des équations d'équilibre 3D intégrées sur l'épaisseur, c'est à dire moyennées sur le maillage. On obtient ainsi une valeur pour les contraintes exactement aux interfaces et une convergence locale rapide. Ces techniques ne sont envisageables que pour le cas de multicouches à faible nombre de couches puisque des maillages très fins au bord et aux interfaces sont nécessaires pour converger dans un intervalle de confiance.

### 3.1.2 Outils de calcul par théories de couche limite.

Ces outils corrigent les champs de la théorie classique des plaques en leur superposant des champs 3D correcteurs au voisinage des bords qui décroissent très vite vers l'intérieur de la plaque. Avec ces champs correcteurs les conditions aux limites locales sont vérifiées. Nous distinguons deux méthodes pour déterminer les équations sur les champs correcteurs. La première est obtenue par des développements asymptotiques pour des faibles épaisseurs du multicouche et la deuxième par une approche mixte contrainte-déplacement minimisant l'erreur sur le comportement. Décrivons brièvement ces techniques de résolution et listons les logiciels correspondants.



### Approche asymptotique.

Compte tenu de la méthode de Raju et Crews pour évaluer l'effet de bord dans une structure quelconque, cette approche est développée à partir d'un multicouche à bord droit. Au voisinage du bord, le domaine d'étude est réduit à "une couche limite" bidimensionnelle [Engrand, 1981] perpendiculaire au bord et schématisée sur la figure 3.1. On fait ensuite une homothétie de rapport

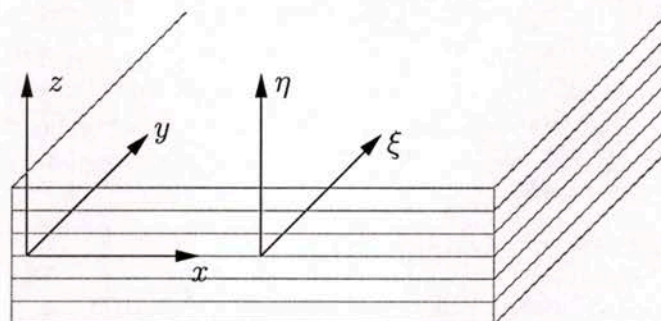


FIG. 3.1 - Couche limite.

$1/e$  ( $e$  étant l'épaisseur du multicouche), et la plaque devient semi-infinie d'épaisseur unité. On définit alors les coordonnées adimensionnelles  $\eta = z/e$  et  $\xi = y/e$ . Les équations sont obtenues par un développement asymptotique des champs correcteurs des contraintes et par l'introduction des champs correcteurs dans les équations d'équilibre et les équations de compatibilité. Les équations peuvent être résolues en deux étapes [Lécuyer, 1991]. On discrétise l'épaisseur par des éléments finis unidimensionnels et on obtient le système différentiel suivant

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \tilde{\tilde{A}}\tilde{\tilde{Y}} = -\tilde{\tilde{B}}\tilde{\tilde{Y}}$$

où  $\tilde{\tilde{A}}$  et  $\tilde{\tilde{B}}$  sont des matrices connues dépendantes de la discrétisation suivant l'épaisseur et  $\tilde{\tilde{Y}}$  un vecteur inconnu contenant l'information sur les valeurs des contraintes. Le vecteur inconnu de ce problème en  $\xi$  est alors obtenu par une résolution spectrale.

A partir de cette théorie et de cette méthode de résolution, le logiciel CLEOPS a été créé pour l'évaluation des effets de bord [Lécuyer, 1991]. De plus, la théorie a été enrichie pour que CLEOPS prenne en compte le cas de déformations anélastiques connues et constantes par couche (c'est le cas des déformations hygrothermiques). Les applications sont très variées puisque CLEOPS résout le problème de traction avec des chargements mécaniques au bord quelconques mais uniformes en  $x$ . Le logiciel CLEOPS est déjà utilisé comme post-processeur.

### Approches mixtes.

Ces approches dites mixtes en contrainte-déplacement, ont été développées essentiellement par Ladevèze [Ladevèze, 1988] et Allix [Allix, 1989]. Dans un premier temps, on a besoin des résultats de la théorie classique des plaques. Puis, au voisinage du bord, on pose le problème tridimensionnel de la détermination des champs (contraintes et déplacements) correcteurs. Ce problème est décomposé en problèmes bidimensionnels (couches limites perpendiculaires au bord, voir figure 3.1). Ensuite, on fait une approche mixte en contrainte-déplacement résolue par exemple, par des développements en séries de Fourier.



Le logiciel EDA (Edge Delamination Analysis) utilise cette méthode conjuguée avec une technique éléments finis pour le calcul d'effet de bord dans un multicouche en traction avec bords droits et avec interfaces endommageables [Daudeville et Ladevèze, 1993]. L'uniformité des champs de contrainte et de déformation suivant la longueur du multicouche est supposée. Le logiciel permet en plus d'étudier l'initiation et la propagation du délaminage. De par les travaux de [Raju et Crews, 1982], le logiciel peut servir à traiter des problèmes de bord quelconques (sous réserve que les courbures soient faibles). Le logiciel est déjà utilisé comme post-processeur.

Le logiciel DSDM développé dans [Allix, 1992] est un autre logiciel qui utilise cette approche. Le problème traité est le calcul au bord d'un trou circulaire dans une plaque multicouche. Le comportement est élastique endommageable. La possibilité d'intégrer l'endommagement dans les couches et à la fois aux interfaces font de DSDM un logiciel très complet.

### 3.1.3 Outils de calcul multiparticulaires.

Les modèles multiparticulaires ont déjà été présentés dans l'introduction du chapitre 2. Il s'agit de modèles simplifiés qui modélisent le multicouche par une superposition de plaques couplées par des efforts d'interface. Dans ce type de modèles s'inscrit évidemment les modèles *local* et *global-local* de Pagano et Soni [Pagano, 1978], [Pagano et Soni, 1983]. Dans le but de développer un logiciel post-processeur, ces auteurs traitent le problème thermoélastique de multicouches en traction avec bords libres et subissant une variation uniforme de température. La résolution est faite moyennant une méthode spectrale [Pagano et Soni, 1983]. En effet, leurs équations conduisent à un système différentiel du premier ordre et les solutions générales s'écrivent de cette façon. Ces auteurs développent ensuite le logiciel ASCA [Pagano et Soni, 1992]. De par le caractère simplifié des modèles, ce logiciel permet de faire une analyse des champs avec une bonne précision pour des multicouches pouvant comporter un grand nombre de couches.

En ce qui concerne les modèles  $\mathcal{M}_4$ , dans [Chabot, 1997], des calculs pour des multicouches  $(\theta_1, \theta_2)_s$  en traction ont été développés afin d'évaluer l'effet de bord. Les couches sont supposées être isotropes transverses et avoir la même épaisseur et les mêmes caractéristiques mécaniques dans le repère d'orthotropie. Les équations du  $\mathcal{M}_4-5n$  et du  $\mathcal{M}_4-2n+1$  conduisent à un système différentiel du second ordre de type

$$\tilde{\rho}''(y) = \tilde{M}\tilde{\rho}(y)$$

où  $\tilde{M}$  est une matrice constante et  $\tilde{\rho}$  un vecteur inconnu dont les composantes sont des efforts et des déplacements généralisés. Ce système est résolu par le logiciel de calcul formel MATHEMATICA en déterminant les valeurs propres de  $\tilde{M}$  et par une décomposition en somme d'exponentielles. Il est important de noter que Chabot, pour le même problème de bord libre, a étendu cette résolution analytique pour des multicouches  $(\theta_1, \dots, \theta_n)_s$  par le modèle  $\mathcal{M}_4-2n+1$ . Cependant, la valeur du nombre de couches  $n$  est limitée par le temps de calcul.

Dans ce chapitre, on décrit un logiciel appelé DEILAM (Détermination des Efforts d'Interface dans un LAMiné) qui détermine les efforts et déplacements généralisés du  $\mathcal{M}_4-5n$  dans un multicouche rectangulaire en traction suivant la longueur et avec des conditions de bord quelconques. La même démarche pour la construction de DEILAM a été adoptée pour construire un logiciel analogue avec le  $\mathcal{M}_4-2n+1$ . Ce dernier logiciel ne sera pas décrit ici. Les calculs par nos logiciels diffèrent des calculs en élasticité de [Chabot, 1997] par les hypothèses de calcul et par la méthode de résolution puisque nous prenons en compte des champs anélastiques et nous faisons une résolution



semi-analytique des systèmes différentiels trouvés moyennant des formulations variationnelles. De plus, nos logiciels permettent le choix d'épaisseurs des couches et des matériaux constituant les couches différents. Notre méthode de résolution est très rapide et permet le calcul d'effet de bord pour des multicouches à grand nombre de couches. Ainsi, nos deux logiciels et surtout DEILAM (le modèle M4-5n étant plus précis que le M4-2n+1 [Carreira, 1998]), sont proposés comme post-processeurs des calculs éléments finis de type plaque ou coque.

Dans un premier temps, nous allons exposer les équations du M4-5n pour le problème de multicouche en traction avec bords chargés en présence de champs anélastiques connus dans les couches et aux interfaces. Puis, nous présentons le logiciel DEILAM qui résout le problème ci-dessus avec prise en compte de champs anélastiques constants dans chaque couche. Les applications du logiciel sont très variées et nous présentons ensuite le type de conditions aux limites à rentrer dans le logiciel pour résoudre des problèmes thermomécaniques usuels. La convergence de la résolution numérique sera aussi montrée. Enfin, nous validerons les calculs du logiciel par une comparaison avec les calculs de certains auteurs pour des problèmes usuels.

### 3.2 Traction d'un multicouche avec bords chargés et résolution par le M4-5n.

Il s'agit d'utiliser notre modélisation M4-5n pour évaluer les effets de bord dans un multicouche soumis à une déformation axiale uniforme avec bords soumis à des conditions aux limites quelconques mais uniformes suivant la longueur. On suppose en plus la présence de champs connus de déformations anélastiques dans les couches et de discontinuités des déplacements aux interfaces. Le problème sera explicité pour le cas d'un multicouche symétrique. Cependant, des raisonnements analogues pourront être effectués pour le cas d'un multicouche non symétrique. Les remarques 1 à 5 dans cette partie, permettront de faire les adaptations nécessaires pour le cas du multicouche non symétrique.

Les notations sont celles du chapitre 2.

#### 3.2.1 Description du problème.

##### Géométrie.

Dans le repère  $(0, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ , nous considérons un empilement de  $2n$  couches orthotropes dont le repère d'orthotropie  $(0, \underline{e}_{L_i}, \underline{e}_{T_i}, \underline{e}_{N_i})$  est tel que

$$\underline{e}_{L_i} = \cos \theta_i \underline{e}_x + \sin \theta_i \underline{e}_y, \quad \underline{e}_{T_i} = \cos \theta_i \underline{e}_y - \sin \theta_i \underline{e}_x, \quad \text{et} \quad \underline{e}_{N_i} = \underline{e}_z$$

pour  $i \in 1, \dots, 2n$  (cf. figure 3.2). La nomination  $(\theta_1, \dots, \theta_n)_s$  du multicouche découle de ces conventions. L'empilement occupe le domaine  $-L \leq x \leq L$ ,  $-b \leq y \leq b$ ,  $-e \leq z \leq e$  (cf. figure 3.3). L'épaisseur de la couche  $i$  est noté  $e^i$ .

Les caractéristiques élastiques de la couche  $i$  suivant ses directions d'orthotropie sont :

- les modules d'Young  $E_L^i$ ,  $E_T^i$  et  $E_N^i$
- les modules de cisaillement  $G_{LT}^i$ ,  $G_{LN}^i$  et  $G_{TN}^i$
- les coefficients de Poisson  $\nu_{LT}^i$ ,  $\nu_{LN}^i$  et  $\nu_{TN}^i$

*Remarque 1.* Pour le cas d'un multicouche non symétrique  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  le domaine occupé est  $-L \leq x \leq L$ ,  $-b \leq y \leq b$ ,  $-e \leq z \leq 0$  et on prend les mêmes notations des figures 3.2 et 3.3.





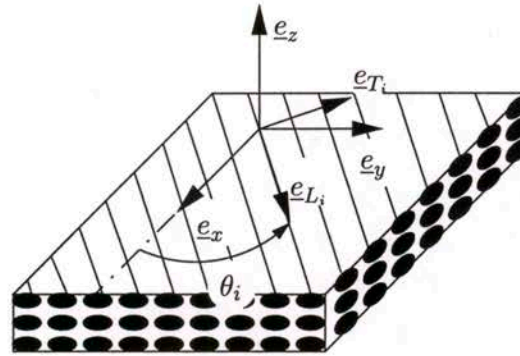


FIG. 3.2 – Disposition des couches.

## Chargement.

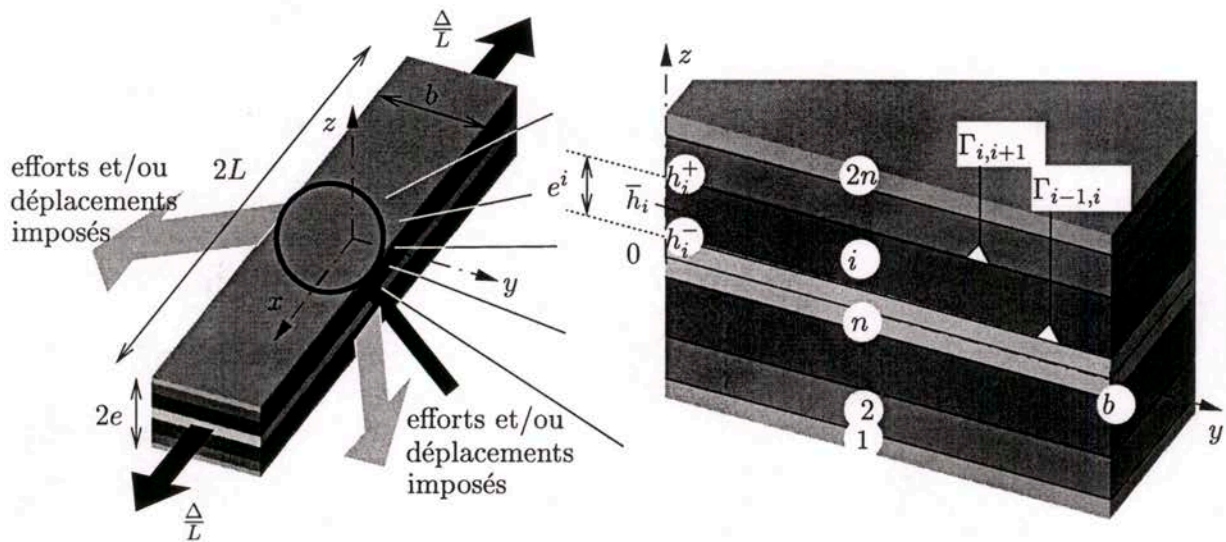


FIG. 3.3 – Chargement sur un multicouche symétrique.

Le multicouche est soumis à une déformation axiale uniforme  $\frac{\Delta}{L}$  suivant l'axe des  $x$  (cf. figure 3.3). Les peaux supérieure ( $z = h_{2n}^+$ ) et inférieure ( $z = h_1^-$ ) sont libres d'effort. Au chapitre 2, nous avons défini les conditions aux limites en efforts généralisés (équations (2.34)) lorsqu'un effort 3D  $\underline{T}^d$  est imposé aux bords. Par une méthode triviale on peut définir de façon analogue des conditions aux limites en déplacements généralisés lorsqu'un déplacement 3D  $\underline{U}^d$  est imposé aux bords. De façon à rendre la résolution la plus générale possible, on impose partiellement et de façon uniforme suivant la direction des  $x$  des composantes des déplacements et des efforts généralisés aux bords  $y = 0$  et  $y = b$ . Ainsi, avec les notations (2.34) et (2.14), les conditions aux limites sont  $\forall i \in [1, \dots, 2n]$  :

$$\int_{h_i^-}^{h_i^+} T_\alpha^d(y=0, z) P_0^i(z) dz = T_{d\alpha}^i(0) \quad \text{ou} \quad \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_\alpha^d(y=0, z) dz = U_{d\alpha}^i(0), \quad (3.1)$$

$$\int_{h_i^-}^{h_i^+} T_3^d(y=0, z) P_0^i(z) dz = Q_{d3}^i(0) \quad \text{ou} \quad \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_3^d(y=0, z) dz = U_{d3}^i(0), \quad (3.2)$$

$$\int_{h_i^-}^{h_i^+} e^i T_\alpha^d(y=0, z) P_1^i(z) dz = M_{d\alpha}^i(0) \quad \text{ou} \quad \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12}{e^{i^2}} P_1^i(z) U_\alpha^d(y=0, z) dz = \Phi_{d\alpha}^i(0). \quad (3.3)$$

et

$$\int_{h_i^-}^{h_i^+} T_\alpha^d(y=b, z) P_0^i(z) dz = T_{d\alpha}^i(b) \quad \text{ou} \quad \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_\alpha^d(y=b, z) dz = U_{d\alpha}^i(b), \quad (3.4)$$

$$\int_{h_i^-}^{h_i^+} T_3^d(y=b, z) P_0^i(z) dz = Q_{d3}^i(b) \quad \text{ou} \quad \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_3^d(y=b, z) dz = U_{d3}^i(b), \quad (3.5)$$

$$\int_{h_i^-}^{h_i^+} e^i T_\alpha^d(y=b, z) P_1^i(z) dz = M_{d\alpha}^i(b) \quad \text{ou} \quad \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12}{e^{i^2}} P_1^i(z) U_\alpha^d(y=b, z) dz = \Phi_{d\alpha}^i(b). \quad (3.6)$$

où  $\alpha \in \{1, 2\}$ .

Par ailleurs, nous supposons que le chargement aux bords est appliqué de façon symétrique par rapport au plan  $z = 0$  de sorte que :

$$T_{d\alpha}^{2n-i+1}(0) = T_{d\alpha}^i(0) \quad \text{ou} \quad U_{d\alpha}^{2n-i+1}(0) = U_{d\alpha}^i(0) \quad (3.7)$$

$$Q_{d3}^{2n-i+1}(0) = -Q_{d3}^i(0) \quad \text{ou} \quad U_{d3}^{2n-i+1}(0) = -U_{d3}^i(0) \quad (3.8)$$

$$M_{d\alpha}^{2n-i+1}(0) = -M_{d\alpha}^i(0) \quad \text{ou} \quad \Phi_{d\alpha}^{2n-i+1}(0) = -\Phi_{d\alpha}^i(0) \quad (3.9)$$

et

$$T_{d\alpha}^{2n-i+1}(b) = T_{d\alpha}^i(b) \quad \text{ou} \quad U_{d\alpha}^{2n-i+1}(b) = U_{d\alpha}^i(b) \quad (3.10)$$

$$Q_{d3}^{2n-i+1}(b) = -Q_{d3}^i(b) \quad \text{ou} \quad U_{d3}^{2n-i+1}(b) = -U_{d3}^i(b) \quad (3.11)$$

$$M_{d\alpha}^{2n-i+1}(b) = -M_{d\alpha}^i(b) \quad \text{ou} \quad \Phi_{d\alpha}^{2n-i+1}(b) = -\Phi_{d\alpha}^i(b) \quad (3.12)$$

*Remarque 2.* Pour le cas du multicouche non symétrique  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ , le chargement est analogue et les conditions aux limites sont (3.1) à (3.3)  $\forall i \in [1, \dots, n]$  (il n'y a plus de symétrie pour le chargement au bord).

### Champs anélastiques.

Nous supposons qu'il existe un champ 3D de déformations anélastiques  $\bar{\varepsilon}^{an}$  (déformations plastiques dans la couche, dilatations thermiques...) et des champs de discontinuité des déplacements  $\underline{\gamma}^{j,j+1}$  (glissement d'interface, délaminage...) aux interfaces entre les couches  $j$  et  $j+1$  ( $1 \leq j \leq 2n-1$ ). Ces champs sont supposés connus et uniformes suivant l'axe des  $x$ .

D'après les équations (2.63), (2.64), (2.73), (2.74) et (2.75) du chapitre 2, les déformations anélastiques généralisées déduites des champs anélastiques 3D  $\bar{\varepsilon}^{an}$  et  $\underline{\gamma}^{j,j+1}$  du modèle M4-5n sont :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{i an}(y), \quad \chi_{\alpha\beta}^{i an}(y), \quad d_{\Phi\alpha}^{i an}(y), \quad D_\alpha^{j,j+1 an}(y) \quad \text{et} \quad D_\nu^{j,j+1 an}(y).$$

Nous supposons dans la suite que les déformations anélastiques généralisées vérifient les propriétés



de symétrie (par rapport au plan  $z = 0$ ) suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\alpha\beta}^{i\text{an}}(y) = \varepsilon_{\alpha\beta}^{2n-i+1\text{an}}(y), \quad \chi_{\alpha\beta}^{i\text{an}}(y) = -\chi_{\alpha\beta}^{2n-i+1\text{an}}(y) \\ d_{\Phi\alpha}^{i\text{an}}(y) = -d_{\Phi\alpha}^{2n-i+1\text{an}}(y) \\ \tilde{D}^{n,n+1\text{an}} = 0, \quad \tilde{D}^{j,j+1\text{an}}(y) = -\tilde{D}^{2n-j,2n+1-j\text{an}}(y) \\ D_{\nu}^{j,j+1\text{an}}(y) = D_{\nu}^{2n-j,2n+1-j\text{an}}(y) \end{array} \right. \quad \text{pour } \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq 2n \\ 1 \leq j \leq 2n-1 \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Nous supposons en plus que les déformations anélastiques généralisées sont de classe  $C^1$  sur  $[0, b]$ .

*Remarque 3.* Pour le cas du *multicouche non symétrique*  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ , les déformations anélastiques généralisées sont aussi uniformes suivant  $x$ , de classe  $C^1$  sur  $[0, b]$  et définies de façon analogue à (3.13) sauf que  $i$  varie de 1 à  $n$  et  $j$  de 1 à  $n-1$ .

Le but est de déterminer les efforts et déplacements généralisés du modèle  $\mathcal{M}_4\text{-}5n$  engendrés par les chargements en présence des champs anélastiques.

### 3.2.2 Champs inconnus.

#### Déplacements généralisés.

Compte tenu de l'uniformité dans la direction  $x$  des chargements et des déformations anélastiques généralisées, les efforts et les déplacements généralisés du modèle sont indépendants de  $x$ . Pour la couche  $i$  ( $i = 1..2n$ ), les déplacements généralisés s'écrivent donc (cf. équations (2.23))

$$\begin{aligned} \tilde{U}^i(x, y) &= \left\{ \begin{array}{l} U_1^i(x, y) = \frac{\Delta}{L}x + u^i(y) \\ U_2^i(x, y) = v^i(y) \end{array} \right\} \\ U_3^i(x, y) &= w^i(y) \end{aligned} \quad (3.14)$$

et les rotations généralisées sont (cf. équations (2.24))

$$\tilde{\Phi}^i(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} \Phi_x^i(x, y) = \varphi_x^i(y) \\ \Phi_y^i(x, y) = \varphi_y^i(y) \end{array} \right\} \quad \text{pour } i = 1..2n. \quad (3.15)$$

#### Efforts intérieurs généralisés.

Les efforts intérieurs généralisés dans la couche  $i$  ( $1 \leq i \leq 2n$ ) sont (cf. équations (2.9) à (2.11))

- les efforts membranaires  $N_{\alpha\beta}^i(x, y) = N_{\alpha\beta}^i(y)$
- les moments membranaires  $M_{\alpha\beta}^i(x, y) = M_{\alpha\beta}^i(y)$
- les efforts tranchants  $Q_{\alpha}^i(x, y) = Q_{\alpha}^i(y)$

où  $(\alpha, \beta) \in \{1, 2\}^2$ .

Les efforts intérieurs généralisés à l'interface  $j, j+1$  ( $1 \leq j \leq 2n-1$ ) sont (cf. équations (2.12) et (2.13))

- les efforts de cisaillement  $\tau_{\alpha}^{j,j+1}(x, y) = \tau_{\alpha}^{j,j+1}(y)$
- les efforts d'arrachement  $\nu^{j,j+1}(x, y) = \nu^{j,j+1}(y)$

avec  $\alpha \in \{1, 2\}$  et  $j \in [1, 2n-1]$ .

**Inconnues du problème.**

Les deux paragraphes précédents définissent les inconnues de notre problème, à savoir  $5 \times 2n$  déplacements et  $8 \times 2n + 3 \times (2n - 1)$  efforts généralisés ; c'est à dire  $32n - 3$  inconnues au total.

Le problème peut se simplifier si on exploite les symétries dues au choix d'un empilement symétrique et aux propriétés de symétrie du chargement et des déformations anélastiques généralisées.

**Simplification par symétrie.**

La symétrie par rapport au plan  $z = 0$  donne pour les déplacements généralisés :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^i(y) = u^{2n-i+1}(y), \quad v^i(y) = v^{2n-i+1}(y) \\ \varphi_x^i(y) = -\varphi_x^{2n-i+1}(y), \quad \varphi_y^i(y) = -\varphi_y^{2n-i+1}(y) \\ w^i(y) = -w^{2n-i+1}(y) \end{array} \right. \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 2n \quad (3.16)$$

et pour les efforts intérieurs généralisés :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{\alpha\beta}^i(y) = N_{\alpha\beta}^{2n-i+1}(y), \quad M_{\alpha\beta}^i(y) = -M_{\alpha\beta}^{2n-i+1}(y) \\ Q_{\alpha}^i(y) = -Q_{\alpha}^{2n-i+1}(y) \\ \tilde{\tau}^{n,n+1} = 0, \quad \tilde{\tau}^{j,j+1}(y) = -\tilde{\tau}^{2n-j,2n+1-j}(y) \\ \nu^{j,j+1}(y) = \nu^{2n-j,2n+1-j}(y) \end{array} \right. \quad \text{pour } \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq 2n \\ 1 \leq j \leq 2n - 1 \end{array} \right. \quad (3.17)$$

et ce pour tout  $y \in [-b, b]$ .

Cette propriété simplifie le problème de sorte que celui-ci comporte dès lors uniquement  $16n - 2$  inconnues :

- $u^i, v^i, w^i, \varphi_x^i, \varphi_y^i$  ( $5n$  inconnues)
- $N_{11}^i, N_{12}^i, N_{22}^i, M_{11}^i, M_{12}^i, M_{22}^i, Q_1^i, Q_2^i$  ( $8n$  inconnues)
- $\tau_1^{j,j+1}, \tau_2^{j,j+1}$  ( $2n - 2$  inconnues, les cisaillements à l'interface centrale étant nuls)
- $\nu^{i,i+1}$  ( $n$  inconnues, les arrachements à l'interface centrale peuvent être non nuls)

avec  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n - 1$ . Cela revient à étudier le demi multicouche sous l'interface centrale  $z = 0$ .

Après cette simplification, nous allons écrire les équations du modèle pour notre problème simplifié.

*Remarque 4.* Pour le cas du multicouche non symétrique  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ , on obtient de façon analogue, les mêmes inconnues que pour le cas du multicouche symétrique sauf les efforts d'arrachement  $\nu^{n,n+1}$  qui n'existent pas pour notre cas puisque  $\nu^{n,n+1}$  n'est pas un effort intérieur. Cependant, il est commode de le garder comme inconnue afin de pouvoir appliquer la même démarche que pour le cas du multicouche symétrique, à condition de rentrer au moment adéquat l'équation  $\nu^{n,n+1} = 0$  (la peau supérieure de notre multicouche non symétrique est libre d'efforts).



### 3.2.3 Equations du modèle $M4-5n$ appliquées au problème.

#### Equations d'équilibre.

D'après les équations (2.28) on obtient les  $5n$  équations d'équilibre de notre problème simplifié pour  $1 \leq i \leq n$  :

$$N_{12}^{i'}(y) = -\tau_1^{i,i+1}(y) + \tau_1^{i-1,i}(y) \quad (3.18)$$

$$N_{22}^{i'}(y) = -\tau_2^{i,i+1}(y) + \tau_2^{i-1,i}(y) \quad (3.19)$$

$$Q_2^{i'}(y) = -\nu_1^{i,i+1}(y) + \nu_1^{i-1,i}(y) \quad (3.20)$$

$$M_{12}^{i'}(y) = Q_1^i(y) - \frac{e^i}{2} \left( \tau_1^{i,i+1}(y) + \tau_1^{i-1,i}(y) \right) \quad (3.21)$$

$$M_{22}^{i'}(y) = Q_2^i(y) - \frac{e^i}{2} \left( \tau_2^{i,i+1}(y) + \tau_2^{i-1,i}(y) \right) \quad (3.22)$$

où on pose

$$\tilde{\tau}^{0,1} = \tilde{0} \text{ et } \nu^{0,1} = 0. \quad (3.23)$$

#### Déformations généralisées et comportement.

D'après les équations (2.38), (3.14) et (3.15) on peut écrire les déformations généralisées du problème pour  $(i, j) \in [1, n] \times [1, n-1]$  :

$$\tilde{\varepsilon}^i(y) = \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{L} & \frac{1}{2}u^{i'}(y) \\ \frac{1}{2}u^{i'}(y) & v^{i'}(y) \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$\tilde{\chi}^i(y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\varphi_x^{i'}(y) \\ \frac{1}{2}\varphi_x^{i'}(y) & \varphi_y^{i'} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

$$\tilde{d}_{\Phi}^i(y) = \begin{pmatrix} \varphi_x^i(y) \\ \varphi_y^i(y) + w^{i'}(y) \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

$$\tilde{D}^{j,j+1}(y) = \begin{pmatrix} u^{j+1}(y) - u^j(y) - \frac{e^j}{2}\varphi_x^j(y) - \frac{e^{j+1}}{2}\varphi_x^{j+1}(y) \\ v^{j+1}(y) - v^j(y) - \frac{e^j}{2}\varphi_y^j(y) - \frac{e^{j+1}}{2}\varphi_y^{j+1}(y) \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$D_{\nu}^{i,i+1}(y) = w^{i+1}(y) - w^i(y) \quad (3.28)$$

On définit les souplesses  $S_{\nu}^i = \frac{1}{E_N^i}$  et les tenseurs  $\tilde{S}^i$  et  $\tilde{S}_Q^i$  représentant respectivement la souplesse de contrainte plane et la souplesse du cisaillement de la couche  $i$  qui valent, dans le repère

d'orthotropie, en notation de Voigt, les expressions suivantes

$$\tilde{S}_{(\underline{e}_L, \underline{e}_T, \underline{e}_N)}^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_L^i} & \frac{-\nu_{LT}^i}{E_L^i} & 0 \\ \frac{-\nu_{TL}^i}{E_T^i} & \frac{1}{E_T^i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}^i} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{S}_{Q(\underline{e}_L, \underline{e}_T, \underline{e}_N)}^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{G_{LN}^i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G_{TN}^i} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

et dans le repère global

$$\tilde{S}_{(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)}^i = \begin{pmatrix} S_{11}^i & S_{12}^i & S_{16}^i \\ S_{12}^i & S_{22}^i & S_{26}^i \\ S_{16}^i & S_{26}^i & S_{66}^i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{S}_{Q(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)}^i = \begin{pmatrix} S_{Q11}^i & S_{Q12}^i \\ S_{Q12}^i & S_{Q22}^i \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

avec

$$\begin{aligned} S_{11}^i &= \frac{\cos^4 \theta_i}{E_L^i} + \frac{\sin^4 \theta_i}{E_T^i} + \left( \frac{1}{G_{LT}^i} - \frac{2\nu_{LT}^i}{E_L^i} \right) \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i \\ S_{22}^i &= \frac{\sin^4 \theta_i}{E_L^i} + \frac{\cos^4 \theta_i}{E_T^i} + \left( \frac{1}{G_{LT}^i} - \frac{2\nu_{LT}^i}{E_L^i} \right) \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i \\ S_{66}^i &= \frac{\sin^4 \theta_i + \cos^4 \theta_i}{G_{LT}^i} + 2 \left( 2 \left( \frac{1}{E_L^i} + \frac{1}{E_T^i} + \frac{2\nu_{LT}^i}{E_L^i} \right) - \frac{1}{G_{LT}^i} \right) \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i \\ S_{12}^i &= -\frac{\nu_{LT}^i}{E_L^i} (\sin^4 \theta_i + \cos^4 \theta_i) + \left( \frac{1}{E_L^i} + \frac{1}{E_T^i} - \frac{1}{G_{LT}^i} \right) \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i \\ S_{16}^i &= \left( 2 \left( \frac{1}{E_L^i} + \frac{\nu_{LT}^i}{E_L^i} \right) - \frac{1}{G_{LT}^i} \right) \sin \theta_i \cos^3 \theta_i + \left( 2 \left( -\frac{1}{E_T^i} - \frac{\nu_{LT}^i}{E_L^i} \right) + \frac{1}{G_{LT}^i} \right) \sin^3 \theta_i \cos \theta_i \\ S_{26}^i &= \left( 2 \left( \frac{1}{E_L^i} + \frac{\nu_{LT}^i}{E_L^i} \right) - \frac{1}{G_{LT}^i} \right) \sin^3 \theta_i \cos \theta_i + \left( 2 \left( -\frac{1}{E_T^i} - \frac{\nu_{LT}^i}{E_L^i} \right) + \frac{1}{G_{LT}^i} \right) \sin \theta_i \cos^3 \theta_i \\ S_{Q11}^i &= \frac{\cos^2 \theta_i}{G_{LN}^i} + \frac{\sin^2 \theta_i}{G_{TN}^i} \\ S_{Q22}^i &= \frac{\sin^2 \theta_i}{G_{LN}^i} + \frac{\cos^2 \theta_i}{G_{TN}^i} \\ S_{Q12}^i &= 2 \left( \frac{1}{G_{LN}^i} - \frac{1}{G_{TN}^i} \right) \sin \theta_i \cos \theta_i. \end{aligned}$$

On écrit alors les lois de comportement :

- des efforts de membrane de la couche  $i$  pour  $1 \leq i \leq n$  (voir équation (2.78)) :

$$\begin{pmatrix} \frac{\Delta}{L} - \varepsilon_{11}^{i an} \\ v^{i'} - \varepsilon_{22}^{i an} \\ u^{i'} - 2\varepsilon_{12}^{i an} \end{pmatrix} = \frac{1}{e^i} \tilde{S}^i \begin{pmatrix} N_{11}^i \\ N_{22}^i \\ N_{12}^i \end{pmatrix} \quad (3.31)$$



- des moments de flexion et de torsion dans le plan de la couche  $i$  pour  $1 \leq i \leq n$  (voir équation (2.79)) :

$$\begin{pmatrix} 0 - \chi_{11}^{ian} \\ \varphi_y^{i'} - \chi_{22}^{ian} \\ \varphi_x^{i'} - 2\chi_{12}^{ian} \end{pmatrix} = \frac{12}{e^{i3}} \tilde{S}^i \begin{pmatrix} M_{11}^i \\ M_{22}^i \\ M_{12}^i \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

- des efforts de cisaillement hors plan de la couche  $i$  pour  $1 \leq i \leq n$  (voir équation (2.80)) :

$$\begin{pmatrix} \varphi_x^i - d_{\Phi 1}^{ian} \\ \varphi_y^i + w^{i'} - d_{\Phi 2}^{ian} \end{pmatrix} = \frac{6}{5e^i} \tilde{S}_Q^i \begin{pmatrix} Q_1^i \\ Q_2^i \end{pmatrix} - \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^i \begin{pmatrix} \tau_1^{i-1,i} + \tau_1^{i,i+1} \\ \tau_2^{i-1,i} + \tau_2^{i,i+1} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

- des efforts de cisaillement à l'interface  $j, j+1$  pour  $1 \leq j \leq n-1$  (voir équation (2.81) où nous avons passé les déformations généralisées à droite de l'égalité) :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -D_1^{j,j+1 an} \\ -D_2^{j,j+1 an} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -u^{j+1} + u^j + \frac{e^j}{2} \varphi_x^j + \frac{e^{j+1}}{2} \varphi_x^{j+1} \\ -v^{j+1} + v^j + \frac{e^j}{2} \varphi_y^j + \frac{e^{j+1}}{2} \varphi_y^{j+1} \end{pmatrix} \\ &- \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^j \begin{pmatrix} Q_1^j \\ Q_2^j \end{pmatrix} - \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^{j+1} \begin{pmatrix} Q_1^{j+1} \\ Q_2^{j+1} \end{pmatrix} \\ &- \frac{e^j}{30} \tilde{S}_Q^j \begin{pmatrix} \tau_1^{j-1,j} \\ \tau_2^{j-1,j} \end{pmatrix} + \frac{2}{15} \left( e^j \tilde{S}_Q^j + e^{j+1} \tilde{S}_Q^{j+1} \right) \begin{pmatrix} \tau_1^{j,j+1} \\ \tau_2^{j,j+1} \end{pmatrix} \\ &- \frac{e^{j+1}}{30} \tilde{S}_Q^{j+1} \begin{pmatrix} \tau_1^{j+1,j+2} \\ \tau_2^{j+1,j+2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.34)$$

où  $\tau_1^{0,1} = \tau_2^{0,1} = 0$  et  $\tau_1^{n,n+1} = \tau_2^{n,n+1} = 0$

- des efforts d'arrachement à l'interface  $i, i+1$  pour  $1 \leq i \leq n$  (voir équation (2.82) où nous avons passé les déformations généralisées à droite de l'égalité) :

$$\begin{aligned} -D_\nu^{i,i+1 an} &= -w^{i+1} + w^i \\ &+ \frac{9}{70} e^i S_\nu^i \nu^{i-1,i} + \frac{13}{35} (e^i S_\nu^i + e^{i+1} S_\nu^{i+1}) \nu^{i,i+1} + \frac{9}{70} e^{i+1} S_\nu^{i+1} \nu^{i+1,i+2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

où  $w^{n+1} = -w^n$ ,  $\nu^{0,1} = 0$  et  $\nu^{n+1,n+2} = \nu^{n-1,n}$ .

Au total nous avons  $11n - 2$  équations de comportement dont  $5n$  équations différentielles et  $6n - 2$  équations algébriques.

### Conditions aux limites.

Pour l'imposition aux bords des déplacements  $U_{d1}^i$  et  $U_{d2}^i$  dans (3.1) et (3.4), il est commode de définir

$$u_d^i = U_{d1}^i - \frac{\Delta}{L} x \quad \text{et} \quad v_d^i = U_{d2}^i.$$

Compte tenu de ces définitions, l'imposition des déplacements et/ou des efforts aux bords (cf. équations (3.1) à (3.6)), les conditions aux limites s'écrivent pour  $1 \leq i \leq n$

- en  $y = 0$

$$N_{\alpha 2}^i(0) = T_{d\alpha}^i(0) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u^i(0) = u_d^i(0) \\ v^i(0) = v_d^i(0) \end{cases}, \quad (3.36)$$

$$Q_2^i(0) = Q_{d3}^i(0) \quad \text{ou} \quad w^i(0) = U_{d3}^i(0), \quad (3.37)$$

$$M_{\alpha 2}^i(0) = M_{d\alpha}^i(0) \quad \text{ou} \quad \varphi_\alpha^i(0) = \Phi_{d\alpha}^i(0), \quad (3.38)$$

- en  $y = b$

$$N_{\alpha 2}^i(b) = T_{d\alpha}^i(b) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u^i(b) = u_d^i(b) \\ v^i(b) = v_d^i(b) \end{cases}, \quad (3.39)$$

$$Q_2^i(b) = Q_{d3}^i(b) \quad \text{ou} \quad w^i(b) = U_{d3}^i(b), \quad (3.40)$$

$$M_{\alpha 2}^i(b) = M_{d\alpha}^i(b) \quad \text{ou} \quad \varphi_\alpha^i(b) = \Phi_{d\alpha}^i(b), \quad (3.41)$$

où  $\alpha \in \{1, 2\}$ .

*Remarque 5.* Pour le cas du multicouche non symétrique  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ , les équations sont strictement les mêmes que celles du multicouche symétrique à l'exception de l'équation de comportement (3.35) pour  $i = n$ , relative aux efforts d'arrachement au niveau de l'interface en  $z = 0$ . Cette équation est remplacée par l'équation  $\nu^{n,n+1} = 0$  citée dans la remarque 4 de ce chapitre. Ainsi, toute la résolution qui va suivre sera applicable au problème du multicouche non symétrique.

### 3.2.4 Extraction d'un système différentiel du second ordre.

D'après les équations d'équilibre et de comportement, nous avons au total  $10n$  équations différentielles et  $6n - 2$  équations algébriques. Ce qui fait un total de  $16n - 2$  équations, donc autant que d'inconnues. De plus, nous avons  $10n$  conditions aux limites pour  $10n$  équations différentielles. Le problème est donc bien posé. L'ensemble des équations peut donc s'écrire sous la forme d'un système différentiel du premier ordre à  $16n - 2$  inconnues avec second membre (dépendant des champs inélastiques généralisés connus). Nous appelons système I ce système différentiel et solution I le vecteur solution du système. La résolution du système différentiel I peut être effectuée moyennant une formulation variationnelle. Cependant, la résolution est d'autant plus longue que le nombre de couches  $2n$  augmente. Pour cette raison, nous avons choisi d'extraire un sous-système différentiel de dimension moins importante.

La méthode employée consiste, dans un premier temps, à choisir parmi les  $16n - 2$  inconnues, un nombre plus réduit d'inconnues que nous appelons inconnues principales et à exprimer les autres inconnues en fonction des inconnues principales. Ensuite, on détermine grâce aux équations du modèle, autant d'équations que d'inconnues principales et qui portent uniquement sur les inconnues principales.

Les inconnues principales de notre méthode sont les  $5n - 2$  champs adimensionnels suivants

$$\frac{Q^i}{e\bar{G}_{LN}}, \quad u^{j,j+1} = \frac{u^{j+1} - u^j}{e}, \quad v^{j,j+1} = \frac{v^{j+1} - v^j}{e}, \quad \varphi_x^i, \quad \text{et} \quad \varphi_y^i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n - 1 \end{cases}$$

où

$$Q^i = Q_2^i, \quad \bar{G}_{LN} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} G_{LN}^i \quad \text{et} \quad e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} e^i.$$



Soucieux de la clarté de la présentation de ce mémoire, nous avons choisi de mettre dans l'annexe A les calculs qui permettent d'aboutir au système d'équations et dans l'annexe B les matrices et les vecteurs intermédiaires utilisés au cours des calculs.

Cependant, nous avons choisi de présenter ici les étapes principales de la méthode.

On commence par exprimer les inconnues (autres que les inconnues principales) en fonction des inconnues principales (voir paragraphe A.1.1) :

1. *Expression de  $Q_1^i$ ,  $\tau_1^{j,j+1}$  et  $\tau_2^{j,j+1}$  en fonction des inconnues principales.* En utilisant l'équation (3.34) pour  $1 \leq j \leq n-1$  et la première ligne de l'équation (3.33) pour  $1 \leq i \leq n$ , le vecteur  $\tilde{\chi}$  de dimension  $3n-2$  défini par

$$\tilde{\chi}^t = \frac{1}{\bar{G}_{LN}} \times \left( \frac{Q_1^1}{e}, \dots, \frac{Q_1^n}{e}, \tau_1^{1,2}, \dots, \tau_1^{n-1,n}, \tau_2^{1,2}, \dots, \tau_2^{n-1,n} \right),$$

peut s'écrire sous la forme (cf. équation (A.7))

$$\tilde{\chi} = \tilde{\Sigma} \tilde{\gamma} + \tilde{r}^{an} \quad (3.42)$$

où  $\tilde{\gamma}$  est un vecteur  $5n-2$  adimensionnel défini par (ses composantes sont les inconnues principales) :

$$\tilde{\gamma}^t = \left( \frac{Q^1}{e \times \bar{G}_{LN}}, \dots, \frac{Q^1}{e \times \bar{G}_{LN}}, \frac{u^{1,2}}{e}, \dots, \frac{u^{n-1,n}}{e}, \frac{v^{1,2}}{e}, \dots, \frac{v^{n-1,n}}{e}, \varphi_x^1, \dots, \varphi_x^n, \varphi_y^1, \dots, \varphi_y^n \right), \quad (3.43)$$

$\tilde{\Sigma}$  est une matrice  $(3n-2) \times (5n-2)$  constante définie par les équations (A.6), (B.1) à (B.6),  $\tilde{r}^{an}$  est un vecteur faisant intervenir les seules déformations anélastiques généralisées et défini par les équations (A.6) et (A.5).

2. *Expression de  $\tilde{N}^i$  et  $\tilde{M}^i$  en fonction des inconnues principales.* On écrit les efforts membranaires  $N_{11}^i$  en fonction de  $N_{22}^i$ ,  $N_{12}^i$  et  $\frac{\Delta}{L} - \epsilon_{11}^{an}$  moyennant l'équation linéaire algébrique dans la première ligne de la relation (3.31). Alors, les équations d'équilibre (3.18) et (3.19) et la relation (3.42) permettent d'écrire  $N_{12}^{i'}$ ,  $N_{22}^{i'}$  et donc  $N_{11}^{i'}$  en fonction des inconnues principales et du vecteur connu  $\tilde{r}^{an}$  qui fait intervenir les déformations anélastiques généralisées (voir équations (A.10) et (A.11)).  
On obtient de façon analogue les dérivées des moments  $M_{12}^{i'}$ ,  $M_{22}^{i'}$  et  $M_{11}^{i'}$  en fonction des inconnues principales et du vecteur  $\tilde{r}^{an}$  grâce aux équations (3.32), (3.21), (3.22) et (3.42) (voir équations (A.12) et (A.13)).
3. *Expression de  $\nu^{i,i+1}$  et  $w^i$  en fonction des inconnues principales.* L'équation (3.35) pour  $1 \leq i \leq n$  montre que le vecteur

$$\tilde{\nu}^t = \frac{1}{\bar{G}_{LN}} \times (\nu^{1,2}, \dots, \nu^{n,n+1})$$

peut s'écrire sous la forme (cf. équation (A.17) de l'annexe A)

$$\tilde{\nu} = \tilde{E} \tilde{w} - \tilde{\Gamma}^{-1} \tilde{c}^{an} \quad (3.44)$$

où  $\tilde{w}$  est un vecteur adimensionnel défini par

$$\tilde{w}^t = \frac{1}{e} \times (w^1, \dots, w^n),$$



$\tilde{c}^{an}$  est un vecteur faisant intervenir les déformations anélastiques généralisées  $D_{\nu}^{i,i+1an}$  et défini par l'équation (A.15),  $\tilde{E}$  et  $\tilde{\Gamma}$  sont des matrices  $n \times n$  constantes définies par les relations (A.16) et (B.7) à (B.14) pour lesquelles nous avons distingué le cas du multicouche symétrique de celui du multicouche non symétrique (voir remarque 5 du paragraphe 3.2.3).

Enfin, la deuxième ligne de l'équation (3.33) pour  $1 \leq i \leq n$  conjuguée avec l'équation (3.42) donne  $w^{i'}$  sous la forme d'une équation linéaire algébrique des inconnues principales et des déformations anélastiques généralisées (cf. équation (A.18)). Ainsi  $\nu^{i,i+1'}$  s'exprime à son tour sous la forme d'une équation linéaire algébrique des inconnues principales et des déformations anélastiques généralisées.

Puis, on détermine grâce aux équations du modèle encore non utilisées,  $5n - 2$  équations qui portent uniquement sur les  $5n - 2$  inconnues principales et sur les déformations anélastiques généralisées connues (voir paragraphe A.1.2). Les étapes suivies sont les suivantes :

1. *Equations sur  $Q^i = Q_2^i$ .* On dérive dans l'équation d'équilibre (3.20)  $Q^{i'}$  par rapport à  $y$  et en utilisant l'étape 3 de la séquence précédente, on obtient l'expression de  $Q^{i''}$  sous une forme linéaire algébrique des déformations anélastiques généralisées, de leurs dérivées premières et des inconnues principales (cf. équation (A.20)).
2. *Equations sur  $u^{j,j+1}$  et  $v^{j,j+1}$ .* On dérive la deuxième et la troisième ligne du système (3.31) et en utilisant l'étape 2 de la séquence précédente, on obtient l'expression de  $u^{j,j+1''}$  et  $v^{j,j+1''}$  sous une forme linéaire algébrique des déformations anélastiques généralisées, de leurs dérivées premières et des inconnues principales (cf. équations (A.26) et (A.27)).
3. *Equations sur  $\varphi_x^i$  et  $\varphi_y^i$ .* On dérive la deuxième et la troisième ligne du système (3.32) et en utilisant l'étape 2 de la séquence précédente, on obtient l'expression de  $\varphi_x^{i''}$  et  $\varphi_y^{i''}$  sous une forme linéaire algébrique des déformations anélastiques généralisées, de leurs dérivées premières et des inconnues principales (cf. équations (A.28) et (A.29)).

Grâce aux équations obtenues par les étapes 1, 2 et 3 précédentes, on peut déjà écrire un système différentiel du second ordre où l'inconnue serait le vecteur  $\tilde{\gamma}$ . Cependant, il vaut mieux rendre adimensionnel le système d'équations; sinon, on risque de rencontrer des problèmes de grande différence entre les ordres de grandeur des coefficients des matrices. On pose alors pour tout  $s$  élément de  $[0; 1]$  (c'est à dire  $y = bs$ ) et pour  $(i, j) \in [1, n] \times [1, n - 1]$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^i(s) = \frac{Q^i(bs)}{eG_{LN}}, \quad \rho^{j+n}(s) = \frac{u^{j,j+1}(bs)}{e}, \quad \rho^{j+2n-1}(s) = \frac{v^{j,j+1}(bs)}{e}, \\ \rho^{i+3n-2}(s) = \varphi_x^i(bs), \quad \rho^{i+4n-2}(s) = \varphi_y^i(bs) \end{array} \right. \quad (3.45)$$

A partir des équations (A.20), (A.26), (A.27), (A.28) et (A.29) issues des 3 dernières étapes ci-dessus, on obtient le système différentiel adimensionnel suivant (voir équation (A.31)) :

$$\boxed{\frac{d^2}{ds^2} \tilde{\rho}(s) = \tilde{M} \tilde{\rho}(s) + \tilde{\psi}^{an}(s) + \frac{d}{ds} \tilde{\eta}^{an}(s)} \quad (3.46)$$

où

$$- \tilde{\rho} = (\rho^1, \dots, \rho^{5n-2})^t,$$



- $\tilde{\psi}^{an}$  et  $\tilde{\eta}^{an}$  sont des vecteurs connus de dimension  $5n - 2$  dont les composantes sont des champs en  $s$  et leurs expressions font intervenir les déformations anélastiques généralisées (leurs expressions sont données aux équations (B.20) et (B.21)),
- $\tilde{M}$  est une matrice  $(5n - 2) \times (5n - 2)$  constante dont les coefficients sont définis par les relations (B.22) à (B.26).

Les expressions des conditions aux limites du système différentiel portant sur les composantes de  $\tilde{\rho}$  sont écrites aux équations (A.32) à (A.35) du paragraphe A.2.

### 3.2.5 Résolution numérique du système différentiel.

Au paragraphe A.3, nous avons construit une formulation variationnelle permettant de résoudre le système différentiel (3.46) [Washizu, 1975]. La formulation variationnelle est écrite en (A.39). Les détails des calculs sont écrits au paragraphe B.2.

Le segment  $[0, b]$  est divisé en  $N$  segments  $[a_q, a_{q+1}]$  ( $0 \leq q \leq N$ ) et les fonctions d'interpolation choisies sont des fonctions "chapeau". Les équations aboutissent à la résolution d'un système d'équations linéaires (cf. équations (A.43) et (A.44)) :

$$\tilde{R}\tilde{\pi} = \tilde{\mu} \quad (3.47)$$

où

- $\tilde{R}$  est la matrice de rigidité de dimension  $((5n - 2) \times (N - 1)) \times ((5n - 2) \times (N - 1))$  dont les éléments sont calculés au paragraphe B.2.1 moyennant les équations (B.27) à (B.35)
- $\tilde{\pi}$  est un vecteur inconnu dont les  $(5n - 2) \times (N - 1)$  composantes sont les valeurs des inconnues principales aux points de discrétisation  $(a_q)_{0 \leq q \leq N}$
- $\tilde{\mu}$  est un vecteur connu (c'est le second membre du système) dont les  $(5n - 2) \times (N - 1)$  composantes font intervenir les valeurs nodales des déformations anélastiques généralisées, ces composantes sont calculées au paragraphe B.2.2 moyennant les équations (B.36) à (B.50).

Finalement la résolution du système d'équations (3.47) donne les valeurs des inconnues principales aux points de discrétisation. En utilisant les équations du modèle, on détermine sans aucune difficulté les valeurs des autres inconnues du problème (quelque soit le type de multicouche symétrique, voir remarque 5 de ce chapitre) aux points de discrétisation. Ces calculs ont été programmés dans le logiciel DEILAM que nous allons décrire maintenant.

### 3.3 Description du logiciel.

DEILAM est un programme informatique écrit en langage C comportant 2450 lignes. Il permet de faire une résolution semi-analytique par le  $\mathcal{M}_4$ -5n du problème de traction d'un multicouche avec bords chargés présenté précédemment dans ce chapitre. Cependant, toutes les équations du paragraphe précédent n'ont pas encore été programmées de sorte que les seules déformations anélastiques généralisées prises en compte dans la programmation sont celles correspondantes aux déformations hygrothermiques constantes dans chaque couche. Dans ce mémoire, on n'étudiera donc pas la plasticité d'interface (mise en évidence au 1.4.2 du chapitre 1) par le  $\mathcal{M}_4$ -5n ; on le fera au chapitre 5 par le  $\mathcal{M}_4$ -2n+1. Le logiciel même partiellement programmé, permet des applications intéressantes :

- le calcul des efforts d'interface au bord d'une structure multicouche quelconque (à condition que la courbure soit faible),



- l'effet de bord pour un chargement hygrothermique,
- le calcul des assemblages collés,
- la concentration des contraintes dans des plaques trouées avec insert,
- ...

En se servant de la remarque 5 de ce chapitre, DEILAM peut non seulement traiter le cas de multicouches symétriques  $(\theta_1, \dots, \theta_n)_s$  mais aussi celui de multicouches non symétriques  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ .

Avec un ordinateur équipé d'un microprocesseur 500MHz, le *temps de calcul* est inférieur à 10 minutes pour un empilement symétrique à 50 couches en utilisant 50 points de discrétisation sur le segment  $[0, b]$ . Les calculs sont donc très rapides et font de DEILAM un bon prétendant pour un outil de bureau d'études.

Sur la figure 3.4, nous avons une description schématique des entrées, du fonctionnement et des sorties du logiciel DEILAM. Afin que le logiciel puisse effectuer le calcul, l'utilisateur doit fournir des données spécifiques au problème (géométrie, matériaux, conditions aux limites, chargements et déformations anélastiques généralisées) et des données relatives à la résolution par une formulation variationnelle (définition de la discrétisation). Quatre modules ou sous-programmes aident l'utilisateur à rentrer les données. Dans la suite, nous faisons une description des données nécessaires pour le calcul de DEILAM et les modules correspondants qui aident l'utilisateur à la construction des données.

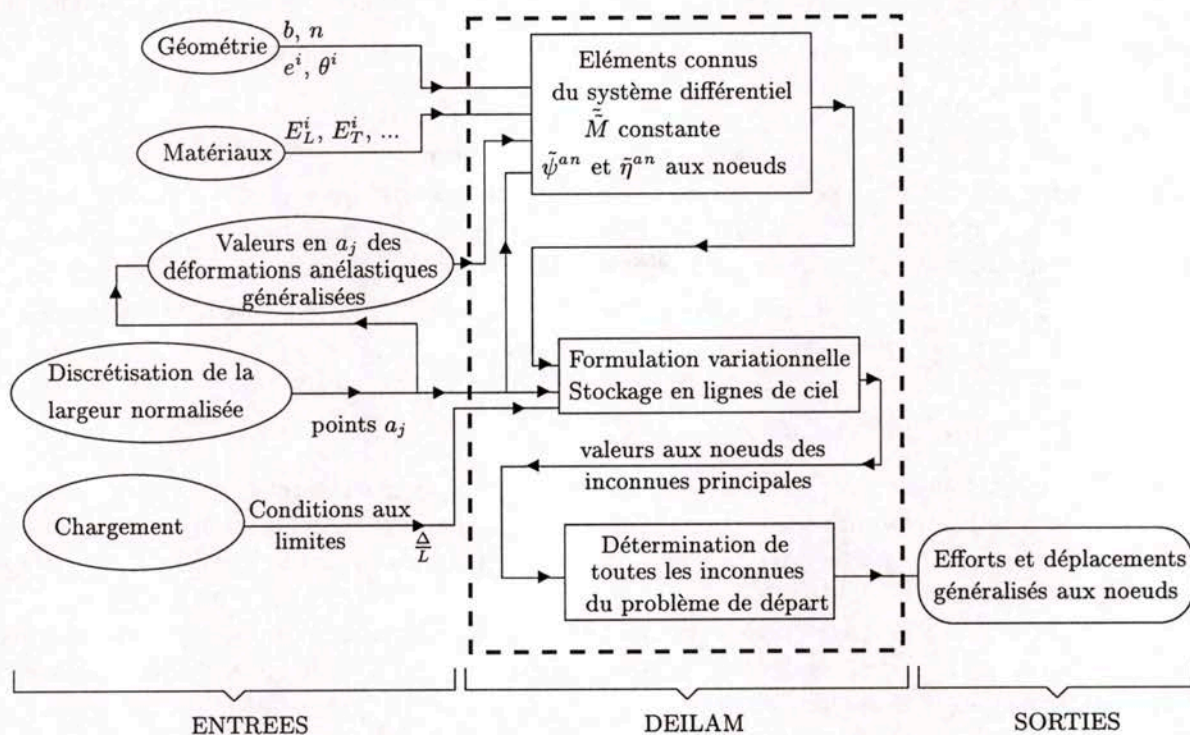


FIG. 3.4 - Description globale de DEILAM.

#### Module 1. "Création du multicouche".

Dans ce module, l'utilisateur

- spécifie si le multicouche est symétrique ou non symétrique



- définit les couches du multicouche
- définit l'épaisseur  $e^i$  de chaque couche et la largeur  $b$  du multicouche
- choisit l'orientation  $\theta^i$  de chaque couche
- choisit dans la "bibliothèque matériaux" le matériau dont chaque couche est constituée; et si le matériau n'existe pas, le module aide l'utilisateur à enrichir la bibliothèque. Lorsqu'on définit le matériau, il est indispensable de définir toutes les caractéristiques élastiques du matériau. Par ailleurs, si on veut effectuer un calcul hygrothermique sans chargement mécanique axial (à préciser dans le module "chargements et conditions aux limites"), on doit définir les coefficients hygrothermiques du matériau dans le repère d'orthotropie.

### Module 2. "Chargements et conditions aux limites".

Dans ce module, l'utilisateur définit la valeur du chargement qui est la déformation axiale imposée  $\frac{\Delta}{L}$  et les valeurs des déplacements et/ou efforts généralisés imposés aux bords  $y = 0$  et  $y = b$  (cf. conditions aux limites (3.1) à (3.6)). Si on souhaite calculer l'influence d'une variation thermique  $\delta T$  et d'une variation d'humidité  $\delta H$  on attribue alors aux constantes  $\delta T$  et  $\delta H$  les valeurs souhaitées. Si en plus, on veut calculer l'influence seule des chargements  $\delta T$  et  $\delta H$  sans appliquer aucune force suivant l'axe  $x$ , on doit le spécifier en laissant un blanc dans la case de la déformation axiale  $\frac{\Delta}{L}$  qui est alors calculée automatiquement par le logiciel de façon à avoir les extrémités  $x = \pm L$  libres d'effort.

### Module 3. "Discrétisation".

Ici, on définit le maillage nécessaire à la résolution numérique du système différentiel (3.46) par la formulation variationnelle (A.39). On définit donc la "finesse du maillage"  $N$  et les valeurs des points de discrétisation  $(a_j)_{0 \leq j \leq N}$  du segment  $[0, b]$  normalisé correspondant à la largeur de l'échantillon. Ces points sont tels que  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_N = 1$ . Le module aide l'utilisateur à placer ces points par des suites géométriques.

### Module 4. "Champs anélastiques".

Actuellement, les seuls champs anélastiques considérés dans la programmation sont les déformations hygrothermiques uniformes par couche. Le programme détermine automatiquement les déformations anélastiques généralisées à partir des coefficients et des chargements hygrothermiques  $\delta T$  et  $\delta H$  (voir paragraphe 3.4.2 pour plus de détails).

Le module "champs anélastiques" est en projet et dans celui-ci les déformations anélastiques pourront être rentrées à l'aide de fonctions de  $y$  usuelles (trigonométriques, exponentielles...) et le module se chargera ensuite de calculer en chaque point de la discrétisation les valeurs des déformations anélastiques généralisées. On pourra aussi rentrer les valeurs de ces champs point par point dans des fichiers; ceci sera utile pour les cas où les valeurs des champs anélastiques ne sont pas connus d'avance et où on doit itérer des combinaisons de DEILAM avec d'autres équations (critères, lois d'écoulement...) pour déterminer les vraies valeurs des champs anélastiques. Cela suppose bien évidemment que l'on connaisse l'expression des équations anélastiques.

Une fois les entrées définies, DEILAM détermine la matrice constante  $\tilde{\tilde{M}}$  et les valeurs aux points de discrétisation des vecteurs  $\tilde{\psi}^{an}$  et  $\tilde{\eta}^{an}$  du système différentiel (3.46). La matrice  $\tilde{\tilde{M}}$  est



déterminée à partir des souplesses et de la géométrie du multicouche. Les valeurs des vecteurs  $\tilde{\psi}^{an}$  et  $\tilde{\eta}^{an}$  sont déterminées à partir des déformations anélastiques généralisées, des souplesses et de la géométrie du multicouche. Pour le cas des seules déformations hygrothermiques uniformes dans chaque couche, ces vecteurs sont constants suivant la largeur du multicouche.

DEILAM calcule ensuite la matrice de rigidité et le second membre du système d'équations (A.43) obtenu par la formulation variationnelle (A.42). La matrice et le second membre sont stockés suivant la méthode "des lignes de ciel" [Dhatt et Touzot, 1984]. Cette méthode est idéale pour le stockage et résolution de systèmes dont la matrice de rigidité est constituée d'éléments non nuls sur une bande diagonale de largeur assez faible. Pour la résolution, la méthode ne détermine pas la matrice inverse de la matrice de rigidité, mais détermine directement le vecteur solution du système : produit de la matrice inverse fois le vecteur second membre. On gagne énormément en mémoire et en rapidité par le biais de cette méthode "des lignes de ciel". Après cette étape, nous obtenons les valeurs aux noeuds du vecteur  $\tilde{\rho}$  - défini en (A.30) - dont les composantes sont les inconnues principales.

Finalement, DEILAM détermine à partir des inconnues principales le reste des inconnues du problème. Ainsi, les sorties du logiciel sont des fichiers comportant sur la première colonne les valeurs des points de discrétisation et sur les autres colonnes les valeurs des efforts et des déplacements généralisés correspondantes. Il existe un fichier résultat pour chaque famille d'inconnues :

- $u^i, v^i, w^i, \varphi_x^i, \varphi_y^i$  (5 fichiers à  $n + 1$  colonnes)
- $N_{11}^i, N_{12}^i, N_{22}^i, M_{11}^i, M_{12}^i, M_{22}^i, Q_1^i, Q_2^i$  (8 fichiers à  $n + 1$  colonnes)
- $\tilde{\tau}_1^{j,j+1}, \tilde{\tau}_2^{j,j+1}$  (2 fichiers à  $n$  colonnes)
- $\nu^{i,i+1}$  (1 fichier à  $n + 1$  colonnes)

### 3.4 Conditions de bord, maillage et convergence pour des problèmes usuels.

Le type de discrétisation à choisir pour avoir des résultats précis dépend des conditions de bord, des déformations anélastiques généralisées et du rapport largeur-épaisseur  $\frac{b}{e}$  donnés. Nous verrons dans la suite de cette section, quelques problèmes usuels où on explicite les conditions de bord, les déformations anélastiques généralisées et une discrétisation du segment  $[0, b]$  suffisante pour avoir des résultats précis convergents.

#### 3.4.1 Problème de bord libre.

Il s'agit du problème qui se réfère aux essais de traction sur des multicouches élastiques avec bords libres, problème qui correspond aux essais que nous avons réalisés jusqu'au délaminage au chapitre 1. Les logiciels CLEOPS [Lécuyer, 1991] et ASCA [Pagano et Soni, 1992] entre autres, font aussi une résolution de ce problème.

L'essai de traction est modélisé comme suit :

Dans le repère  $(0, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ , nous considérons un multicouche  $(\theta_1, \dots, \theta_n)_s$  occupant le domaine  $-L \leq x \leq L, -b \leq y \leq b, -e \leq z \leq e$  (cf. figure 3.5). Le multicouche est soumis à une déformation axiale uniforme  $\frac{\Delta}{L}$  donnée suivant l'axe des  $x$ . Les champs de contrainte et de déformation sont supposés indépendants de  $x$  (hypothèses classiques [Wang et Crossman, 1977a], [Lécuyer, 1991],



[Pagano et Soni, 1992] pour nos essais puisque les éprouvettes sont suffisamment longues). Le but est de déterminer les champs de contrainte dans le multicouche moyennant le  $\mathcal{M}_4\text{-}5n$ .

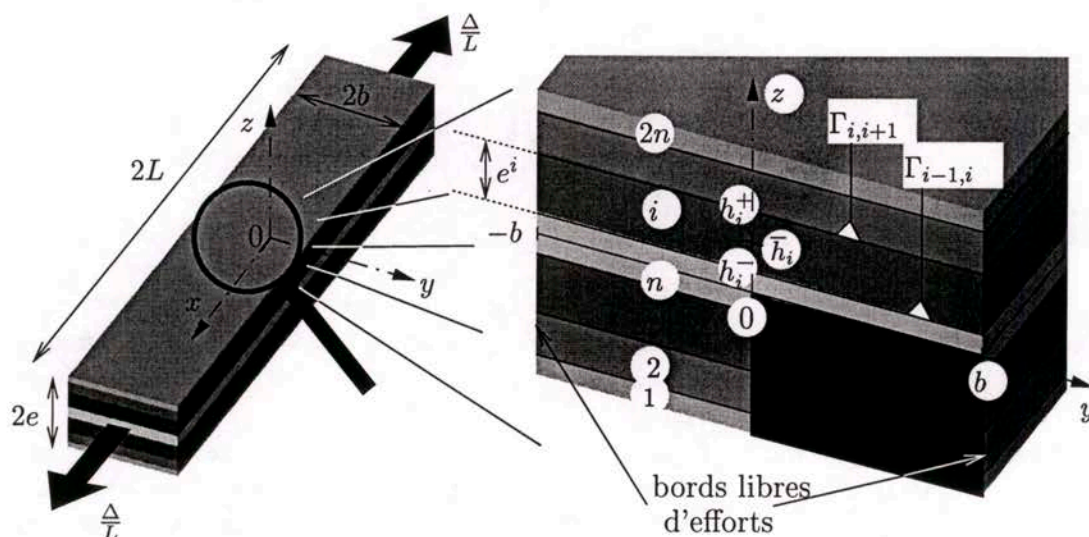


FIG. 3.5 – Problème de bord libre.

Nous avons déjà vu que pour des multicouches et des chargements symétriques, DEILAM se restreint à la détermination des champs dans la demi-éprouvette  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  (cf. chapitre 3). Mais pour ce problème particulier, au lieu de faire le calcul sur toute la largeur de l'éprouvette on peut exploiter des symétries supplémentaires afin de diminuer le domaine d'étude.

En effet, compte tenu de la géométrie et de la particularité du chargement (traction avec bords libres), on peut dire qu'il existe une symétrie par rotation de  $180^\circ$  autour de l'axe  $z$ . Il s'ensuit que les champs en  $y$  :

- $u^i, v^i, \varphi_x^i$  et  $\varphi_y^i$  sont impaires
- $w^i$  est paire
- $\tilde{\tau}^{j,j+1}$  et  $\tilde{Q}^i$  sont impaires
- $\tilde{N}^i, \tilde{M}^i$  et  $\nu^{i,i+1}$  sont paires.

Par conséquent, on peut se restreindre à l'étude du quart de cellule sud-est noirci sur la figure 3.5. D'après la parité des champs et les conditions du bord libre en  $y = b$ , les conditions aux limites (cf. équations (3.36) à (3.41)) nécessaires au calcul de DEILAM sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^i(0) = 0 \\ v^i(0) = 0 \\ \varphi_x^i(0) = 0 \\ \varphi_y^i(0) = 0 \\ Q_2^i(0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} N_{12}^i(b) = 0 \\ N_{22}^i(b) = 0 \\ Q_2^i(b) = 0 \\ M_{12}^i(b) = 0 \\ M_{22}^i(b) = 0 \end{array} \right. \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n. \quad (3.48)$$

A ce stade, on dispose de toutes les informations nécessaires à l'exécution de DEILAM pour résoudre le problème de bord libre.

En ce qui concerne la discrétisation du segment  $[0, b]$  normalisé, puisqu'on étudie l'effet du bord  $y = b$ , la discrétisation doit être plus fine près du bord. D'autre part, les effets du bord n'existent que sur une distance de 2 fois l'épaisseur totale du multicouche (c'est à dire  $4e$ ). Pour la zone comprise entre  $y = 0$  et  $y = b - 4e$ , les calculs de la théorie classique de plaques (Love-Kirchoff) sont valables.



Intéressons nous au seul effet de bord. On choisit donc  $b = 4e$ . Si nous effectuons le calcul par DEILAM, nous remarquons qu'une discrétisation à 50 points à pas progressif suffit pour bien décrire les champs sur la demi-largeur  $[0, b]$  et pour avoir des valeurs au bord avec une précision de 99,9% (l'erreur est calculée par rapport aux valeurs convergées maximales provenant d'une discrétisation à 200 points à pas progressif). Les calculs sont donc convergents et aucune singularité n'apparaît, contrairement aux approches 3D, par exemple les calculs par éléments finis. Sur la figure 3.6, nous illustrons la convergence des calculs par l'utilisation des maillages à 200 et à 50 points. Sur cette figure, on représente les courbes des efforts de cisaillement à l'interface 10/-10 d'un  $(\pm 10)_s$  en carbone-époxy en traction pour une déformation de traction  $\frac{\Delta}{L} = 1$  et pour les deux types de maillage. Nous voyons que les points du calcul avec 50 points coïncident avec la courbe du maillage à 200 points. *Tous les calculs de DEILAM qui vont apparaître dans la suite de ce mémoire seront effectués avec ce maillage à 50 points à pas progressif.*

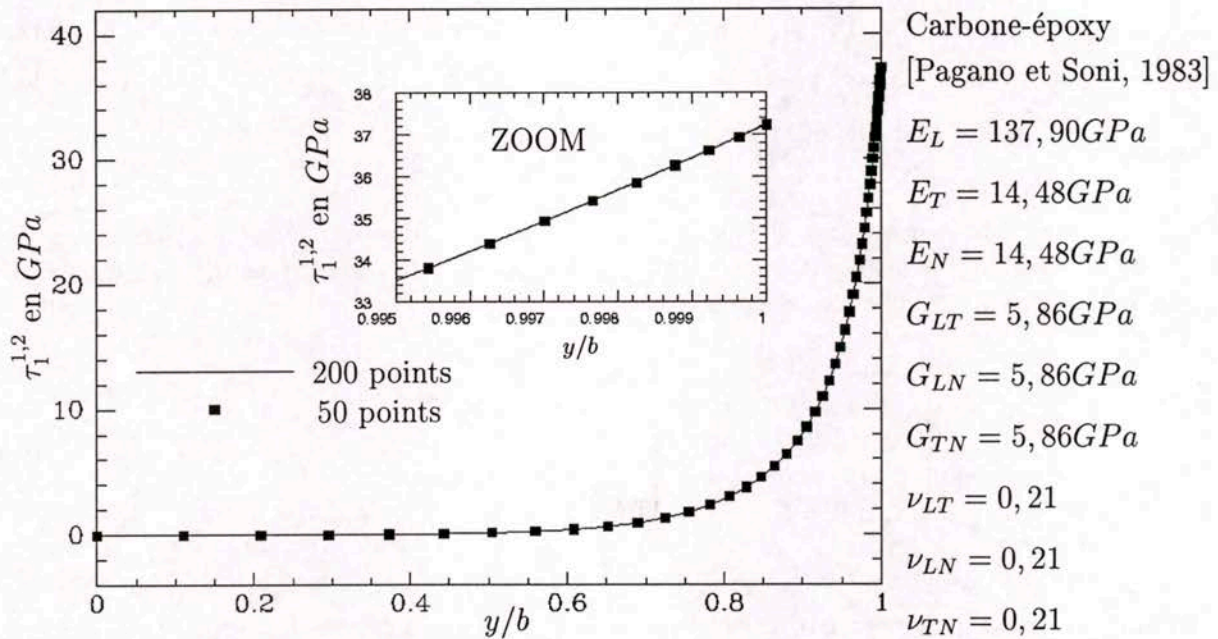


FIG. 3.6 - Empilement  $(\pm 10)_s$  en traction pour  $\frac{\Delta}{L} = 1$  : deux types de maillage.

### 3.4.2 Chargement thermique uniforme avec extrémités libres d'effort.

Le multicouche considéré est celui de la figure 3.5, mais cette fois-ci aucune déformation n'est imposée. On soumet le multicouche à une variation de température uniforme  $\delta T$ . Le multicouche est libre d'efforts à ses extrémités  $x = \pm L$  et à ses bords  $y = \pm b$ .

Les déformations anélastiques 3D engendrées par  $\delta T$  dans la couche  $i$  s'écrivent dans le repère propre  $(L, T, N)$  de la couche

$$\bar{\bar{\epsilon}}^{an}(\underline{x}) = \delta T (\alpha_L^i \underline{e}_L \otimes \underline{e}_L + \alpha_T^i \underline{e}_T \otimes \underline{e}_T + \alpha_N^i \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \quad (3.49)$$

où  $\alpha_L^i$ ,  $\alpha_T^i$  et  $\alpha_N^i$  sont les coefficients de dilatation thermique de la couche  $i$ .

Le tenseur des déformations anélastiques est donc constant par couche. Dans le repère global  $(x, y, z)$  le tenseur de déformation s'écrit

$$\bar{\bar{\epsilon}}^{an}(\underline{x}) = \delta T (\alpha_{11}^i \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \alpha_{22}^i \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \alpha_{12}^i (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + \alpha_{33}^i \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \quad (3.50)$$



où on définit

$$\begin{aligned}\alpha_{11}^i &= \cos^2\theta_i \alpha_L^i + \sin^2\theta_i \alpha_T^i \\ \alpha_{22}^i &= \sin^2\theta_i \alpha_L^i + \cos^2\theta_i \alpha_T^i \\ \alpha_{12}^i &= \cos\theta_i \sin\theta_i (\alpha_L^i - \alpha_T^i) \\ \alpha_{33}^i &= \alpha_N^i.\end{aligned}$$

D'après les équations (2.63) à (2.71) et (2.73) à (2.75), les déformations anélastiques généralisées s'écrivent dans ce cas pour  $(i, j) \in [1, 2n] \times [1, 2n - 1]$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{i\text{an}}(x, y) = \delta T \alpha_{\alpha\beta}^i \quad (\alpha, \beta) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\} \quad (3.51)$$

$$\chi_{\alpha\beta}^{i\text{an}}(x, y) = 0 \quad (\alpha, \beta) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\} \quad (3.52)$$

$$d_{\Phi\alpha}^{i\text{an}}(x, y) = 0 \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad (3.53)$$

$$D_{\alpha}^{j,j+1\text{an}}(x, y) = 0 \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad (3.54)$$

$$D_{\nu}^{j,j+1\text{an}}(x, y) = \delta T \left( e^j \frac{\alpha_{33}^j}{2} + e^{j+1} \frac{\alpha_{33}^{j+1}}{2} \right) \quad (3.55)$$

Encore une fois, comme pour le cas du problème de bord libre, les symétries permettent de se restreindre au quart de cellule sud-est noirci sur la figure 3.5. Les conditions aux limites à utiliser pour que DEILAM effectue les calculs sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^i(0) = 0 \\ v^i(0) = 0 \\ \varphi_x^i(0) = 0 \\ \varphi_y^i(0) = 0 \\ Q_2^i(0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} N_{12}^i(b) = 0 \\ N_{22}^i(b) = 0 \\ Q_2^i(b) = 0 \\ M_{12}^i(b) = 0 \\ M_{22}^i(b) = 0 \end{array} \right. \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n. \quad (3.56)$$

A ce stade, les déformations anélastiques généralisées et les conditions aux limites ont été déterminées. Enfin, puisque DEILAM travaille à  $\frac{\Delta}{L}$  imposé, nous devons introduire la valeur exacte de cette déformation. Comme aucun effort extérieur n'est appliqué, la valeur exacte de  $\frac{\Delta}{L}$  est celle qui donne une résultante axiale

$$F_x = \int_{-b}^b N_{11}^i(y) dy = 0 \quad (3.57)$$

suivant  $x$  nulle. Pour déterminer cette valeur exacte de  $\frac{\Delta}{L}$  qui n'est autre que le coefficient de dilatation thermique global de l'empilement  $\alpha_x$  suivant l'axe  $x$ , nous adoptons la même démarche que [Wang et Crossman, 1977b] et [Carreira, 1998] (cf. figure 3.7) :

1. Nous faisons un premier calcul avec  $(\frac{\Delta}{L}, \delta T) = (1, 0)$ . Nous déterminons ensuite à partir des efforts membranaires  $N_{11}^i$  calculés, la résultante des efforts axiaux  $F_x^{(1,0)}$  correspondante (cf. équation (3.57) et ligne pointillée de la figure 3.7).
2. Nous effectuons ensuite le calcul pour  $(\frac{\Delta}{L}, \delta T) = (0, \delta T)$  avec  $\delta T \neq 0$ , c'est à dire en bloquant la déformation globale longitudinale. Nous déterminons la résultante axiale  $F_x^{(0,\delta T)}$  correspondante (cf. équation (3.57) et figure 3.7).

3. La courbe en trait plein de la figure 3.7 parallèle à la ligne pointillée nous permet alors d'identifier le couple  $(\frac{\Delta}{L}, \delta T) = (\alpha_x, \delta T)$  pour lequel  $F_x = 0$ . Le calcul par DEILAM avec ce couple de données donnera les efforts intérieurs et déplacements généralisés exacts.

DEILAM permet de réaliser ces 3 étapes de manière automatique si l'utilisateur le désire. Pour ce, il suffit de laisser un blanc dans la valeur à attribuer à  $\frac{\Delta}{L}$  dans le module "chargements et conditions aux limites" (voir la description de ce module au paragraphe 3.3). De cette façon, à partir des seuls coefficients thermo-élastiques et de la variation de température  $\delta T$ , DEILAM détermine les efforts et les déplacements généralisés dans le multicouche sous le seul effet de la variation de température.

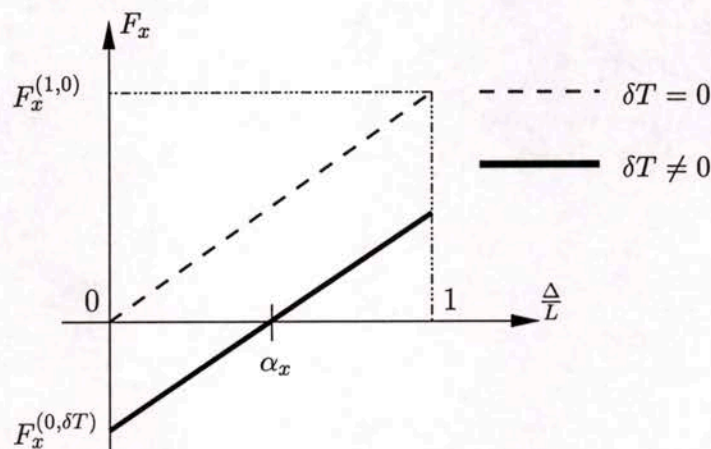


FIG. 3.7 - Détermination de  $\frac{\Delta}{L}$  pour le problème thermique.

Par ailleurs, nous pouvons dire que pour le cas d'une variation uniforme de température :

- les résultats sont convergents
- aucune singularité n'apparaît
- le même type de discrétisation que pour le problème de bord libre suffit.

*Remarque* : des raisonnements analogues permettent de faire le calcul correspondant à la seule variation d'humidité  $\delta H$ .

### 3.4.3 Structure élastique multicouche de géométrie quelconque avec bords libres.

Ce paragraphe est une extension du cas simple du problème de bord libre (cf. paragraphe 3.4.1). Pour une structure mince élastique quelconque avec bords libres, nous savons bien que la théorie classique des plaques donne de bons résultats suffisamment loin des bords (à une distance du bord d'environ deux fois l'épaisseur totale du multicouche). Pour le cas des structures multicouches avec des rayons de courbure beaucoup plus grands que l'épaisseur du multicouche, nous pouvons utiliser la méthode de Raju et Crews [Raju et Crews, 1982] pour déterminer les effets de bord de la même façon que dans les logiciels CLEOPS [Lécuyer, 1991] et ASCA [Pagano et Soni, 1992]. Avec cette méthode, les éléments infinitésimaux près des bords (cf. figure 3.8) sont équivalents à des plaques semi-infinies avec un bord libre soumises à des déformations axiales (traction ou compression). La valeur de la déformation axiale est déterminée moyennant un calcul éléments finis utilisant la théorie classique des plaques ou par les formules analytiques de [Lekhnitskii, 1968] pour des plaques



trouées. De plus, il n'est pas nécessaire de prendre en compte les gradients de cette déformation le long du bord. La déformation axiale à laquelle est soumise chaque plaque est donc uniforme.

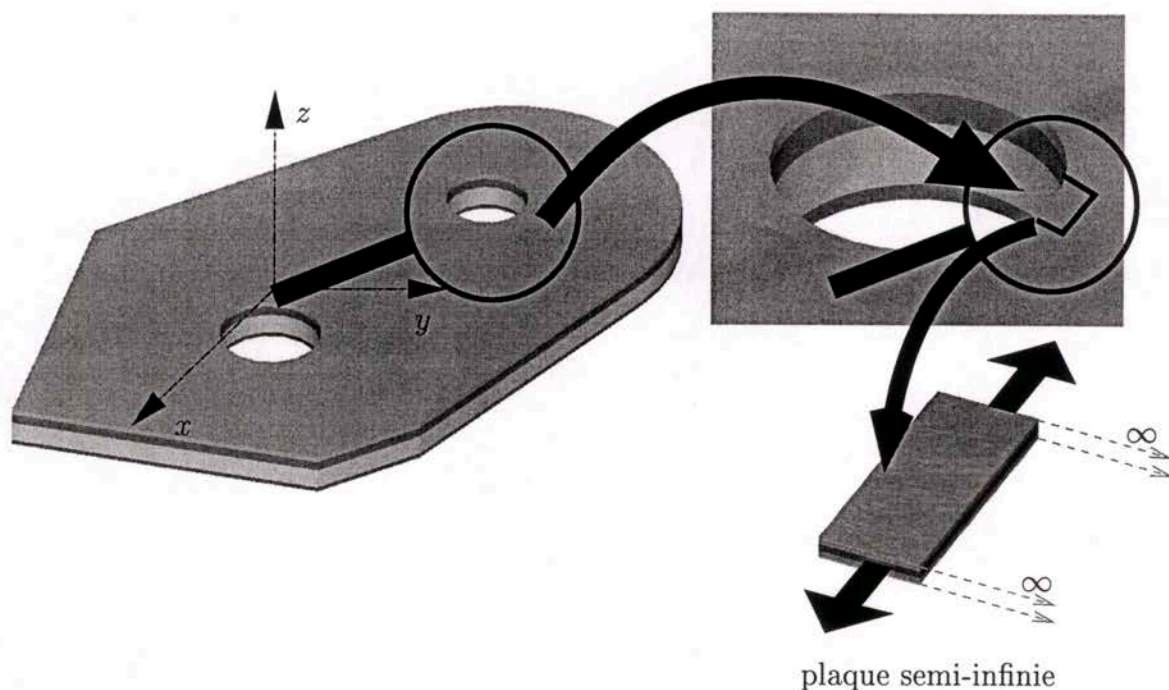


FIG. 3.8 – Problème de bord libre.

Avec notre logiciel DEILAM, nous ne sommes pas capables de traiter directement le problème d'une plaque semi-infinie, mais en fait, les résultats obtenus pour le problème de bord libre d'une plaque bornée assez large nous permettent de déterminer l'effet du bord libre de la plaque semi-infinie. En effet, il suffit de prendre pour la plaque bornée une demi-largeur  $b \geq 4e$  ( $e$  étant la demi-épaisseur du multicouche) et de considérer l'effet d'un seul bord. Et c'est cet effet-ci qui donne l'effet de bord de la plaque semi-infinie (voir figure 3.9).

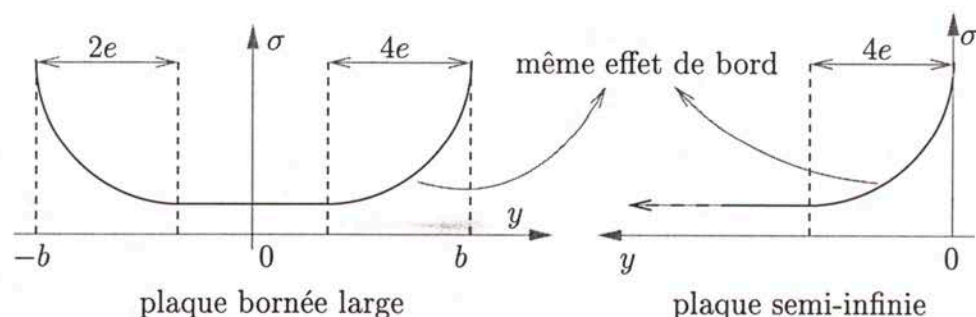


FIG. 3.9 – Effet de bord libre.

En se plaçant à différents endroits le long du bord de la structure, en identifiant le champ de déformation axiale et en exécutant DEILAM, on peut déterminer le profil 3D des contraintes. Puisqu'on fait appel à la résolution du problème de bord libre qui ne présente pas de singularités avec notre logiciel, les résultats de DEILAM pour une structure quelconque sont finis et convergents.

Il est clair que la mise en place dans un code de calcul d'un post-processeur qui automatiserait cette procédure aux bords d'une structure serait un réel progrès.

*Remarque.* Une autre application de DEILAM peut être trouvée dans [Hadj-Ahmed, 1999] pour le calcul des efforts d'interface dans un assemblage collé.

### 3.5 Validation de DEILAM.

Afin de valider les calculs du logiciel DEILAM, nous avons comparé nos résultats avec le modèle local de Pagano [Pagano et Soni, 1983] et les éléments finis de [Wang et Crossman, 1977a], [Wang et Crossman, 1977b], [Yin, 1997] et [Carreira, 1998] pour plusieurs types d'empilements et de chargements thermomécaniques. Pour tous ces auteurs, le matériau choisi pour le pli constitutif est un carbone-époxy dont les caractéristiques thermomécaniques sont :

$$\begin{aligned} E_L &= 137,90 \text{ GPa} \\ E_T = E_N &= 14,48 \text{ GPa} \\ G_{LT} = G_{LN} = G_{TN} &= 5,86 \text{ GPa} \\ \nu_{LT} = \nu_{LN} = \nu_{TN} &= 0,21 \\ \alpha_L &= 0,36 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C} \\ \alpha_T = \alpha_N &= 28,80 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Pour le multicouche, le rapport largeur sur épaisseur choisi est

$$\frac{b}{e} = 4.$$

Les problèmes que nous avons choisis pour la validation sont la traction d'une éprouvette symétrique avec bords libres (problème de bord libre) et le chargement thermique uniforme sur un multicouche qui ont fait tous deux l'objet des paragraphes précédents.

Les champs du  $M4-5n$  sont finis même en  $y = b$  alors que les éléments finis 3D donnent des champs singuliers au bord. Par conséquent, nos comparaisons entre les résultats des éléments finis (EF) et de DEILAM ne peuvent être faites que dans un intervalle de confiance  $[0, b - \epsilon]$  [Carreira, 1998] ( $\epsilon \simeq 1\%$  de l'épaisseur du stratifié). La pertinence des valeurs au bord (c'est souvent la valeur maximale pour les efforts d'interface) de notre modèle et donc de DEILAM, doit être prouvée par un autre moyen (par exemple, par un critère de délaminage portant sur les valeurs aux bords des efforts d'interface [Caron et al., 1999]).

#### 3.5.1 Essai de traction sans variation de température.

Dans [Chabot, 1997] on trouve une résolution analytique des équations du modèle  $M4-5n$  pour le cas d'un essai de traction d'un quadricouche symétrique sans variation de température. Ces résultats permettront de valider notre programmation pour les quadricouches.

Dans un premier temps, nous nous contenterons dans cette partie de rappeler les courbes des cisaillements d'interface pour les empilements  $(0,90)_s$  et  $(45,-45)_s$  calculés par DEILAM, par la méthode analytique de [Chabot, 1997], par le modèle local de [Pagano et Soni, 1983] et par les



éléments finis de [Carreira, 1998]. Ensuite, nous étudierons les cas de deux 8 couches  $(90, 0, 45, -45)_s$  et  $(45, -45, 0, 90)_s$  traités dans [Wang et Crossman, 1977a].

Les courbes que nous présenterons dans cette partie sont obtenues pour une déformation axiale unitaire :

$$\frac{\Delta}{L} = 1.$$

### Empilements $(0, 90)_s$ et $(45, -45)_s$ .

Les solutions analytiques de [Chabot, 1997] et semi-analytiques du  $\mathcal{M}_4-5n$  (DEILAM) donnent les mêmes valeurs pour tous les efforts généralisés. Les figures 3.10 et 3.11 donnent l'évolution des cisaillements d'interface sur la demi-largeur.

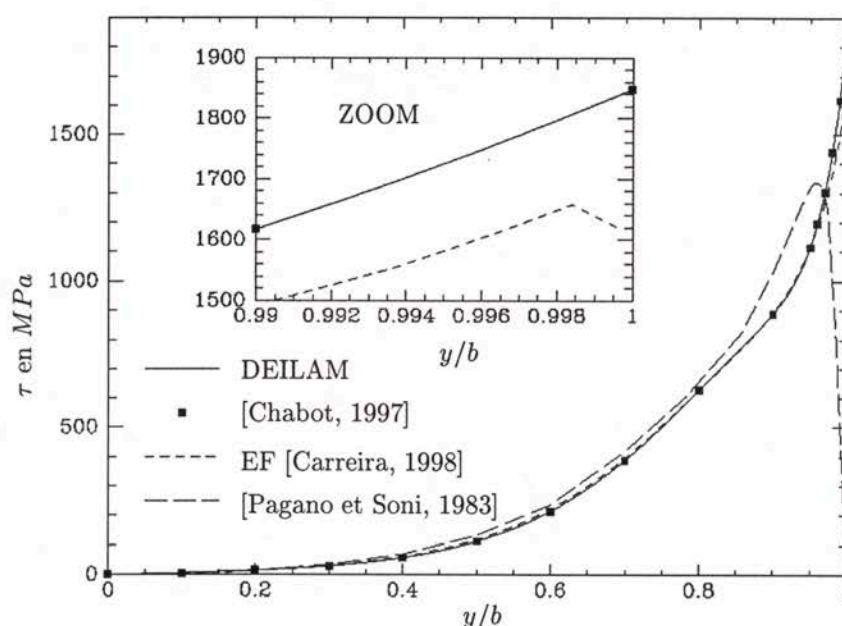


FIG. 3.10 – Cisaillement  $\tau_{yz}$  à l'interface 0/90 du  $(0, 90)_s$  pour  $\frac{\Delta}{L} = 1$ .

Pour le cas du  $(0, 90)_s$ , loin du bord, les éléments finis [Carreira, 1998] et notre logiciel donnent presque les mêmes valeurs pour le cisaillement  $\tau_{yz}$  (cf. figure 3.10). Au voisinage du bord, les valeurs de cisaillement des éléments finis sont dépendantes du maillage [Carreira, 1998]. Les valeurs au bord du  $\mathcal{M}_4-5n$  sont finies et bien déterminées.

Par ailleurs, les calculs dans [Pagano et Soni, 1983] et les éléments finis dans [Carreira, 1998] vérifient bien la condition aux limites 3D  $\tau_{yz} = 0$  au bord  $y = b$ . Notre modèle ne la vérifie pas et pour la vérifier nous devrions enrichir le modèle. Cependant, même si la condition aux limites 3D n'est pas vérifiée, le  $\mathcal{M}_4-5n$  fait une bonne description du cisaillement sur la largeur. On note un écart assez net avec valeur maximale obtenue par Pagano qui est plus éloignée de la solution éléments finis convergée dans la zone de confiance.

Pour l'empilement  $(45, -45)_s$ , on s'intéresse au cisaillement  $\tau_{xz}$  à l'interface 45/ - 45 (cf. figure 3.11). DEILAM et le modèle local de Pagano donnent presque les mêmes résultats et tous les deux donnent des valeurs finies au bord. Les calculs de DEILAM et des éléments finis diffèrent près du bord. Cela est dû à la présence d'une singularité au bord pour les calculs 3D. Le modèle multiparticulaire et donc DEILAM, ont l'avantage de donner une valeur finie au bord.

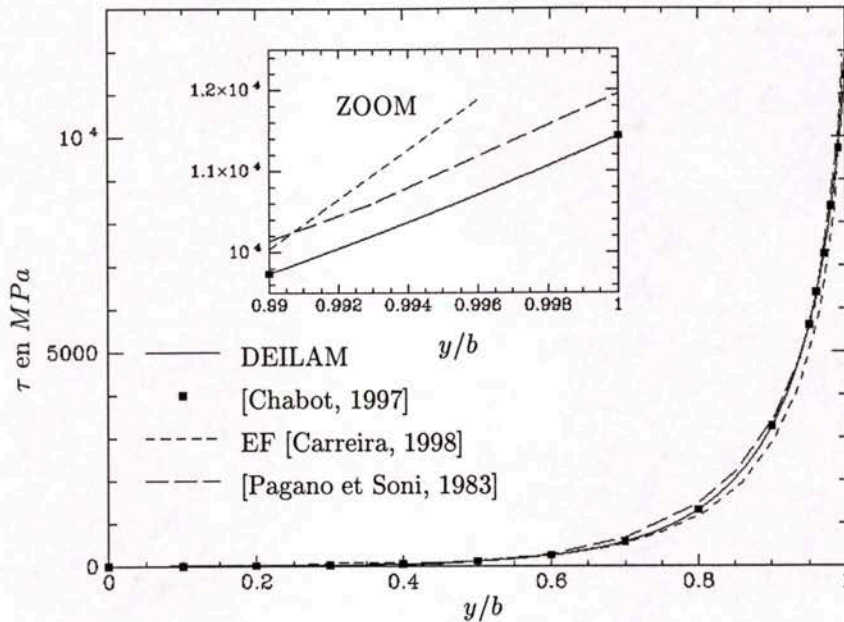


FIG. 3.11 – Cisaillement  $\tau_{xz}$  à l'interface 45/-45 du  $(45, -45)_s$  pour  $\frac{\Delta}{L} = 1$ .

#### Empilements $(45, -45, 0, 90)_s$ et $(90, 0, 45, -45)_s$ .

Dans [Wang et Crossman, 1977a] on réalise des calculs pour des stratifiés à 4 couches et à 8 couches. Le nombre d'éléments pour les deux types de stratifiés est le même. Les résultats des empilements à 8 couches sont donc moins précis que pour le cas des 4 couches, même si on maille assez fin près du bord et des interfaces.

Suffisamment loin des bords, nous trouvons avec DEILAM une bonne reproduction des efforts d'interface calculés par les éléments finis de [Wang et Crossman, 1977a] pour les empilements  $(45, -45, 0, 90)_s$  et  $(90, 0, 45, -45)_s$  (cf. figures 3.12 et 3.13). Sur la figure 3.12, la forte pente des cisaillements  $\tau_{xz}$  du  $(45, -45, 0, 90)_s$  de [Wang et Crossman, 1977a] au bord suggère qu'il existe une singularité au bord, alors que DEILAM donne des résultats finis au bord. Il est aussi possible que les efforts normaux aux interfaces 45/-45 et -45/-45 du  $(90, 0, 45, -45)_s$  soient singuliers au bord pour le calcul 3D.

#### 3.5.2 Variation de température sur empilement libre.

Afin de terminer la validation de DEILAM, nous ferons des applications de notre logiciel que nous comparerons avec les résultats de [Wang et Crossman, 1977b], [Carreira, 1998] et [Yin, 1997] par éléments finis pour une variation de température  $\delta T = 1^\circ C$ . Les empilements traités sont le  $(0, 90)_s$  et le  $(45, -45)_s$ .

On rappelle que dans [Yin, 1997] on fait un maillage 3D de l'éprouvette entière sans faire l'hypothèse d'invariance par translation suivant  $x$ , alors que pour les autres auteurs considérés on adopte l'hypothèse d'invariance par translation. Les résultats de Yin exposés ici, correspondent au calcul au milieu de l'éprouvette.



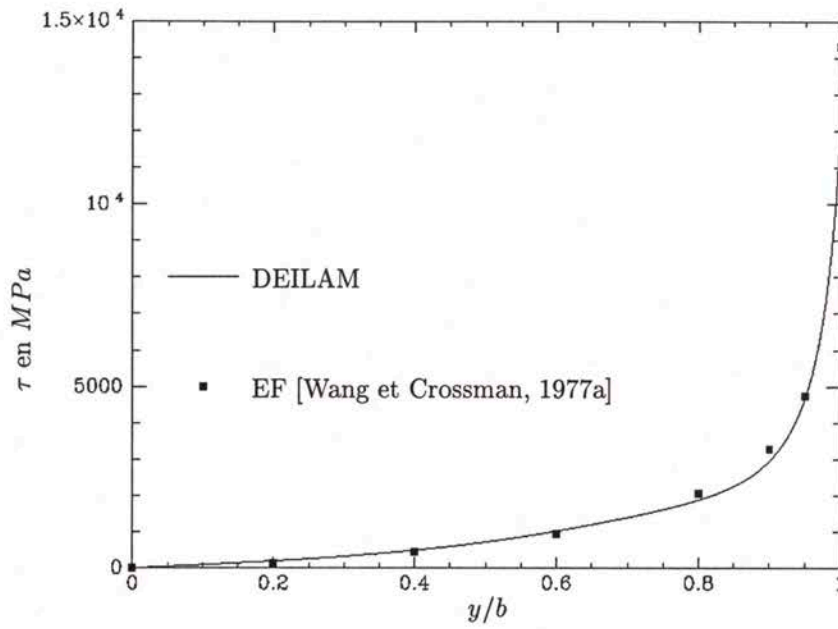


FIG. 3.12 – Cisaillement  $\tau_{xz}$  à l'interface 45/-45 du  $(45, -45, 0, 90)_s$  pour  $\frac{\Delta}{L} = 1$ .

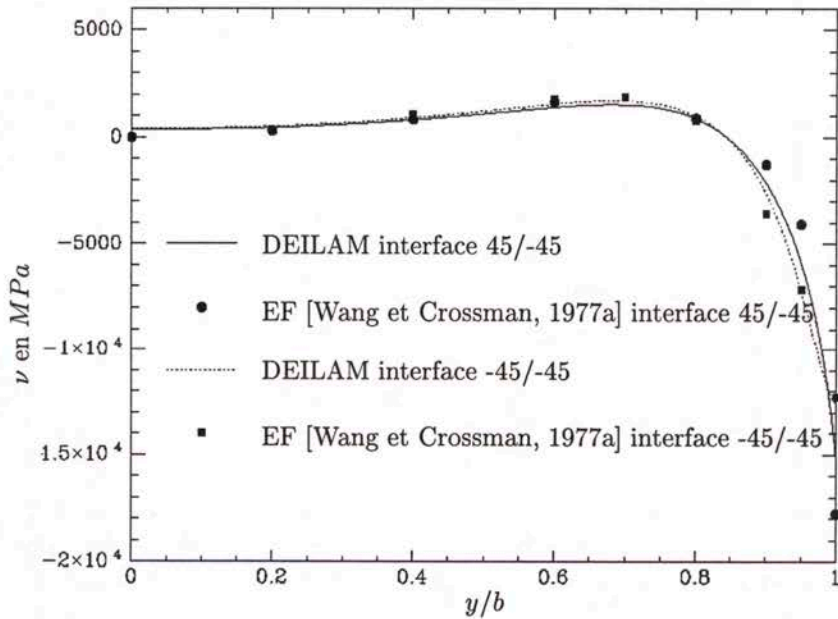


FIG. 3.13 – Arrachements  $\nu$  aux interfaces 45/-45 et -45/-45 du  $(90, 0, 45, -45)_s$  pour  $\frac{\Delta}{L} = 1$ .

**Empilement (0, 90)<sub>s</sub>.**

Les figures 3.14 et 3.15 donnent l'évolution des efforts d'interface, à savoir le cisaillement  $\tau_{yz}$  à l'interface 0/90 et les arrachements  $\nu$  aux interfaces 0/90 et 90/90.

Suffisamment loin du bord, nos résultats sont en accord avec [Wang et Crossman, 1977b], [Yin, 1997] et [Carreira, 1998]. Il est cependant important de remarquer que les résultats de [Yin, 1997] sont moins précis que les autres car ils utilisent un maillage moins fin suivant  $y$ . En effet, on maille toute l'éprouvette sans faire l'hypothèse d'invariance par translation.

On peut remarquer, que la valeur maximale du cisaillement d'interface se trouve au bord pour le modèle  $\mathcal{M}_4-5n$ . Les éléments finis de [Carreira, 1998] donnent pratiquement les mêmes résultats que le modèle  $\mathcal{M}_4-5n$  sauf au bord.

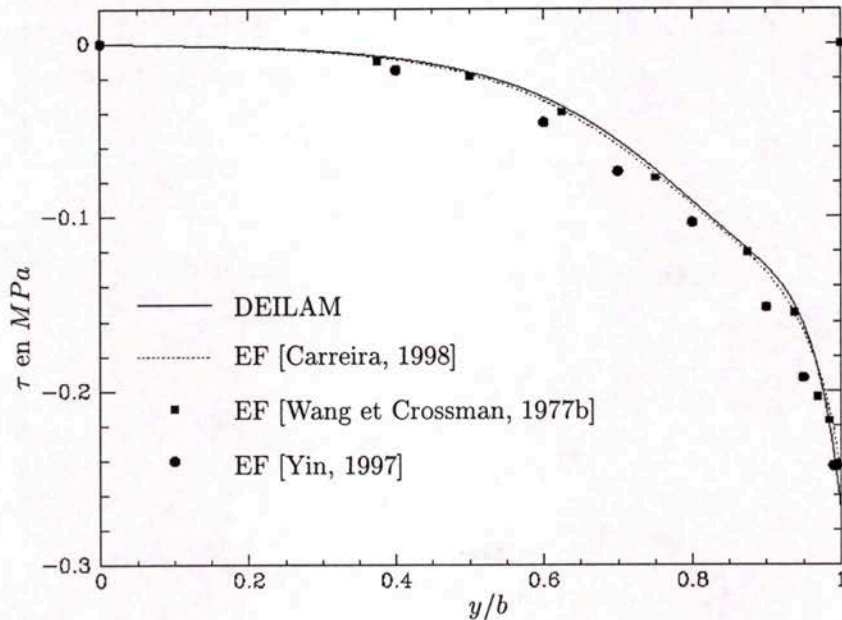


FIG. 3.14 – Cisaillement  $\tau_{yz}$  à l'interface 0/90 du (0, 90)<sub>s</sub> pour  $\delta T = 1^\circ C$ .

**Empilement (45, -45)<sub>s</sub>.**

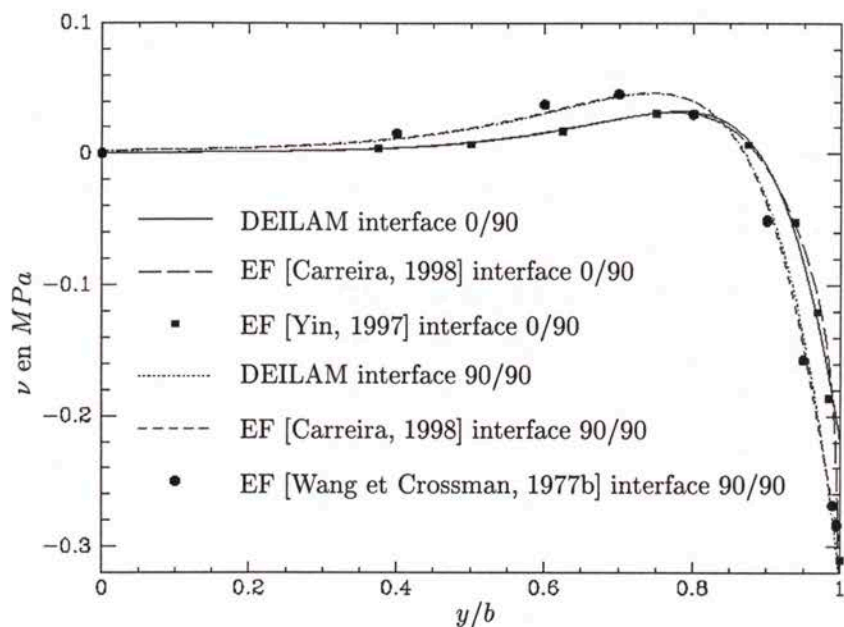
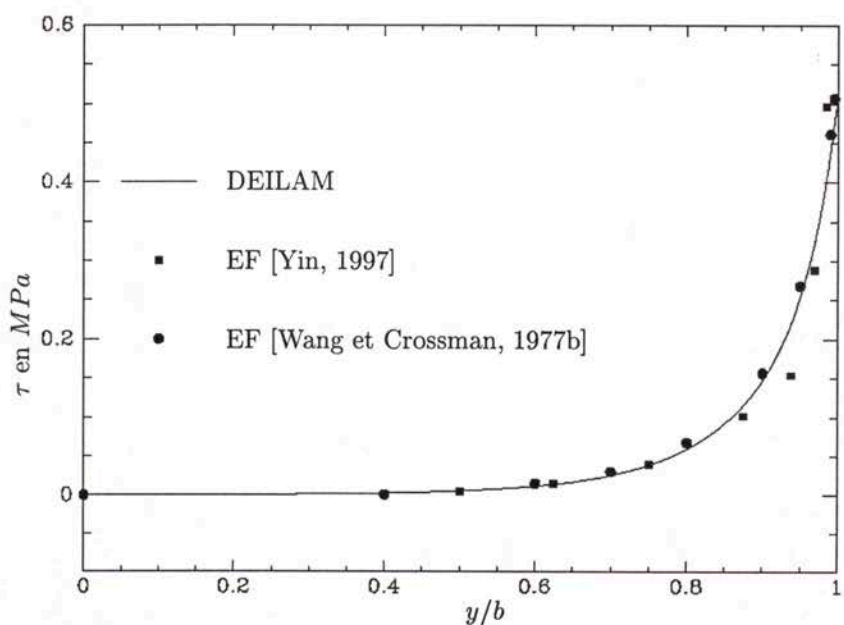
Les figures 3.16 et 3.17 donnent l'évolution des efforts de cisaillement  $\tau_{xz}$  à l'interface 45/-45 et les arrachements  $\nu$  aux interfaces 45/-45 et -45/-45.

Au bord, les efforts 3D aux interfaces sont singuliers. Mais sur l'intervalle de confiance, les éléments finis de [Wang et Crossman, 1977b] donnent presque les mêmes résultats que DEILAM. Les résultats de [Yin, 1997] sont légèrement différents. Cette différence peut être expliquée par l'utilisation d'un maillage relativement grossier suivant la demi largeur.

Une fois de plus, les valeurs au bord obtenues par le  $\mathcal{M}_4-5n$  sont finies et les calculs par DEILAM convergent rapidement.

*Remarque.* Les dilatations thermiques trouvées pour les empilements (0, 90)<sub>s</sub> et (45, -45)<sub>s</sub> sont données sur le tableau 3.1. Là encore, DEILAM et les éléments finis donnent des résultats comparables.



FIG. 3.15 – Arrachements  $\nu$  aux interfaces 0/90 et 90/90 du  $(0,90)_s$  pour  $\delta T = 1^\circ C$ .FIG. 3.16 – Cisaillement  $\tau_{xz}$  à l'interface 45/-45 du  $(45, -45)_s$  pour  $\delta T = 1^\circ C$ .

Empilement	DEILAM	[Wang et Crossman, 1977b]	[Carreira, 1998]
$(0,90)_s$	$3,42 \times 10^{-6}$	$\simeq 3,49 \times 10^{-6}$	$3,43 \times 10^{-6}$
$(45, -45)_s$	$4,51 \times 10^{-6}$	$4,48 \times 10^{-6}$	pas traité

TAB. 3.1 – Dilatation globale  $\alpha_x$  due à une variation  $\delta T = 1^\circ C$ .

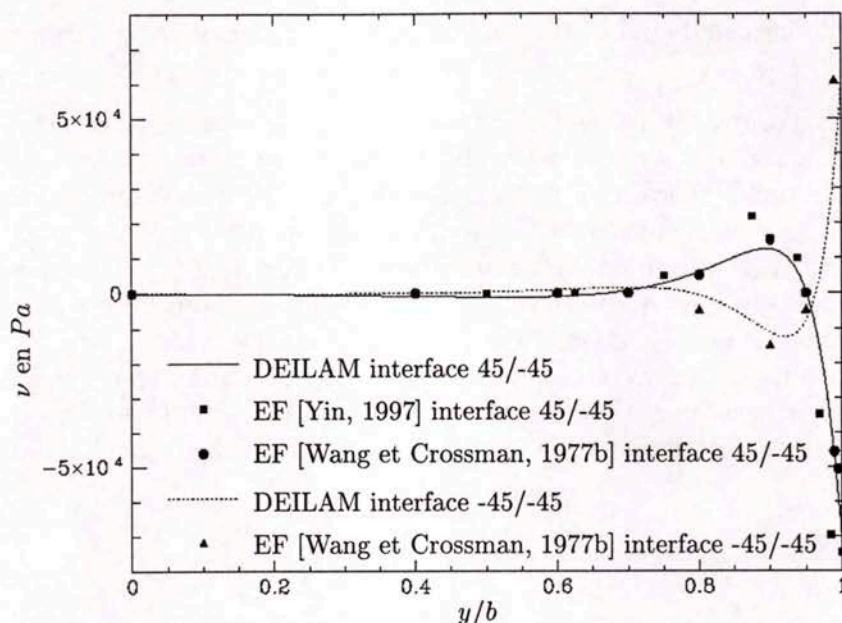


FIG. 3.17 – Arrachements  $\nu$  aux interfaces du  $(45, -45)_s$  pour  $\delta T = 1^\circ C$ .

### 3.6 Conclusion.

Nous avons appliqué les équations du  $\mathcal{M}_4-5n$  au problème de multicouches en traction chargés aux bords en présence de déformations anélastiques dans les couches et de discontinuités des déplacements aux interfaces connues. Le modèle  $\mathcal{M}_4-5n$  a été développé au chapitre 2 et modélise le multicouche par une superposition de plaques de Reissner couplées par des efforts de cisaillement et d'arrachement d'interface. Les équations du modèle ont conduit à un système différentiel du second ordre. Le système a été résolu numériquement par une formulation variationnelle.

Si les équations ont été écrites, elles n'ont pas encore été programmées pour tous les cas de champs anélastiques donnés. On a programmé dans le logiciel DEILAM les équations correspondantes au cas des seules déformations anélastiques constantes par couche. Ceci est le cas par exemple des déformations hygrothermiques. La plasticité d'interface ne pourra pas être étudiée dans ce mémoire par le  $\mathcal{M}_4-5n$  et DEILAM. Ceci sera fait au chapitre 5 moyennant une méthode analytique par le  $\mathcal{M}_4-2n+1$  (un modèle plus simple que le  $\mathcal{M}_4-5n$  qui a été développé au chapitre 2). Plusieurs applications peuvent déjà être envisagées compte tenu de la flexibilité vis à vis des chargements aux bords.

DEILAM a été validé par une comparaison avec d'autres approches pour le problème de bord libre et pour le problème de chargement thermique uniforme de multicouches. Les résultats par DEILAM convergent très vite, même aux bords. Il n'existe pas de singularités pour le modèle  $\mathcal{M}_4-5n$ . Les différentes techniques de calcul d'effet de bord diffèrent uniquement très près du bord. La pertinence des résultats de DEILAM au bord ne peut pas être jugée par la comparaison avec d'autres techniques de calcul. Les valeurs seront éprouvées au chapitre suivant dans lequel sont proposés des critères de délaminage portant sur les contraintes au bord.

Par ailleurs, l'absence de singularités pour les champs du  $\mathcal{M}_4-5n$  constitue un grand avantage de DEILAM par rapport aux techniques éléments finies 3D car l'utilisateur ne se pose plus la question de convergence des résultats. Le logiciel DEILAM, tel qu'il est actuellement et moyennant l'introduction de critères pertinents (cf. chapitre 4), peut déjà servir pour l'étude des effets de bord



comme un outil de bureau d'études en tant que post-processeur d'un code éléments finis de type coque ou plaque.

Un autre logiciel, qui n'a pas été présenté dans ce chapitre, a aussi été programmé avec les équations du  $\mathcal{M}_4-2n+1$  appliqué au problème de traction d'un multicouche en présence de déformations anélastiques constantes dans chaque couche. On rappelle que le  $\mathcal{M}_4-2n+1$  modélise le multicouche par une superposition de membranes couplées par des cisaillements d'interface. Les équations de ce modèle sont résolues de façon analogue à celles du  $\mathcal{M}_4-5n$ . Les résultats du logiciel convergent aussi très vite et confirment l'absence de singularités pour le  $\mathcal{M}_4-2n+1$ .

Les cisaillements du modèle  $\mathcal{M}_4-2n+1$  sont moins précis que ceux du  $\mathcal{M}_4-5n$  [Carreira, 1998]. Nous allons néanmoins utiliser les résultats du  $\mathcal{M}_4-2n+1$  pour établir des critères de délaminage en cisaillement au chapitre suivant. Les critères trouvés par le  $\mathcal{M}_4-5n$  et le  $\mathcal{M}_4-2n+1$  seront éprouvés sur les essais de délaminage du paragraphe 1.4.3 du chapitre 1 et sur d'autres essais glanés dans la littérature.

## Chapitre 4

# Critères de délaminage pour les matériaux élastiques fragiles.

Dans ce chapitre, nous allons proposer deux familles de critères de délaminage pour les matériaux multicouches élastiques fragiles.

### 4.1 Introduction et bibliographie.

Nous avons créé au chapitre précédent un logiciel appelé DEILAM permettant de calculer les efforts aux interfaces d'un multicouche à l'aide du modèle  $\mathcal{M}_4-5n$  développé au chapitre 2 de ce mémoire. L'objectif ultime et principal de notre logiciel est le dimensionnement des structures multicouches pour prévenir notamment le délaminage, fissuration au niveau d'une interface entre les couches. L'approche élastique est souvent utilisée même pour des matériaux qui ne sont pas purement élastiques ; en fait, tout peut être repris par des coefficients de sécurité fiables pour la conception des structures [Salençon, 1983].

En ce qui concerne les critères de délaminage pour les matériaux élastiques fragiles, il nous semble judicieux, avant de les présenter, de rappeler quelques notions générales des critères de rupture classiques qui permettront au lecteur de mieux comprendre les raisons des démarches adoptées pour la prédiction du délaminage dans les matériaux multicouches.

Pour tout critère de rupture il est indispensable d'évaluer l'état de contraintes dans le matériau. Parmi les critères de rupture ponctuels les plus simples, on peut citer les critères de Tresca et de Von Mises [Lemaître et Chaboche, 1985] pour les matériaux isotropes ou le critère de Tsai-Wu [Tsai et Wu, 1971] pour les matériaux orthotropes. Ces critères portent sur la valeur ponctuelle d'une contrainte effective qui s'exprime en fonction des contraintes dans le matériau. Par conséquent, ce type de critères sont inadaptés pour le cas de champs de contrainte singuliers (infinis).

Il est très courant d'avoir des contraintes singulières dans les problèmes mécanique ; cela a lieu, par exemple, en pointe de fissure dans une structure fissurée. Pour le cas de contraintes singulières le critère de rupture peut porter sur les facteurs d'intensité de contrainte [Irwin, 1958]. Pour les structures fissurées, le critère de progression de fissure de Griffith [Griffith, 1920] portant sur le taux de restitution d'énergie  $G$  est souvent utilisé. Le taux de restitution d'énergie est défini par

$$G = -\frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad (4.1)$$



où  $W$  définit l'énergie potentielle de la structure pour une longueur de fissure  $\eta$  donnée. Le taux de restitution d'énergie peut être calculé par la méthode de refermeture de fissure [Bui, 1978] : le travail qu'il faut fournir pour refermer la fissure sur une longueur infinitésimale  $d\eta$  est égale au taux de restitution d'énergie. Le critère énergétique de Griffith s'écrit

$$G \geq G^c, \tag{4.2}$$

où  $G^c$  est le taux de restitution d'énergie critique. On peut ainsi, grâce aux travaux d'Irwin et de Griffith, écrire des critères pour le cas de contraintes singulières. Cependant, même avec l'apport d'Irwin et de Griffith, les approches déterministes ne sont pas capables d'expliquer et de prévoir des effets d'échelle observés expérimentalement.

Les effets d'échelle peuvent être, entre autres, de type effet d'échelle de volume. L'effet d'échelle de volume apparaît lorsque des volumes homothétiques cassent pour des niveaux de contrainte différents. C'est le cas par exemple, d'une éprouvette 90<sub>8</sub> en composite unidirectionnel qui casse en traction à un niveau de contrainte plus faible qu'une éprouvette 90<sub>4</sub> [Caron et Ehrlacher, 1997]. Ces effets d'échelle peuvent être expliqués par la théorie statistique de Weibull [Weibull, 1952]. Nous trouvons dans [Laalai, 1995] une démarche très pertinente inspiré de la théorie de Weibull pour modéliser les effets d'échelle dans des matériaux hétérogènes élastiques quasi-fragiles. Grâce à son modèle aléatoire et à des simulations informatiques, Laalai trouve que la charge de traction critique pour un volume de taille caractéristique  $L$  (voir figure 4.1) peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma^c = \sigma^0 \times L^{-\alpha} \tag{4.3}$$

$\sigma^0$  et  $\alpha$  étant deux constantes strictement positives à identifier. Plusieurs travaux destinés à la modélisation de l'effet d'échelle pour les matériaux composites unidirectionnels utilisent aussi ce type de formule [Sutherland et al., 1999]. Cependant, cette formule n'est pas valable lorsque le rapport  $L$ /taille de l'hétérogénéité devient très important, l'effet d'échelle disparaît et la charge critique devient alors constante [Laalai, 1995].

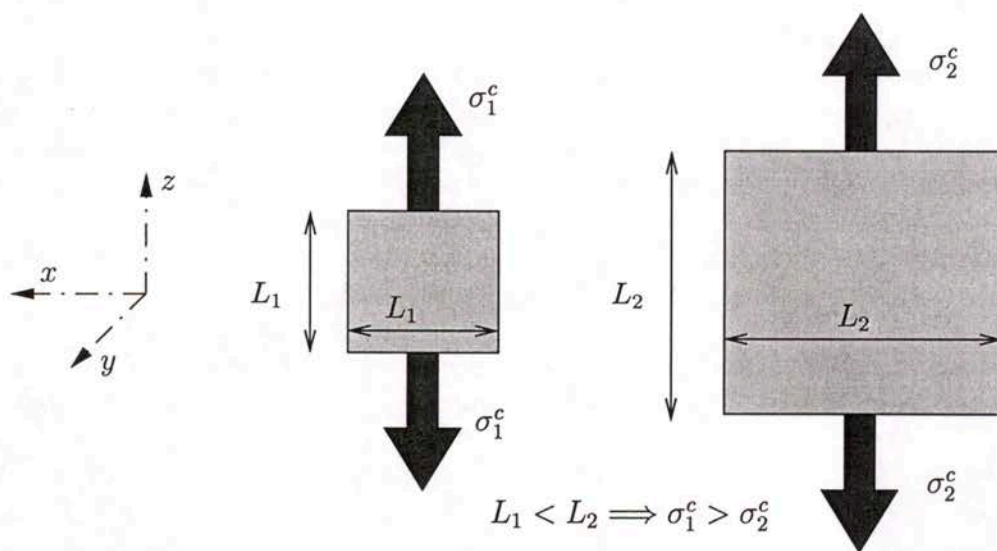


FIG. 4.1 – Effet d'échelle de volume.

Nous allons maintenant faire une analyse bibliographique des critères de délaminage s'appuyant sur une analyse élastique.

#### 4.1.1 Critères de délaminage pour les matériaux composites multicouches.

Le délaminage apparaît en général à cause des effets de bord. Les contraintes 3D étant souvent singulières aux interfaces sur les bords [Leguillon et Sanchez-Palencia, 1987], [Wang et Choi, 1982], il est impossible d'écrire un critère de délaminage portant sur les valeurs ponctuelles des contraintes par ce moyen de calcul.

Les critères utilisés pour prédire le délaminage sont très variés. On peut en faire néanmoins un classement non exhaustif

- critères portant sur des valeurs "moyennes" des contraintes à définir
- critères en facteur d'intensité de singularité
- critères énergétiques.

La pertinence des critères est jugée suivant leur capacité à prévoir le délaminage pour différentes orientations des couches et à reproduire les effets d'épaisseur constatés expérimentalement (cf. paragraphe 1.4.3 du chapitre 1).

##### Critères en contraintes moyennes.

Pour toutes les notations de cette partie, les indices  $i$  varient de 1 à 3 et indiquent les directions par rapport au repère global de la figure 4.2.

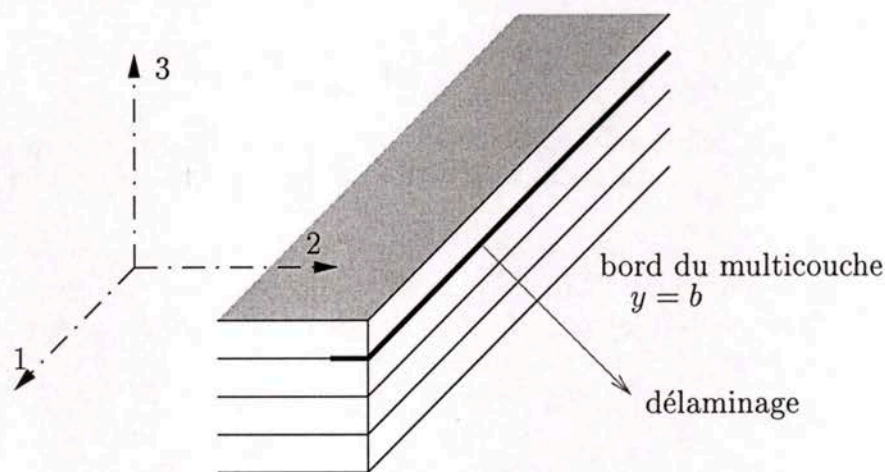


FIG. 4.2 - Position du multicouche par rapport au repère global.

Les critères en question portent sur les moyennes  $\bar{\sigma}_{i3}$  (sur une longueur caractéristique  $h_i$  à partir du bord  $y = b$ ) des contraintes  $\sigma_{i3}$  aux interfaces calculées par

$$\bar{\sigma}_{i3} = \int_{b-h_i}^b \sigma_{i3} dy.$$

Cela suppose l'évaluation des contraintes aux interfaces. Si la longueur  $h_i$  ne dépend pas de l'épaisseur du multicouche, avec ces critères, on tient compte de l'effet d'épaisseur sur l'initiation du délaminage. En effet, lorsque l'épaisseur des couches augmente, la profondeur de l'effet de bord augmente aussi et les contraintes moyennes changent (en général elles augmentent). Pour ces critères, on définit les résistances moyennes  $\sigma_{i3}^D$  et si on veut distinguer le cas de la traction du cas de la compression des interfaces, on définit les résistances de traction  $\sigma_{33}^{DT}$  et de compression  $\sigma_{33}^{DC}$ . On doit alors identifier les longueurs caractéristiques  $h_i$  et les résistances  $\sigma_{i3}^D$  par des essais



d'initiation du délaminage. Ces grandeurs sont supposées être intrinsèques au matériau donné. Pour faciliter l'identification, on détermine séparément pour chaque  $i$  les longueurs caractéristiques  $h_i$  et les résistances  $\sigma_{i3}^D$  par des essais où la contribution des termes en  $\sigma_{j3}^D$  ( $j \neq i$ ) est négligeable.

Parmi les premières tentatives de critère portant sur les contraintes moyennes, nous pouvons citer les travaux de Whitney et Nuismer [Whitney et Nuismer, 1974] avec des plaques multicouches trouées. Kim et Soni s'inspirent ensuite de ce critère pour écrire un critère d'initiation de délaminage en mode I portant sur la valeur moyenne  $\bar{\sigma}_{33}$  de la contrainte normale aux interfaces  $\sigma_{33}$  sur une distance caractéristique à partir du bord [Kim et Soni, 1984]. Les contraintes aux interfaces sont déterminées par le modèle global-local de Pagano [Pagano et Soni, 1983]. Kim et Soni utilisent ensuite leur critère, avec une distance caractéristique unique, pour prédire l'initiation du "délaminage" et reproduisent à peu près bien les effets d'échelle de certaines familles de multicouches en traction. Ces mêmes auteurs écrivent ensuite dans [Kim et Soni, 1986] un critère plus général du type :

$$\left(\frac{\bar{\sigma}_{13}}{\sigma_{13}^D}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\sigma}_{23}}{\sigma_{23}^D}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\sigma}_{33}}{\sigma_{33}^{DT} \sigma_{33}^{DC}}\right)^2 + \bar{\sigma}_{33} \left(\frac{1}{\sigma_{33}^{DT}} - \frac{1}{\sigma_{33}^{DC}}\right) = 1. \quad (4.4)$$

Le critère ainsi écrit permet de prendre en compte, par son dernier terme en  $\bar{\sigma}_{33}$ , l'effet inhibiteur des contraintes  $\sigma_{33}$  négatives sur l'amorçage du délaminage.

Un autre exemple de critère est le critère quadratique d'initiation du délaminage de Brewer et Lagace [Brewer et Lagace, 1988] :

$$\left(\frac{\bar{\sigma}_{13}}{\sigma_{13}^D}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\sigma}_{23}}{\sigma_{23}^D}\right)^2 + \left(\frac{[\bar{\sigma}_{33}]^+}{\sigma_{33}^{DT}}\right)^2 + \left(\frac{[\bar{\sigma}_{33}]^-}{\sigma_{33}^{DC}}\right)^2 = 1, \quad (4.5)$$

où  $[\bar{\sigma}_{33}]^+$  et  $[\bar{\sigma}_{33}]^-$  définissent respectivement les parties positive et négative de  $\bar{\sigma}_{33}$ . Avec ce critère, ces auteurs prédisent plus ou moins bien l'initiation du délaminage sur des multicouches en carbone-époxy.

Plus récemment, Leguillon [Leguillon, 1998] et Marion [Marion, 2000] se servent du développement asymptotique et du logiciel CLEOPS dans [Lécuyer, 1991] pour évaluer les contraintes aux interfaces. Dans [Leguillon, 1998], on fait une identification du cisaillement moyen critique  $\sigma_{13}^D$  et de la longueur  $h_1$  et dans [Marion, 2000] on trouve en plus l'identification d'un effort normal critique  $\sigma_{33}^D$  et de la longueur  $h_3$  pour écrire le critère

$$\left(\frac{\bar{\sigma}_{13}}{\sigma_{13}^D}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\sigma}_{23}}{\sigma_{23}^D}\right)^2 + \frac{\bar{\sigma}_{33}}{\sigma_{33}^D} = 1. \quad (4.6)$$

Marion fait cette dernière identification moyennant des essais de traction sur des empilements qui "délaminent" en mode I, comme le  $(\pm 25_n, 90_{n/2})_s$  entre autres. Marion remarque cependant qu'il existe une incohérence des résultats quand les grandeurs critiques en mode I sont identifiées par deux familles d'empilements différentes. Il explique alors que cela peut être dû au fait que les fissures observées ne sont pas de vrais délaminages mais des fissures intralaminaires comme le montre la figure 4.3.

### Critères en facteur d'intensité de singularité.

Irwin est le premier à utiliser les facteurs d'intensité de contrainte dans des critères de rupture [Irwin, 1958]. Pour les matériaux multicouches, ces critères s'écrivent généralement sous la forme :

$$\left(\frac{K_I}{K_I^c}\right)^l + \left(\frac{K_{II}}{K_{II}^c}\right)^m + \left(\frac{K_{III}}{K_{III}^c}\right)^n = 1 \quad (4.7)$$

où



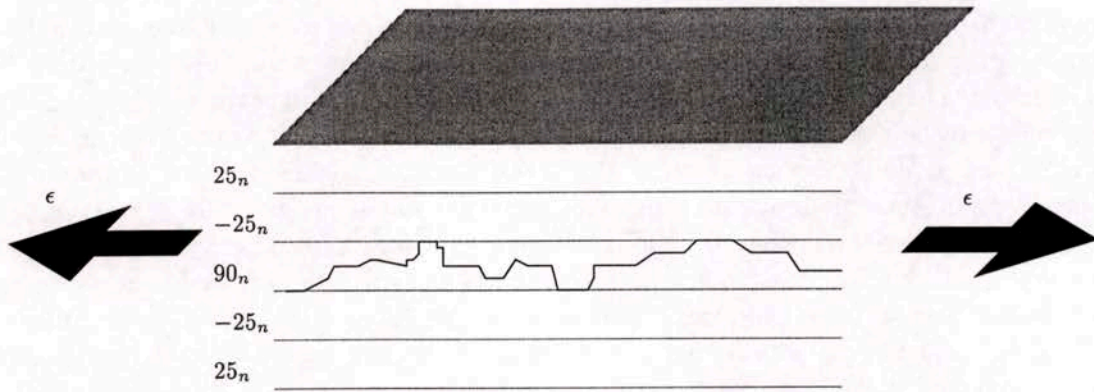


FIG. 4.3 – Allure du “délaminage” au bord d’un  $(\pm 25_n, 90_{\frac{n}{2}})_s$ .

- $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  sont les facteurs d’intensité correspondant aux contraintes  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{23}$ , et  $\sigma_{13}$  à l’interface
- $K_I^c$ ,  $K_{II}^c$  et  $K_{III}^c$  sont les facteurs d’intensité de contrainte critiques et sont supposés être des grandeurs intrinsèques du matériau
- $l$ ,  $m$  et  $n$  sont des coefficients positifs et sont aussi supposés être des grandeurs intrinsèques du matériau.

$K_I^c$ ,  $K_{II}^c$ ,  $K_{III}^c$ ,  $l$ ,  $m$  et  $n$  sont à identifier par des essais.

Leguillon, à partir du calcul des contraintes par des développements asymptotiques raccordés, écrit un critère ( $K_{III} = K_{III}^c$ ) sur le facteur d’intensité de contrainte pour l’initiation du délaminage en mode III des empilements  $(\pm \theta_n)_s$  en traction [Leguillon, 1998]. Avec un bord droit, les calculs ne reproduisent pas l’effet d’épaisseur expérimental. Leguillon propose alors un modèle de bord entaillé pour ainsi reproduire les effets d’épaisseur par son critère en facteur d’intensité de singularité.

Dans [Chyanbin et al., 1995], Chyanbin et al. proposent un critère de délaminage plus complet en identifiant les coefficients du critère général (4.7). Les contraintes sont calculés par des calculs éléments finis. Les auteurs valident leur critère pour différents types d’essais mais dans leur modèle et leur campagne d’essais choisie, ils n’ont pas pris en compte l’effet d’épaisseur.

### Critères énergétiques.

Les critères énergétiques utilisent en général la mécanique linéaire de la rupture fondée sur le critère de propagation de fissure de Griffith [Griffith, 1920]. Le calcul du taux de restitution d’énergie est donc à effectuer. D’autre part, il s’avère qu’un taux de restitution d’énergie critique unique  $G^c$  est insuffisante pour décrire la résistance d’une interface [Wang, 1989], [Guedra-Degeorges, 1993]. On sépare donc dans l’expression du taux de restitution d’énergie total, la contribution des taux de restitution d’énergie  $G_I$ ,  $G_{II}$  et  $G_{III}$  associés respectivement aux modes de fissuration I, II et III. On introduit ensuite des taux de restitution d’énergie critiques  $G_I^c$ ,  $G_{II}^c$  et  $G_{III}^c$  et on cherche des critères de type

$$f\left(\frac{G_I}{G_I^c}, \frac{G_{II}}{G_{II}^c}, \frac{G_{III}}{G_{III}^c}\right) = 1.$$

Dans [Wang, 1989], on propose une analyse des taux de restitution d’énergie calculés par des éléments finis pour prédire la propagation du délaminage en mode I. On utilise alors le critère de propagation

$$G_I \geq G_I^c$$



et on identifie le taux de restitution d'énergie critique  $G_I^c$  par des essais de traction sur des empilements qui "délaminent" en mode I. On trouve dans [Chyanbin et al., 1995] un critère et une identification plus complets pour tenir compte des autres modes de fissuration.

En ce qui concerne l'amorçage du délaminage, Leguillon fait une analyse originale de l'initiation du délaminage en mode III des empilements  $(\pm\theta_n)_s$  en traction [Leguillon, 1998]. Leguillon prouve que pour ces empilements, la limite du taux de restitution d'énergie  $G$  est nulle lorsque la longueur de fissure tend vers zéro. Le critère de Griffith ne peut donc pas prédire l'initiation du délaminage avec un calcul 3D des contraintes. En fait, pour ces empilements, l'initiation du délaminage s'amorce de façon brutale et se stabilise pour une certaine longueur de fissure. Le critère de Griffith n'étant valable que pour des états quasi-statiques, on substitue alors le critère différentiel de Griffith par le critère incrémental [Leguillon, 1999] :

$$G_c \eta \leq (W^{sain} - W^{delam})$$

où  $W^{sain}$  et  $W^{delam}$  sont respectivement les énergies potentielles des multicouches sain juste avant fissuration et après fissuration avec une fissure de longueur  $\eta$ . La longueur  $\eta$  est en fait la plus petite longueur de fissure pour que l'égalité ait lieu dans le critère.

Pour tous ces critères, on suppose que les taux de restitution d'énergie critiques  $G_I^c$ ,  $G_{II}^c$  et  $G_{III}^c$  sont des caractéristiques intrinsèques du matériau. Il est alors intéressant de mesurer  $G_I^c$ ,  $G_{II}^c$  et  $G_{III}^c$ . Nous trouvons dans [Whitney, 1989] et [Benzeggagh, 1996] une méthodologie expérimentale pour l'identification des ténacités.

Nous avons vu ci-dessus que la détermination d'un critère pouvant prédire l'initiation du délaminage en mode quelconque, nécessite l'identification des grandeurs critiques utilisées dans le critère à travers des essais. Pour ces essais, le délaminage doit apparaître, si on veut lui attribuer la seule fissuration d'interface, avant toute fissuration dans les couches. Cependant, l'essai classique de traction sur les empilements  $(\pm 25_n, 90_{n/2})_s$  pour l'identification des grandeurs critiques en mode I ne fait pas apparaître de vrais délaminages. Ces empilements se fissurent à partir du bord dans le paquet de couches à 90 sans suivre de façon préférentielle le chemin des interfaces [Crossman et Wang, 1982], [Marion, 2000] (voir schéma de la figure 4.3). De la même façon, dans tous les essais de traction effectués dans la littérature pour l'identification des grandeurs critiques en mode I, il existe des fissures intralaminaires. Nous pensons donc que les essais de traction effectués jusqu'à présent dans la littérature, ne sont pas exploitables pour l'identification d'une grandeur critique d'interface en mode I. Nous rejoignons par cette assertion la remarque de Marion [Marion, 2000] concernant l'identification de la grandeur critique d'interface en mode I. Nous verrons dans ce chapitre que le phénomène d'épaisseur qui apparaît pour ces empilements peut s'interpréter comme un phénomène d'effet d'échelle de volume plutôt que par un phénomène d'échelle lié à la concentration de contrainte aux interfaces.

Dans ce chapitre, nous déterminerons des critères simples de délaminage pour les matériaux élastiques fragiles avec nos modèles  $\mathcal{M}_4-2n+1$  et  $\mathcal{M}_4-5n$ . Tout d'abord, moyennant le modèle  $\mathcal{M}_4-5n$ , on montrera que la fissuration qui apparaît dans les tests de Marion [Marion, 2000] sur les empilements  $(\pm 25_n, 90_{n/2})_s$  en traction peut effectivement être due à la traction suivant l'épaisseur des couches à 90 et que l'effet d'épaisseur peut être associé à un effet d'échelle de volume que nous modéliserons. De cette sorte, nous prétendons ainsi que ces essais ne sont pas exploitables pour l'identification d'une grandeur critique dans un critère de délaminage en mode I. Nous proposerons ensuite des critères d'initiation de délaminage en mode III faisant intervenir les valeurs ponctuelles



des cisaillements d'interface calculées par nos deux modèles. Nous appliquerons ces critères aux résultats expérimentaux d'initiation du délaminage en mode III trouvés au chapitre I (pour le carbone-époxy T700/CTE1-15) et par Marion (pour le carbone-époxy T800-914). Finalement, nous construirons des critères de délaminage en taux de restitution d'énergie pour nos deux modèles. Par un passage à la limite (longueur de fissure qui tend vers zéro), nous appliquerons ces derniers critères aux tests d'initiation de délaminage en mode III ci-dessus.

#### 4.2 Critère de fissuration en mode I dans un $(\pm 25_n, 90_{n/2})_S$ .

Nous nous intéressons aux fissures dans un  $(\pm 25_n, 90_{n/2})_S$  ( $n$  variant de 1 à 5) en traction. Les multicouches étudiés sont élaborés à partir de plis en carbone-époxy T800-914 [Marion, 2000] dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau 4.1.

Modules d'Young	$E_L = 159,0 \text{ GPa}, E_T = E_N = 8,4 \text{ GPa}$
Modules de cisaillement	$G_{LT} = G_{LN} = 4,1 \text{ GPa}, G_{TN} = 2,8 \text{ GPa}$
Coefficients de Poisson	$\nu_{LT} = \nu_{LN} = 0,33, \nu_{TN} = 0,5$
Dilatations thermiques	$\alpha_{LL} = 0,02 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, \alpha_{TT} = \alpha_{NN} = 22,5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
Épaisseur de couche	$e_p = 0,125 \text{ mm}$

TAB. 4.1 – Caractéristiques du carbone-époxy T800-914 [Marion, 2000].

*Remarque.* Les contraintes résiduelles dans le matériau sont négligeables.

Dans la littérature nous trouvons souvent comme valeurs des coefficients de dilatation hygroscopique

$$\beta_{LL} = 0, \quad \beta_{TT} = 0,6 \quad \text{et} \quad \beta_{NN} = 0,6$$

et comme concentration massique d'humidité  $c = 0,005$  (valeur courante pour les conditions ambiantes) [Tsai, 1988]. Si nous prenons ces valeurs, l'effet de la variation de température d'environ  $-100^\circ\text{C}$  (créée par la différence entre la température de cuisson et la température ambiante) est à peu près compensé par l'effet hygroscopique. On retrouve cette remarque dans [Hahn, 1976], [Marion, 2000]. Nous ne prendrons donc pas en compte les contraintes résiduelles pour nos calculs.

On note  $\sigma$  les contraintes de traction mesurées à l'initiation de la fissuration (voir tableau 4.2). Un effet d'épaisseur considérable est remarqué. Nous allons essayer de modéliser ces essais par notre modèle  $M4-5n$  et de reproduire les effets d'échelle observés.

$\sigma$ en MPa	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
Moyenne	405	347	264	215	171
Ecart-type	34	28	22	17	4

TAB. 4.2 – Charges de traction au moment de la fissuration d'un  $(\pm 25_n, 90_{n/2})_S$  [Marion, 2000].

Marion observe au cours des essais l'apparition de fissures qui cheminent dans les plis à  $90^\circ$  à partir des bords et prouve à l'aide d'une expertise aux rayons X que ce ne sont pas de fissures transverses. L'allure des fissures vues sur le bord est schématisée sur la figure 4.3. Puisque les fissures



ne suivent pas de façon préférentielle la direction des interfaces, nous jugeons que les fractures ne sont pas d'origine interlaminaire et que donc l'utilisation du terme délaminage n'est pas tout à fait adaptée. Prévoir la fissuration à l'aide d'un critère portant sur les efforts intérieurs généralisés de notre modèle multiparticulaire  $\mathcal{M}_4-5n$ , nécessite avant tout, d'identifier sur quels efforts portera ce critère essentiellement.

Dans la littérature, on qualifie cette fissuration de type mode I [Wang, 1989], [Lévêque, 1998]. En effet, au milieu du paquet de couches à 90, compte tenu des symétries, les efforts de cisaillement sont nuls. Les fissures qui sont présentes au milieu du paquet ne peuvent être provoquées que par les efforts normaux  $\sigma_{33}$ . Et puisque les fissures sont, même à l'intérieur des couches, plutôt parallèles aux interfaces entre les couches, nous pouvons dire que les fissures dans tout le paquet des couches à 90 degrés sont dues aux contraintes  $\sigma_{33}$ . Or, parmi les efforts généralisés du modèle  $\mathcal{M}_4-5n$ , les efforts d'arrachement  $\nu^{i,i+1}$  aux interfaces sont les seuls à donner une information explicite des contraintes  $\sigma_{33}$ , à savoir  $\nu^{i,i+1} = \sigma_{33}$  à l'interface  $i, i+1$ . On peut donc penser qu'un critère simple pour prédire la fissuration fait intervenir les efforts  $\nu^{i,i+1}$  aux interfaces 90/90 et -25/90. L'utilisation du modèle  $\mathcal{M}_4-2n+1$  pour établir un critère de fissuration ne serait pas si simple puisque dans ce modèle, les valeurs des contraintes  $\sigma_{33}$  ne figurent pas de façon explicite dans les efforts intérieurs généralisés.

Avant d'évaluer les contraintes par le  $\mathcal{M}_4-5n$  à l'aide de DEILAM, nous devons savoir comment modéliser les multicouches dans le cadre de la rupture des matériaux élastiques fragiles.

#### 4.2.1 Maillage multiparticulaire pour les matériaux fragiles.

Nous considérons deux structures homothétiques :

$$(\theta_1, \dots, \theta_n) \quad \text{et} \quad (\underbrace{\theta_1, \dots, \theta_1}_{m \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\theta_n, \dots, \theta_n}_{m \text{ fois}}).$$

Des calculs 3D montrent que la plupart des contraintes dans ces multicouches présentent des singularités sur les lignes d'interface aux bords. L'analyse des champs à l'aide d'un modèle éléments finis 3D avec des maillages homothétiques pour des structures homothétiques donne, bien sûr, la même valeur de la contrainte approchée dans les mailles les plus proches de la ligne d'interface du bord. Cependant, en présence de singularités physiques des champs de contraintes, il est inutile d'espérer la convergence des champs de contraintes approchés, calculés par éléments finis, avec l'augmentation de la finesse des mailles. De plus, dans les matériaux fragiles, la valeur du critère de résistance doit être associée à un volume de matière (effets d'échelle). La résistance est fonction de ce volume. Ainsi, si l'on veut étudier par éléments finis 3D la rupture de plusieurs structures homothétiques à partir d'un critère en contrainte, il est nécessaire d'analyser les champs avec des mailles de même dimension, pour que les mailles soient associées au même volume de matière. Les contraintes calculées dans les mailles les plus proches du bord seront alors différentes pour des structures homothétiques. L'application d'un critère en contrainte dans ces mailles de bord donne alors un effet d'échelle sur les efforts qui entraînent l'initiation du délaminage de ces structures homothétiques.

Si nous voulons modéliser les essais sur les structures homothétiques avec l'un de nos modèles simplifiés de multicouches, nous pouvons choisir des modèles homothétiques (couches d'épaisseur respectant l'homothétie). Ces modèles, ainsi construits pour toutes les structures, ont le même nombre de *couches modèles* et la prévision des champs sera identique dans toutes les structures. Il s'agit bien de la propriété générale de la modélisation homothétique de structures homothétiques énoncée plus haut. Cependant, si nous voulons proposer un critère en contrainte, à l'instar de ce



que nous avons dit pour les maillages éléments finis 3D des structures homothétiques, il nous faut, dans notre modélisation simplifiée de multicouches, une finesse de discrétisation dans l'épaisseur (une épaisseur des *couches modèles*) identique pour toutes les structures homothétiques. Ainsi, le nombre de *couches modèles* augmentera avec la taille de la structure (comme le nombre de *couches physiques*) [Caron et al., 1999].

#### 4.2.2 Non pertinence d'un critère en valeurs maximales d'efforts d'arrachement.

Les empilements  $(\pm 25_n, 90_{n/2})_s$  sont donc modélisés par des multicouches à  $5n$  couches :

$$\underbrace{(25, \dots, 25)}_{n \text{ fois}}, \underbrace{(-25, \dots, -25)}_{n \text{ fois}}, \underbrace{(90, \dots, 90)}_{n \text{ fois}}, \underbrace{(-25, \dots, -25)}_{n \text{ fois}}, \underbrace{(25, \dots, 25)}_{n \text{ fois}}.$$

L'épaisseur de chaque *couche modèle* vaut l'épaisseur physique du pli, à savoir  $e_p = 0,125 \text{ mm}$  pour le matériau T800-914. Dans la modélisation, puisqu'on ne s'intéresse qu'à l'effet de bord, la demi-largeur vaut le double de l'épaisseur totale du multicouche, à savoir  $b = 10n \times e_p$  (voir figure 4.4). Puisque les éprouvettes sont assez longues, on peut supposer que les champs de contrainte sont uniformes sur la longueur des éprouvettes. D'après les symétries (cf. chapitre 3), on se restreint à l'étude du quart de cellule sud-est hachuré sur la figure 4.4. DEILAM calcule les efforts dans la famille de multicouches étudiée. On rappelle que les calculs donnent des efforts généralisés finis, y compris les efforts d'interface.

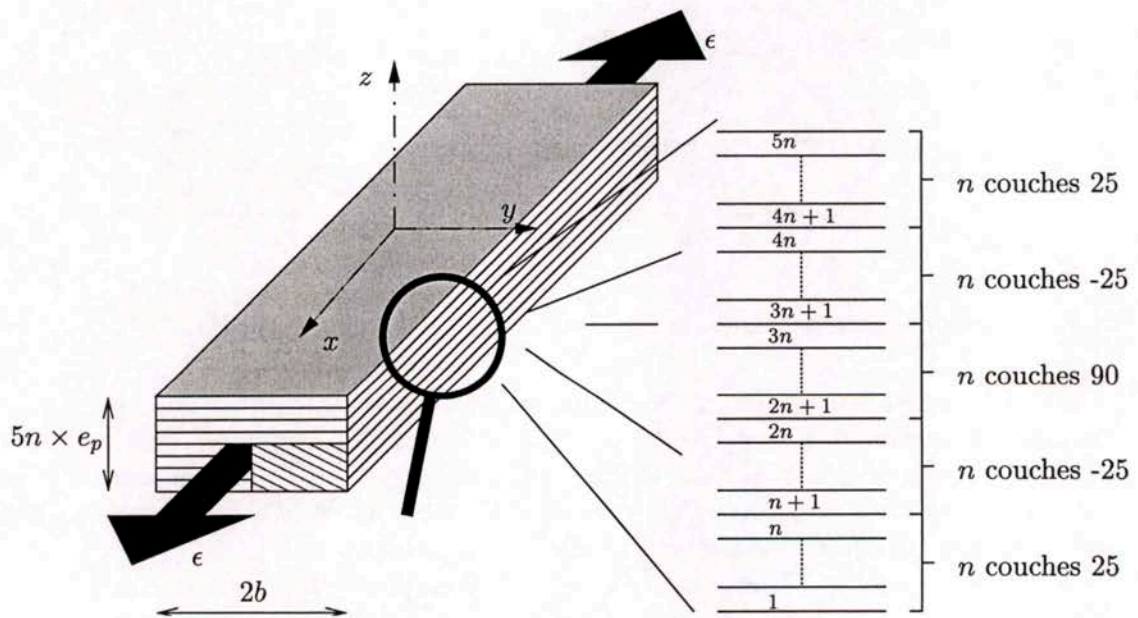


FIG. 4.4 – Modélisation des multicouches  $(\pm 25_n, 90_{n/2})_s$  en traction.



*Remarque.* Tout d'abord, nous avons vérifié que, dans les couches à 90 aux bords, la contrainte moyenne de traction  $\bar{\sigma}_{11}$  (égale à l'effort membranaire  $N_{11}$  défini dans l'équation (2.9) dans une couche à 90 divisé par l'épaisseur du pli) est inférieure aux efforts d'arrachement aux interfaces -25/90 et 90/90. Nous confirmons ainsi le fait qu'il ne devrait pas y avoir de fissures transverses dans le pli à 90. Les calculs montrent en effet que cette contrainte  $\bar{\sigma}_{11}$  atteint son maximum au bord et vaut alors 8,4 GPa pour un chargement unitaire  $\epsilon = 1$  et pour tous les empilements alors que les valeurs des efforts d'arrachement au bord oscillent entre 17 et 25 GPa (voir figure 4.6).

Pour tous les empilements, les efforts d'arrachement prépondérants sont ceux aux interfaces -25/90 et 90/90. Les valeurs maximales de ces efforts sont au bord et positives. Nous montrons sur la figure 4.5 l'exemple du  $(\pm 25_4, 90_2)_s$ . Sur cette figure, on a tracé les courbes des efforts d'arrachement aux interfaces -25/90 et 90/90 suivant la demi-largeur normalisée pour une déformation unitaire de traction. On remarque sur la courbe que ces efforts sont pratiquement confondus. Les calculs montrent que cette remarque est aussi valable pour les autres empilements de la famille  $(\pm 25_n, 90_{n/2})_s$ .

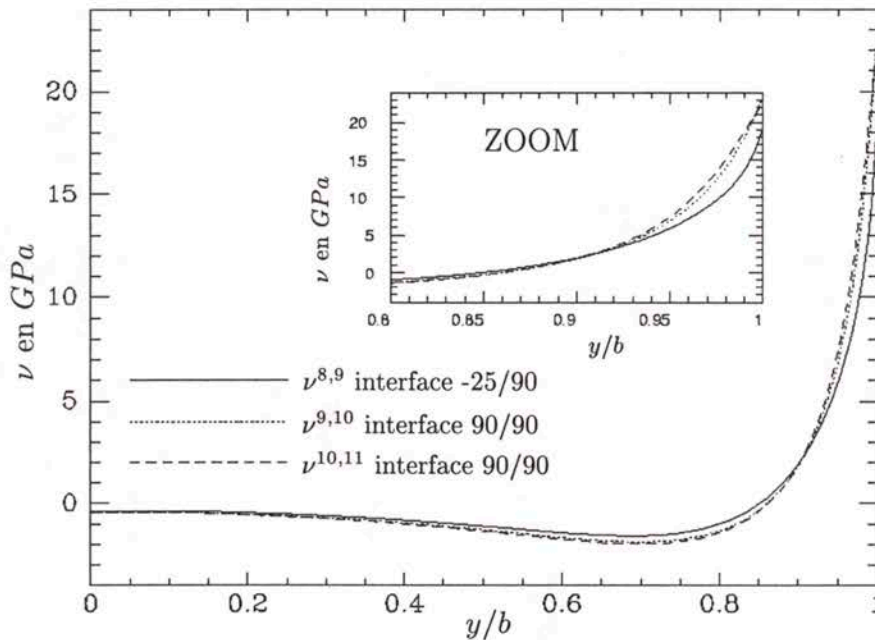


FIG. 4.5 – Efforts d'arrachement aux interfaces -25/90 et 90/90 d'un  $(\pm 25_4, 90_2)_s$  en traction ( $\epsilon = 1$ ).

Sur la figure 4.6, nous avons tracé en fonction de  $n$  les valeurs au bord (valeurs maximales) des efforts d'arrachement aux interfaces -25/90 et 90/90. Nous remarquons alors que ces valeurs varient peu d'une interface à l'autre et d'un empilement à l'autre. Alors, *moyennant notre approche déterministe et un critère sur les valeurs ponctuelles des efforts d'arrachement, nous ne pourrions pas reproduire les effets d'épaisseur observés expérimentalement.*

Nous remarquons que Kim et Soni ont aussi trouvé que les efforts normaux aux interfaces -25/90 et 90/90 calculés par le modèle global-local de Pagano [Pagano et Soni, 1983] sont pratiquement les mêmes [Kim et Soni, 1984]. Pour faire apparaître un effet d'épaisseur, sur ce qu'ils pensent être du délaminage, ils écrivent un critère portant, non pas sur la valeur ponctuelle des efforts normaux,

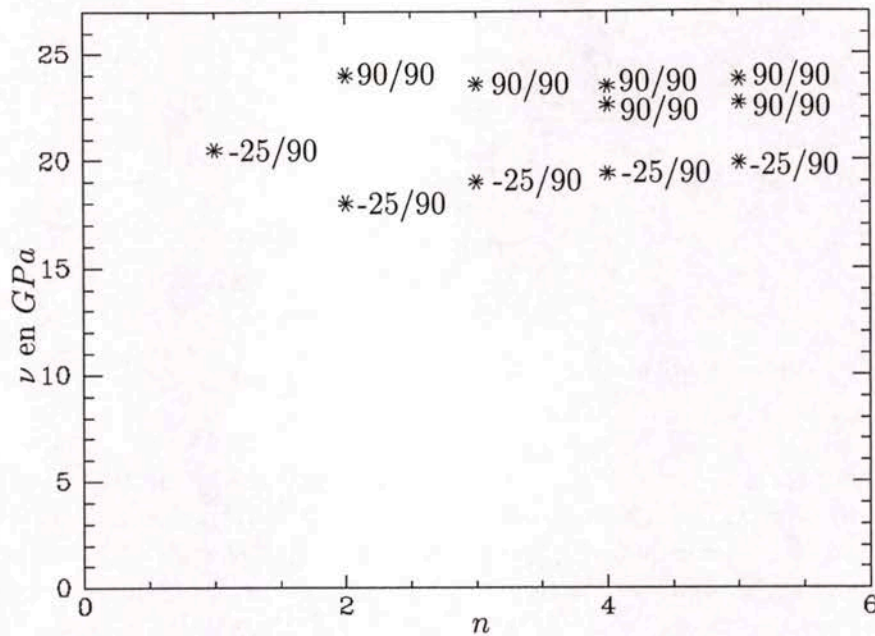


FIG. 4.6 – Valeurs aux bords (valeurs maximales) des arrachements calculés aux interfaces -25/90 et 90/90 d'un  $(\pm 25_n, 90_{n/2})_s$  en traction ( $\epsilon = 1$ ).

mais sur la moyenne des efforts normaux sur une longueur caractéristique (identique pour tous les empilements) à partir du bord. Pour reproduire l'effet d'épaisseur, nous pourrions prendre la démarche de Kim et Soni mais il nous semble que l'effet d'épaisseur observé est dû à un effet d'échelle de volume que nous allons modéliser.

#### 4.2.3 Effet d'échelle de volume et critère de fissuration dans le $(\pm 25_n, 90_{n/2})_s$ .

Près du bord et à chargement  $\epsilon$  fixé, les efforts d'arrachement sont pratiquement les mêmes aux interfaces -25/90 et 90/90 (voir figure 4.6) et on peut montrer à l'aide de l'équation (2.17) que la contrainte  $\sigma_{33}$  calculée par le modèle est quasi uniforme suivant l'épaisseur des couches à 90. Ainsi, le paquet de couches à 90 apparaît par notre modèle soumis à une contrainte de traction à peu près uniforme suivant l'épaisseur du multicouche. Cette contrainte de traction suivant l'épaisseur est notée  $\nu$  et vaut dès lors la moyenne des valeurs des efforts d'arrachement aux interfaces -25/90 et 90/90 de la figure 4.6. Dans ces conditions, nous pouvons tester un effet d'échelle de volume sur les résultats expérimentaux (voir figure 4.7). On remarque que :

- la hauteur  $h$  du volume sollicité est l'épaisseur totale du paquet des couches à 90; cette épaisseur est donc proportionnelle à  $n$
- la largeur  $a$  de la section sollicitée est proportionnelle à la demi-largeur  $b$  (à la profondeur de l'effet de bord) qui elle même est proportionnelle à  $n$

Dans l'introduction de ce chapitre, on a introduit un modèle probabiliste [Laalai, 1995] qui prend en compte un effet d'échelle de volume dans une structure hétérogène quasi-fragile. La contrainte moyenne de traction  $\nu^c$  suivant l'épaisseur lors de la rupture du paquet de couches à 90 vaut d'après ce modèle probabiliste

$$\nu^c = \nu^0 \times n^{-\alpha} \quad (4.8)$$

où  $\nu^0$  et  $\alpha$  sont deux constantes à identifier.



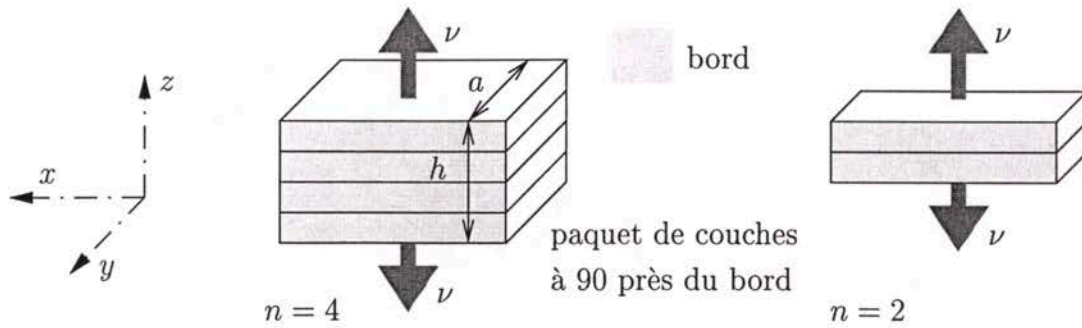


FIG. 4.7 – Effet d'échelle de volume pour la sollicitation des plis à 90 au bord.

Pour déterminer les constantes  $\nu^0$  et  $\alpha$  et pour tester l'approche, on calcule dans un premier temps la contrainte  $\nu$  de traction du paquet de couches à 90 suivant l'épaisseur pour chaque empilement (c'est à dire pour chaque  $n$ ) et pour une déformation  $\epsilon = 1$ . Cela est fait par le biais d'un calcul de moyenne des efforts d'arrachement maximaux (au bord) aux interfaces -25/90 et 90/90 pour chaque empilement. Puis, en multipliant les contraintes de traction  $\nu$  pour  $\epsilon = 1$  par la déformation à l'initiation de la fissuration (obtenue grâce aux chargements critiques moyens du tableau 4.2 et aux modules d'Young apparents), on obtient les valeurs de  $\nu$  à l'initiation de la fissuration pour chaque  $n$ . Les paramètres  $\nu^0$  et  $\alpha$  sont alors déterminés moyennant la méthode des moindres carrés. On trouve  $\nu^0 = 125 \text{ MPa}$  et  $\alpha = 0,5$ . En prenant ces valeurs, recalculons maintenant les chargements critiques moyens et situons les par rapport à la fourchette des résultats expérimentaux (figure 4.8). Pour ce faire, on détermine les arrachements critiques moyens calculés par l'équation (4.8) (pour  $\nu^0 = 125 \text{ MPa}$  et  $\alpha = 0,5$ ) pour chaque empilement. Les déformations critiques (c'est à dire à l'initiation du délaminage) associées à ces arrachements critiques sont calculées par une simple règle de trois en divisant les arrachements critiques par les valeurs moyennes des arrachements au bord pour  $\epsilon = 1$  (figure 4.6). En multipliant ces déformations critiques par le module d'Young apparent, on obtient les chargements critiques désirés.

Sur la figure 4.8, nous avons tracé les courbes des chargements critiques moyens en fonction de  $n$ . Sur cette figure, nous avons rajouté les prédictions de Marion et les valeurs expérimentales moyennes plus/moins un écart-type afin de voir où sont situées les prédictions par rapport à la fourchette de dispersion expérimentale. Nous constatons sur ces courbes que les effets d'épaisseur expérimentaux sont mieux reproduits par notre modèle  $\mathcal{M}4-5n$  conjugué avec un effet d'échelle de volume. Les erreurs commises sont inférieures à 11 %. Nous proposons donc comme critère de fissuration pour les empilements  $(\pm 25_n, 90_{n/2})_s$  :

$$\nu = \nu^c = \nu^0 \times n^{-\alpha}, \quad \text{avec } \nu^0 = 125 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \alpha = 0,5. \quad (4.9)$$

*Remarque.* Nous pouvons nous demander comment un effet d'épaisseur a pu apparaître sur le critère déterministe de Marion alors que ce n'était pas possible pour le critère déterministe en arrachement maximal du  $\mathcal{M}4-5n$ . En fait, dans [Marion, 2000] l'effet d'épaisseur apparaît puisqu'on effectue une moyenne des efforts normaux aux interfaces sur une distance caractéristique, identique pour toutes les valeurs de  $n$  et donc pour toutes les épaisseurs. Nous aurions pu aussi prendre cette démarche (comme Kim et Soni [Kim et Soni, 1984]) pour faire apparaître un effet d'épaisseur pour notre approche déterministe. Cependant, l'effet d'échelle de volume nous semble être le plus réaliste dans ce type de fissuration.



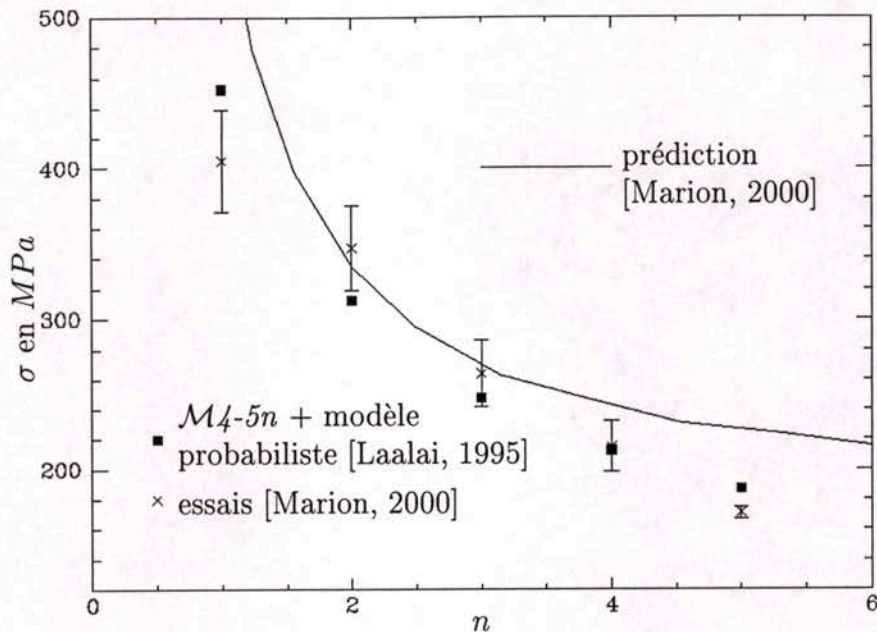


FIG. 4.8 – Charges critiques moyennes des multicouches  $(\pm 25_n, 90_{n/2})_s$  en traction.

Le critère de fissuration trouvé dans cette partie, peut être appliqué à la prédiction des effets d'échelle sur les fissurations intralaminaires dues essentiellement à des contraintes de traction hors plan.

Dans la suite, nous allons traiter le problème de fissures aux interfaces (délaminages).

### 4.3 Critère d'initiation de délaminage en effort maximal.

#### 4.3.1 Proposition d'un critère en cisaillement maximal.

Nous avons vu au chapitre précédent que les modèles  $M4-5n$  et  $M4-2n+1$  donnent des contraintes non singulières dans des multicouches élastiques en traction. Il est donc naturel de vouloir poser un critère d'amorçage de délaminage portant sur les valeurs maximales des efforts d'interface :

- pour le modèle  $M4-5n$ , nous proposons un critère simple d'initiation de délaminage faisant intervenir les valeurs ponctuelles des arrachements et des cisaillements maximaux aux interfaces. Ce critère peut ainsi prédire le délaminage en mode quelconque.
- pour le modèle  $M4-2n+1$ , les seuls efforts d'interface généralisés sont les efforts de cisaillement. Le modèle sera utilisé pour établir des critères de délaminages dus aux cisaillements.

Nous considérons le multicouche de la figure 4.9, constitué de  $n$  couches d'épaisseur  $e^i$  et occupant le domaine  $\Omega = \omega \times [h_1^-, h_n^+]$ . L'interface entre les couches  $i$  et  $i+1$  est notée  $\Gamma_{i,i+1}$ . Afin de prédire l'initiation du délaminage en mode III pur à l'interface  $\Gamma^{i,i+1}$ , nous postulons comme écriture du critère pour nos deux modèles l'expression

$$\boxed{|\tau_1^{i,i+1}| = \tau^c,} \quad (4.10)$$

où  $\tau_1^{i,i+1}$  est défini dans l'équation (2.12),  $\tau^c$  est appelé le cisaillement critique pour chaque modèle et il sera identifié par les essais.



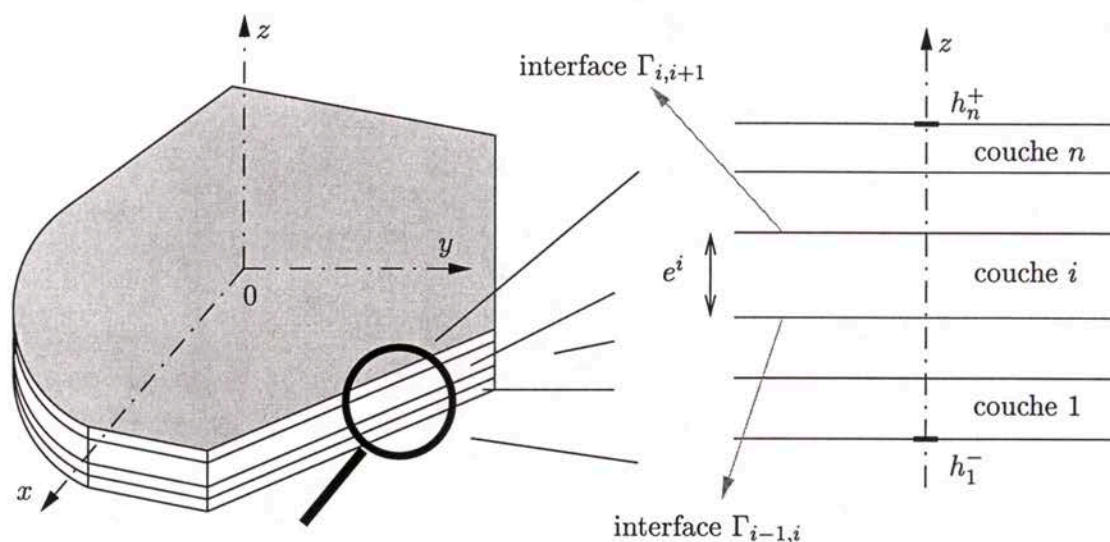


FIG. 4.9 – Multicouche étudié.

Nous avons alors postulé deux critères d'initiation de délaminage en mode III : pour l'un les contraintes sont évaluées par le  $\mathcal{M}_4-5n$  et pour l'autre les contraintes sont évaluées par le  $\mathcal{M}_4-2n+1$ . Les deux critères s'écrivent de la même façon (voir équation (4.10)). La pertinence des critères sera jugée par leur capacité à reproduire les essais (ceux du chapitre 1 et de Marion [Marion, 2000]) et surtout l'effet d'épaisseur sur l'amorçage du délaminage constaté expérimentalement au chapitre 1 comme dans [Brewer et Lagace, 1988], [Marion, 2000].

Dans la suite de cette partie, nous allons appliquer les critères aux essais du chapitre 1 et à des essais de [Marion, 2000] pour identifier les cisaillements critiques pour nos deux modèles. Nous verrons que nos deux critères reproduisent les effets d'épaisseur.

### 4.3.2 Application et validation sur des empilements $(\pm\theta_n)_s$ .

#### Présentation du problème et effet d'échelle expérimental.

On s'intéresse ici à des empilements  $(\pm\theta_n)_s$  ( $\theta = 10$  et  $20$ ) en traction (voir figure 4.10). Il est bien connu que ces empilements délaminent aux interfaces  $\theta/ -\theta$  essentiellement à cause du cisaillement  $\tau_1^{n,n+1}$  (c'est à dire  $\sigma_{xz}$ ). Les matériaux choisis pour l'application sont le carbone époxy T700/CTE1-15 utilisé pour nos essais du chapitre 1 et le carbone-époxy T800-914 [Marion, 2000] et dont les caractéristiques mécaniques sont données au tableau 4.2. Les caractéristiques mécaniques de notre matériau sont écrites au tableau 1.1 du chapitre 1.

*Remarque.* Les contraintes résiduelles dans les matériaux sont négligeables (cf. remarque de la page 105). Nous ne les prendrons donc pas en compte dans tous les calculs.

Les chargements critiques mesurés pour les empilements  $(\pm\theta_n)_s$  testés sont résumés dans le tableau 4.3 pour le T700/CTE1-15 (cf. chapitre 1) et dans le tableau 4.4 pour le T800-914 (cf. [Marion, 2000]). Notons bien que l'effet d'épaisseur est présent pour les deux matériaux.

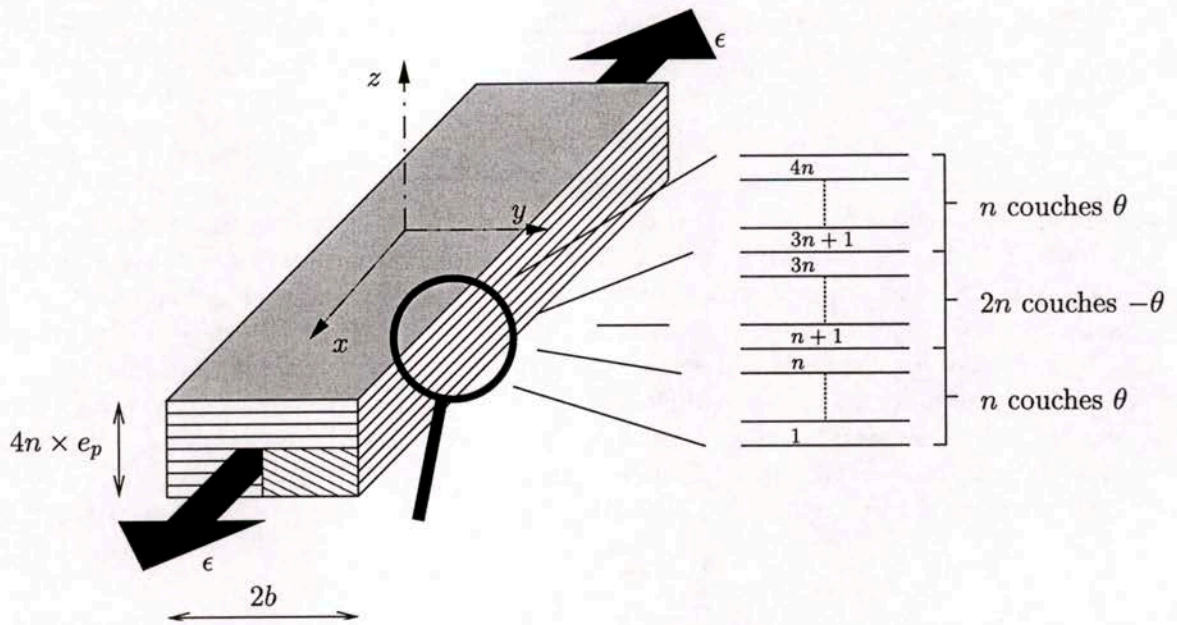


FIG. 4.10 – Modélisation des multicouches  $(\pm\theta_n)_s$  en traction.

Contrainte à l'initiation du délaminage $\sigma$ (MPa)	empilements $(\pm 10_n)_s$		empilements $(\pm 20_n)_s$	
	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type
$n = 1$	941	19	601	37
$n = 2$	765	35	503	41
$n = 3$	731	31	459	13
$n = 4$	679	5	479	15

TAB. 4.3 – Charges de traction critiques pour le T700/CTE1-15.

Contrainte à l'initiation du délaminage $\sigma$ (MPa)	empilements $(\pm 10_n)_s$		empilements $(\pm 20_n)_s$	
	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type
$n = 1$	826	27	599	16
$n = 2$	722	28	495	26
$n = 3$	655	26	418	15
$n = 4$	580	27	394	14
$n = 5$	619 ??	16	354	22
$n = 8$	447	25		

TAB. 4.4 – Charges de traction critiques pour le T800-914.



**Effet d'échelle sur le cisaillement maximal calculé par les modèles.**

D'après ce qu'on a dit concernant le maillage multiparticulaire dans la partie précédente, nous modélisons les éprouvettes  $(\pm\theta_n)_s$  par des multicouches à  $4n$  couches :

$$\underbrace{(\theta, \dots, \theta)}_{n \text{ fois}}, \underbrace{(-\theta, \dots, -\theta)}_{n \text{ fois}}_s.$$

L'épaisseur de chaque couche modèle vaut l'épaisseur physique du pli, à savoir  $0,13 \text{ mm}$  pour le T700/CTE1-15 et  $0,125 \text{ mm}$  pour le T800-914. Puisque les éprouvettes sont assez longues, on peut supposer que les champs de contrainte sont uniformes sur la longueur des éprouvettes. D'après les symétries (cf. chapitre 3), on se restreint à l'étude du quart de cellule sud-est hachuré sur la figure 4.10. Grâce au logiciel DEILAM et au logiciel résolvant le problème de bord libre par le  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  (cf. chapitre 3), nous pouvons évaluer les efforts aux interfaces dans les multicouches par nos deux modèles. Nous avons effectué par ces logiciels les calculs correspondants aux multicouches  $(\pm\theta_n)_s$  ( $\theta = 10$  et  $20$  et  $n$  variant de 1 à 8) faits pour les deux matériaux ci-dessus. Puisque nous ne nous intéressons qu'aux effets de bord, nous avons pris pour les calculs un rapport largeur sur épaisseur totale égal à

$$\frac{2b}{4n \times e} = 4.$$

Après calcul par les deux logiciels, on remarque que les seuls efforts d'interface non négligeables sont bien les efforts de cisaillement  $\tau_1^{n,n+1}$  aux interfaces  $\theta / -\theta$ . Pour illustrer cela à travers deux exemples du  $\mathcal{M}_{4-5n}$ , nous avons tracé sur les figures 4.11 et 4.12, pour une déformation de traction unitaire  $\epsilon = 1$ , les courbes des efforts d'interface suivant la demi-largeur dans un  $(\pm 10)_s$  élaboré à partir des deux matériaux. Nous confirmons sur ces courbes que les efforts d'interface autres que le cisaillement  $\tau_1^{n,n+1}$  sont négligeables; la même remarque peut être faite pour les autres empilements et pour les calculs avec le  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$ . De plus, pour le  $\mathcal{M}_{4-5n}$ , les interfaces  $\theta / -\theta$  apparaissent comprimées près des bords ( $\nu^{n,n+1} < 0$ ), on note aussi que les caractéristiques du matériau influencent sensiblement les allures des courbes. Enfin, en ce qui concerne l'effet du maillage multiparticulaire, nous remarquons qu'il existe un important effet d'épaisseur sur la valeur au bord (c'est aussi la valeur maximale) des cisaillements  $\tau_1^{n,n+1}$  (voir figures 4.13 et 4.14). Sur les figures 4.15 et 4.16 nous avons tracé pour les modèles  $\mathcal{M}_{4-5n}$  et  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  respectivement, les courbes des efforts de cisaillement aux interfaces  $\theta / -\theta$  en fonction de la demi-largeur normalisée, et ce pour la famille d'empilements  $(\pm 10_n)_s$  élaborés à partir du T700/CTE1-15 sous une déformation unitaire de traction. Nous remarquons que plus le nombre de couches augmente, plus la valeur maximale des cisaillements augmente. La différence entre les valeurs par le  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  et par le  $\mathcal{M}_{4-5n}$  provient du fait que le modèle  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  approche plus grossièrement les contraintes 3D que le  $\mathcal{M}_{4-5n}$ . D'autre part, si nous comparons les figures 4.13 et 4.14, nous remarquons un changement de l'ordre de supériorité entre les cisaillements du  $(\pm 10_n)_s$  et du  $(\pm 20_n)_s$  lorsqu'on passe du matériau T700/CTE1-15 au matériau T800-914.

**Validation d'un critère en cisaillement maximal.**

Après avoir vu qu'il existe un effet d'épaisseur dans nos modélisations, nous allons voir si cet effet correspond à celui qu'on observe expérimentalement à l'initiation du délaminage.

Nous avons vu que nous pouvions négliger tous les efforts d'interface autres que le cisaillement  $\tau_1^{n,n+1}$  à l'interface  $\theta / -\theta$ , et ce, pour les deux modèles  $\mathcal{M}_{4-5n}$  et  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$ . Est-ce que le critère de délaminage

$$\tau_1^{n,n+1} = \tau^c \quad (4.11)$$

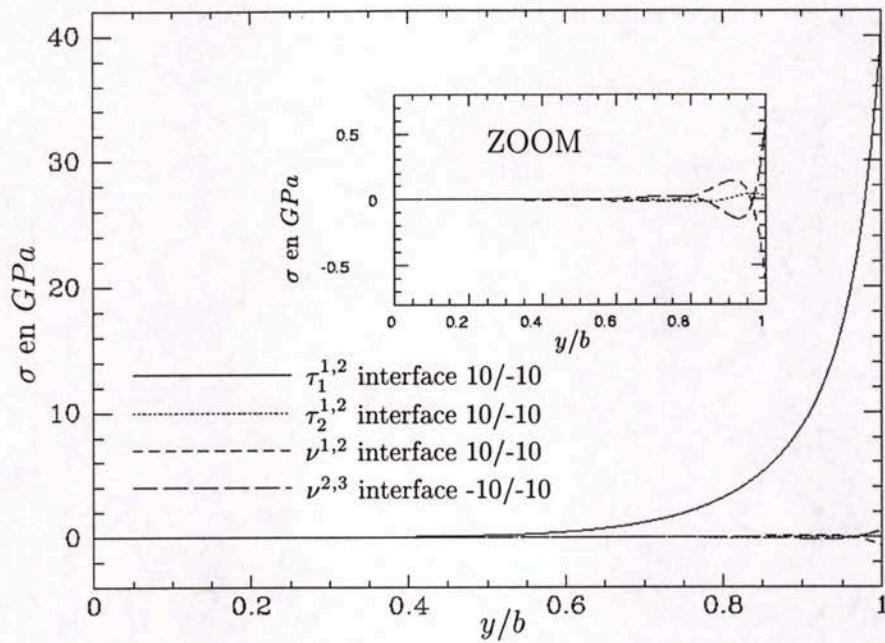


FIG. 4.11 – Efforts d'interface du  $\mathcal{M}4-5n$  dans un  $(\pm\theta_n)_s$  en traction pour une déformation unitaire (matériau T700/CTE1-15).

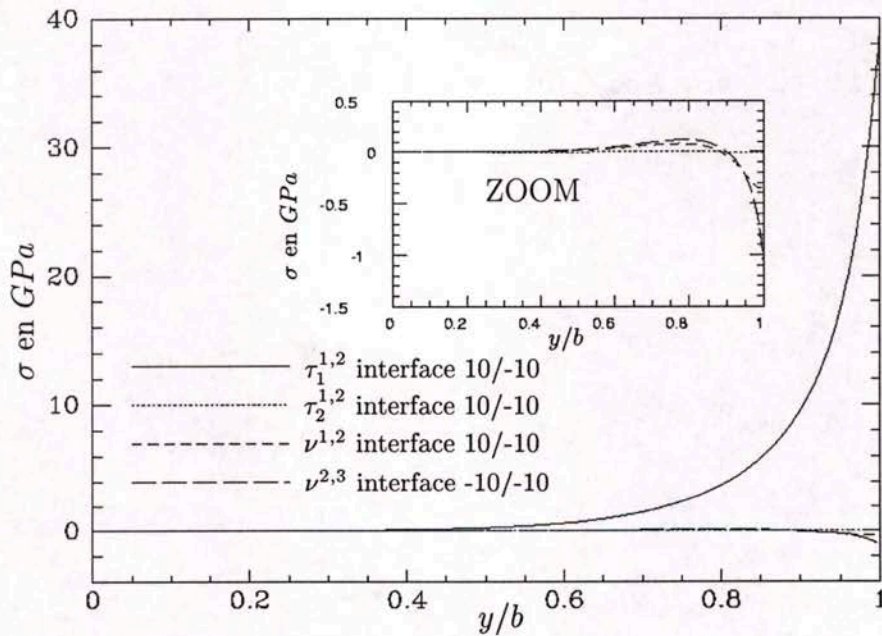


FIG. 4.12 – Efforts d'interface du  $\mathcal{M}4-5n$  dans un  $(\pm\theta_n)_s$  en traction pour une déformation unitaire (matériau T800-914).



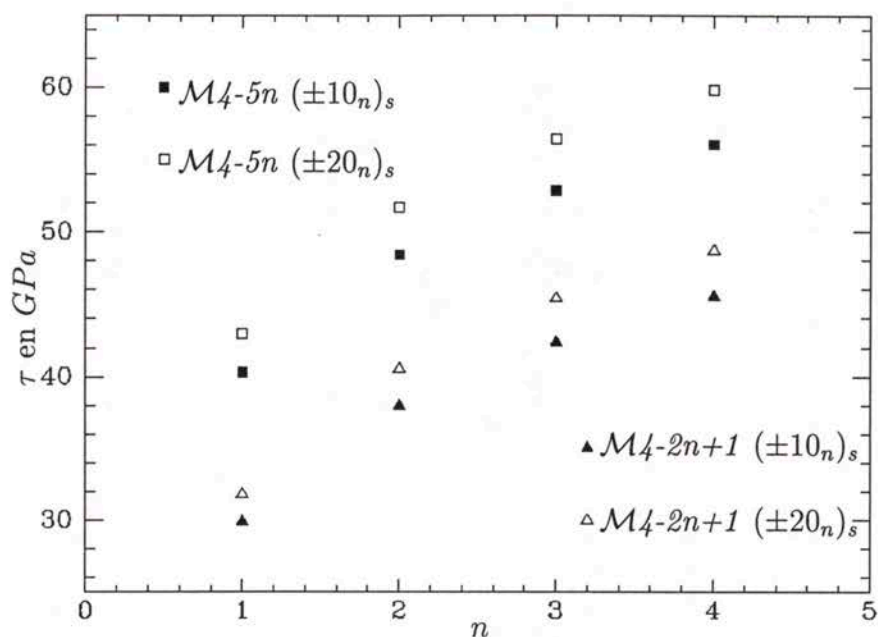


FIG. 4.13 – Cisaillements  $\tau_1$  aux bords à l'interface  $\theta/ - \theta$  d'un  $(\pm\theta_n)_s$  en traction pour une déformation unitaire (matériau T700/CTE1-15).

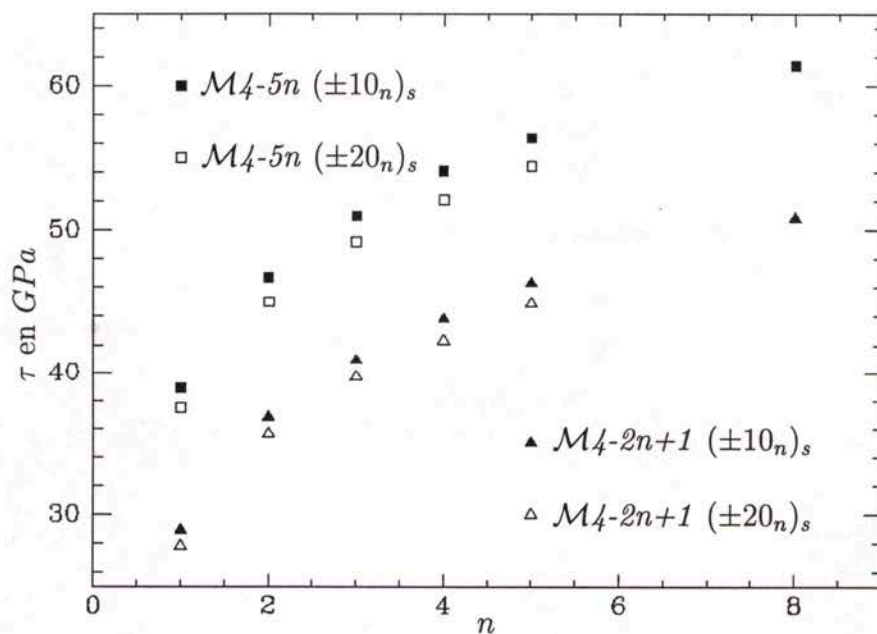


FIG. 4.14 – Cisaillements  $\tau_1$  aux bords à l'interface  $\theta/ - \theta$  d'un  $(\pm\theta_n)_s$  en traction pour une déformation unitaire (matériau T800-914).

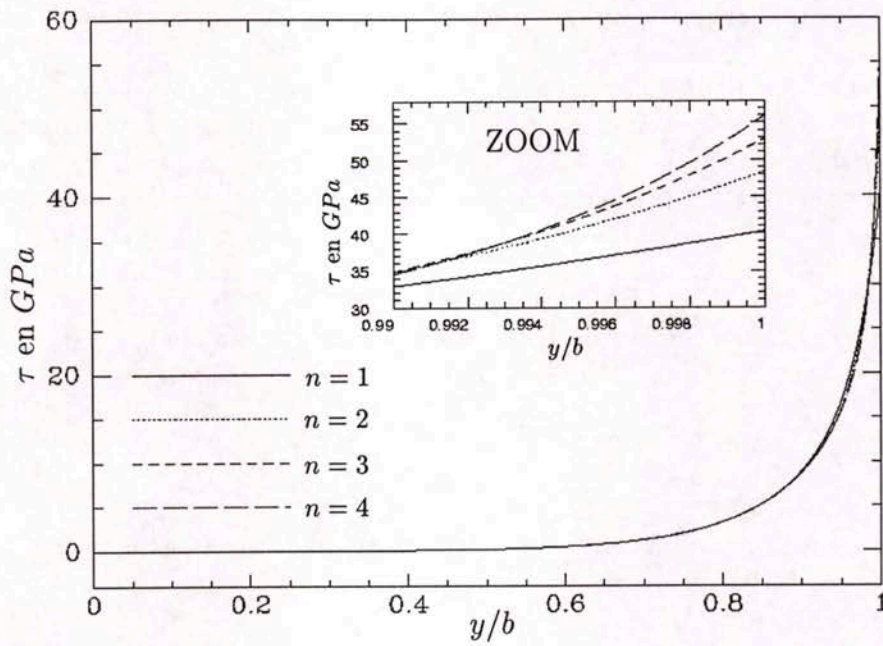


FIG. 4.15 - Cisaillements  $\tau_1$  aux interfaces  $\theta/ - \theta$  d'un  $(\pm\theta_n)_s$  calculés par le  $\mathcal{M}4-5n$  (matériau T700/CTE1-15).

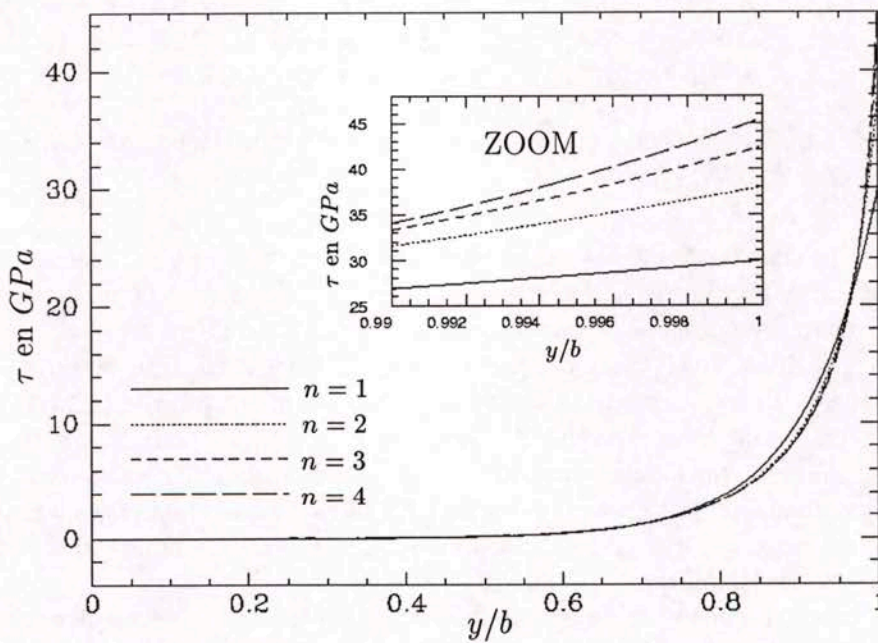


FIG. 4.16 - Cisaillements  $\tau_1$  aux interfaces  $\theta/ - \theta$  d'un  $(\pm\theta_n)_s$  calculés par le  $\mathcal{M}4-2n+1$  (matériau T700/CTE1-15).



proposé en (4.10) peut rendre compte des résultats expérimentaux ? La réponse est conditionnée par l'existence d'un cisaillement critique  $\tau^c$  caractéristique de l'interface  $\theta/ - \theta$  et indépendant du nombre de couches  $n$ .

En utilisant les valeurs des cisaillements  $\tau_1^{n,n+1}$  aux interfaces pour une déformation unitaire (cf. figures 4.13 et 4.14) et en les multipliant par les déformations critiques au moment du délaminage (calculés à partir des tableaux 4.3 et 4.4 et des modules d'Young apparents), nous obtenons les valeurs des cisaillements  $\tau_1^{n,n+1}$  prévus par les modèles à l'initiation du délaminage (voir tableaux 4.5 et 4.6).

$\tau_1^{n,n+1}$ en MPa	Modèle $\mathcal{M}_4-5n$		Modèle $\mathcal{M}_4-2n+1$	
	$(\pm 10_n)_s$	$(\pm 20_n)_s$	$(\pm 10_n)_s$	$(\pm 20_n)_s$
$n = 1$	267,8	255,1	198,5	188,7
$n = 2$	261,4	256,6	205,0	201,4
$n = 3$	272,8	255,9	218,7	205,9
$n = 4$	268,8	283,1	218,3	230,5

TAB. 4.5 – Valeurs au bord théoriques des cisaillements aux interfaces  $\theta/ - \theta$  à l'initiation du délaminage (matériau T700/CTE1-15).

$\tau_1^{n,n+1}$ en MPa	Modèle $\mathcal{M}_4-5n$		Modèle $\mathcal{M}_4-2n+1$	
	$(\pm 10_n)_s$	$(\pm 20_n)_s$	$(\pm 10_n)_s$	$(\pm 20_n)_s$
$n = 1$	236,3	249,6	175,2	184,2
$n = 2$	247,9	247,5	195,4	195,8
$n = 3$	246,6	228,5	196,9	184,4
$n = 4$	230,7	228,1	187,0	185,0
$n = 5$	256,7	214,0	210,6	176,5
$n = 8$	201,8		166,8	

TAB. 4.6 – Valeurs au bord théoriques des cisaillements aux interfaces  $\theta/ - \theta$  à l'initiation du délaminage (matériau T800-914).

L'examen des tableaux 4.5 et 4.6 valide nos hypothèses puisqu'une valeur  $\tau^c$  sensiblement constante  $\forall n$  pour une interface  $\theta/ - \theta$  donnée semble conditionner le délaminage des éprouvettes. De plus cette valeur est peu différente pour un  $(\pm 10_n)_s$  ou  $(\pm 20_n)_s$ . Leguillon et al. ont déjà proposé pour un  $(\pm \theta_n)_s$  [Leguillon, 1998] deux critères de délaminage (en contrainte moyenne et en taux de restitution d'énergie) indépendants de  $\theta$ . Ce que nous retrouvons pour le  $(\pm 10_n)_s$  et le  $(\pm 20_n)_s$ . Nous approchons ce cisaillement critique  $\tau^c$  pour chaque modèle et pour chaque matériau par la moyenne des cisaillements au moment du délaminage (donnés dans les tableaux 4.5 et 4.6). On obtient ainsi les cisaillements critiques du tableau 4.7. On remarque alors que ces cisaillements critiques dépendent du matériau mais aussi du modèle et leur valeur doit donc être considérée comme un simple indicateur de délaminage.

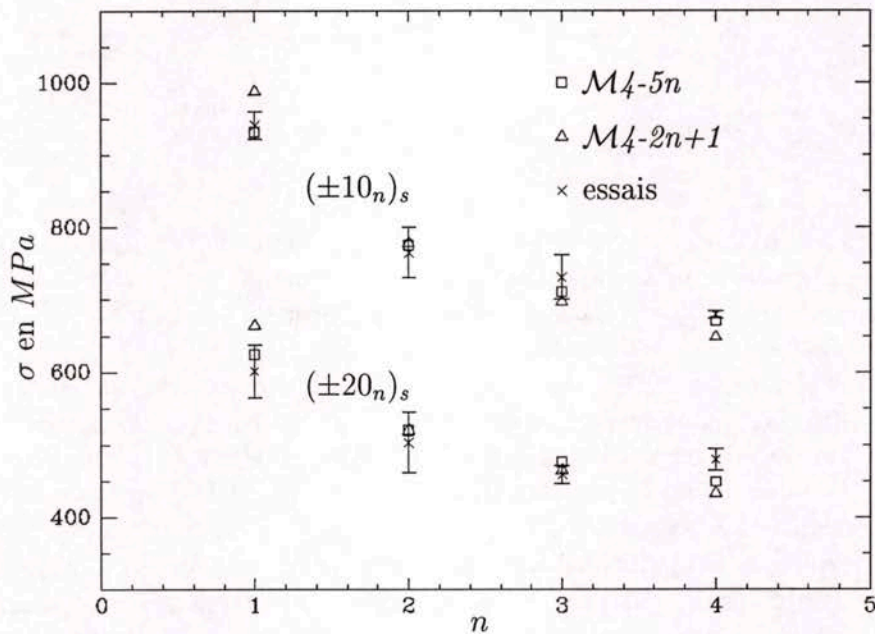
A partir de ces cisaillements critiques moyens déterminés, on peut calculer les déformations critiques prévues par les modèles. En multipliant les valeurs des déformations critiques des empilements par les modules d'Young apparents, on obtient la charge de traction prévue par les modèles à l'initiation du délaminage.

Nous avons tracé pour nos deux modèles, les courbes des charges critiques attendues en fonction de  $n$  pour le T700/CTE1-15 sur la figure 4.17 et pour le T800-914 sur la figure 4.18. Sur ces

$\tau^c$ en MPa	Carbone-époxy T700/CTE1-15	Carbone-époxy T800-914
Modèle $\mathcal{M}_4-5n$	265	240
Modèle $\mathcal{M}_4-2n+1$	208	187

TAB. 4.7 – Cisaillements critiques.

courbes, nous avons rajouté les prédictions de Marion pour le T800-914 et les valeurs expérimentales moyennes plus/moins un écart-type afin de voir où sont situées les prédictions par rapport à la fourchette de dispersion expérimentale. Nous constatons sur ces courbes que nos modèles reproduisent les effets d'épaisseur des essais et que notre critère et celui de Marion sont comparables pour les empilements testés.

FIG. 4.17 – Charges critiques des multicouches  $(\pm\theta_n)_s$  en traction (matériau T700/CTE1-15).

Les erreurs commises par nos prédictions sont résumées sur le tableau 4.8. Nous pouvons donc dire que les critères de délaminage prédisent bien l'initiation des délaminages en mode III de ce type d'empilements.

$\tau_1^c$ en MPa	Carbone-époxy T700/CTE1-15	Carbone-époxy T800-914
Modèle $\mathcal{M}_4-5n$	<6,3%	<14,1%
Modèle $\mathcal{M}_4-2n+1$	<9,7%	<13,1%

TAB. 4.8 – Erreurs des prédictions.



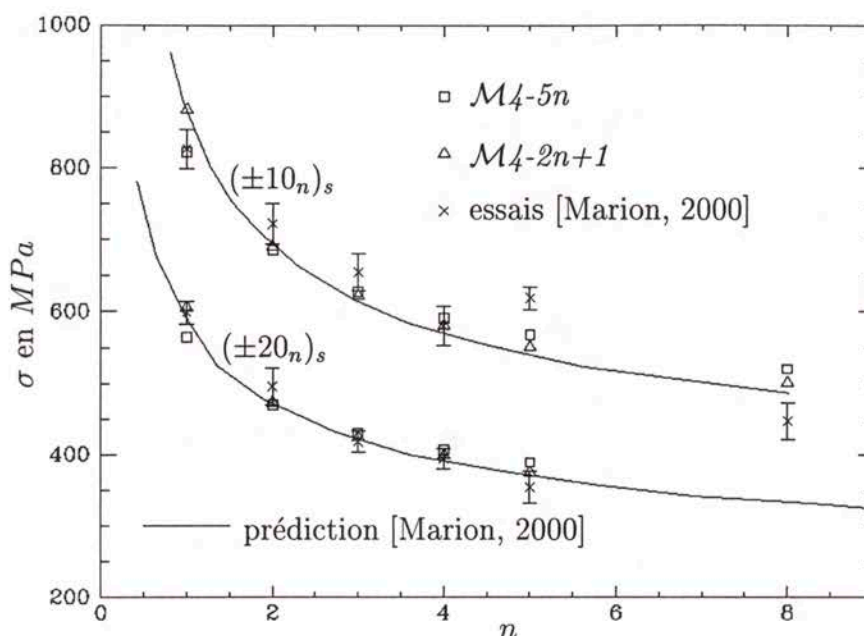


FIG. 4.18 – Charges critiques des multicouches  $(\pm\theta_n)_s$  en traction (matériau T800-914).

*Remarque 1.* Les cisaillements critiques que nous avons exhibés sur le tableau 4.7 dépendent du matériau mais aussi du modèle et du maillage multiparticulaire utilisé (voir paragraphe 4.2.1). En fait, nous avons choisi l'épaisseur du pli physique comme épaisseur de *couche modèle*.

Si nous avons affaire à un matériau différent (fibre, résine, épaisseur du pli physique différents), nous devons reprendre le travail d'identification du cisaillement critique.

*Remarque 2.* Dans le paragraphe 4.2, nous avons supposé l'absence de délaminages aux interfaces des empilements  $(\pm 25_n, 90_{n/2})_s$  en traction lorsque la fissuration intralaminare apparaît. Afin de garder une cohérence dans nos raisonnements, nous avons enfin vérifié que le cisaillement critique correspondant au matériau T800-914 dans le tableau 4.7 n'est pas atteint aux interfaces des empilements  $(\pm 25_n, 90_{\frac{n}{2}})_s$  pour les niveaux de chargement au moment de la fissuration ; et ce, pour les deux modèles  $M4-5n$  et  $M4-2n+1$ .

Par ailleurs, les critères d'initiation de délaminage que nous avons présentés dans cette partie, ne sont pas a priori énergétiquement justifiés. Nous verrons dans la section suivante des critères de délaminage portant sur les taux de restitution d'énergie et respectant ainsi des bilans énergétiques. Cette approche permettra de justifier les critères d'initiation de délaminage dans cette section.

#### 4.4 Taux de restitution d'énergie et critère de délaminage.

Le but de cette partie est de trouver l'expression théorique du taux de restitution d'énergie calculé par les modèles développés au chapitre 2 pour un multicouche délaminé. Le calcul des taux de restitution d'énergie suppose une fissure préexistante, mais en faisant tendre vers zéro la



longueur de fissure, on pourra tirer des conclusions sur l'initiation du délaminage. Nous utiliserons la méthode de refermeture de fissure [Bui, 1978] pour exprimer le taux de restitution d'énergie en fonction des efforts d'interface en pointe de fissure. Pour le modèle  $\mathcal{M}_4-5n$  nous écrirons un taux pour des délaminages en mode quelconque. Par contre, pour le  $\mathcal{M}_4-2n+1$ , le taux sera uniquement pour des délaminages en mode II, III ou II-III mixte puisque les efforts normaux aux interfaces ne figurent pas explicitement dans le modèle. Dans cette partie, on explicitera le détail des calculs du taux de restitution d'énergie pour le  $\mathcal{M}_4-5n$  mais pour le  $\mathcal{M}_4-2n+1$  on donnera directement l'expression finale pour abréger et simplifier la présentation.

#### 4.4.1 Position du problème d'un multicouche délaminé.

Nous nous intéressons au cas d'un multicouche délaminé soumis à un chargement mécanique sur les bords. Le multicouche est formé de  $n$  couches d'épaisseur  $e^i$  dont les interfaces entre les couches sont notées  $\Gamma_{i,i+1}$ . Le volume occupé par le multicouche est noté  $\Omega = \omega \times [h_1^-; h_n^+]$ ,  $\omega$  étant la surface dans  $(x, y)$  occupé par les couches. Le délaminage a lieu au niveau de l'interface  $\Gamma_{k,k+1}$  ( $1 \leq k \leq n-1$ , voir figure 4.19). Le front de fissure est parallèle à l'axe des  $x$  et le comportement du multicouche est supposé élastique. Pour des chargements quelconques, les lèvres de la fissure peuvent être fermées ou ouvertes. Nous négligeons le frottement pour le cas de lèvres fermées.

Nous supposons que la fissure progresse de façon continue dans des états quasi-statiques. Le critère de propagation de fissure de Griffith [Griffith, 1920]

$$G \geq G^c, \quad (4.12)$$

où  $G^c$  désigne le taux de restitution d'énergie critique, pourra donc être appliqué. Il faut cependant savoir calculer le taux de restitution d'énergie  $G$ . Nous ferons cela moyennant le modèle  $\mathcal{M}_4-5n$ . Nous rappelons que pour le  $\mathcal{M}_4-2n+1$ , un raisonnement analogue pourra être effectué pour obtenir un critère de délaminage dont on donnera uniquement l'expression finale pour des délaminages en mode II, III ou II-III mixte. La détermination se fera grâce la méthode du travail de refermeture de fissure.

#### 4.4.2 Equations du modèle appliqué au multicouche délaminé.

Le délaminage se traduit au niveau des interfaces fissurées par une discontinuité des déplacements 3D et par :

- des cisaillements nuls aux interfaces puisqu'il n'y a pas de frottement,
- des efforts normaux nuls si les lèvres sont ouvertes.

De ce fait, si nous adoptons le modèle  $\mathcal{M}_4-5n$  pour évaluer les contraintes dans le multicouche fissuré, nous devons prendre en compte un champ de discontinuité des déplacements 3D :  $\underline{\gamma}^{k,k+1}$  à l'interface fissurée  $k, k+1$ . La discontinuité  $\gamma_3^{k,k+1}$  étant nulle quand les lèvres de la fissure sont fermées et strictement positive si non.  $\gamma_3^{k,k+1}$  est donc positif pour tous les calculs qui suivent.

D'après les équations (2.78) à (2.82) du chapitre 2, les équations de comportement sont pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n-1$  :

- loi de comportement des efforts de membrane de la couche  $i$  :

$$\tilde{\varepsilon}^i(x, y) = \frac{\tilde{S}^i}{e^i} : \tilde{N}^i(x, y) \quad (4.13)$$





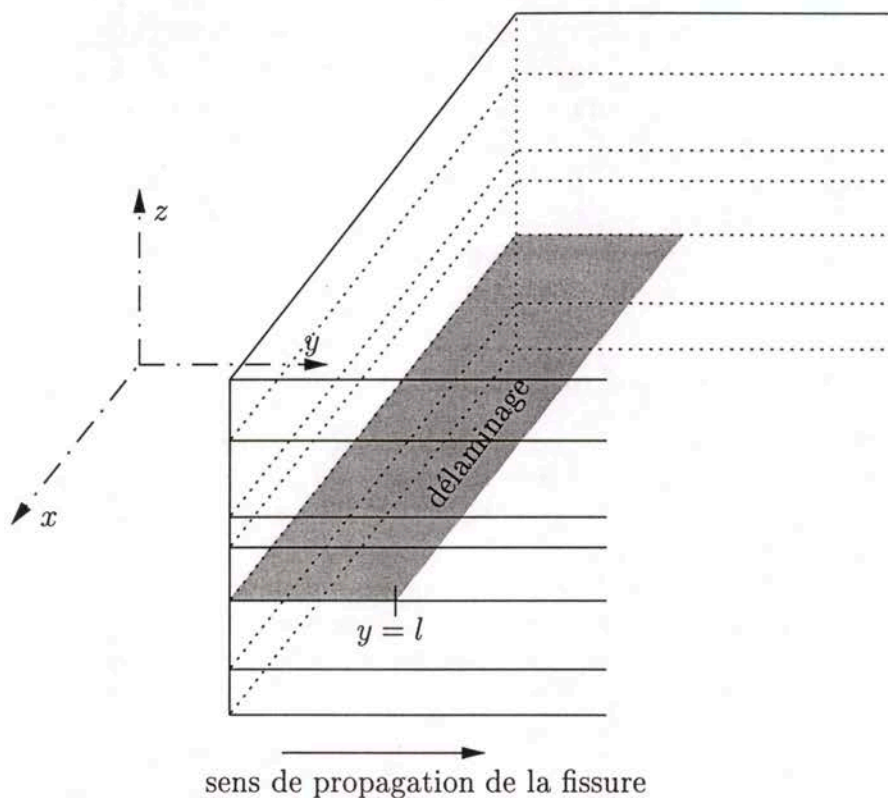


FIG. 4.19 – Multicouche délaminé.

- loi de comportement des moments de flexion et de torsion dans le plan de la couche  $i$  :

$$\tilde{\chi}^i(x, y) = \frac{12}{e^{i3}} \tilde{\tilde{S}}^i : \tilde{M}^i(x, y) \tag{4.14}$$

- loi de comportement des efforts de cisaillement hors plan de la couche  $i$  :

$$\tilde{d}_\Phi^i(x, y) = \frac{6}{5e^i} \tilde{S}_Q^i \cdot \tilde{Q}^i - \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^i \cdot (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \tag{4.15}$$

- loi de comportement des efforts de cisaillement à l'interface  $j, j + 1$  :

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{j,j+1}(x, y) - \tilde{D}^{j,j+1a}(x, y) &= -\frac{1}{10} \tilde{S}_Q^j \cdot \tilde{Q}^j - \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^{j+1} \cdot \tilde{Q}^{j+1} - \frac{e^j}{30} \tilde{S}_Q^j \cdot \tilde{\tau}^{j-1,j} \\ &+ \frac{2}{15} \left( e^j \tilde{S}_Q^j + e^{j+1} \tilde{S}_Q^{j+1} \right) \cdot \tilde{\tau}^{j,j+1} - \frac{e^{j+1}}{30} \tilde{S}_Q^{j+1} \cdot \tilde{\tau}^{j+1,j+2} \end{aligned} \tag{4.16}$$

- loi de comportement des efforts d'arrachement à l'interface  $j, j + 1$  :

$$\begin{aligned} D_\nu^{j,j+1}(x, y) - D_3^{j,j+1a}(x, y) &= \frac{9}{70} e^j S_\nu^j \nu^{j-1,j} + \frac{13}{35} (e^j S_\nu^j + e^{j+1} S_\nu^{j+1}) \nu^{j,j+1} \\ &+ \frac{9}{70} e^{j+1} S_\nu^{j+1} \nu^{j+1,j+2} \end{aligned} \tag{4.17}$$

où

$$D_\alpha^{j,j+1a} = \delta_{j,k} \gamma_\alpha^{k,k+1} \quad \text{et} \quad D_3^{j,j+1a} = \delta_{j,k} \gamma_3^{k,k+1},$$

$\delta_{j,k} = 1$  si  $j = k$  et 0 si non,  $k, k + 1$  étant l'interface fissurée. On rappelle que les efforts

$$\bar{\tau}^{0,1}, \bar{\tau}^{n,n+1}, \nu^{0,1} \text{ et } \nu^{n,n+1}$$

sont des données (cf. remarque 1 du paragraphe 2.3.1 du chapitre 2).

### 4.4.3 Expression du taux de restitution d'énergie.

Pour déterminer le taux de restitution d'énergie associé à la fissure, nous utilisons la méthode du travail de refermeture de fissure [Bui, 1978]. Le chargement est fixé.

Soient  $\bar{\sigma}_{(l)}^{M4-5N}$ ,  $\underline{U}_{(l)}^{M4-5N}$  et  $\underline{\gamma}_{(l)}^{k,k+1 M4-5N}$  les champs de contraintes, de déplacements et de discontinuité des déplacements approchés du modèle  $M4-5n$  dans le multicouche pour un front de fissure en  $y = l$  (problème 1, voir figure 4.20).

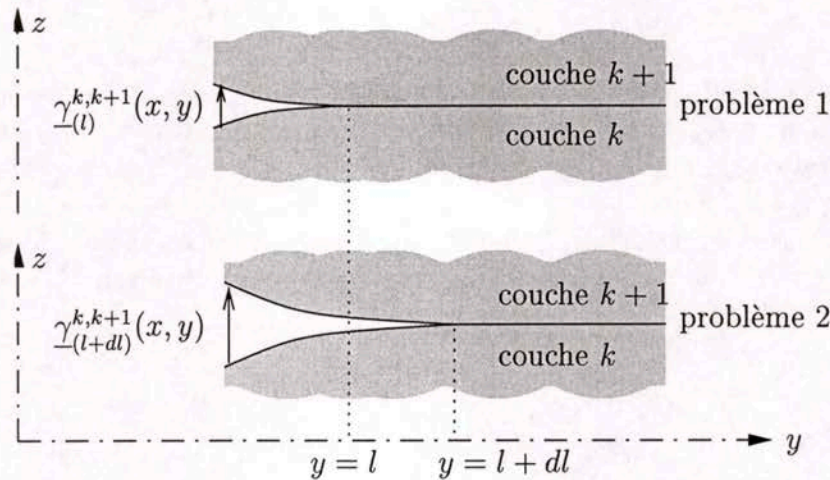


FIG. 4.20 - Propagation de fissure.

Considérons une propagation infinitésimale de la fissure, la longueur de fissure augmente de  $dl$  (problème 2). Les champs de contrainte, de déplacement et de discontinuité dans le multicouche deviennent

$$\bar{\sigma}_{(l+dl)}^{M4-5N}, \underline{U}_{(l+dl)}^{M4-5N} \text{ et } \underline{\gamma}_{(l+dl)}^{k,k+1 M4-5N}.$$

Pour refermer la fissure de  $dl$  nous appliquons respectivement aux peaux supérieure et inférieure des lèvres entre  $y = l$  et  $y = l + dl$  les efforts surfaciques  $\underline{f}$  et  $-\underline{f}$  (problème 3); l'effort  $\underline{f}$  étant défini par :

$$\underline{f}(x, y) = \tau_{(l)1}^{k,k+1}(x, y)\underline{e}_x + \tau_{(l)2}^{k,k+1}(x, y)\underline{e}_y + \nu_{(l)}^{k,k+1}(x, y)\underline{e}_z.$$

En effet, les champs de déplacement et de contraintes solutions du problème 3, sont tout simplement

$$\underline{U}_{(l)}^{M4-5N}, \bar{\sigma}_{(l)}^{M4-5N} \text{ et } \underline{\gamma}_{(l)}^{k,k+1} \text{ (solutions du problème 1)}$$

tel qu'il n'existe pas de discontinuités des déplacements aux interfaces entre  $y = l$  et  $y = l + dl$ . Ainsi, la densité de travail linéique effectué pour refermer la fissure de  $dl$  est

$$\begin{aligned} dw = \frac{1}{2} & \left[ \tau_{(l)1}^{k,k+1}(x, l^+) \gamma_{(l+dl)1}^{k,k+1}(x, (l+dl)^-) \right. \\ & + \tau_{(l)2}^{k,k+1}(x, l^+) \gamma_{(l+dl)2}^{k,k+1}(x, (l+dl)^-) \\ & \left. + \nu_{(l)}^{k,k+1}(x, l^+) \gamma_{(l+dl)3}^{k,k+1}(x, (l+dl)^-) \right] dl, \end{aligned} \tag{4.18}$$



où les exposants "+" et "-" correspondent respectivement aux positions à gauche (en amont, partie fissurée) et à droite (en aval, partie saine) du front.

On se place dans le cas d'une propagation continue de la fissure. En faisant tendre  $dl$  vers zéro, on a :

$$\tilde{\gamma}_{(l+dl)}^{k,k+1}(x, (l+dl)^-) \xrightarrow{dl \rightarrow 0} \tilde{\gamma}_{(l)}^{k,k+1}(x, l^-)$$

On déduit donc grâce à l'équation (4.18) la valeur de la densité linéique du taux de restitution d'énergie  $G$  pour le chargement considéré et pour une longueur de fissure  $l$  :

$$G = \frac{dw}{dl} = \frac{1}{2} \left[ \tau_1^{k,k+1}(x, l^+) \gamma_1^{k,k+1}(x, l^-) + \tau_2^{k,k+1}(x, l^+) \gamma_2^{k,k+1}(x, l^-) + \nu^{k,k+1}(x, l^+) \gamma_3^{k,k+1}(x, l^-) \right], \quad (4.19)$$

où on a supprimé les indices ( $l$ ) qui alourdisent les notations et qui n'ont désormais plus aucun intérêt. *Nous verrons plus loin dans ce chapitre, que le champ de discontinuités des déplacements  $\underline{\gamma}$  est discontinu au passage du front de délaminage ( $y = l$ ) entre la partie saine et la partie délaminée, de sorte que  $\underline{\gamma}(x, l^-)$  est non nul.*

Par ailleurs, dans l'expression (4.19) du taux de restitution d'énergie, nous identifions les contributions  $G_I$ ,  $G_{II}$  et  $G_{III}$  des modes I, II et III de fissuration, respectivement. Leurs expressions sont

$$\begin{aligned} G_I &= \frac{1}{2} \nu^{k,k+1}(x, l^+) \gamma_3^{k,k+1}(x, l^-) \\ G_{II} &= \frac{1}{2} \tau_2^{k,k+1}(x, l^+) \gamma_2^{k,k+1}(x, l^-) \\ G_{III} &= \frac{1}{2} \tau_1^{k,k+1}(x, l^+) \gamma_1^{k,k+1}(x, l^-) \end{aligned} \quad (4.20)$$

On a donc :

$$G = G_I + G_{II} + G_{III}.$$

A ce stade, si nous posons un critère de délaminage en taux de restitution d'énergie, le critère ferait intervenir les efforts d'interface et les discontinuités des déplacements en pointe de fissure. Pour obtenir un critère de délaminage plus opérationnel, *nous allons déterminer l'expression des discontinuités des déplacements en fonction des efforts d'interface en pointe de fissure.* Le critère fera ainsi intervenir les seuls efforts d'interface en pointe de fissure.

#### Détermination des discontinuités des déplacements dans le plan.

Intéressons nous aux discontinuités des déplacements dans le plan  $\gamma_1^{k,k+1}(x, l^-)$  et  $\gamma_2^{k,k+1}(x, l^-)$  à l'interface délaminée en pointe de fissure. Pour obtenir leur expression en fonction des efforts d'interface en pointe de fissure (en  $y = l^+$ ), nous utilisons les équations de comportement d'interface en cisaillement dans lesquelles ces discontinuités interviennent.

Dans la zone délaminée, en  $y = l^-$ , la loi de comportement (4.16) des efforts de cisaillement du  $\mathcal{M}_4\text{-}5n$  s'écrit pour  $1 \leq j \leq n-1$  :

$$\tilde{D}^{j,j+1}(x, l^-) - \tilde{D}^{j,j+1a}(x, l^-) = -\frac{1}{10} \tilde{S}_Q^j \cdot \tilde{Q}^j(x, l^-) - \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^{j+1} \cdot \tilde{Q}^{j+1}(x, l^-) \quad (4.21)$$

$$-\frac{e^j}{30} \tilde{S}_Q^j \cdot \tilde{\tau}^{j-1,j}(x, l^-) + \frac{2}{15} \left( e^j \tilde{S}_Q^j + e^{j+1} \tilde{S}_Q^{j+1} \right) \cdot \tilde{\tau}^{j,j+1}(x, l^-) \\ - \frac{e^{j+1}}{30} \tilde{S}_Q^{j+1} \cdot \tilde{\tau}^{j+1,j+2}(x, l^-)$$

$$\text{où } D_\alpha^{j,j+1a} = \begin{cases} \gamma_\alpha^{k,k+1} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Dans la zone saine, en  $y = l^+$ , la loi de comportement (4.16) des efforts de cisaillement du  $M4-5n$  s'écrit pour  $1 \leq j \leq n-1$  :

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{j,j+1}(x, l^+) &= -\frac{1}{10} \tilde{S}_Q^j \cdot \tilde{Q}^j(x, l^+) - \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^{j+1} \cdot \tilde{Q}^{j+1}(x, l^+) \\ &- \frac{e^j}{30} \tilde{S}_Q^j \cdot \tilde{\tau}^{j-1,j}(x, l^+) + \frac{2}{15} \left( e^j \tilde{S}_Q^j + e^{j+1} \tilde{S}_Q^{j+1} \right) \cdot \tilde{\tau}^{j,j+1}(x, l^+) \\ &- \frac{e^{j+1}}{30} \tilde{S}_Q^{j+1} \cdot \tilde{\tau}^{j+1,j+2}(x, l^+). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Pour tout champ  $F$ , on pose

$$\Delta F = F(x, l^+) - F(x, l^-).$$

De par la continuité de  $Q_2^j$ , de  $Q_2^{j+1}$ , des déplacements généralisés et donc de  $\tilde{D}^{j,j+1}$ , nous pouvons écrire pour  $1 \leq j \leq n-1$  grâce aux équations (4.21) et (4.22) :

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{j,j+1a}(x, l^-) &= \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^j \cdot \begin{pmatrix} \Delta Q_1^j \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^{j+1} \cdot \begin{pmatrix} \Delta Q_1^{j+1} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{e^j}{30} \tilde{S}_Q^j \cdot \Delta \tilde{\tau}^{j-1,j} - \frac{2}{15} \left( e^j \tilde{S}_Q^j + e^{j+1} \tilde{S}_Q^{j+1} \right) \cdot \Delta \tilde{\tau}^{j,j+1} \\ &+ \frac{e^{j+1}}{30} \tilde{S}_Q^{j+1} \cdot \Delta \tilde{\tau}^{j+1,j+2}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Si on s'intéresse à l'équation (4.23) pour  $j = k$ , on voit que  $\gamma_\alpha^{k,k+1}(x, l^-)$  s'écrit, en effet, en fonction des cisaillements en pointe de fissure

$$\tilde{\tau}^{k,k+1}(x, l^+) = \Delta \tilde{\tau}^{k,k+1},$$

mais aussi de  $\Delta \tilde{\tau}^{k-1,k}$ ,  $\Delta \tilde{\tau}^{k+1,k+2}$ ,  $\Delta Q_1^k$  et  $\Delta Q_1^{k+1}$ . Si nous voulons trouver une expression de  $\gamma_\alpha^{k,k+1}(x, l^-)$  qui ne fait apparaître que les cisaillements en pointe de fissure, nous devons écrire d'autres équations qui permettent de déduire  $\Delta \tau_\alpha^{k-1,k}$ ,  $\Delta \tau_\alpha^{k+1,k+2}$ ,  $\Delta Q_1^{k+1}$  et  $\Delta Q_1^k$  en fonction des cisaillements en pointe de fissure. Pour simplifier, nous allons supposer que les efforts exercés sur les faces supérieure et inférieure du multicouche sont continus; par conséquent

$$\Delta \tilde{\tau}^{0,1} = \Delta \tilde{\tau}^{n,n+1} = \tilde{0}.$$

Nous prenons comme inconnues principales les 2 cisaillements en pointe de fissure  $\tau_1^{k,k+1}$  et  $\tau_2^{k,k+1}$ . La famille de  $2 \times (n-1)$  équations (4.23) fait apparaître  $3n-2$  autres inconnues qu'on appelle inconnues secondaires (les  $2n-4$  variations de cisaillements d'interface restants, les  $n$  variations d'effort tranchant  $Q_1^i$  et les 2 discontinuités  $\gamma_\alpha^{k,k+1}(x, l^-)$ ). Il nous manque donc  $n$  équations qui fassent intervenir les mêmes champs inconnus, on aura alors  $3n-2$  équations pour  $3n$  inconnues.



Ces  $n$  équations proviennent de la première ligne de la loi de comportement en effort tranchant écrite sous forme de variation en pointe de fissure pour  $1 \leq i \leq n$  (voir équations (4.15) et (2.38)) :

$$\Delta\varphi_1^i + \Delta \frac{\partial U_3^i}{\partial x} = \frac{6}{5e^i} (S_{Q11}^i \Delta Q_1^i + S_{Q12}^i \Delta Q_2^i) - \frac{1}{10} (S_{Q11}^i (\Delta\tau_1^{i,i+1} + \Delta\tau_1^{i-1,i}) + S_{Q12}^i (\Delta\tau_2^{i,i+1} + \Delta\tau_2^{i-1,i}))$$

où  $\Delta\varphi_1^i = 0$  puisque les déplacements généralisés sont continus et  $\Delta Q_2^i = 0$  pour des raisons de continuité. En utilisant les relations de compatibilité d’Hadamard écrites pour le champ scalaire  $U_3^i$ , on prouve que la seule dérivée partielle de ce champ qui puisse être discontinue est la dérivée  $\frac{\partial U_3^i}{\partial y}$ ; alors  $\Delta \frac{\partial U_3^i}{\partial x} = 0$ . Ainsi, les  $n$  équations écrites ci-dessus deviennent :

$$\frac{6}{5e^i} S_{Q11}^i \Delta Q_1^i - \frac{1}{10} (S_{Q11}^i (\Delta\tau_1^{i,i+1} + \Delta\tau_1^{i-1,i}) + S_{Q12}^i (\Delta\tau_2^{i,i+1} + \Delta\tau_2^{i-1,i})) = 0. \tag{4.24}$$

Les  $3n - 2$  équations linéaires algébriques (4.23) et (4.24) peuvent s’écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\tilde{\Lambda}^1 \tilde{\chi}^1 = -\tilde{\gamma} \tag{4.25}$$

avec  $\tilde{\chi}^1$  vecteur de dimension  $3n - 2$  défini par

$$\tilde{\chi}^{1t} = (\Delta Q_1^1, \dots, \Delta Q_1^n, \Delta\tau_1^{1,2}, \dots, \Delta\tau_1^{n-1,n}, \Delta\tau_2^{1,2}, \dots, \Delta\tau_2^{n-1,n}),$$

$\tilde{\gamma}$  vecteur de dimension  $3n - 2$  défini par

$$\tilde{\gamma}^t = \left( \underbrace{0, \dots, 0}_{n+k-1}, \gamma_1^{k,k+1}(x, l^-), \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, \gamma_2^{k,k+1}(x, l^-), \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k-1} \right),$$

$\tilde{\Lambda}^1 = (\lambda_{pq})_{1 \leq p, q \leq 3n-2}$  matrice de dimension  $(3n - 2) \times (3n - 2)$  définie par l’équation (C.2) de l’annexe C.

Ces  $3n - 2$  équations linéaires algébriques font intervenir les  $3n - 2$  inconnues secondaires (dont les deux glissements  $\gamma_1^{k,k+1}(x, l^-)$  et  $\gamma_2^{k,k+1}(x, l^-)$ ) et nos 2 inconnues principales  $\tau_1^{k,k+1}(x, l^-) = \Delta\tau_1^{k,k+1}$  et  $\tau_2^{k,k+1}(x, l^-) = \Delta\tau_2^{k,k+1}$ . Déterminer les deux glissements en fonction des seules inconnues principales est alors possible moyennant les  $3n - 2$  équations linéaires algébriques. Au paragraphe C.1 de l’annexe C, on propose une méthode pour déterminer, à partir des coefficients de la matrice constante  $\tilde{\Lambda}^1$  dans (4.25), l’expression linéaire algébrique qui donne les inconnues secondaires en fonction des inconnues principales. Finalement, puisque les glissements  $\gamma_1^{k,k+1}(x, l^-)$  et  $\gamma_2^{k,k+1}(x, l^-)$  font partie des inconnues secondaires, on peut écrire

$$\boxed{\begin{pmatrix} \gamma_1^{k,k+1}(x, l^-) \\ \gamma_2^{k,k+1}(x, l^-) \end{pmatrix}} = \tilde{\Psi} \cdot \begin{pmatrix} \tau_1^{k,k+1}(x, l^+) \\ \tau_2^{k,k+1}(x, l^+) \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

où  $\tilde{\Psi}$  est une matrice  $2 \times 2$  constante dépendante des caractéristiques élastiques du multicouche et son expression analytique est déterminée dans l’équation (C.14) à partir des définitions (C.6) à (C.9) de l’annexe C. Les discontinuités des déplacements dans le plan à l’interface délaminée sont ainsi exprimées en fonction des efforts de cisaillement en pointe de fissure. On peut remarquer grâce à l’équation (4.26), qu’une discontinuité des cisaillements au passage du front de délamination entraîne des discontinuités  $\gamma_1^{k,k+1}(x, l^-)$  et  $\gamma_2^{k,k+1}(x, l^-)$  non nulles.

### Détermination de la discontinuité du déplacement hors plan.

Intéressons nous maintenant à la discontinuité des déplacements normaux  $\gamma_3^{k,k+1}(x, l^-)$  à l'interface délaminée en pointe de fissure. Le but est de déterminer son expression en fonction des seuls efforts à l'interface  $k, k+1$  en pointe de fissure dans la zone saine ( $y = l^+$ ). *Il est évident que cette étude n'est intéressante que dans la configuration de fissure ouverte en pointe de fissure car autrement la discontinuité est nulle.* Le fait que la fissure soit ouverte implique que  $\gamma_3^{k,k+1}(x, l^-) > 0$ . Nous allons commencer par écrire l'équation de comportement où la discontinuité  $\gamma_3^{k,k+1}(x, l^-)$  intervient.

Dans la zone délaminée, en  $y = l^-$ , la loi de comportement (4.17) des efforts d'arrachement du  $M4-5n$  s'écrit pour  $1 \leq j \leq n-1$  :

$$D_\nu^{j,j+1}(x, l^-) - D_3^{j,j+1a}(x, l^-) = \frac{9}{70} e^j S_\nu^j \nu^{j-1,j}(x, l^-) + \frac{13}{35} (e^j S_\nu^j + e^{j+1} S_\nu^{j+1}) \nu^{j,j+1}(x, l^-) + \frac{9}{70} e^{j+1} S_\nu^{j+1} \nu^{j+1,j+2}(x, l^-). \quad (4.27)$$

Dans la zone saine, en  $y = l^+$ , la loi de comportement (4.17) des efforts d'arrachement du  $M4-5n$  s'écrit pour  $1 \leq j \leq n-1$  :

$$D_\nu^{j,j+1}(x, l^+) = \frac{9}{70} e^j S_\nu^j \nu^{j-1,j}(x, l^+) + \frac{13}{35} (e^j S_\nu^j + e^{j+1} S_\nu^{j+1}) \nu^{j,j+1}(x, l^+) + \frac{9}{70} e^{j+1} S_\nu^{j+1} \nu^{j+1,j+2}(x, l^+). \quad (4.28)$$

En exploitant la continuité des déplacements verticaux généralisés de chaque couche et donc de  $D_\nu^{j,j+1}$ , la différence des deux dernières familles d'équations donne pour  $1 \leq j \leq n-1$  :

$$D_3^{j,j+1a}(x, l^-) = -\frac{9}{70} e^j S_\nu^j \Delta \nu^{j-1,j} - \frac{13}{35} (e^j S_\nu^j + e^{j+1} S_\nu^{j+1}) \Delta \nu^{j,j+1} - \frac{9}{70} e^{j+1} S_\nu^{j+1} \Delta \nu^{j+1,j+2}. \quad (4.29)$$

On rappelle que les efforts exercés sur les faces supérieure et inférieure du multicouche sont supposés continus; par conséquent

$$\Delta \nu^{0,1} = \Delta \nu^{n,n+1} = 0.$$

Puisque les lèvres sont supposées ouvertes en pointe de fissure, la discontinuité  $\gamma_3^{k,k+1}(x, l^-)$  est donc non nulle et

$$\Delta \nu^{k,k+1} = -\nu^{k,k+1}(x, l^+).$$

Intéressons nous à l'équation (4.29) pour  $j = k$  :

- pour  $n = 2$ , il est évident que  $\gamma_3^{k,k+1}(x, l^-)$  s'écrit en fonction de l'arrachement en pointe de fissure  $\nu^{k,k+1}(x, l^+)$  seul
- pour  $n > 2$ ,  $\gamma_3^{k,k+1}(x, l^-)$  s'écrit en fonction de l'arrachement en pointe de fissure  $\nu^{k,k+1}(x, l^+)$ , de  $\Delta \nu^{k-1,k}$  et de  $\Delta \nu^{k+1,k+2}$ .

Le but étant d'exprimer la discontinuité  $\gamma_3^{k,k+1}(x, l^-)$  en fonction du seul arrachement en pointe de fissure  $\nu^{k,k+1}(x, l^+)$ , il ne nous reste qu'à étudier le cas où  $n > 2$ .

Considérons la famille de  $n-1$  équations algébriques linéaires (4.29) à  $n$  inconnues. Nous prenons comme inconnue principale l'arrachement en pointe de fissure  $\nu^{k,k+1}(x, l^+)$ . Les autres



$n - 1$  inconnues sont appelées inconnues secondaires (les  $n - 2$  variations d'effort d'arrachement restants et la discontinuité hors plan  $\gamma_3^{k,k+1}(x, l^-)$ ). La famille d'équations (4.29) considérée peut s'écrire sous la forme matricielle suivante  $n > 2$  :

$$\tilde{\kappa}^{-1} \tilde{\nu}^1 = -\tilde{\gamma}_3 \quad (4.30)$$

avec  $\tilde{\nu}^1$  vecteur de dimension  $n - 1$  défini par

$$\tilde{\nu}^{1t} = (\Delta\nu^{1,2}, \dots, \Delta\nu^{n-1,n}),$$

$\tilde{\gamma}_3$  vecteur de dimension  $n - 1$  défini par

$$\tilde{\gamma}_3^t = \left( \underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, \gamma_3^{k,k+1}(x, l^-), \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k-1} \right),$$

$\tilde{\kappa}^{-1} = (\kappa_{pq})_{1 \leq p, q \leq n-1}$  matrice constante de dimension  $(n - 1) \times (n - 1)$  dont l'expression est définie dans l'équation (C.18) de l'annexe C.

Les  $n - 1$  équations algébriques linéaires en (4.29) font intervenir l'inconnue principale  $\nu^{k,k+1} = \Delta\nu^{k,k+1}$  et les  $n - 1$  inconnues secondaires dont la discontinuité de déplacement  $\gamma_3^{k,k+1}(x, l^-)$ . Il est donc possible de déterminer toutes les  $n - 1$  inconnues secondaires en fonction de l'inconnue principale grâce aux équations (4.29). Au paragraphe C.2 de l'annexe C, on propose une méthode pour aboutir, à partir des coefficients de la matrice constante  $\tilde{\kappa}^{-1}$  dans (4.30), à la relation de proportionnalité cherchée :

$$\boxed{\gamma_3^{k,k+1}(x, l^-) = \psi_\nu \nu^{k,k+1}(x, l^+)} \quad (4.31)$$

où  $\psi_\nu$  est une constante dépendante des caractéristiques élastiques du multicouche et de l'épaisseur des couches. L'expression de  $\psi_\nu$  est déterminée analytiquement dans l'équation (C.23) à partir des définitions (C.19) à (C.21) dans l'annexe C. Cette relation de proportionnalité est valable aussi pour le cas où  $n = 2$  puisque l'équation de comportement (4.29) pour l'interface  $k = 1$  ( $j = k$ ) donne directement :

$$\gamma_3^{k,k+1}(x, l^-) = \frac{13}{35} (e^1 S_\nu^1 + e^2 S_\nu^2) \nu^{k,k+1}(x, l^+). \quad (4.32)$$

Nous avons ainsi déterminé la discontinuité de déplacement normal à l'interface délaminiée en fonction du seul effort d'arrachement en pointe de fissure. Grâce à cette équation, on peut remarquer qu'une discontinuité de l'arrachement  $\nu^{k,k+1}$  au passage du front de délamination entraîne une discontinuité  $\gamma_3^{k,k+1}(x, l^-)$  non nulle.

Terminons cette partie en insistant sur le fait que le calcul de cette discontinuité n'a un sens que pour le cas des lèvres de fissures ouvertes, c'est à dire pour  $\gamma_3^{k,k+1}(x, l^-) = \psi_\nu \nu^{k,k+1}(x, l^+) > 0$ . Enfin, puisque  $\psi_\nu$  est strictement positif pour nos empilements, les calculs ci-dessus n'ont un sens que pour le cas où  $\nu^{k,k+1}(x, l^+) > 0$ . Cela veut donc dire que la contribution du terme  $G_I$  du mode I (défini dans la relation (4.20)) dans le taux de restitution d'énergie  $G$  écrit en (4.19) devient :

$$G_I = \psi_\nu \left( \left[ \nu^{k,k+1}(x, l^+) \right]^+ \right)^2,$$

$\left[ \nu^{k,k+1}(x, l^+) \right]^+$  étant la partie positive de  $\nu^{k,k+1}(x, l^+)$ . Ainsi nous n'avons plus à parler de lèvres de fissures ouvertes ou fermées, la contribution de  $G_I$  sous la forme écrite ci-dessus s'annulant automatiquement quand il le faut.

## 4.4.4 Propositions de critères de délaminage en taux de restitution d'énergie.

Cas du modèle  $\mathcal{M}_4-5n$ .

D'après (4.19), (4.26) et (4.31), la densité linéique de taux de restitution d'énergie  $G$  calculée par le modèle  $\mathcal{M}_4-5n$  s'écrit tout simplement :

$$G(x) = \frac{1}{2} \left[ \psi_{11} \left( \tau_1^{k,k+1}(x, l^+) \right)^2 + \psi_{22} \left( \tau_2^{k,k+1}(x, l^+) \right)^2 + (\psi_{12} + \psi_{21}) \tau_1^{k,k+1}(x, l^+) \tau_2^{k,k+1}(x, l^+) + \psi_\nu \left( \left[ \nu^{k,k+1}(x, l^+) \right]^+ \right)^2 \right] \quad (4.33)$$

où on rappelle que les coefficients  $\psi_{11}$ ,  $\psi_{12}$ ,  $\psi_{21}$ ,  $\psi_{22}$  et  $\psi_\nu$  sont des constantes déterminées analytiquement dans l'annexe C et qui dépendent des caractéristiques élastiques du multicouche et de la position du délaminage suivant l'épaisseur du multicouche. Alors, d'après l'équation (4.33), le critère de Griffith (4.12) est pour un multicouche et un type de délaminage donnés, équivalent à un critère en effort d'interface en pointe de fissure pour notre modèle  $\mathcal{M}_4-5n$ .

Par ailleurs, les taux de restitution d'énergie individuels  $G_I$ ,  $G_{II}$  et  $G_{III}$  dans (4.20) s'écrivent :

$$\begin{aligned} G_I &= \psi_\nu \left( \left[ \nu^{k,k+1}(x, l^+) \right]^+ \right)^2 \\ G_{II} &= \psi_{22} \left( \tau_2^{k,k+1}(x, l^+) \right)^2 + \psi_{21} \tau_1^{k,k+1}(x, l^+) \tau_2^{k,k+1}(x, l^+) \\ G_{III} &= \psi_{11} \left( \tau_1^{k,k+1}(x, l^+) \right)^2 + \psi_{12} \tau_2^{k,k+1}(x, l^+) \tau_1^{k,k+1}(x, l^+) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Le critère de Griffith devient alors :

$$G_I + G_{II} + G_{III} \geq G^c. \quad (4.35)$$

Ainsi, si on considère que  $G^c$  dépend uniquement du matériau, le seul paramètre  $G^c$  piloterait le délaminage. Il suffirait alors d'effectuer un type d'essais pour identifier  $G^c$  pour appliquer ensuite le critère et la valeur  $G^c$  trouvée à des essais quelconques. Cependant, dans la littérature, nous trouvons des essais qui prouvent que le taux de restitution d'énergie critique  $G^c$  dépend du mode de fissuration [Wang, 1989], [Whitney, 1989]. On peut alors chercher des critères universels de type

$$f \left( \frac{G_I}{G_I^c}, \frac{G_{II}}{G_{II}^c}, \frac{G_{III}}{G_{III}^c} \right) \geq 1$$

et à ce stade une longue campagne d'essais serait nécessaire pour identifier la fonction  $f$  et les taux de restitution d'énergie critiques  $G_I^c$ ,  $G_{II}^c$  et  $G_{III}^c$  des modes individuels [Guedra-Degeorges, 1993]. Pour l'application que nous allons faire dans la suite, des délaminages en mode III quasi-pur, nous pouvons nous contenter du critère de Griffith écrit en (4.35).

Cas du modèle  $\mathcal{M}_4-2n+1$ .

Pour calculer le taux de restitution d'énergie d'un multicouche fissuré **sans ouverture des lèvres de fissures**, on aurait obtenu de façon analogue

$$G(x) = \frac{1}{2} \left[ \eta_{11} \left( \tau_1^{k,k+1}(x, l^+) \right)^2 + \eta_{22} \left( \tau_2^{k,k+1}(x, l^+) \right)^2 + (\eta_{12} + \eta_{21}) \tau_1^{k,k+1}(x, l^+) \tau_2^{k,k+1}(x, l^+) \right] \quad (4.36)$$



où les coefficients  $\eta_{11}$ ,  $\eta_{12}$ ,  $\eta_{22}$  et  $\eta_{21}$  sont des constantes dépendantes de l'empilement et sont déterminées par une méthode analogue à celle de l'annexe C pour le calcul des coefficients du  $\mathcal{M}4-5n$ . Pour le modèle  $\mathcal{M}4-2n+1$ , le critère de Griffith (4.12) est aussi équivalent à un critère en effort d'interface en pointe de fissure. Dans l'expression du taux de restitution d'énergie, nous identifions les contributions  $G_{II}$  et  $G_{III}$  des modes II et III de fissuration respectivement. Leurs expressions sont

$$\begin{aligned} G_{II} &= \eta_{22} \left( \tau_2^{k,k+1}(x, l^+) \right)^2 + \eta_{21} \tau_1^{k,k+1}(x, l^+) \tau_2^{k,k+1}(x, l^+) \\ G_{III} &= \eta_{11} \left( \tau_1^{k,k+1}(x, l^+) \right)^2 + \eta_{12} \tau_2^{k,k+1}(x, l^+) \tau_1^{k,k+1}(x, l^+) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Dans la suite, le critère de délaminage en cisaillement que nous allons utiliser avec le modèle  $\mathcal{M}4-2n+1$  est

$$G_{II} + G_{III} \geq G^c.$$

Les critères écrits ci-dessus sont évidemment utiles pour l'étude de la propagation du délaminage. Nous allons voir dans la suite comment ils peuvent aussi servir à la prédiction de l'initiation du délaminage. Les taux de restitution d'énergie critiques  $G^c$  calculés par nos deux modèles seront alors déterminés moyennant des essais d'initiation de délaminage en mode III.

#### 4.5 Application du critère à l'initiation du délaminage d'un $(\pm\theta_n)_s$ .

Nous avons vu ci-dessus, que le calcul du taux de restitution d'énergie suppose l'existence d'une fissure. Or, l'initiation du délaminage est le passage d'un état sain à un état fissuré à l'interface. Cependant, Griffith explique dans [Griffith, 1920] qu'il existe des micro-fissures préexistantes dans le matériau, celles-ci peuvent être dues à l'usinage des bords ou bien à des défauts de matière. Dans notre cas, d'après les observations expérimentales du paragraphe 1.4.2 du chapitre 1, nous avons confirmé la présence de micro-fissures dues au chargement avant l'amorçage du délaminage (voir figures 1.12 et 1.13). Nous pouvons donc utiliser le critère en taux de restitution d'énergie pour prédire l'initiation du délaminage.

Néanmoins, le calcul du taux de restitution d'énergie à l'initiation du délaminage est encore à effectuer. Prenons le cas du problème de bord libre, déjà classique dans ce mémoire. Dans la littérature, lorsqu'on utilise des calculs 3D, le passage à la limite d'une longueur de fissure  $l > 0$  à une longueur nulle donne en général des taux de restitution d'énergie nuls [Leguillon, 1998]. Pour les calculs 3D, le critère de Griffith tel qu'il est, ne peut alors prédire l'amorçage du délaminage, à moins d'identifier une longueur  $l > 0$  caractéristique de la profondeur des microfissures préexistantes. Par contre :

- si nous utilisons notre modèle simplifié  $\mathcal{M}4-5n$  pour évaluer les contraintes et si on fait un passage à la limite d'une longueur de fissure  $l > 0$  à une longueur nulle, le taux de restitution d'énergie par unité de longueur d'éprouvette écrit en (4.33) devient :

$$G = \frac{1}{2} \left[ \psi_{11} \left( \tau_1^{k,k+1} \right)^2 + \psi_{22} \left( \tau_2^{k,k+1} \right)^2 + (\psi_{12} + \psi_{21}) \tau_1^{k,k+1} \tau_2^{k,k+1} + \psi_\nu \left( \left[ \nu^{k,k+1} \right]^+ \right)^2 \right], \quad (4.38)$$

$\tau_1^{k,k+1}$ ,  $\tau_2^{k,k+1}$  et  $\nu^{k,k+1}$  étant calculés au bord des éprouvettes saines (là où le délaminage s'initie),



- si nous utilisons la modèle  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$ , nous pouvons aussi faire un passage à la limite pour définir le taux de restitution d'énergie à l'initiation du délaminage

$$G = \frac{1}{2} \left[ \eta_{11} \left( \tau_1^{k,k+1} \right)^2 + \eta_{22} \left( \tau_2^{k,k+1} \right)^2 + (\eta_{12} + \eta_{21}) \tau_1^{k,k+1} \tau_2^{k,k+1} \right], \quad (4.39)$$

Puisque ces expressions (4.38) et (4.39) sont non nulles, le problème d'identification de la longueur caractéristique de la profondeur des microfissures ne se pose pas pour nos modèles  $\mathcal{M}_{4-5n}$  et  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$ . Enfin, les efforts d'interface  $\tau_1^{k,k+1}$ ,  $\tau_2^{k,k+1}$  et  $\nu^{k,k+1}$  dans (4.38) et (4.39) peuvent être calculés par nos deux logiciels et les coefficients qui apparaissent dans ces relations peuvent aussi être calculés par les expressions données dans l'annexe C.

Nous nous intéressons maintenant au cas d'un  $(\pm\theta_n)_s$  en traction. D'après les calculs élastiques effectués avec nos deux modèles dans la partie précédente, le délaminage aux interfaces  $\theta/ - \theta$  dans les empilements  $(\pm\theta_n)_s$  en traction est de type mode III pur. Nous exploitons ici les résultats expérimentaux du chapitre 1 pour le T700/CTE1-15 et de Marion [Marion, 2000] pour le T800-914.

D'après ce qu'on a dit concernant le maillage multiparticulaire au paragraphe 4.2.1 pour les matériaux fragiles, nous modélisons, moyennant nos modèles  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  et  $\mathcal{M}_{4-5n}$ , les éprouvettes  $(\pm\theta_n)_s$  par des multicouches à  $4n$  couches :

$$\underbrace{(\theta, \dots, \theta)}_{n \text{ fois}}, \underbrace{(-\theta, \dots, -\theta)}_{n \text{ fois}})_s.$$

A l'initiation du délaminage, nos deux logiciels DEILAM ( $\mathcal{M}_{4-5n}$ ) et celui dans lequel on a programmé les équations du  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  donnent les efforts d'interface qui apparaissent dans les critères (4.38) et (4.39). On rappelle que les cisaillements  $\tau_1^{n,n+1}$  à l'interface  $n, n+1$  ( $\theta/ - \theta$ ) sont les seuls efforts d'interface non négligeables. Enfin, la valeur au bord des efforts de cisaillement  $\tau_1^{n,n+1}$  est la valeur maximale de cet effort d'interface.

Afin de calculer le taux de restitution d'énergie pour nos multicouches symétriques  $(\pm\theta_n)_s$ , nous avons modifié légèrement les calculs des coefficients  $\psi_{\alpha\beta}$  et  $\eta_{\alpha\beta}$  dans l'annexe C pour prendre en compte les symétries et donc le fait qu'il existe 4 fissures au lieu d'une. Malgré tout, la méthode de calcul reste la même.

Puisque le cisaillement  $\tau_1^{n,n+1}$  à l'interface  $\theta/ - \theta$  dans le  $(\pm\theta_n)_s$  est prépondérant devant les autres efforts d'interface pour nos deux modèles, le taux de restitution d'énergie associé à l'initiation de chacune des 4 fissures s'écrit d'après (4.38) et (4.39)

$$G = G_{III} = \frac{1}{2} c(n, \theta) \left( \tau_1^{n,n+1}(b) \right)^2 \quad (4.40)$$

où  $\tau_1^{n,n+1}(b)$  est la valeur du cisaillement au bord et  $c$  est une constante qui dépend du modèle, de  $n$  et de la valeur de  $\theta$ . L'expression de  $c$ , pour notre multicouche symétrique, se déduit trivialement de l'expression des coefficients  $\psi_{11}$  ou de  $\eta_{11}$  qui apparaissent dans (4.38) et (4.39).

A ce stade, il est intéressant de regarder l'évolution de  $c(n, \theta)$  pour les empilements que nous avons testés. Sur les tableaux 4.9 et 4.10, nous avons écrit les valeurs de  $c$  pour les différents empilements et pour les deux modèles. Nous remarquons tout d'abord, que pour les matériaux ayant des modules de cisaillement  $G_{LN}$  et  $G_{TN}$  égaux comme le T700/CTE1-15, le coefficient  $c$  calculé pour nos deux modèles ne dépend pas de l'angle et ne varie pratiquement pas en fonction du nombre de couches (voir tableau 4.9). Par contre, si ces modules sont différents (c'est le cas du matériau T800/914, cf. [Marion, 2000]), le coefficient  $c$  peut dépendre sensiblement de l'angle (voir tableau 4.10).



$c$ en $10^{-15} m^4/J$	Modèle $\mathcal{M}_{4-5n}$		Modèle $\mathcal{M}_{4-2n+1}$	
	$(\pm 10_n)_s$	$(\pm 20_n)_s$	$(\pm 10_n)_s$	$(\pm 20_n)_s$
$n = 1$	5,8	5,8	15,5	15,5
$n = 2$	5,5	5,5	13,6	13,6
$n = 3$	5,5	5,5	13,5	13,5
$n = 4$	5,5	5,5	13,5	13,5

TAB. 4.9 – Valeurs du coefficient  $c$  dans l'expression du taux de restitution d'énergie (matériau T700/CTE1-15).

$c$ en $10^{-15} m^4/J$	Modèle $\mathcal{M}_{4-5n}$		Modèle $\mathcal{M}_{4-2n+1}$	
	$(\pm 10_n)_s$	$(\pm 20_n)_s$	$(\pm 10_n)_s$	$(\pm 20_n)_s$
$n = 1$	7,7	8,0	20,6	21,4
$n = 2$	7,3	7,6	17,9	18,1
$n = 3$	7,3	7,6	17,9	17,8
$n = 4$	7,3	7,6	18,0	19,0
$n = 5$	7,3	7,6	17,7	17,8
$n = 8$	7,3		17,6	

TAB. 4.10 – Valeurs du coefficient  $c$  dans l'expression du taux de restitution d'énergie (matériau T800-914).

Le coefficient  $c$  peut cependant être considéré comme une constante. Si bien que  $G_{III} = G$  est proportionnel à  $\tau_1^{n,n+1}$  (cf. équation (4.40)). Proposer un critère du type

$$G = \frac{1}{2}c \left( \tau_1^{n,n+1}(b) \right)^2 = G^c$$

est donc dans ce cas équivalent au critère

$$\left( \tau_1^{n,n+1}(b) \right)^2 = (\tau^c)^2$$

proposé précédemment au paragraphe 4.3. Il s'agit là d'une véritable justification énergétique de ce critère en contrainte.

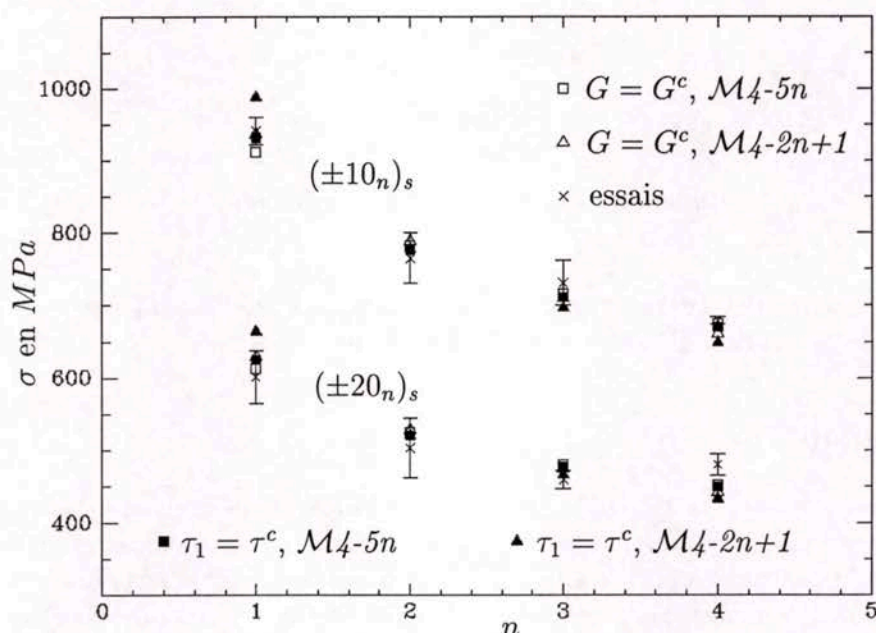
Pour déterminer les valeurs des taux de restitution d'énergie critiques  $G_{III}^c = G^c$  des deux modèles par les essais, nous déterminons le taux de restitution d'énergie au moment de l'amorçage du délaminage pour chaque empilement. Pour ce faire, on calcule les déformations mesurées au moment du délaminage à partir des contraintes critiques de traction mesurées (voir tableaux 4.3 et 4.4) et des modules d'Young théoriques. Puis, on obtient grâce aux logiciels les cisaillements  $\tau_1^{n,n+1}$  au bord prévus par le  $\mathcal{M}_{4-5n}$  et le  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  au moment du délaminage. Finalement, on utilise la formule (4.40), et on obtient les valeurs des taux de restitution d'énergie à l'initiation du délaminage. La moyenne de ces valeurs donne les taux de restitution d'énergie critiques  $G_{III}^c = G^c$  des modèles. Sur le tableau 4.11, nous avons écrit les valeurs des  $G^c$  pour les matériaux testés et les modèles utilisés.

A ce stade, il est intéressant de déterminer à partir du critère d'initiation de délaminage trouvé  $G = G_{III}^c$ , les chargements théoriques à l'amorçage du délaminage. Sur les figures 4.21 et 4.22 nous avons tracé les chargements critiques prévus par les critères  $G = G_{III}^c$  pour les matériaux T700/CTE1-15 et T800-914 respectivement. Nous avons rajouté sur ces courbes les prédictions des

$G_c^{III}$ en $J/m^2$	Carbone-époxy T700/CTE1-15	Carbone-époxy T800-914
Modèle $M_4-5n$	196	208
Modèle $M_4-2n+1$	304	332

TAB. 4.11 – Valeurs de  $G_{III}^c$  pour chaque modèle.

critères en cisaillement maximal  $\tau^{n,n+1} = \tau^c$  de la section précédente. Nous avons aussi placé les points expérimentaux plus/moins un écart-type pour pouvoir comparer aux essais. Nous confirmons sur ces courbes que les critères en taux de restitution d'énergie et en cisaillement maximal donnent pratiquement les mêmes prédictions, et ce pour nos deux modèles et pour les deux matériaux. Encore une fois, nous voyons que nos critères reproduisent correctement les effets d'épaisseur mesurés expérimentalement.

FIG. 4.21 – Charges critiques des multicouches  $(\pm\theta_n)_s$  en traction (matériau T700/CTE1-15).

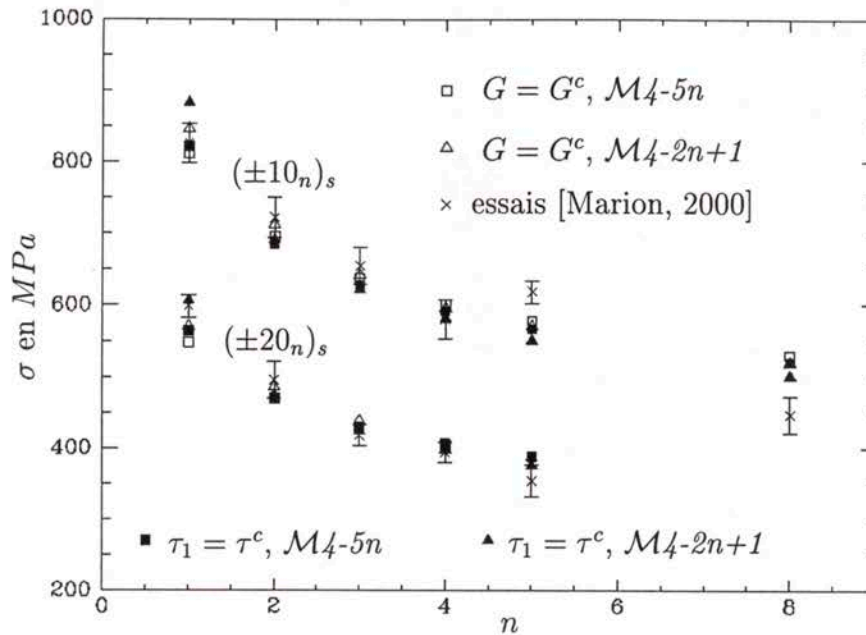
Sur le tableau 4.12, on a calculé les erreurs commises par les prédictions des critères en taux de restitution d'énergie par rapport aux chargements critiques mesurés. Les prédictions sont très correctes, les meilleures étant pour les multicouches T700/CTE1-15 dont nous contrôlons mieux tous les aspects.

erreur en %	Carbone-époxy T700/CTE1-15	Carbone-époxy T800-914
Modèle $M_4-5n$	< 5,5%	< 15,1%
Modèle $M_4-2n+1$	< 7,8%	< 14,1%

TAB. 4.12 – Erreurs des prédictions.

Finalement, nous pouvons faire les mêmes remarques que pour les critères en cisaillement maximal. Les valeurs des taux de restitution d'énergie critiques dépendent du modèle choisi et de l'épaisseur de la couche modèle (voir paragraphe 4.2.1). Si on change de modèle ou d'épaisseur



FIG. 4.22 – Charges critiques des multicouches  $(\pm\theta_n)_s$  en traction (matériau T800-914).

de couche modèle, nous devons reprendre le travail d'identification et on trouvera sûrement des valeurs de taux de restitution d'énergie critique différentes.

## 4.6 Conclusion.

Nous avons construit deux types de critères d'initiation de délaminage. Le premier type de critères porte sur les valeurs maximales des efforts d'interface. Le deuxième est issu du passage à la limite du critère de propagation de délaminage portant sur les taux de restitution d'énergie. Pour ce cas, le critère de délaminage a été calculé par la méthode de refermeture de fissure [Bui, 1978]. Un travail supplémentaire a été effectué afin d'exprimer le taux de restitution d'énergie en fonction des efforts d'interface en pointe de fissure. Par ce travail, nous avons pu justifier énergétiquement le premier critère pour le cas du délaminage en mode III des matériaux testés. Moyennant des essais de traction sur des empilements  $(\pm\theta_n)_s$  où  $\theta = 10$  et  $20$  (délaminage en mode III), on a identifié le cisaillement critique  $\tau^c$  et le taux de restitution d'énergie critique  $G^c$  qui apparaissent dans les critères. Ces grandeurs dépendent cependant du modèle utilisé, et notamment du maillage multiparticulaire choisi. Pour que ces grandeurs soient utiles, il faut travailler avec la même épaisseur de pli physique qui a servi pour l'identification et garder l'épaisseur de pli physique comme épaisseur de couche modèle pour les calculs. Si on utilise une épaisseur de couche modèle différente, le travail d'identification est à reprendre.

Même si les deux types de critères d'initiation de délaminage se sont avérés pratiquement équivalents pour les matériaux testés, les critères issus de l'analyse des taux de restitution d'énergie ont un fondement plus solide que les critères en cisaillement maximal.

Nous avons aussi montré, que la fissuration des empilements  $(\pm 25_n, 90_{n/2})_s$  en traction peut être interprétée dans le cadre de l'élasticité à l'aide de notre modèle  $\mathcal{M}_{4-5n}$  et de la prise en compte d'un effet d'échelle de volume. Nous avons reproduit avec une très bonne précision l'effet d'épaisseur sur l'initiation de la fissuration pour les empilements  $(\pm 25_n, 90_{n/2})_s$ . Ce point nous conduit à réfléchir

sur une méthodologie expérimentale qui fasse apparaître de vraies fissures aux interfaces en mode I.

Tous les critères de délaminage que nous avons construits ont prédit avec précision l'initiation du délaminage observée au chapitre 1 de ce mémoire pour les empilements  $(\pm\theta_n)_s$  en traction ( $\theta = 10$  et  $20$ ). Ce travail a aussi été effectué pour les tests de traction dans [Marion, 2000] pour le même type d'empilements. Ces critères supposent que les matériaux sont élastiques fragiles. Cependant, d'après le chapitre 1, nous avons mis en évidence un phénomène de glissement d'interface qui peut perturber localement les champs. On se demande alors comment nos critères peuvent prévoir l'initiation du délaminage alors que le phénomène de glissement a eu lieu bien avant l'initiation du délaminage. Au chapitre suivant, après la construction d'un critère de délaminage prenant en compte la plasticité d'interface, nous expliquerons les raisons pour lesquelles notre approche élastique fragile fonctionne pour la prédiction de l'initiation du délaminage.





## Chapitre 5

# Glissement d'interface et critère de délaminage.

### 5.1 Introduction et bibliographie.

Nous avons vu au chapitre 1 qu'il existe un phénomène anélastique aux interfaces  $\theta/ - \theta$  des empilements  $(\pm\theta_n)_s$  en traction. Puisque nous considérons les interfaces comme des entités 2D, le phénomène anélastique est appelé glissement d'interface et il a lieu avant le délaminage des empilements. Les essais ont prouvé qu'une valeur critique du glissement semble gouverner l'initiation du délaminage. Ce glissement est d'origine plastique et est dû à l'effet de bord sur les cisaillements aux interfaces  $\theta/ - \theta$ . Dans ce chapitre, à l'aide du  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  et de modèles de plasticité, nous allons calculer analytiquement le glissement d'interface et nous établirons des critères de délaminage en glissement maximal. Mais avant cela, nous faisons ci-dessous une brève bibliographie sur les théories développées par certains auteurs et pouvant être prises en compte pour la modélisation du glissement d'interface et la prédiction du délaminage.

Une première approche des phénomènes non linéaires aux interfaces peut être l'introduction de l'endommagement aux interfaces [Talreja, 1989], [Allix, 1992]. Les modèles élastiques avec endommagement aux interfaces prévoient la progression d'une zone d'endommagement qui provoque l'initiation et la propagation du délaminage (l'indicateur d'endommagement vaut alors 1). Dans [Allix et al., 1998], on trouve un lien entre les calculs par la mécanique linéaire de la rupture et la mécanique de l'endommagement moyennant une analyse des puissances dissipées pendant la progression du délaminage en régime permanent. Cependant, une approche élastique endommageable ne permet pas de rendre compte des glissements d'interface. Il faut alors enrichir la modélisation et faire une approche élastoplastique avec endommagement par la prise en compte de discontinuités des déplacements aux interfaces comme il est suggéré dans [Allix, 1992].

Afin d'étudier l'initiation du délaminage et sa propagation, certains auteurs ont utilisé des modèles d'interfaces imparfaites (la raideur de l'interface est finie) avec des lois d'adoucissement linéaires [Schellekens et De Borst, 1994], [Schipperen et Lingen, 1999], [Bui et al., 2000]. Les efforts d'interface  $\sigma_{i3}$  ( $i$  variant de 1 à 3 et 3 étant la direction normale à l'interface) sont reliés aux discontinuités des déplacements  $\gamma_i$  par une loi schématisée sur la figure 5.1. Le délaminage a lieu lorsque la discontinuité atteint une valeur critique  $\gamma_i^c$ . Dans [Schellekens et De Borst, 1994], on propose un potentiel de plasticité avec radoucissement orthotrope et un écoulement normal pour calculer l'évolution de la discontinuité. Les simulations se font moyennant des éléments finis avec



des éléments solides dans les couches et des éléments de type "interface" aux interfaces. Les auteurs obtiennent après identification des simulations de délaminage en mode I. Pour ce même type de fissuration, dans [Schipperen et Lingen, 1999], on trouve une validation des simulations avec un modèle d'interfaces imparfaites élastiques endommageables par une comparaison avec des essais. Il s'agit d'une analyse non-linéaire de la rupture qui est peu sensible à la finesse du maillage. Il nous semble que ces types de modèles pouvant rendre compte des glissements d'interface de nos essais n'ont pas été confrontés aux délaminages en mode III. De plus, le glissement d'interface semble ne pas avoir été mis en évidence expérimentalement dans ces travaux et aucune corrélation n'a donc été faite entre les éventuelles valeurs de glissement calculées et mesurées.

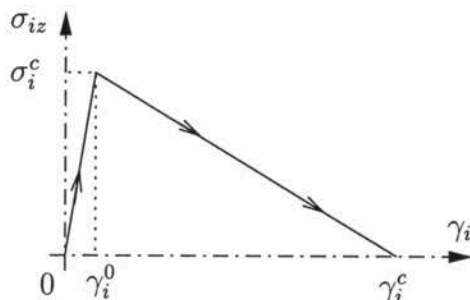


FIG. 5.1 – Comportement de l'interface.

Afin de calculer les glissements d'interface dans des multicouches  $(\pm\theta_n)_s$  en traction, nous proposons dans ce chapitre une analyse élastoplastique (d'une certaine façon semblable à celle de [Schipperen et Lingen, 1999]) des interfaces par le  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  avec deux modèles de plasticité. Les calculs seront effectués analytiquement et par un souci de simplicité nous n'intégrerons pas dans ce mémoire l'endommagement des interfaces. Le but du calcul du glissement d'interface sera la prédiction du délaminage par un critère en glissement maximal. Nous ne modéliserons pas ici l'effet d'épaisseur sur le délaminage car les calculs deviendraient trop lourds mais nous verrons que le critère permet de prédire le délaminage de façon très précise pour les valeurs d'angles testées. Nous vérifierons au passage la description correcte du glissement au bord mesuré au chapitre 1 en fonction du chargement (cf. figures 1.16 à 1.21).

Dans un premier temps, nous présentons une méthode de calcul analytique des champs dans les empilements  $(\pm\theta_n)_s$  en traction en présence de glissements et deux modèles de plasticité pour calculer ces glissements. Nous montrerons ensuite le fonctionnement des modèles par l'application des calculs au cas d'un cycle de chargement. Puis, nous ferons une identification des paramètres dans les modèles par nos essais et nous ferons des prédictions sur l'initiation du délaminage par un critère en glissement maximal. Nous terminerons par une corrélation entre les critères de délaminage développés dans ce chapitre et les critères du chapitre précédent issus d'une analyse élastique. Nous étudierons alors les liens énergétiques entre ces deux critères, critères qui s'avèreront être équivalents.

## 5.2 Calcul du glissement d'interface.

Il s'agit d'évaluer le glissement aux interfaces  $\theta / -\theta$  des empilements  $(\pm\theta_n)_s$  en traction du chapitre 1 à l'aide du modèle  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$ . Les multicouches sont modélisés par des quadricouches

$(\pm\theta)_s$  dont l'épaisseur est proportionnelle à  $n$ . De cette façon, les calculs analytiques seront d'une complexité raisonnable.

### 5.2.1 Description du problème.

L'éprouvette modèle  $(\pm\theta)_s$  considérée occupe le domaine  $-L \leq x \leq L$ ,  $-b \leq y \leq b$  et  $-2e_p \leq z \leq 2e_p$ . Le multicouche modèle est soumis à une déformation uniforme  $\epsilon$  suivant l'axe  $x$ . On rappelle que les contraintes résiduelles ne sont pas prises en compte puisqu'il est communément admis que l'effet de la variation de la température est compensée par l'effet de l'humidité [Hahn, 1976].

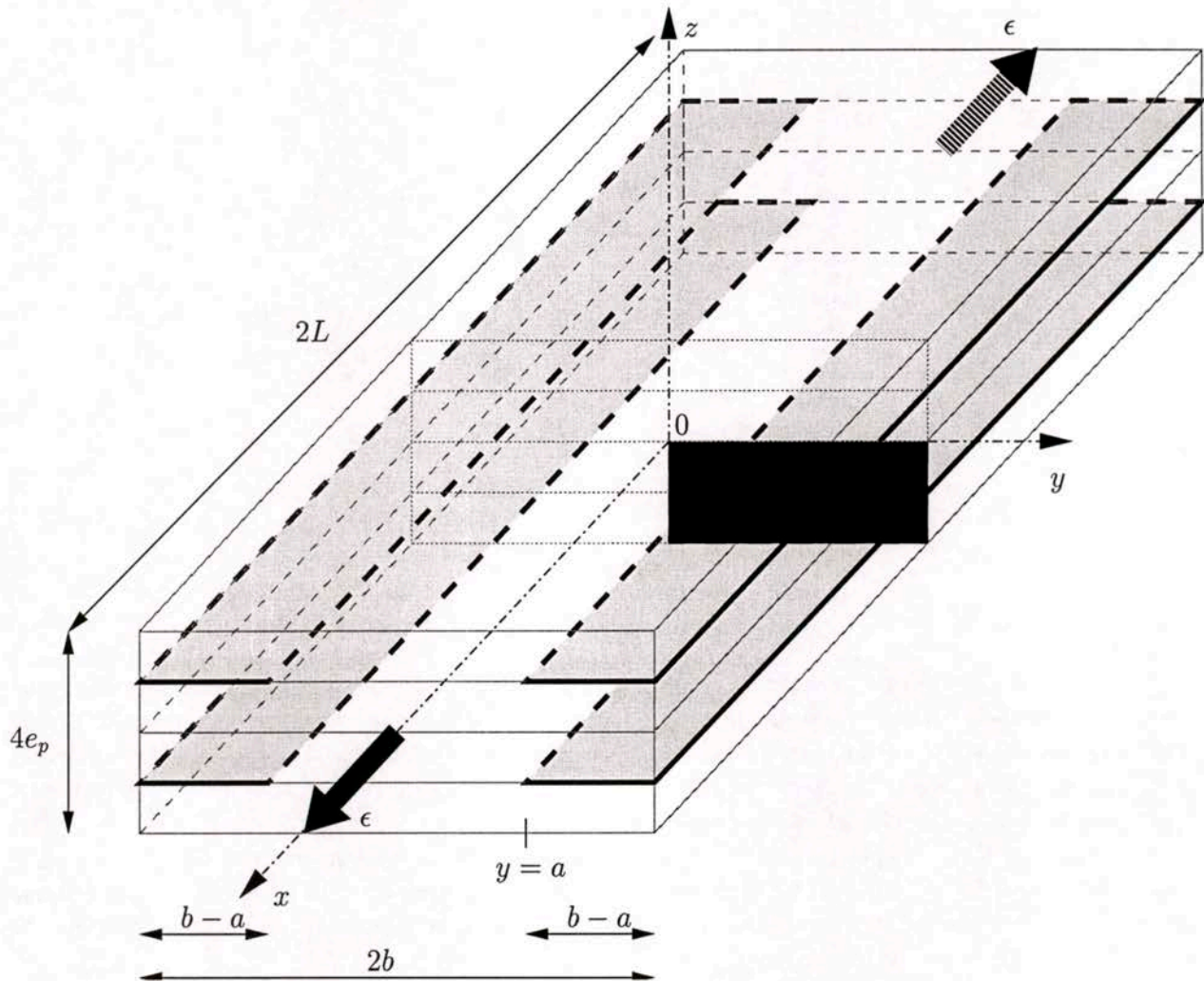


FIG. 5.2 - Géométrie.

La plasticité d'interface des éprouvettes  $(\pm\theta)_s$  en traction n'a pu être observée et mesurée qu'aux bords. L'effet de bord sur les cisaillements d'interface, les symétries et l'uniformité du glissement d'interface le long des éprouvettes nous laissent penser que la plasticité d'interface se propage au fur et à mesure du chargement à partir des bords sous la forme de quatre bandes de même largeur  $b-a$  constante (voir figure 5.2). En supposant que les déformations et les contraintes sont indépendantes



de  $x$ , les symétries nous permettent de nous restreindre au quart de cellule sud-est (déjà classique dans ce mémoire) noirci sur la figure 5.2. Pour calculer les glissements et leur évolution, on se contentera d'une analyse élastoplastique aux interfaces. Compte tenu des microfissures observées sur les figures 1.12 et 1.13 avant le délaminage, il est clair qu'une modélisation complète des interfaces ferait aussi intervenir l'endommagement. Malgré tout, nous verrons plus loin que notre modélisation donne des résultats très satisfaisants.

Notre étude dans le quart de cellule se fera sur deux zones différentes (voir figure 5.3) :

- Zone I définie pour  $0 \leq y \leq a$ . Sur cette zone le comportement est élastique.
- Zone II définie pour  $a \leq y \leq b$ . Sur cette zone le comportement est élastique dans les couches mais plastique aux interfaces. Nous modélisons les interfaces par des entités 2D, la plasticité d'interface induit donc un champ de discontinuité

$$\underline{\gamma}^{1,2}(y) = \gamma_1(y)e_x + \gamma_2(y)e_y$$

des déplacements à l'interface  $\theta / -\theta$ .

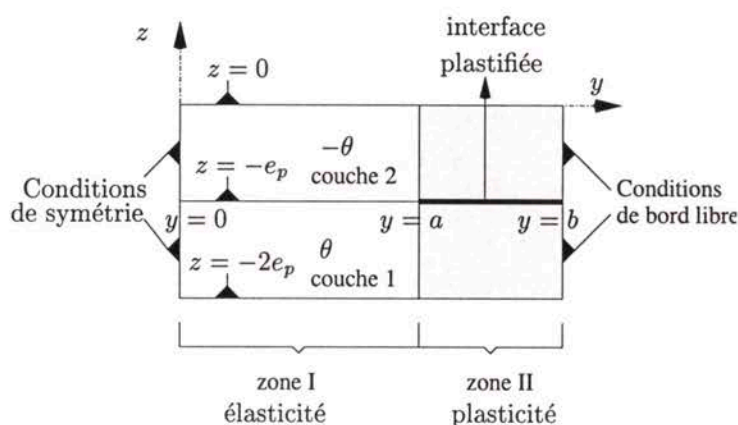


FIG. 5.3 – Problème simplifié.

Dans la construction du modèle  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  au chapitre 2, nous avons supposé que le glissement  $\underline{\gamma}$  était une donnée du problème. De la même façon, nous allons supposer dans un premier temps que  $\underline{\gamma}$  et  $a$  sont donnés, c'est à dire qu'ils jouent le rôle de variables d'état du problème de même que la déformation imposée  $\epsilon$ . Nous écrirons les équations élastiques du problème et par leur résolution nous déterminerons les efforts et les déplacements généralisés en fonction de  $\epsilon$  et des "données"  $\underline{\gamma}$  et  $a$ . Ensuite nous adopterons des critères de plasticité et une loi normale d'écoulement pour déterminer ainsi les variables d'état en fonction d'un paramètre de chargement convenablement choisi. Finalement nous serons en mesure de calculer les valeurs des efforts et des déplacements généralisés en fonction du paramètre de chargement.

### 5.2.2 Résolution en fonction des variables d'état.

Nous allons évaluer les contraintes et les déplacements avec le modèle  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  sur les zones I et II en fonction de  $a$ , de  $\underline{\gamma}$  et de  $\epsilon$ .

#### Champs généralisés du $\mathcal{M}_{4-2n+1}$ .

Compte tenu de l'hypothèse d'invariance par translation, les déplacements généralisés du modèle sont :

- le champ des déplacements dans le plan de la couche  $i$  pour  $i \in \{1, 2\}$  (voir équation (2.23))

$$\tilde{U}^i(x, y) = \begin{pmatrix} \epsilon x + u^i(y) \\ v^i(y) \end{pmatrix} \quad \text{avec } \epsilon = \frac{\Delta}{L} \text{ et } u^i \text{ et } v^i \text{ continus sur } [0, b] \quad (5.1)$$

- le champ de déplacement normal du multicouche (cf. équation (2.39))

$$w(y) = 0 \quad (\text{pour des raisons de symétrie}). \quad (5.2)$$

Les efforts généralisés sont :

- les efforts membranaires de la couche  $i$  pour  $i \in \{1, 2\}$  (cf. équation (2.9))

$$\tilde{N}^i(y) = \begin{pmatrix} N_{11}^i(y) & N_{12}^i(y) \\ N_{12}^i(y) & N_{22}^i(y) \end{pmatrix} \quad \text{avec } N_{12}^i \text{ et } N_{22}^i \text{ continus sur } [0, b]$$

- les efforts de cisaillement à l'interface entre les couches 1 et 2 (cf. équation (2.12), les efforts de cisaillement à l'interface entre les couches 2 et 3 sont nuls pour des raisons de symétrie)

$$\tilde{\tau}(y) = \begin{pmatrix} \tau_1(y) \\ \tau_2(y) \end{pmatrix}.$$

### Equations du modèle.

D'après l'équation (2.41), l'équilibre de la couche  $i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) s'écrit

$$N_{\alpha 2}^i{}'(y) = (-1)^i \tau_\alpha(y) \quad (5.3)$$

En ce qui concerne le *comportement*, nous allons nous contenter d'une analyse élastique dans les couches et élastoplastique aux interfaces. Puisque l'endommagement n'est pas pris en compte dans la modélisation, les souplesses apparaissant dans le modèle  $\mathcal{M}_4-2n+1$  ne changent donc pas. Pour simplifier l'expression des *équations de comportement*, on définit les tenseurs  $\tilde{S}^i$  et  $\tilde{S}_Q^i$  représentant respectivement la souplesse de contrainte plane et la souplesse du cisaillement de la couche  $i$ . En notation de Voigt, leurs expressions sont données, aux équations (3.29) et (3.30). Ainsi, les équations de comportement membranaire de la couche  $i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) s'écrivent d'après (2.92) et (2.63)

$$\begin{pmatrix} \epsilon \\ v^{i'} \\ u^{i'} \end{pmatrix} = \frac{\tilde{S}^i}{e_p} \begin{pmatrix} N_{11}^i(y) \\ N_{22}^i(y) \\ N_{12}^i(y) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

En présence d'un glissement d'interface  $\underline{\gamma}$  ( $\underline{\gamma}$  est nul sur la zone I mais non nul sur la zone II), l'équation de comportement d'interface (2.93) s'écrit d'après (2.89)

$$\begin{pmatrix} u^2(y) - u^1(y) \\ v^2(y) - v^1(y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_1(y) \\ \gamma_2(y) \end{pmatrix} = \frac{e_p}{3} (\tilde{S}_Q^1 + \tilde{S}_Q^2) \begin{pmatrix} \tau_1(y) \\ \tau_2(y) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Les *conditions aux limites* du problème sont les

- conditions de symétrie en  $y = 0$

$$u^i(0) = v^i(0) = 0 \quad \text{avec } i \in \{1, 2\} \quad (5.6)$$

- conditions de bord libre en  $y = b$

$$N_{12}^i(b) = N_{22}^i(b) = 0 \quad \text{avec } i \in \{1, 2\} \quad (5.7)$$



## Simplification des équations.

La première ligne de l'équation (5.4) donne

$$N_{11}^i = -\frac{S_{12}^i}{S_{11}^i} N_{22}^i - \frac{S_{16}^i}{S_{11}^i} N_{12}^i + \frac{e_p}{S_{11}^i} \epsilon \quad (5.8)$$

Donc, en posant  $u^{1,2} = u^2 - u^1$  et  $v^{1,2} = v^2 - v^1$  et en utilisant les lignes 2 et 3 de l'équation (5.4), on obtient

$$u^{1,2'} = \frac{B^2}{e_p} N_{22}^2 + \frac{C^2}{e_p} N_{12}^2 + \frac{S_{16}^2}{S_{11}^2} \epsilon - \left( \frac{B^1}{e_p} N_{22}^1 + \frac{C^1}{e_p} N_{12}^1 + \frac{S_{16}^1}{S_{11}^1} \epsilon \right) \quad (5.9)$$

$$v^{1,2'} = \frac{A^2}{e_p} N_{22}^2 + \frac{B^2}{e_p} N_{12}^2 + \frac{S_{12}^2}{S_{11}^2} \epsilon - \left( \frac{A^1}{e_p} N_{22}^1 + \frac{B^1}{e_p} N_{12}^1 + \frac{S_{12}^1}{S_{11}^1} \epsilon \right) \quad (5.10)$$

où

$$A^i = \left( S_{22}^i - \frac{S_{12}^{i2}}{S_{11}^i} \right), \quad B^i = \left( S_{26}^i - \frac{S_{16}^i S_{12}^i}{S_{11}^i} \right) \quad \text{et} \quad C^i = \left( S_{66}^i - \frac{S_{16}^{i2}}{S_{11}^i} \right) \quad (5.11)$$

Par ailleurs, les équations d'équilibre (5.3), la condition de bord libre (5.7) et la continuité de  $N_{\alpha 2}^i$  sur  $[0, b]$  donnent

$$N_{\alpha 2}^2 = -N_{\alpha 2}^1. \quad (5.12)$$

Alors les équations (5.9) et (5.10) donnent

$$u^{1,2'} = -\frac{B^2 + B^1}{e_p} N_{22}^1 - \frac{C^2 + C^1}{e_p} N_{12}^1 + \left( \frac{S_{16}^2}{S_{11}^2} - \frac{S_{16}^1}{S_{11}^1} \right) \epsilon \quad (5.13)$$

$$v^{1,2'} = -\frac{A^2 + A^1}{e_p} N_{22}^1 - \frac{B^2 + B^1}{e_p} N_{12}^1 + \left( \frac{S_{12}^2}{S_{11}^2} - \frac{S_{12}^1}{S_{11}^1} \right) \epsilon \quad (5.14)$$

Pour simplifier les équations et alléger les notations, on écrit pour la couche à  $\theta$  (couche 1)

$$\tilde{S}^1 = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{S}_Q^1 = \begin{pmatrix} S_{Q11} & S_{Q12} \\ S_{Q12} & S_{Q22} \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

et donc pour la couche à  $-\theta$  (couche 2)

$$\tilde{S}^2 = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & -S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & -S_{26} \\ -S_{16} & -S_{26} & S_{66} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{S}_Q^2 = \begin{pmatrix} S_{Q11} & -S_{Q12} \\ -S_{Q12} & S_{Q22} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Donc

$$\frac{S_{16}^2}{S_{11}^2} = -\frac{S_{16}^1}{S_{11}^1}, \quad \frac{S_{12}^2}{S_{11}^2} = \frac{S_{12}^1}{S_{11}^1}$$

et d'après (5.11)

$$A^2 = A^1, \quad B^2 = -B^1 \quad \text{et} \quad C^2 = C^1.$$

Alors, les équations (5.13) et (5.14) deviennent

$$u^{1,2'} = -2 \frac{C^1}{e_p} N_{12}^1 - 2 \frac{S_{16}}{S_{11}} \epsilon \quad (5.17)$$

$$v^{1,2'} = -2 \frac{A^1}{e_p} N_{22}^1 \quad (5.18)$$

Donc, si on dérive ces deux équations on obtient en utilisant les équations d'équilibre (5.3)

$$u^{1,2''} = 2 \frac{C^1}{e_p} \tau_1 \quad \text{et} \quad v^{1,2''} = 2 \frac{A^1}{e_p} \tau_2 \quad (5.19)$$

Par ailleurs, le comportement d'interface (5.5) donne après utilisation des souplesses définies en (5.15) et (5.16)

$$u^{1,2} - \gamma_1 = \frac{2e_p}{3} S_{Q11} \tau_1 \quad \text{et} \quad v^{1,2} - \gamma_2 = \frac{2e_p}{3} S_{Q22} \tau_2 \quad (5.20)$$

Les équations (5.19) et (5.20) nous permettent d'écrire

$$\boxed{u^{1,2''} = \frac{3C^1}{S_{Q11}e_p^2} (u^{1,2} - \gamma_1) \quad \text{et} \quad v^{1,2''} = \frac{3A^1}{S_{Q22}e_p^2} (v^{1,2} - \gamma_2).} \quad (5.21)$$

Nous allons résoudre ces équations sur la zone I ( $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont des données nulles) et sur la zone II ( $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont des données quelconques) de la figure 5.3. La résolution de ces deux dernières équations différentielles sur chaque zone nécessite deux conditions aux limites par équation.

Sur la zone I, le premier jeu de conditions aux limites provient de la symétrie du problème (5.6) :

$$u^{1,2}(0) = 0 \quad \text{et} \quad v^{1,2}(0) = 0 \quad (5.22)$$

Au niveau du "raccord"  $y = a$  il faut introduire des paramètres qui joueront le rôle de conditions aux limites. Nous choisissons en  $y = a$  la condition aux limites suivante

$$u^{1,2}(a) = u_R \quad \text{et} \quad v^{1,2}(a) = v_R \quad (5.23)$$

Sur la zone II, on choisit le premier couple de conditions aux limites suivant :

$$u^{1,2}(a) = u_R \quad \text{et} \quad v^{1,2}(a) = v_R \quad (5.24)$$

Le deuxième couple de conditions aux limites est obtenu à partir de la condition de bord libre (5.7) et des équations (5.17) et (5.18) :

$$u^{1,2'}(b) = -2 \frac{S_{16}}{S_{11}} \epsilon \quad \text{et} \quad v^{1,2'}(b) = 0 \quad (5.25)$$

Avec ces choix de conditions aux limites, on assure la continuité des déplacements en  $y = a$  pour n'importe quelles valeurs des paramètres  $u_R$  et  $v_R$  choisies. En résolvant les équations (5.21), on trouve ainsi deux familles de solutions  $u^{1,2}$  et  $v^{1,2}$  engendrées par les paramètres  $u_R$  et  $v_R$ . Les équations (5.20) donnent les efforts de cisaillement  $\tau_1$  et  $\tau_2$  en fonction de  $u_R$  et  $v_R$  respectivement.



Finalement, à partir des équations (5.17) et (5.18) on détermine les solutions  $N_{12}^i$  et  $N_{22}^i$  en fonction des paramètres  $u_R$  et  $v_R$  respectivement.

Par définition, les déplacements sont continus en  $y = a$ ; cependant, un seul jeu de valeurs  $(u_R, v_R)$  permet de vérifier la continuité des efforts  $N_{22}^i$  et  $N_{12}^i$  en  $y = a$ . Le bon jeu de valeurs sera donc déterminé par les équations  $N_{22}^i(a^-) = N_{22}^i(a^+)$  et  $N_{12}^i(a^-) = N_{12}^i(a^+)$ .

### Résolution des équations en fonction des variables d'état.

D'après la méthode de résolution détaillée au paragraphe précédent, sur chaque zone, nous avons à résoudre deux systèmes d'équations découplés. Le premier système fait intervenir  $u_R$ ,  $u^{1,2}$ ,  $N_{12}^i$ ,  $\tau_1$  et  $\gamma_1$  et le deuxième fait intervenir  $v_R$ ,  $v^{1,2}$ ,  $N_{22}^i$ ,  $\tau_2$  et  $\gamma_2$ .

Dans la suite, les équations feront intervenir un déplacement  $U$ , une condition aux limites sur le déplacement  $U^R$  en  $y = a$ , un effort membranaire  $N$ , un effort de cisaillement  $\tau$  et un glissement  $\gamma$  donné. Ces grandeurs doivent être remplacées par leurs grandeurs correspondantes pour chaque système d'équations. D'après l'équation (5.21), la résolution des deux systèmes se ramène à la résolution sur la zone I et sur la zone II d'une équation différentielle d'inconnue  $U$  et de type,

$$U''(y) = \omega^2 (U(y) - \gamma(y)) \quad (5.26)$$

ayant pour conditions aux limites

- pour le problème I (cf. équations (5.22) et (5.23))

$$\begin{cases} U(0) = 0 \\ U(a) = U^R \end{cases} \quad (5.27)$$

- et pour le problème II (cf. équations (5.24) et (5.25))

$$\begin{cases} U(a) = U^R \\ U'(b) = C_\epsilon \end{cases} \quad (5.28)$$

où  $C_\epsilon$  est une constante faisant intervenir  $\epsilon$  et donnée par l'équation (5.25).

La fonction  $\gamma$  est donnée et est nulle sur la zone I.

Une solution particulière de l'équation (5.26) est obtenue par une combinaison linéaire de produits de convolution de type :

$$p \int_0^y \gamma(s) e^{\lambda(y-s)} ds + q \int_0^y \gamma(s) e^{\lambda'(y-s)} ds.$$

On trouve comme solution particulière

$$-\omega \int_a^y \gamma(s) \operatorname{sh}(\omega(y-s)) ds.$$

La solution générale de l'équation (5.26) s'écrit donc sous la forme :

$U(y) = \alpha^I \operatorname{sh}(\omega y) + \beta^I \operatorname{ch}(\omega y) \quad \text{sur } [0, a]$	(5.29)
$U(y) = -\omega \int_a^y \gamma(s) \operatorname{sh}(\omega(y-s)) ds + \alpha^{II} \operatorname{sh}(\omega(y-a)) + \beta^{II} \operatorname{ch}(\omega(y-a)) \quad \text{sur } [a, b]$	

où  $\alpha^I$ ,  $\beta^I$ ,  $\alpha^{II}$  et  $\beta^{II}$  sont des constantes. D'après les équations (5.20), l'effort de cisaillement  $\tau$  est déduit de l'expression de  $U$  (cf. (5.29)) par une équation de type

$$\tau = B(U - \gamma) \quad \text{où } B > 0. \quad (5.30)$$

Ainsi, l'effort de cisaillement  $\tau$  vaut

$$\begin{array}{ll} \tau(y) = B(\alpha^I \text{sh}(\omega y) + \beta^I \text{ch}(\omega y)) & \text{sur } [0, a] \\ \tau(y) = -B\omega \int_a^y \gamma(s) \text{sh}(\omega(y-s)) ds + B\alpha^{II} \text{sh}(\omega(y-a)) & \\ \quad + B\beta^{II} \text{ch}(\omega(y-a)) - B\gamma(y) & \text{sur } [a, b] \end{array} \quad (5.31)$$

D'après les équations (5.17) et (5.18), l'effort membranaire  $N$  est déduit de l'expression de  $U$  (cf. (5.29)) par une équation de type

$$N = -\frac{U'}{A} + \frac{C_\epsilon}{A} \quad \text{où } A \text{ est tel que } \sqrt{AB} = \omega \quad (5.32)$$

Ainsi, l'effort membranaire vaut

$$\begin{array}{ll} N(y) = -\frac{\omega}{A} [\alpha^I \text{ch}(\omega y) + \beta^I \text{sh}(\omega y)] + \frac{C_\epsilon}{A} & \text{sur } [0, a] \\ N(y) = -\frac{\omega}{A} \left[ -\omega \int_a^y \gamma(s) \text{ch}(\omega(y-s)) ds + \alpha^{II} \text{ch}(\omega(y-a)) + \beta^{II} \text{sh}(\omega(y-a)) \right] & \\ \quad + \frac{C_\epsilon}{A} & \text{sur } [a, b] \end{array} \quad (5.33)$$

Il reste maintenant à vérifier les conditions aux limites (5.27) et (5.28). Cette vérification nous permet de déterminer les constantes  $\alpha^I$ ,  $\beta^I$ ,  $\alpha^{II}$  et  $\beta^{II}$  :

$$\alpha^I = \frac{U^R}{\text{sh}\omega a} \quad (5.34)$$

$$\beta^I = 0 \quad (5.35)$$

$$\alpha^{II} = \frac{1}{\text{ch}(\omega(b-a))} \left[ \frac{C_\epsilon}{\omega} + \omega \int_a^b \gamma(s) \text{ch}(\omega(b-s)) ds - U^R \text{sh}(\omega(b-a)) \right] \quad (5.36)$$

$$\beta^{II} = U^R \quad (5.37)$$

A ce stade, nous avons déterminé une famille de champs solution sur la zone I et sur la zone II vérifiant la continuité du déplacement et dépendant du paramètre de raccord  $U^R$ . La valeur de ce paramètre est donnée par l'écriture de la continuité de l'effort membranaire  $N$  en  $y = a$ . On obtient ainsi

$$U^R = \frac{\text{sh}(\omega a)}{\text{ch}(\omega b)} \left[ \frac{C_\epsilon}{\omega} + \omega \int_a^b \gamma(s) \text{ch}(\omega(b-s)) ds \right] \quad (5.38)$$

Ainsi, grâce aux équations (5.29), (5.31) et (5.33) nous avons déterminé les champs généralisés en fonction des variables d'état  $\gamma$ ,  $a$  et  $\epsilon$ . En écrivant un critère de plasticité et une loi d'écoulement, ces équations permettent de déterminer numériquement  $\gamma$ ,  $a$  et les champs généralisés en fonction de  $\epsilon$  à l'aide d'un algorithme adéquat. Dans la suite, nous utiliserons des cas simples de plasticité pour donner l'expression analytique des variables d'état et des champs généralisés.

### 5.2.3 Résolution complète pour plasticité parfaite et avec écrouissage négatif.

Dans cette partie, nous allons considérer deux types de plasticité avec une loi d'écoulement normal. Tout d'abord on traitera le cas d'une plasticité parfaite, puis le cas d'une plasticité avec écrouissage négatif (c'est à dire que le cisaillement seuil diminue de façon irréversible lorsque la



discontinuité augmente). Nous verrons dans les parties suivantes que la plasticité avec écrouissage négatif reproduit mieux les tendances des courbes expérimentales du glissement au bord en fonction du chargement (cf. figures 1.16 à 1.21). Une meilleure reproduction des courbes serait sans doute réalisée par l'adoption d'un modèle plastique endommageable. Si le but était de reproduire les courbes de glissement, la pertinence des modèles devrait aussi être jugée par des cycles de chargement. Cependant, compte tenu des dispersions expérimentales, il n'est pas envisageable de reproduire parfaitement les courbes. Le but de ce chapitre étant d'établir un critère de délaminage en glissement maximal, on se contente d'évaluer le glissement d'interface et de vérifier que les courbes issues du calcul respectent qualitativement les tendances expérimentales pour un chargement monotone (cf. figures 1.16 à 1.21) et pour un chargement cyclique (cf. figure 1.15).

Afin de simplifier la présentation de ce mémoire, nous nous restreignons au cas d'un chargement croissant monotone. Des phases de décharge et de recharge ont également été traitées mais nous ne montrons ici que les résultats numériques de ces phases. La méthode de résolution pour ces deux phases est analogue à celle que nous exposerons ci-dessous.

Par ailleurs, puisqu'un calcul élastique donne des valeurs de  $v^{1,2}$ ,  $N_{22}^i$  et  $\tau_2$  parfaitement nulles, il est naturel de supposer que ces champs et  $\gamma_2$  sont toujours nuls lorsque les interfaces sont plastifiées. Pour les critères et les lois d'écoulement normal que nous allons adopter cette supposition est juste puisque le cisaillement  $\tau_2$  est nul au début et au cours de la plastification. Nous ne nous intéressons donc plus au glissement  $\gamma_2$  et aux champs  $v^{1,2}$ ,  $N_{22}^i$  et  $\tau_2$ . Enfin, pour simplifier l'écriture, on gardera les notations  $\gamma$ ,  $N$ ,  $\tau$  et  $U$  qui désignent respectivement  $\gamma_1$ ,  $N_{12}^1$ ,  $\tau_1$ ,  $u^{1,2}$ .

Pour les cas particuliers de plasticité que nous avons choisis, la résolution du problème serait très compliquée si on utilisait sur la zone II les équations (5.29), (5.31) et (5.33). Nous allons plutôt introduire directement le critère de plasticité dans les équations (5.26), (5.30), (5.32) et dans l'équilibre

$$N' = -\tau. \quad (5.39)$$

Sur la zone I, les équations (5.29), (5.31) et (5.33) seront toujours utilisées. Le travail à effectuer sera la détermination de  $U$ ,  $N$ ,  $\tau$ ,  $\gamma$ ,  $a$  et  $\epsilon$  sur  $[0, b]$  en fonction d'un paramètre de chargement à définir.

### Plasticité parfaite avec une loi d'écoulement normal.

Nous adoptons un critère de plasticité parfaite portant sur la norme quadratique de l'effort de cisaillement et une loi d'écoulement normal. Pour nos empilements le critère ne porte que sur la composante  $\tau = \tau_1$  de l'effort de cisaillement et il devient

$$f(\tau) = |\tau| - \tau^c = 0 \quad (5.40)$$

où  $\tau^c$  est une constante. La loi d'écoulement normal s'écrit

$$d\dot{\gamma} = \frac{\partial f}{\partial \tau} d\dot{\lambda} \quad \text{si} \quad \begin{cases} f = 0 \\ \dot{f} = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad d\dot{\lambda} > 0. \quad (5.41)$$

Sur  $[0, a]$ , les champs  $U$ ,  $N$  et  $\tau$  sont donnés par les équations (5.29), (5.31) et (5.33) et (5.34) à (5.37). La constante  $U^R$  est encore à déterminer ainsi que les variables d'état  $a$  et  $\epsilon$  en fonction d'un paramètre de chargement que nous définirons plus loin. La résolution complète dans cette zone nécessite des équations de la zone II que nous écrivons ci-dessous.

On rappelle qu'on traite ici uniquement le cas d'un chargement monotone croissant. Par conséquent, puisqu'un calcul élastique sans plasticité d'interface donne des valeurs positives pour les cisaillements et pour les différences de déplacement moyen, nous supposons  $\tau \geq 0$ . On peut alors écrire

$$\begin{cases} \tau(y) = \tau^c & \text{sur } [a, b] \\ \tau(y) \leq \tau^c & \text{sur } [0, a] \end{cases} \quad (5.42)$$

Alors, sur  $[a, b]$ , l'équation (5.30) donne

$$U - \gamma = \frac{\tau^c}{B}. \quad (5.43)$$

L'équation (5.26) et la continuité de  $U$  en  $y = a$  nous permet donc d'écrire l'équation différentielle (on rappelle que  $\omega^2 = AB$ )

$$U''(y) = A\tau^c \quad \text{pour } y \in [a, b]$$

ayant pour solution générale sur  $[a, b]$

$$U = \frac{\omega^2 \tau^c}{2B} (y - a)^2 + \alpha^{II} (y - a) + U^R. \quad (5.44)$$

Pour déterminer  $\alpha^{II}$ , nous déterminons grâce à (5.32) l'effort  $N$  sur  $[a, b]$

$$N = -\tau^c (y - a) + \frac{C_\epsilon - \alpha^{II}}{A} \quad (5.45)$$

et en écrivant la condition de bord libre on obtient

$$\alpha^{II} = C_\epsilon - A\tau^c (b - a).$$

De plus, la continuité de  $N$  en  $y = a$  nous donne l'expression du paramètre  $U^R$  en fonction de  $a$

$$U^R = \frac{\omega^2 \tau^c (a - b) + C_\epsilon B}{\omega B} \text{th}(\omega a) \quad (5.46)$$

Par ailleurs, les équations (5.43) et (5.44) donnent l'expression de  $\gamma$

$$\gamma(y) = U^R - \frac{\tau^c}{B} + C_\epsilon (y - a) + \frac{A\tau^c}{2} ((y - b)^2 - (a - b)^2) \quad \text{sur } [a, b]. \quad (5.47)$$

Presque tous les paramètres et constantes du problème ont été déterminés. Nous allons choisir comme paramètre de chargement l'une des variables d'état  $a$  et  $\epsilon$ . Il nous faut donc trouver une équation supplémentaire qui relie  $a$  et  $\epsilon$ . L'étude de la continuité de  $\gamma$  en  $y = a$  peut nous fournir cette information supplémentaire.

Puisque  $\gamma(y) = 0$  sur  $[0, a]$ , il est naturel de se demander si  $\gamma$  est continu en  $y = a$ . *En effet, contrairement au cas élastique du chapitre 4 où la discontinuité des cisaillements au passage d'un front de délaminage entraîne une discontinuité du champ  $\gamma$ , nous avons ici des cisaillements continus au passage du front de plasticité. Démontrons par l'absurde que  $\gamma(a^+) = 0$ .*



*Démonstration.* Supposons que  $\gamma(a^+) \neq 0$ ; alors, puisque  $f = \tau - \tau^c$  sur  $[a, b]$ , la loi d'écoulement normal que nous n'avons pas encore exploitée donne  $d\gamma > 0$  pendant la phase de chargement et par conséquent  $\gamma(a^+) > 0$ . Ainsi, l'équation de comportement (5.30) écrite en  $y = a^+$  donne

$$U^R = U(a^+) > \frac{\tau^c}{B}.$$

Finalement, en utilisant encore cette équation de comportement mais cette fois-ci en  $y = a^-$ , on obtient  $\tau(a^-) = BU(a^-) = BU^R > \tau^c \dots$  et alors le critère est violé à gauche du front  $y = a$ ! Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de non plasticité dans la zone I (cf. équation (5.42)). Par conséquent, notre supposition  $\gamma(a^+) \neq 0$  est fautive.

Alors, d'après (5.47)

$$U^R = \frac{\tau^c}{B} \quad (5.48)$$

et l'expression de  $U^R$  écrite en (5.46) donne enfin l'équation qui relie la position du front de plasticité  $a$  à la déformation de traction  $\epsilon$

$$C_\epsilon = A\tau^c(b-a) + \frac{\tau^c}{\text{th}(\omega a)} \frac{\omega}{B}. \quad (5.49)$$

où on rappelle que

$$C_\epsilon = -2 \frac{S_{16}}{S_{11}} \epsilon.$$

Compte tenu de la forme de l'équation (5.49), nous choisissons comme paramètre de chargement la position du front de plasticité  $a$ . Cette équation (5.49) donne donc la valeur de  $\epsilon$  en fonction de  $a$ .

D'après (5.48) et (5.47) l'expression de  $\gamma$  s'écrit donc

$$\gamma(y) = C_\epsilon(y-a) + \frac{A\tau^c}{2} ((y-b)^2 - (a-b)^2) \quad \text{sur } [a, b] \quad (5.50)$$

Maintenant que  $\epsilon$  et  $U^R$  sont déterminés en fonction du paramètre de chargement  $a$  et de  $\tau^c$ , on peut donner l'expression des champs  $U$ ,  $\tau$  et  $N$  sur la zone I grâce à (5.29), (5.31) et (5.33) et sur la zone II grâce à (5.44) et (5.45) (ces deux dernières équations permettent d'exprimer  $U$  et  $N$  plus simplement que les équations (5.29), (5.31) et (5.33)) :

$$\begin{aligned} U(y) &= \begin{cases} \frac{\tau^c}{B \text{sh}\omega a} \text{sh}(\omega y) & \text{sur } [0, a] \\ \frac{\tau^c A}{2} [(b-y)^2 - (b-a)^2] + C_\epsilon(y-a) + \frac{\tau^c}{B} & \text{sur } [a, b] \end{cases} \\ \tau(y) &= \begin{cases} \frac{\tau^c}{\text{sh}\omega a} \text{sh}(\omega y) & \text{sur } [0, a] \\ \tau^c & \text{sur } [a, b] \end{cases} \\ N(y) &= \begin{cases} -\frac{\tau^c}{\omega \text{sh}\omega a} \text{ch}(\omega y) + \frac{C_\epsilon}{A} & \text{sur } [0, a] \\ \tau^c(b-y) & \text{sur } [a, b] \end{cases} \end{aligned} \quad (5.51)$$

La détermination du reste des champs généralisés est immédiate. Avec ce modèle de plasticité parfaite nous verrons plus loin que nous sommes capables de prédire correctement le délaminage mais la description du glissement pendant le chargement est assez imprécise. Cela nous a conduit à utiliser un modèle un peu plus sophistiqué mais donnant de meilleurs résultats.

### Plasticité avec écrouissage négatif.

Nous adoptons un critère de plasticité parfaite qui fait intervenir la norme quadratique de l'effort de cisaillement et le glissement plastique. Nous adoptons aussi une loi d'écoulement normal. Pour nos empilements le critère ne porte que sur la composante  $\tau = \tau_1$  de l'effort de cisaillement. Le critère devient

$$f(\tau) = |\tau| - \tau^c(\gamma) = 0 \quad (5.52)$$

où le cisaillement critique  $\tau^c$  décroît linéairement en fonction du glissement  $\gamma$  (voir figure 5.4) suivant la loi :

$$\tau^c(\gamma) = \tau_0^c \left( 1 - \frac{\gamma}{\gamma^c} \right). \quad (5.53)$$

D'une certaine façon, ce critère donne aux interfaces un comportement analogue à celui proposé par [Schellekens et De Borst, 1994] pour le cas de discontinuités hors plan et schématisé sur la figure 5.1 sauf que pour nous, le glissement n'apparaît que lorsque le cisaillement atteint une valeur seuil (voir figure 5.4).

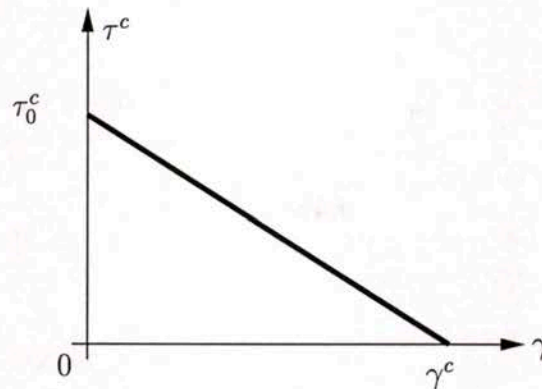


FIG. 5.4 - Ecrouissage.

La loi d'écoulement normal s'écrit

$$d\dot{\gamma} = \frac{\partial f}{\partial \tau} d\dot{\lambda} \quad \text{si} \quad \begin{cases} f = 0 \\ \dot{f} = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad d\dot{\lambda} > 0 \quad (5.54)$$

Sur  $[0, a]$ , les champs  $U$ ,  $N$  et  $\tau$  sont donnés par les équations (5.29), (5.31) et (5.33). La constante  $U^R$  est encore à déterminer ainsi que les variables d'état  $a$  et  $\epsilon$  en fonction d'un paramètre de chargement que nous devons définir, et pour cela, nous devons traiter le problème dans la zone II.

Nous allons maintenant chercher une équation différentielle portant sur le seul champ  $U$  sur la zone II comme pour le cas de la plasticité parfaite. Dans cette zone, le critère (5.52) est vérifié et l'équation (5.30) devient :

$$BU + \left( \frac{\tau_0^c}{\gamma^c} - B \right) \gamma - \tau_0^c = 0. \quad (5.55)$$



Par ailleurs, en dérivant l'équation (5.32) conjuguée avec l'équilibre  $N' = -\tau$  et en l'injectant dans le critère (5.52) on obtient

$$\tau = \tau_0^c \left( 1 - \frac{\gamma}{\gamma^c} \right) = \frac{U''}{A} \quad \text{sur } [a, b]. \quad (5.56)$$

Le but étant d'éliminer  $\gamma$  à partir des équations (5.55) et (5.56), nous sommes obligés d'étudier deux cas :

*Cas 1* :  $\frac{\tau_0^c}{\gamma^c} - B = 0$ . L'équation (5.55) s'écrit

$$U = \frac{\tau_0^c}{B} \quad \text{constante sur } [a, b]$$

et donc l'équation (5.56) devient

$$\tau = 0 \quad \text{sur } [a, b].$$

Ainsi l'équation d'équilibre  $N' = -\tau$  et la condition de bord libre en  $y = b$  donne

$$N = 0 \quad \text{sur } [a, b]$$

Or, l'équation de comportement (5.32) implique

$$N = -\frac{U'}{A} + \frac{C_\epsilon}{A} = \frac{C_\epsilon}{A} = -2 \frac{S_{16}}{AS_{11}} \epsilon$$

On aboutit alors à une contradiction entre ces deux dernières équations puisque  $\frac{C_\epsilon}{A}$  est non nul pour les valeurs de  $\theta$  considérées et donc il ne peut pas être nul pour toutes les valeurs de  $\epsilon$ .

*Cas 2* :  $\frac{\tau_0^c}{\gamma^c} - B \neq 0$ . On peut éliminer  $\gamma$  à partir des deux équations (5.55) et (5.56) et on obtient l'équation différentielle sur  $U$  suivante :

$$U'' = \frac{A\tau_0^c B}{\tau_0^c - \gamma^c B} U + D \quad \text{dans la zone II} \quad (5.57)$$

où

$$D = A\tau_0^c \left( 1 - \frac{\tau_0^c}{\tau_0^c - \gamma^c B} \right).$$

Dorénavant nous allons nous placer dans le cas 2 et nous allons résoudre dans un premier temps l'équation différentielle (5.57) pour ensuite donner l'expression de  $\gamma$ , des champs généralisés, de  $a$  et de  $\epsilon$  en fonction d'un paramètre de chargement que nous définirons plus loin.

La résolution de l'équation différentielle (5.57) nécessite elle aussi la considération de deux cas selon le signe de  $\frac{A\tau_0^c B}{\tau_0^c - \gamma^c B}$  et donc de  $\frac{\tau_0^c}{\gamma^c} - B$ . Nous pouvons montrer sans difficulté que pour le cas

où  $\frac{\tau_0^c}{\gamma^c} > B$ , le problème admet une infinité de solutions puisqu'il n'existe pas d'équation de type  $\gamma(a^+) = 0$  (comme pour le cas de la plasticité parfaite) et donc les paramètres  $a$  et  $\epsilon$  ne sont plus liés et peuvent prendre n'importe quelle valeur sur  $[0, b]$ . Par ailleurs, ce cas est peu intéressant car il semble ne pas correspondre à la réalité. En effet, nous verrons que les résultats expérimentaux et les calculs pour la plasticité parfaite ne donnent pas des résultats très éloignés, cela veut donc

dire que  $\frac{\tau_0^c}{\gamma^c}$  est plutôt faible. Nous verrons dans la suite que le cas où  $\frac{\tau_0^c}{\gamma^c} < B$  donne de très bons résultats.

Nous nous intéressons donc au cas où  $\frac{\tau_0^c}{\gamma^c} < B$ . L'équation différentielle (5.57) s'écrit donc

$$U''(y) = -\omega^{II^2} U(y) + D$$

où on définit

$$\omega^{II} = \sqrt{\left| \frac{A\tau_0^c B}{\tau_0^c - \gamma^c B} \right|}$$

En déterminant la solution générale de cette équation, nous déterminons l'expression de  $U$  sur la zone II ( $y \in [a, b]$ ) :

$$U = \alpha^{II} \sin \omega^{II}(y - a) + \beta^{II} \cos \omega^{II}(y - a) + \frac{D}{\omega^{II^2}} \quad (5.58)$$

où  $\alpha^{II}$  et  $\beta^{II}$  sont des coefficients constants qui seront définis plus bas.

On déduit donc par les équations (5.32) et (5.55) les expressions de  $N$  et de  $\gamma$  sur la zone II :

$$\begin{aligned} N &= -\frac{\alpha^{II} \omega^{II}}{A} \cos \omega^{II}(y - a) + \frac{\beta^{II} \omega^{II}}{A} \sin \omega^{II}(y - a) + \frac{C_\epsilon}{A} \\ \gamma &= \frac{B\gamma^c}{B\gamma^c - \tau_0^c} \left[ \alpha^{II} \sin \omega^{II}(y - a) + \beta^{II} \cos \omega^{II}(y - a) + \frac{D}{\omega^{II^2}} \right] - \frac{\tau_0^c \gamma^c}{\gamma^c B - \tau_0^c} \end{aligned} \quad (5.59)$$

Le critère donne alors sur la zone II

$$\tau = \tau_0^c \left( 1 + \frac{\tau_0^c}{\gamma^c B - \tau_0^c} \right) - \frac{B\tau_0^c}{B\gamma^c - \tau_0^c} \left[ \alpha^{II} \sin \omega^{II}(y - a) + \beta^{II} \cos \omega^{II}(y - a) + \frac{D}{\omega^{II^2}} \right] \quad (5.60)$$

Déterminons les coefficients  $\alpha^{II}$  et  $\beta^{II}$ . La continuité de  $U$  en  $a$  donne

$$\beta^{II} = U^R - \frac{D}{\omega^{II^2}}$$

et la condition de bord libre  $N(b) = 0$  donne

$$\alpha^{II} = \frac{C_\epsilon + \beta^{II} \omega^{II} \sin \omega^{II}(b - a)}{\omega^{II} \cos \omega^{II}(b - a)}.$$

Par ailleurs, la continuité de  $N$  en  $a$  permet d'obtenir l'expression de  $U^R$  :

$$U^R = \frac{1}{\frac{\omega \operatorname{ch} \omega a}{\operatorname{sh} \omega a} - \frac{\omega^{II} \sin \omega^{II}(b - a)}{\cos \omega^{II}(b - a)}} \left[ \frac{C_\epsilon - \frac{D \sin \omega^{II}(b - a)}{\omega^{II}}}{\cos \omega^{II}(b - a)} \right].$$



A ce stade, il nous faut définir le paramètre de chargement et déterminer les variables d'état  $a$  et  $\epsilon$  en fonction du paramètre de chargement. Nous allons choisir comme paramètre de chargement l'une des variables d'état  $a$  et  $\epsilon$ . Il manque donc une équation supplémentaire qui relie  $a$  et  $\epsilon$ . Cette équation va faire intervenir la loi d'écoulement normal que nous n'avons pas encore utilisée. Pour déterminer l'équation manquante, nous procédons de la même façon que pour le cas de la plasticité parfaite; c'est à dire que nous démontrons par l'absurde que  $\gamma$  doit être nul en  $y = a^+$  pour ne pas violer le critère en  $y = a^-$  et cette condition nous conduit à l'équation :

$$\frac{\tau_0^c}{B} = UR = \frac{1}{\frac{\omega \operatorname{ch} \omega a}{\operatorname{sh} \omega a} - \frac{\omega^{II} \sin \omega^{II}(b-a)}{\cos \omega^{II}(b-a)}} \left[ \frac{C_\epsilon - \frac{D \sin \omega^{II}(b-a)}{\omega^{II}}}{\cos \omega^{II}(b-a)} \right]$$

qui nous permet d'écrire l'équation cherchée qui relie  $a$  et  $\epsilon$

$$C_\epsilon = \frac{\tau_0^c}{B} \left( \frac{\omega \cos \omega^{II}(b-a) \operatorname{ch} \omega a}{\operatorname{sh} \omega a} - \omega^{II} \sin \omega^{II}(b-a) \right) + \frac{D \sin \omega^{II}(b-a)}{\omega^{II}} \quad (5.61)$$

où on rappelle que

$$C_\epsilon = -2 \frac{S_{16}}{S_{11}} \epsilon.$$

Compte tenu de la forme de cette équation (5.61), nous choisissons comme paramètre de chargement la position du front de plasticité  $a$ . Cette équation (5.49) donne donc la valeur de  $\epsilon$  en fonction de  $a$ . On peut alors déterminer la totalité des champs en fonction du seul paramètre de chargement  $a$ , et ce grâce aux équations (5.29), (5.31) et (5.33) sur  $[0, a]$  et aux équations (5.58), (5.59) et (5.60) sur  $[a, b]$ .

### 5.3 Simulation d'un cycle de chargement.

Les équations des cas particuliers de la plasticité parfaite et de la plasticité avec écrouissage négatif ont été programées en langage C. Nous avons aussi programmé les équations pour la décharge et la recharge pour chaque type de plasticité.

Afin de mieux comprendre le fonctionnement de nos modèles de plasticité d'interface, nous allons illustrer dans cette partie l'allure de certains champs au cours d'un chargement cyclique pour un empilement donné. Nous traiterons le cas d'une éprouvette  $(\pm 10_3)_s$  en carbone-époxy. Les caractéristiques du pli sont

$$\begin{aligned} E_L &= 153,82 \text{ GPa}, & E_T &= E_N = 10,61 \text{ GPa} \\ G_{LT} &= G_{LN} = G_{TN} = 5,58 \text{ GPa} \\ \nu_{LT} &= \nu_{LN} = \nu_{TN} = 0,315 \\ \text{épaisseur du pli } e &= 0,13 \text{ mm} \end{aligned}$$

Pour le multicouche, la demi-largeur choisie vaut (comme dans nos essais du chapitre 1)

$$b = 10 \text{ mm}.$$

Nous modélisons le multicouche par un quadricouche  $(\pm 10)_s$  de façon à pouvoir utiliser la résolution analytique que nous avons développé dans ce chapitre. Ainsi les quatre couches du multicouche ont une épaisseur valant  $e_p = 3 \times 0,13 \text{ mm} = 0,39 \text{ mm}$ .

Nous choisissons pour les cisaillements critiques des valeurs arbitraires mais que l'on sait déjà être du bon ordre de grandeur :

- $\tau^c = 46 \text{ MPa}$  pour la plasticité parfaite (le critère de plasticité est écrit en (5.40)),
- $\tau_0^c = 57 \text{ MPa}$  et  $\gamma^c = 15,3 \mu\text{m}$  pour la plasticité avec écrouissage négatif (le critère de plasticité est écrit en (5.52)).

Les deux critères de plasticité sont étudiés. Nous simulons le chargement de l'éprouvette par le cycle représenté sur la figure 5.5.

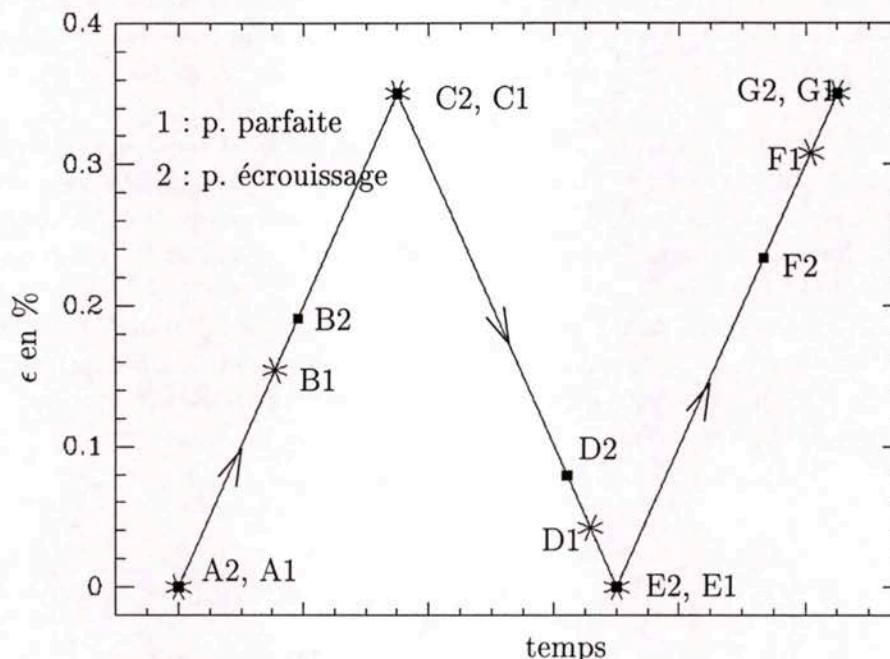


FIG. 5.5 - Cycle de chargement.

Au cours du chargement on s'est intéressé à 7 états pour chaque critère employé. Pour le cas de la plasticité parfaite (correspondant au repère 1 dans la figure 5.5), l'état

- A1 correspond à l'état initial libre d'efforts juste avant le début de la traction.
- B1 correspond à l'instant où la plasticité d'interface commence à apparaître et on verra plus loin que cela a lieu au niveau du bord. Entre A1 et B1, le comportement est élastique.
- C1 correspond à la fin de la phase du premier chargement et au début de la décharge élastique. L'interface 10/ - 10 est plastifiée. Entre B1 et C1, la plasticité d'interface a progressé.
- D1 représente le moment où l'interface 10/ - 10 replastifie pendant la décharge. Le passage de C1 à D1 se fait par un chemin élastique.
- E1 correspond à la fin de la décharge. Entre la période D1-E1 de la décharge, l'interface replastifie.
- F1 est l'état correspondant à l'apparition d'une nouvelle plasticité pendant la recharge. Le passage de E1 à F1 se fait par un chemin élastique.
- G1 est l'état final de la recharge et du cycle de chargement. Entre F1 et G1 l'interface plastifie pour une troisième fois.

De façon analogue, on définit les états A2, B2, C2, D2, E2, F2 et G2 correspondant à l'emploi du critère de plasticité avec écrouissage pendant le cycle de chargement.

Dans le but de comparer et de comprendre l'évolution des champs pour les deux critères en fonction du chargement et de la demi-largeur normalisée, nous avons tracé plusieurs figures :

- sur les figures 5.6 et 5.7, pour les cas de la plasticité parfaite et avec écrouissage négatif



respectivement, nous avons tracé les courbes du cisaillement  $\tau_1$  à l'interface 10/ - 10 suivant une portion de la demi-largeur normalisée  $y/b$  pour tous les états décrits ci-dessus sauf pour l'état initial qui n'a pas d'intérêt.

- les figures 5.8 et 5.9 correspondant aux cas de la plasticité parfaite et avec écrouissage négatif respectivement et montrent l'évolution du glissement  $\gamma_1$  à l'interface 10/ - 10 suivant une portion de la demi-largeur normalisée, et ce pour les 6 états du chargement.
- la figure 5.10 montre l'évolution de la contrainte moyenne de traction  $\sigma$  en fonction du glissement  $\gamma_1$  à l'interface 10/ - 10 au bord de l'éprouvette pour les deux critères de plasticité utilisés.
- les figures 5.11 et 5.12 montrent l'évolution des largeurs de 3 bandes de plasticité pour les deux types de critères utilisés. La première apparaît et évolue uniquement au cours de la première phase de chargement (entre B et C). La deuxième apparaît et évolue seulement pendant la phase de décharge (entre D et E). La troisième apparaît et évolue durant la phase de recharge (entre F et G).
- la figure 5.13 correspond à la réponse globale contrainte/déformation pour le cas de la plasticité parfaite d'interface. Une courbe pratiquement identique est obtenue pour le cas de la plasticité avec écrouissage. Nous remarquons alors que les non-linéarités de l'interface influent peu sur la quasi-linéarité globale du multicouche.

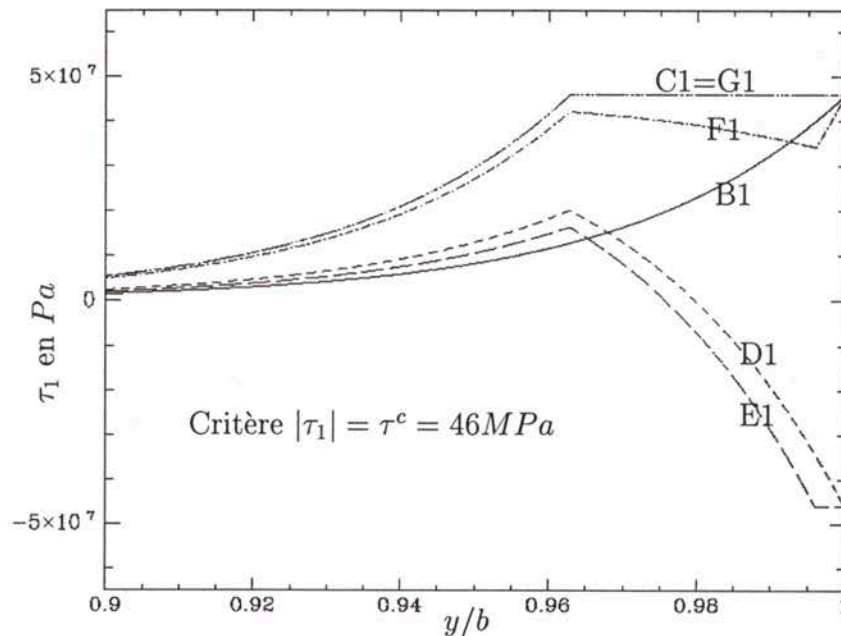


FIG. 5.6 - Cisaillements  $\tau_1$  à l'interface 10/ - 10 d'un  $(\pm 10)_s$  : plasticité parfaite.

### Charge élastique.

Pendant la phase A-B, le comportement est élastique, la discontinuité des déplacements est nulle sur toute la largeur du multicouche (voir courbes B1 et B2 sur les figures 5.8 et 5.9 respectivement et les segments A1-B1 et A2-B2 sur la figure 5.10). En B, le cisaillement  $\tau_1$  atteint la valeur critique au bord, à savoir  $46\text{MPa}$  pour la plasticité parfaite et  $57\text{MPa}$  pour la plasticité avec écrouissage négatif au début du glissement.

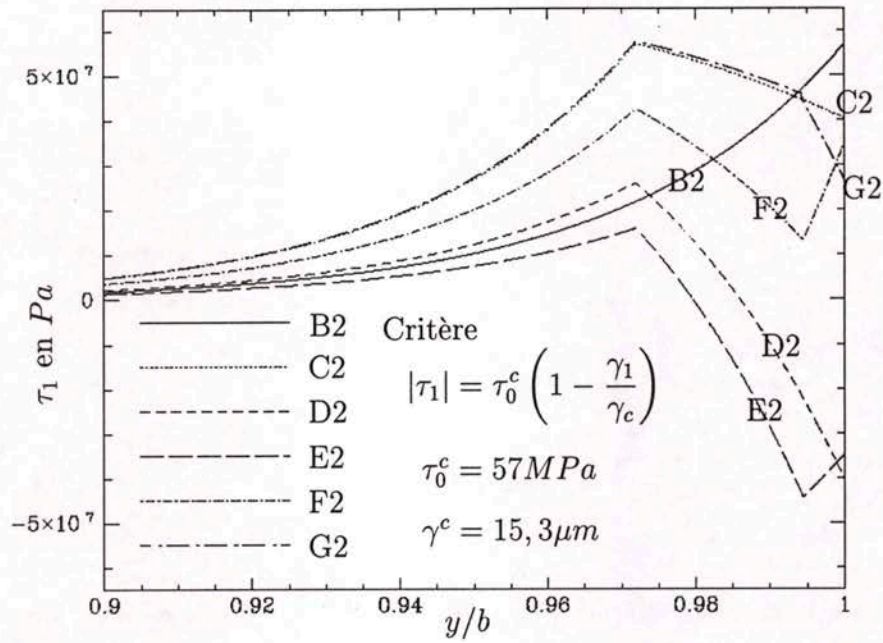


FIG. 5.7 - Cisaillements  $\tau_1$  à l'interface 10/ - 10 d'un  $(\pm 10)_s$  : plasticité avec écrouissage négatif.

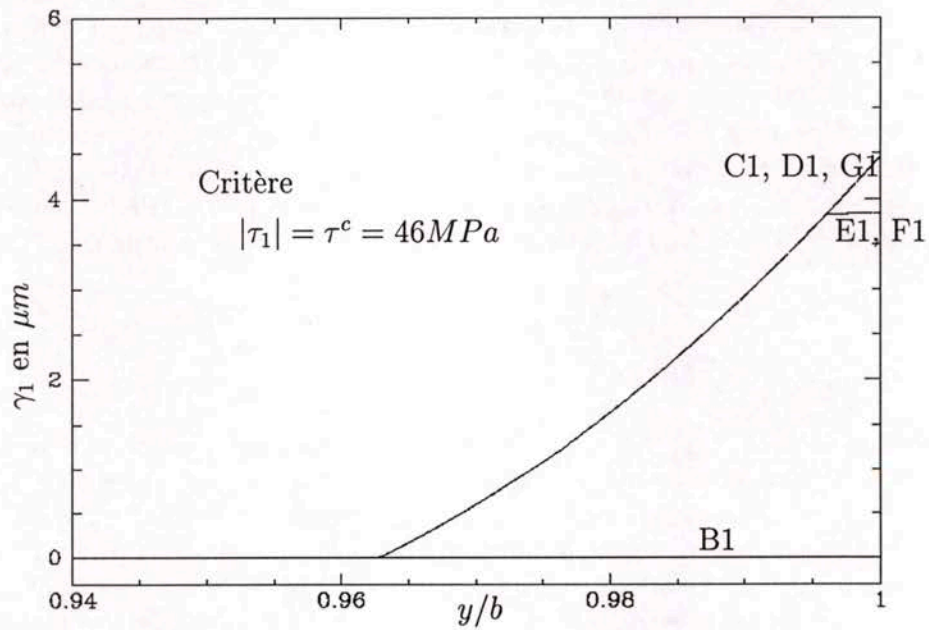


FIG. 5.8 - Glissements  $\gamma_1$  à l'interface 10/ - 10 d'un  $(\pm 10)_s$  : plasticité parfaite.



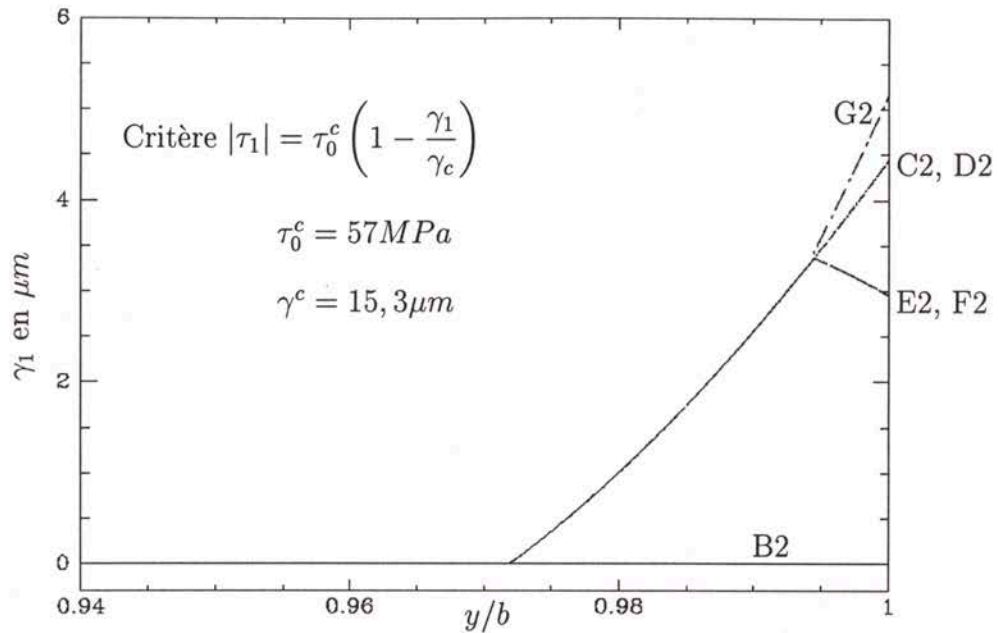


FIG. 5.9 – Glissements  $\gamma_1$  à l'interface 10/ - 10 d'un  $(\pm 10)_s$  : plasticité avec écrouissage négatif.

#### Plastification en charge.

Durant la phase B-C, l'interface plastifie et la charge augmente. La plasticité a lieu sur une bande dont la largeur augmente quasi linéairement en fonction du chargement (voir courbes "1ère bande" des figures 5.11 et 5.12) et en C la largeur de la bande vaut quelques dixièmes de millimètres pour les deux types de plasticité. En un point fixe, si le glissement existe, il ne peut que croître au cours du chargement (voir les arcs B1-C1 et B2-C2 de la figure 5.10). A chargement fixé, le glissement d'interface est croissant sur la bande plastifiée et atteint son maximum au bord (voir courbes C1 et C2 des figures respectives 5.8 et 5.9). Ainsi, pour le cas de la plasticité à écrouissage négatif, le cisaillement est donc décroissant (en fonction du chargement et de  $y$ ) sur la bande plastifiée alors qu'il est croissant sur la zone élastique (voir courbe C2 de la figure 5.7). Pour le cas de la plasticité parfaite, on vérifie sur la courbe C1 de la figure 5.6 que le cisaillement reste constant sur la bande plastifiée.

#### Décharge élastique.

Entre les états C et D, la décharge est élastique : le glissement d'interface n'évolue plus. Ainsi les courbes C et D sont confondues sur les figures 5.8 et 5.9 et les segments C1-D1 et C2-D2 de la figure 5.10 sont verticaux. Les cisaillements décroissent de manière différente dans la zone plastifiée et élastique. Le cisaillement diminue plus rapidement sur les bords jusqu'à s'inverser, après un passage par à 0, et même atteindre la valeur  $-\tau_0^{c'}$  qui est le nouveau seuil de plasticité en cisaillement (pour la plasticité parfaite  $-\tau_0^{c'} = -\tau^c$ ). En D, le cisaillement  $\tau_1$  à l'interface 10/ - 10 atteint le cisaillement critique au bord (cf. courbes D1 et D2 des figures respectives 5.6 et 5.7). Le cisaillement critique  $\tau_0^{c'}$  atteint dans le cas de la plasticité avec écrouissage, est plus faible que le cisaillement  $\tau_0^c = 57 MPa$  initial puisque l'écrouissage est négatif et que le glissement a crû au cours du chargement B-C.

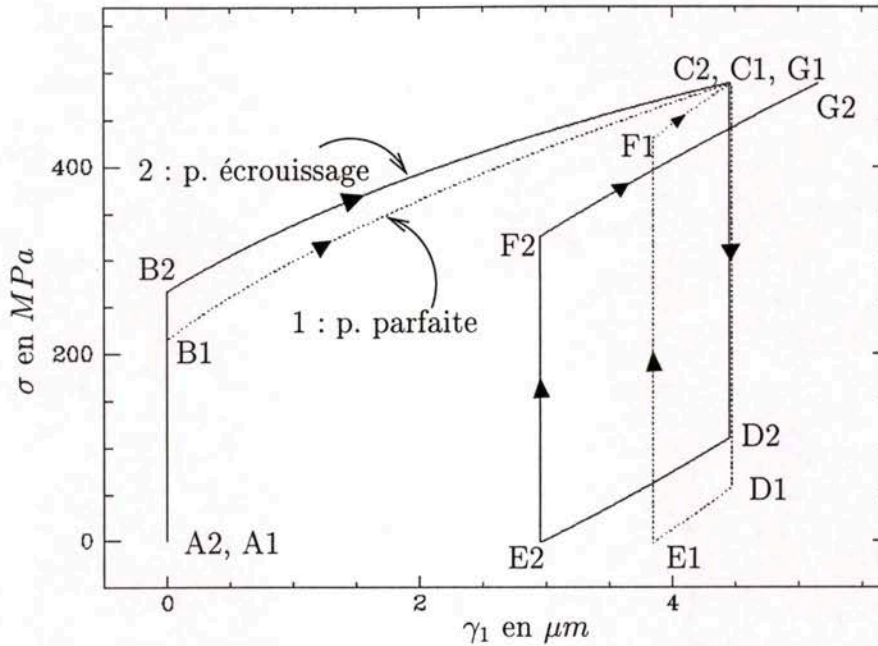


FIG. 5.10 – Discontinuités  $\gamma_1$  à l'interface 10/ - 10 au bord d'un  $(\pm 10)_s$ .

#### Replastification en décharge.

Durant la phase D-E, l'interface se replastifie (mais cette fois-ci à cause de la décharge). Une nouvelle bande de plasticité apparaît à partir du bord et sa largeur augmente aussi quasi-linéairement en fonction de la décharge (voir courbes "2ème bande" des figures 5.11 et 5.12). La vitesse d'apparition de la bande vaut pratiquement la moitié de celle de la "1ère bande" (la pente est deux plus faible). Cela peut être expliqué par le fait que la première bande est apparue lorsque le matériau était vierge et cette première plastification due au chargement s'oppose en quelque sorte à l'apparition du deuxième front de plasticité due à la décharge. Dans la deuxième bande, le glissement décroît (voir les arcs D1-E1 et D2-E2 de la figure 5.10) alors qu'il reste fixe en tout point de la première bande en dehors de la deuxième bande (voir les courbes D et E des figures 5.8 et 5.9).

#### Recharge élastique.

Entre les états E et F, l'évolution se fait de façon élastique : le glissement d'interface n'évolue plus. Des remarques analogues au passage de C à D peuvent être trouvées sans difficulté.

#### Replastification en recharge.

Entre les états F et G, l'interface se replastifie à partir de F (cette fois-ci à cause de la recharge) et la charge croît. Une "3ème bande" de plasticité apparaît à partir du bord et sa largeur augmente quasi-linéairement en fonction du chargement (voir courbes "3ème bande" des figures 5.11 et 5.12). La vitesse d'apparition de la bande vaut, comme pour la "2ème bande", la moitié de celle de la "1ère bande". Dans cette nouvelle bande, le glissement croît (voir les arcs F1-G1 et F2-G2 de la figure 5.10) alors qu'il reste fixe en tout point des autres bandes à gauche du nouveau front de plasticité (voir les courbes F et G des figures 5.8 et 5.9). Dans le cas de la plasticité parfaite, le cisaillement vaut le cisaillement critique  $46\text{MPa}$  sur la "3ème bande". Pour le cas de la plasticité



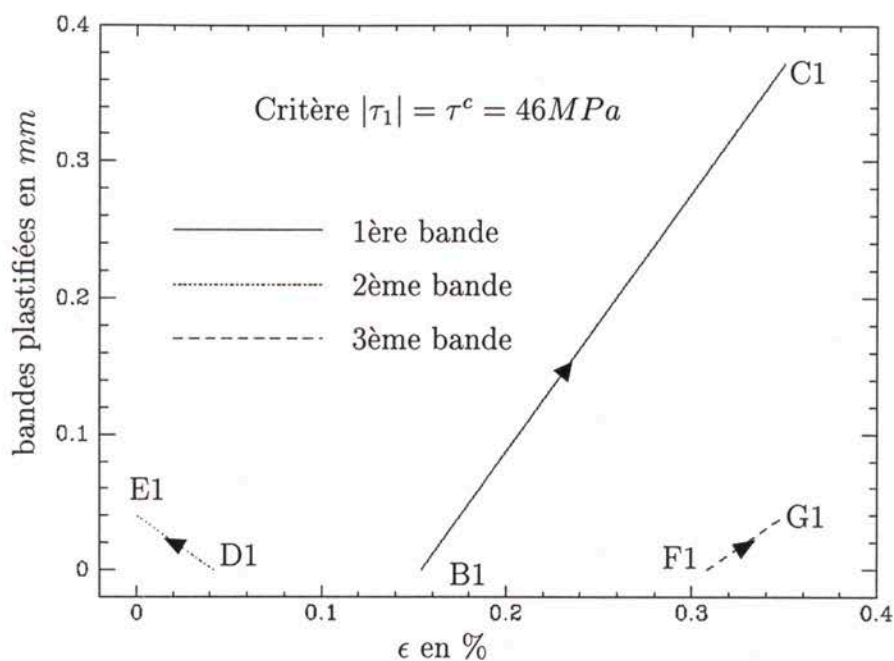


FIG. 5.11 - Largeurs des bandes plastifiées : plasticité parfaite.

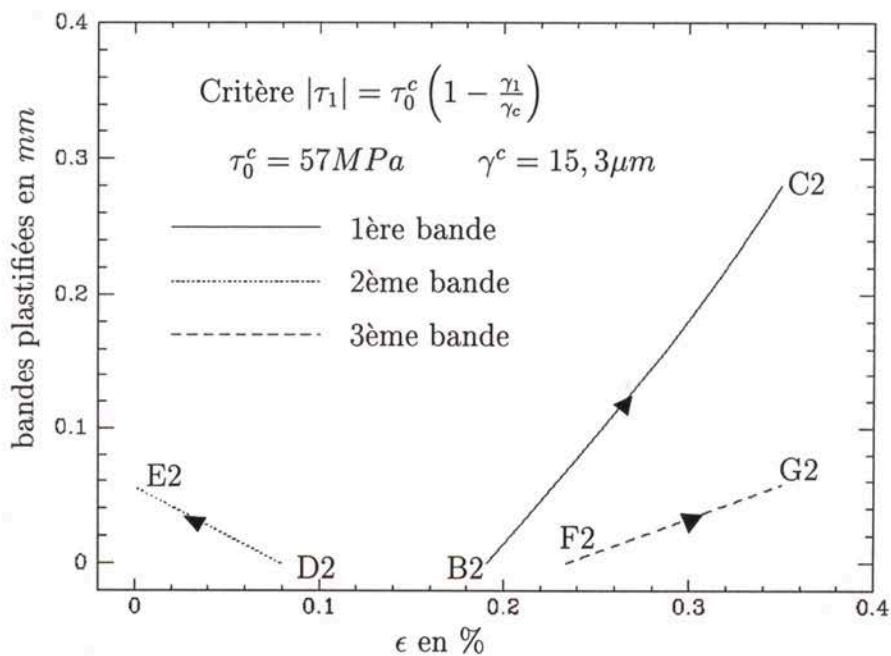


FIG. 5.12 - Largeurs des bandes plastifiées : plasticité avec écouissage négatif.

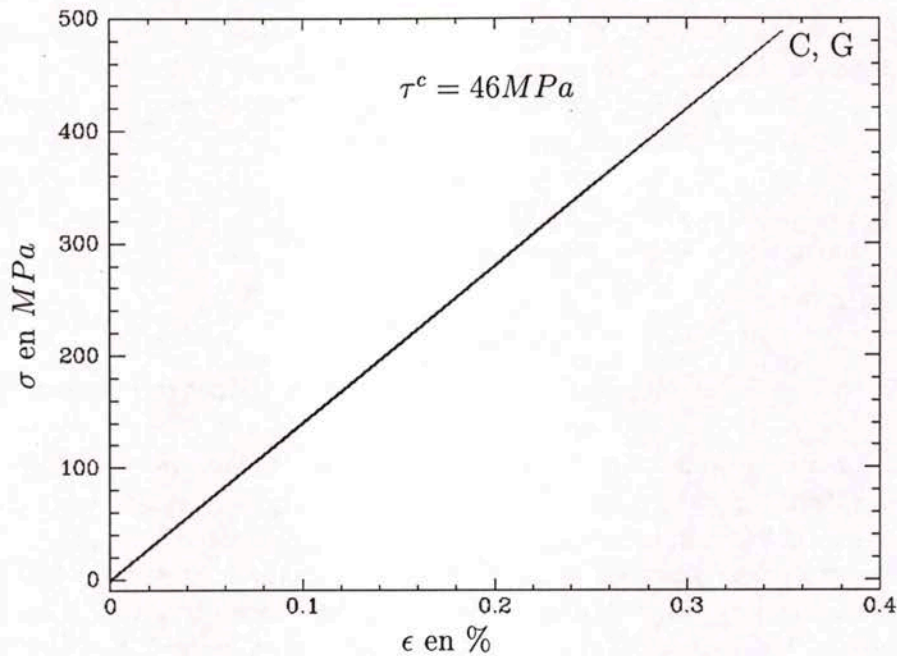


FIG. 5.13 – Courbe contrainte/déformation d'un  $(\pm 10)_s$  en traction avec interfaces plastifiables.

avec écouissage négatif, puisque le glissement croît en fonction du chargement, le cisaillement décroît dans la "3ème bande" (voir figure 5.7).

*Remarque 1.* Les états G et C sont strictement équivalents pour le cas de la plasticité parfaite. Le passage d'un nouveau front de plasticité gomme en quelque sorte les effets de la bande de plasticité précédente. En G, il existe donc un seul front de plasticité. Par contre, pour la plasticité avec écouissage négatif, le cisaillement critique diminue en valeur absolue de façon irréversible pour tout chargement qui plastifie les interfaces et il n'y a donc pas d'équivalence d'états. Pour la plasticité avec écouissage négatif, il existe trois fronts de plasticité en G.

#### 5.4 Identification et critères de délaminage en glissement.

Nous avons vu au chapitre 1 que le délaminage apparaît quand le glissement  $\gamma_1$  atteint une valeur critique. Le glissement critique vaut en moyenne  $15,3 \mu m$  et est le même pour tous les empilements. Le critère d'initiation de délaminage s'écrit donc

$$|\gamma_1| = 15,3 \mu m \quad (5.62)$$

Grâce aux calculs effectués ci-dessus, on est capable de calculer les glissements pour un chargement donné et on peut donc prédire le chargement qui initie le délaminage par un critère en glissement critique. Les calculs des glissements peuvent être effectués à partir de nos deux modèles de plasticité. Le premier est le modèle de plasticité parfaite écrit en (5.40) qui fait intervenir le paramètre constant  $\tau^c$ . Le deuxième est le modèle de plasticité avec écouissage négatif écrit en (5.53) qui fait intervenir deux constantes  $\tau_0^c$  et  $\gamma^c$ . Nous attribuons d'ores et déjà au paramètre  $\gamma^c$  du modèle avec écouissage négatif la valeur du glissement critique mesurée  $15,3 \mu m$  : l'interface ne transmet plus aucun effort de cisaillement quand il y a délaminage (le cisaillement s'annule dans le critère



lorsque le glissement atteint la valeur critique). Pour chacun de nos modèles (plasticité parfaite et plasticité avec écrouissage négatif), nous avons une seule constante à identifier :  $\tau^c$  dans (5.40) et  $\tau_0^c$  dans (5.53). Pour pouvoir prédire le délaminage, ces paramètres doivent être identifiés grâce aux mesures au bord que nous avons effectuées. Ces constantes dépendent du nombre de couches  $n$  et a priori de l'angle  $\theta$ . Par un souci de simplicité, nous allons les supposer indépendantes de l'angle. Alors, pour chaque valeur de  $n$  ( $1 \leq n \leq 4$ ), l'identification se fera en faisant une moyenne des deux valeurs trouvées pour les deux empilements  $(\pm 10_n)_s$  et  $(\pm 20_n)_s$ .

#### 5.4.1 Identification à partir de la valeur d'initiation du glissement.

Une première méthode d'identification consiste à utiliser les valeurs de chargement à partir desquelles le glissement apparaît. Après un calcul élastique, ces valeurs donnent la valeur du cisaillement critique au début du glissement, c'est à dire  $\tau^c$  pour le modèle de plasticité parfaite et  $\tau_0^c$  pour le modèle avec écrouissage. Malheureusement, cette méthode d'identification ne donne pas de bons résultats pour la prédiction du délaminage. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre le cas de  $n = 3$ . Les calculs élastiques donnent une valeur moyenne de  $\tau_1$  égale à  $47,5 \text{ MPa}$  ( $55 \text{ MPa}$  pour le  $(\pm 10_3)_s$  et  $40 \text{ MPa}$  pour le  $(\pm 20_3)_s$ ) à l'initiation du glissement. Sur les figures 5.14 et 5.15, nous avons tracé les courbes théoriques (pour les deux modèles) et expérimentales du chargement (la contrainte  $\sigma$ ) en fonction du glissement  $\gamma_1$  au bord pour les empilements  $(\pm 10_3)_s$  et  $(\pm 20_3)_s$  respectivement. Nous constatons sur ces courbes que les prédictions du chargement entraînant le délaminage ne sont pas très précises et que de plus, les courbes théoriques décrivent assez mal les courbes expérimentales.

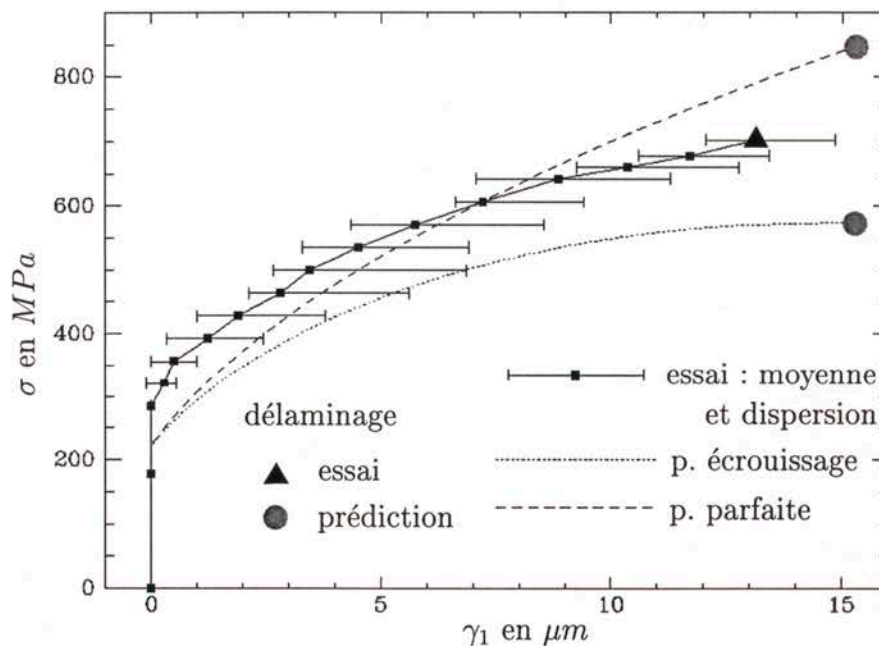


FIG. 5.14 – Glissements au bord d'un  $(\pm 10_3)_s$  avec identification par la valeur d'initiation du glissement.

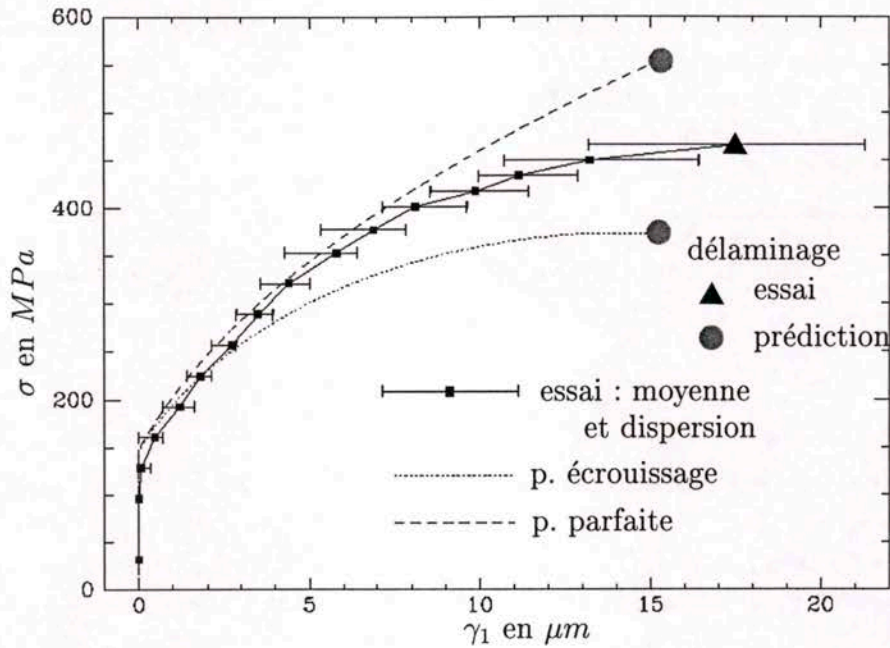


FIG. 5.15 – Glissements au bord d'un  $(\pm 20_3)_s$  avec identification par la valeur d'initiation du glissement.

#### 5.4.2 Identification à partir du chargement qui initie le délaminage.

Une deuxième méthode d'identification consiste à reproduire au mieux l'initiation expérimentale du délaminage sans se soucier de l'évolution du glissement. Le critère de délaminage étant  $\gamma_1 = 15,3 \mu m$ , on cherche pour chaque empilement la valeur du cisaillement critique qui donne cette valeur de  $\gamma_1$  pour un chargement égal au chargement expérimental de délaminage (cf. tableau 1.3). Puis, pour chaque valeur de  $n$ , on prend la moyenne des deux valeurs trouvées pour les empilements  $(\pm 10_n)_s$  et  $(\pm 20_n)_s$ . Les valeurs des cisaillements critiques identifiés sont écrits sur le tableau 5.1. Nous constatons un important effet d'épaisseur que nous ne modélisons pas ici. Pour modéliser cet effet d'épaisseur nous aurions dû modéliser les empilements avec une même finesse de maillage multiparticulaire comme au chapitre précédent - où nous avons établi des critères de délaminage qui reproduisent les effets d'épaisseur expérimentaux - mais alors une démarche analytique devenait très lourde.

$\tau_0^c$ en MPa	plasticité parfaite	plasticité avec écouissage
$n = 1$	20,0	40,3
$n = 2$	27,1	55,5
$n = 3$	34,9	73,0
$n = 4$	44,0	94,7

TAB. 5.1 – Cisaillements critiques moyens pour les deux types de plasticité.

Après calcul, on vérifie sur le tableau 5.2 que la prédiction de l'amorçage du délaminage est très correcte pour les deux modèles de plasticité. Le chargement critique est pratiquement le même pour les deux modèles de plasticité. *Les critères de délaminage en glissement calculé par le  $M_4-2n+1$*



avec un modèle de plasticité parfaite ou un modèle de plasticité avec écrouissage négatif donnent des prédictions d'initiation de délaminage de très bonne qualité lorsque les paramètres sont identifiés par le chargement au délaminage. Insistons sur le fait que l'identification des paramètres pour un empilement  $(\pm\theta_n)_s$  donné ne permet pas d'effectuer les calculs pour un  $(\pm\theta_{n'})_s$  avec  $n \neq n'$  car nous n'avons pas introduit dans ce chapitre l'effet d'épaisseur.

$\sigma$ en MPa	$(\pm 10_n)_s$			$(\pm 20_n)_s$		
	p. parfaite	p. avec écrouissage	essai	p. parfaite	p. avec écrouissage	essai
$n = 1$	928	927	941	611	610	601
$n = 2$	767	767	765	502	502	503
$n = 3$	718	717	731	468	469	459
$n = 4$	708	707	679	461	462	479

TAB. 5.2 – Chargement au moment du délaminage : prédictions et essais.

Sur les figures 5.16 à 5.21, nous avons tracé les courbes théoriques (pour les deux modèles) et expérimentales du chargement (la contrainte  $\sigma$ ) en fonction du glissement  $\gamma_1$  au bord pour les empilements  $(\pm 10_n)_s$  et  $(\pm 20_n)_s$ . Les courbes des empilements  $(\pm 10_4)_s$  et  $(\pm 20_4)_s$  ne sont pas présentées car les glissements au bord n'ont pas été mesurés mais seulement le chargement entraînant le délaminage a été mesuré. Nous observons que les courbes expérimentales sont en général bien reproduites par les calculs issus du modèle de plasticité avec écrouissage. La courbe du  $(\pm 20_3)_s$  est la moins bien reproduite au début de la phase de glissement mais près du délaminage la description est assez correcte par ce modèle de plasticité. En ce qui concerne le modèle de plasticité parfaite, les courbes sont encore moins bien reproduites que par l'utilisation de la première méthode d'identification puisque nous avons donné priorité à la reproduction du délaminage par notre deuxième méthode d'identification.

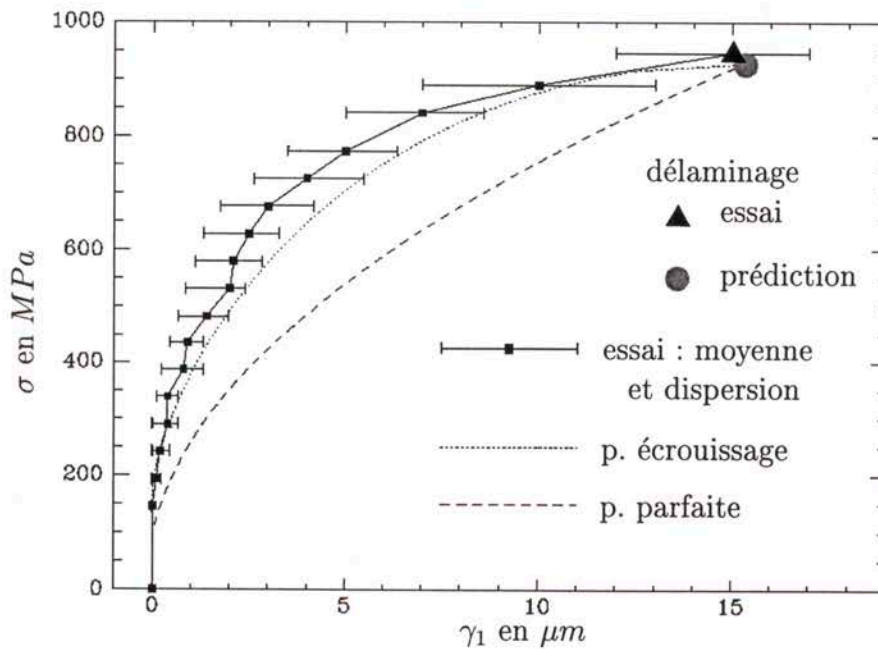


FIG. 5.16 – Glissements  $\gamma_1$  à l'interface 10/ - 10 au bord d'un  $(\pm 10)_s$  : modèles et essai.

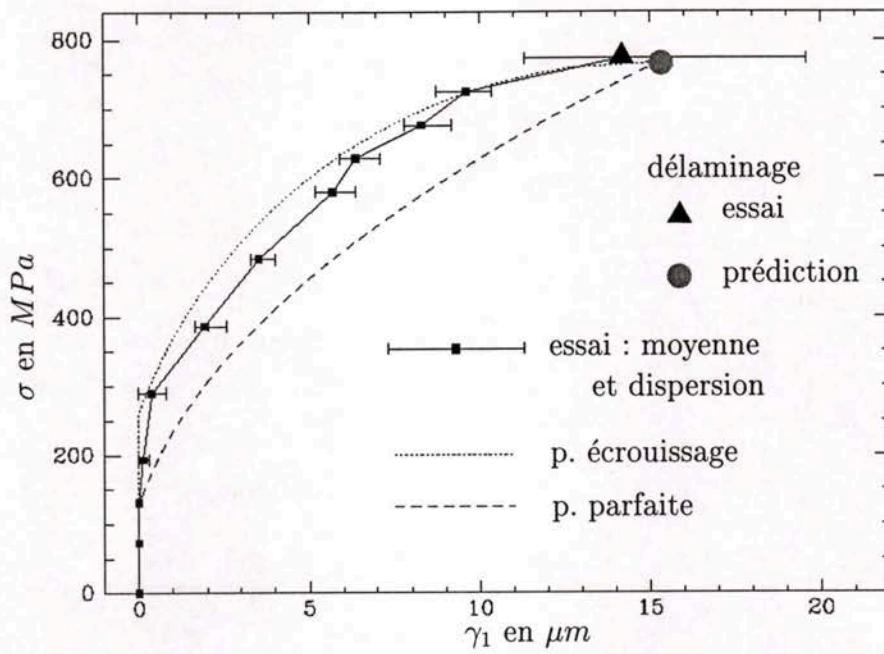


FIG. 5.17 - Glissements  $\gamma_1$  à l'interface 10/ - 10 au bord d'un  $(\pm 10_2)_s$  : modèles et essai.

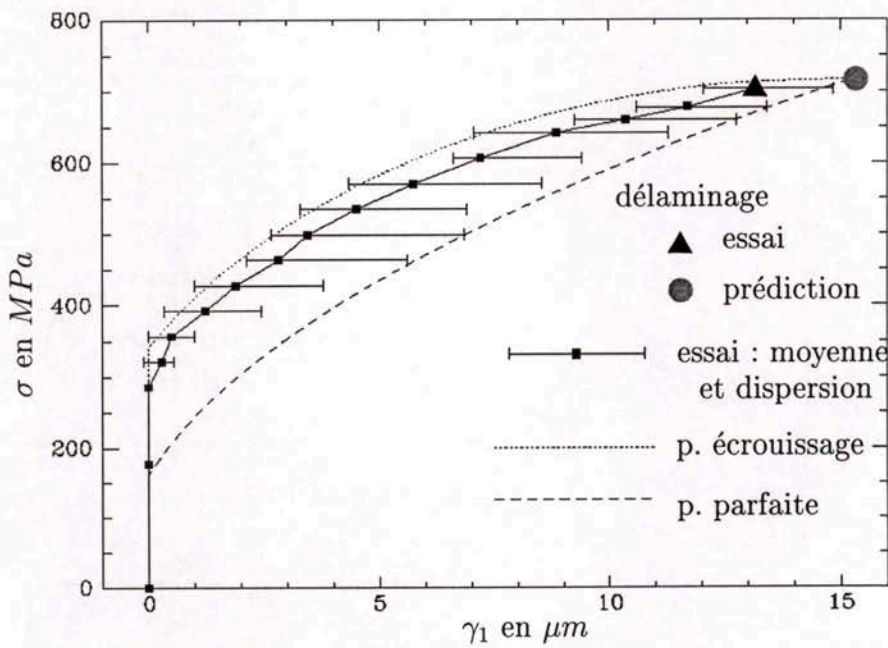
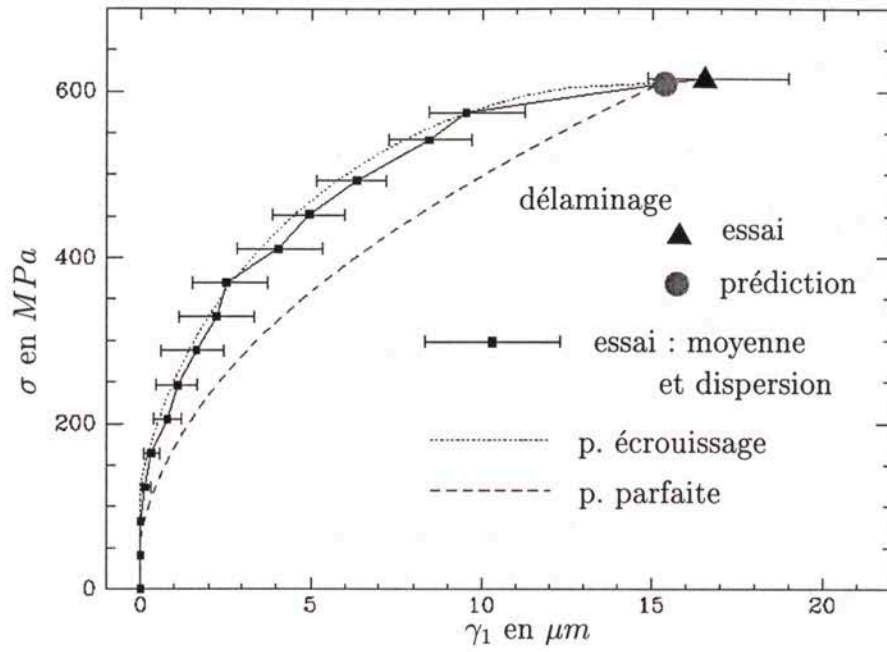
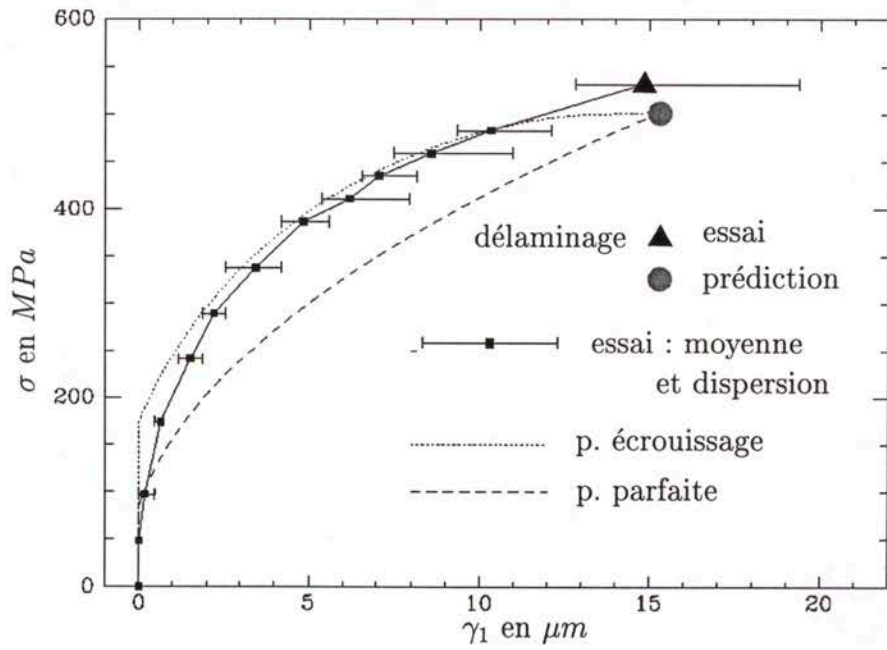


FIG. 5.18 - Glissements  $\gamma_1$  à l'interface 10/ - 10 au bord d'un  $(\pm 10_3)_s$  : modèles et essai.



FIG. 5.19 – Glissements  $\gamma_1$  à l'interface 20/ - 20 au bord d'un  $(\pm 20)_s$  : modèles et essai.FIG. 5.20 – Glissements  $\gamma_1$  à l'interface 20/ - 20 au bord d'un  $(\pm 20_2)_s$  : modèles et essai.

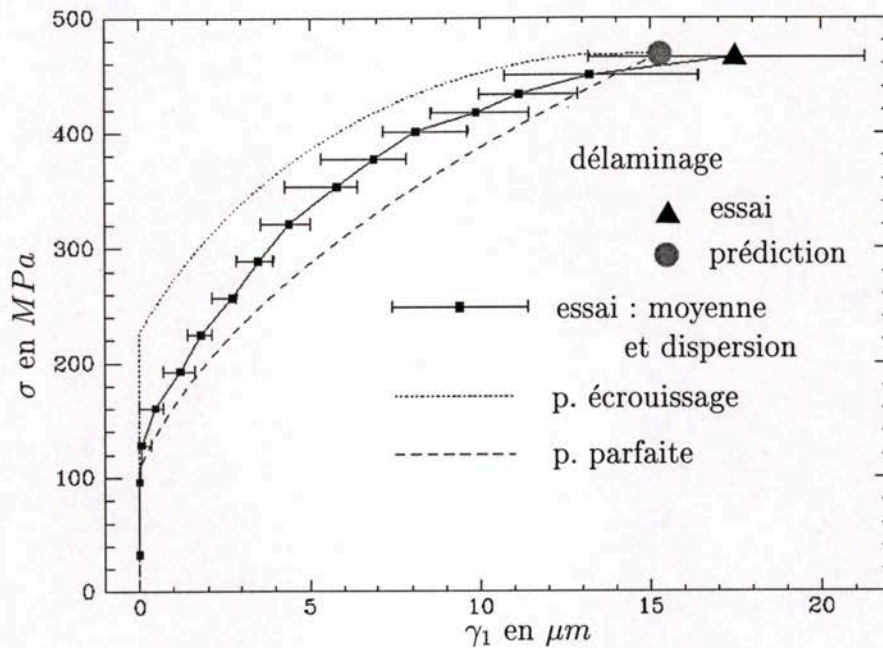


FIG. 5.21 – Glissements  $\gamma_1$  à l'interface 20/ - 20 au bord d'un  $(\pm 20_3)_s$  : modèles et essai.

Les largeurs des bandes plastifiées  $b - a$  à l'initiation du délaminage trouvées par le calcul sont de l'ordre du  $mm$  (donc 8 fois l'épaisseur du pli physique) et sont reportées sur le tableau 5.3). Malgré la taille des bandes plastifiées, le comportement global reste quasi-linéaire. Sur la figure 5.22, nous illustrons ceci par les courbes contrainte/déformation pour un  $(\pm 20)_s$  et pour un  $(\pm 10)_s$  en traction avec le modèle de plasticité avec écrouissage négatif. Des courbes analogues sont obtenues pour les autres empilements et pour le modèle de plasticité parfaite.

$b - a$ en $mm$	$(\pm 10_n)_s$		$(\pm 20_n)_s$	
	p. parfaite	p. avec écrouissage	p. parfaite	p. avec écrouissage
$n = 1$	0,87	0,65	1,16	0,86
$n = 2$	1,00	0,67	1,33	0,89
$n = 3$	1,01	0,59	1,34	0,78
$n = 4$	0,97	0,44	1,30	0,59

TAB. 5.3 – Largeurs des bandes plastifiées à l'initiation du délaminage.

Regardons enfin l'évolution des glissements théoriques pour un cycle de chargement. Les calculs sont effectués avec les paramètres identifiés à l'initiation du délaminage. Le modèle plastique parfait donne en général de mauvais résultats. Le modèle plastique avec écrouissage négatif donne de meilleurs résultats et reproduit globalement l'allure d'un cycle de chargement. Sur la figure 5.23, nous avons l'exemple d'un  $(\pm 20)_s$  pour lequel nous avons tracé le glissement mesuré et calculé au bord à l'interface 20/ - 20. Nous pouvons remarquer sur cette figure que la tendance pendant le cycle de chargement est à peu près bien reproduite par le modèle avec écrouissage. La même allure des courbes est obtenue pour les autres empilements.

Nous remarquons aussi sur cette figure que les glissements expérimental et théorique avec écrouissage augmentent légèrement après un cycle de chargement. Nous avons vérifié par une



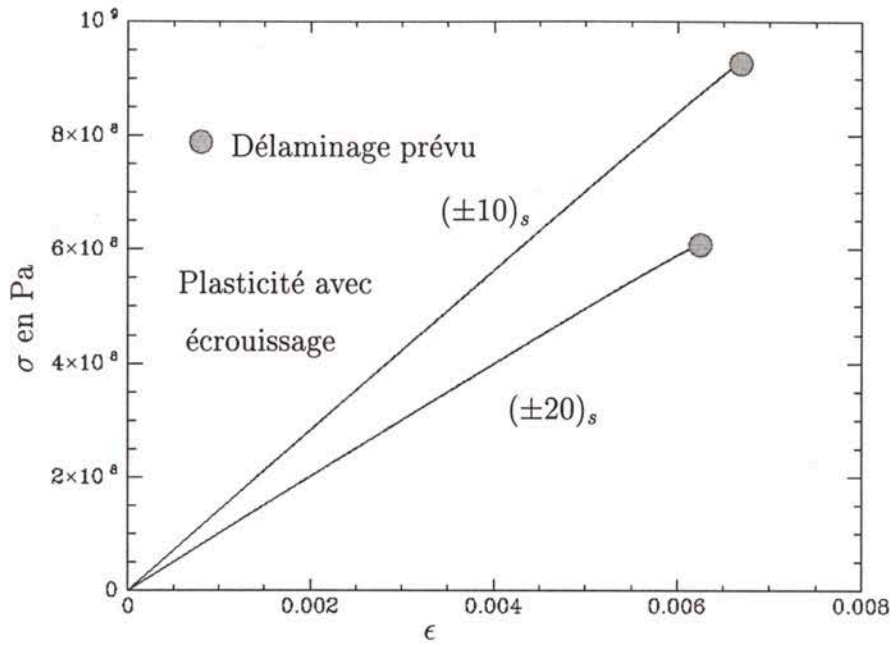


FIG. 5.22 – Courbes contrainte/déformation d'un  $(\pm 10)_s$  et d'un  $(\pm 20)_s$  en traction avec interfaces plastifiables.

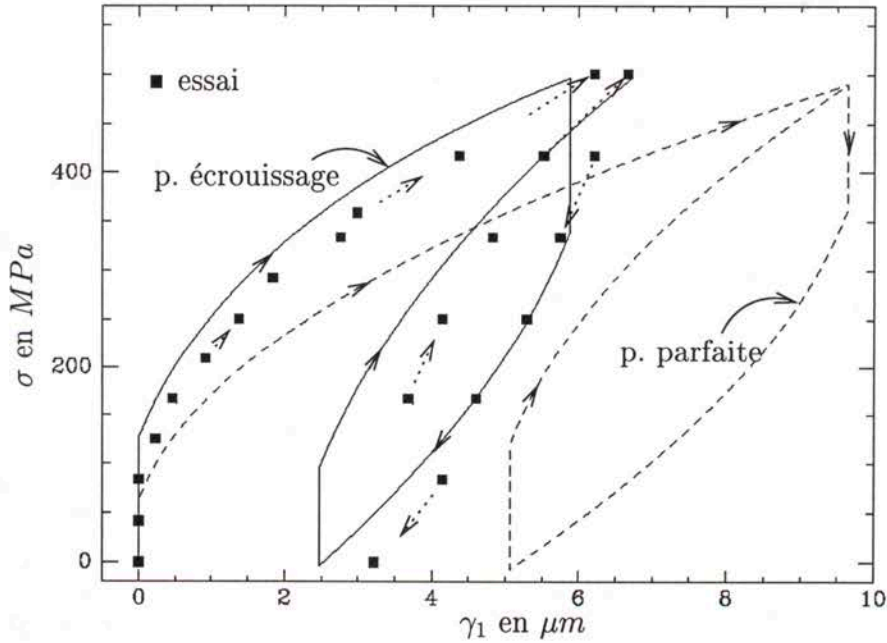


FIG. 5.23 – Glissements  $\gamma_1$  au bord d'un  $(\pm 20)_s$  pour un chargement cyclique : modèles et essai.

longue attente avant la mesure du glissement que cette augmentation n'est pas due à la viscosité. Néanmoins, pour juger la pertinence d'une modélisation plastique on ne peut pas se contenter d'un seul cycle de chargement. Nous avons besoin de réaliser expérimentalement et par simulation plusieurs cycles de chargement et reproduire ainsi d'éventuels phénomènes d'accommodation, de rochet, etc. Nous n'approfondirons pas nos recherches sur cet aspect qui sort du cadre de notre étude du délaminage en chargement monotone avec prise en compte du glissement.

## 5.5 Equivalence des critères en taux de restitution d'énergie et en glissement plastique.

Les calculs ci-dessus ont montré que les calculs du glissement par le  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  en utilisant deux modèles de plasticité (plasticité parfaite et plasticité avec écrouissage négatif) permettent de prédire le délaminage de façon assez précise. De plus, les calculs ont prouvé que la perturbation des champs au bord est assez importante puisque la bande plastique a une largeur de l'ordre de 8 fois l'épaisseur du pli physique, et ce, pour tous les empilements testés. Une confirmation expérimentale serait bien évidemment souhaitée, mais elle n'est pas proposée dans ce mémoire. Nous pouvons nous demander à ce stade : *comment un critère de délaminage en cisaillement obtenu par un calcul élastique* (cf. chapitre précédent) *peut donner d'aussi bons résultats qu'un critère en glissement plastique pour nos essais du chapitre 1* ? La réponse requiert une analyse énergétique à l'initiation du délaminage par les deux types de calcul (élastique et elastoplastique). Dans ce chapitre, le  $(\pm\theta)_s$  a été modélisé par un quadricouche  $(\pm\theta)_s$  avec des couches d'épaisseur variable (modéliser chaque couche physique rendait l'approche analytique trop compliquée). Nous ne pourrions donc faire de comparaison directe avec les résultats du chapitre précédent (où les  $(\pm\theta)_s$  étaient réellement modélisés par  $4n$  couches physiques, ce qui nous a permis de rendre compte de l'effet d'épaisseur) que sur le cas du  $(\pm\theta)_s$  comportant 4 physiques.

De façon à comparer nos critères en glissement à un critère basé sur une analyse élastique des champs, nous allons considérer un critère d'initiation portant sur le taux de restitution d'énergie calculé par le  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  pour le quadricouche  $(\pm\theta)_s$ . A épaisseur de couche fixé, ce critère est bien analogue aux critères de délaminage développés au chapitre précédent.

La comparaison sera basée sur les énergies dissipées par le délaminage. Nous sommes ainsi amenés à déterminer les champs dans le multicouche à interfaces plastifiables une fois que le délaminage apparaît. Puis nous allons calculer l'énergie dissipée par le délaminage lorsque le critère de glissement est adopté et nous la comparerons à celle obtenue par le critère de délaminage en taux de restitution d'énergie.

### 5.5.1 Calcul d'un multicouche fissuré en traction avec plasticité d'interface.

Il s'agit de faire une extension de la résolution par le  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  réalisée au paragraphe 5.2 lorsque le délaminage apparaît en chargement monotone.

*Nous notons maintenant  $c$  la demi-largeur du multicouche.*

On se restreint encore une fois à la résolution des équations sur le quart de cellule sud-est. Le front du délaminage se trouve en  $y = b$ . En  $y = b^-$  le critère de délaminage est vérifié ( $|\gamma_1| = \gamma^c$ ). Une troisième zone est à considérer avec le délaminage et la zone plastique. Les trois zones d'étude sont (voir figure 5.24) :

- Zone I définie pour  $0 \leq y \leq a$ . Sur cette zone le comportement est élastique.



- Zone II définie pour  $a \leq y \leq b$ . Sur cette zone le comportement est élastique dans les couches mais plastique aux interfaces.
- Zone III définie pour  $b \leq y \leq c$ . Sur cette zone l'interface ne transmet aucun effort.

Sur la zone I, la discontinuité des déplacements aux interfaces est nulle alors que sur les zones II et III elle est non nulle. Le but est de déterminer les champs généralisés, le glissement d'interface,  $a$ ,  $b$  et  $\epsilon$  en fonction d'un paramètre de chargement judicieusement choisi.

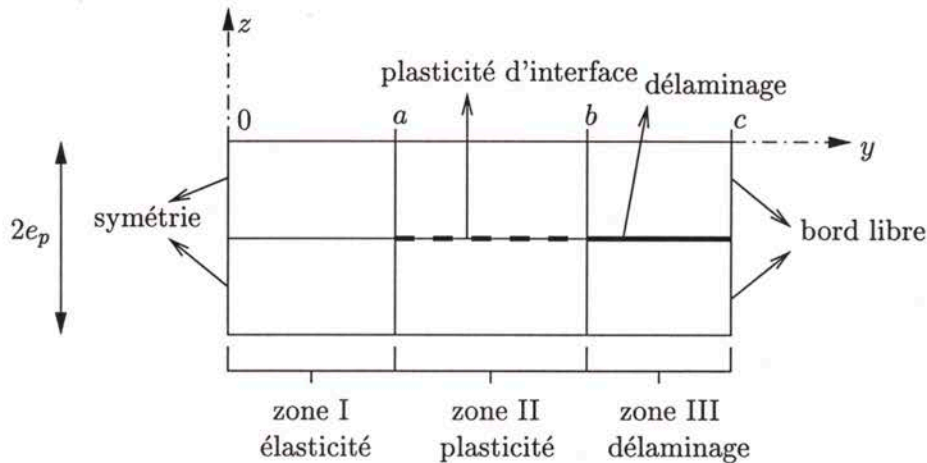


FIG. 5.24 - 3 zones d'étude pour le multicouche élastoplastique fissuré.

On adopte la même démarche de résolution qu'au paragraphe 5.2. Nous n'écrivons plus les équations qui portent sur  $\gamma_2$ ,  $N_{22}^i$ ,  $v^i$  et  $\tau_2$  puisqu'ils sont nuls.

### Résolution en fonction des variables d'état.

Nous commençons par simplifier les équations et exprimer les champs en fonction des variables d'état  $\gamma_1$ ,  $b$ ,  $a$  et  $\epsilon$ . Les équations du problème sauf les conditions aux limites aboutissent à la même équation différentielle dans (5.20), à savoir

$$u^{1,2''} = \frac{3C^1}{S_{Q11}e_p^2}(u^{1,2} - \gamma_1).$$

Cette équation se résout sur chaque zone.

Sur la zone III, le problème est plus simple puisque le cisaillement est nul à l'interface  $\theta / -\theta$ . D'après l'équation d'équilibre (5.3) et la condition de bord libre  $N_{12}^1(b) = N_{12}^2(b) = 0$ , il s'ensuit que

$$N_{12}^1 = N_{12}^2 = 0 \quad \text{sur la zone III.}$$

De cette façon, les continuités de  $N_{12}^1$  et de  $N_{12}^2$  en  $b$  donnent une condition de nullité pour ces champs en  $y = b$  sur la zone II, analogue à une condition de bord libre. De cette sorte, le problème dans les zones I et II peut se résoudre indépendamment de la zone III. La totalité des équations sur les zones I et II étant les mêmes que dans le cas du multicouche non fissuré du paragraphe 5.2, nous obtenons la même expression des champs sur les zones I et II que pour le cas de la plasticité d'interface sans fissure.

Nous allons reprendre les notations  $\gamma$ ,  $N$ ,  $\tau$  et  $U$  qui désignent respectivement  $\gamma_1$ ,  $N_{12}^1$ ,  $\tau_1$ ,  $u^{1,2}$ .

**Résolution complète du problème.**

Pour le cas de la plasticité parfaite les expressions des champs sur les zones I et II sont données aux équations (5.50) et (5.51). Pour l'écroissage linéaire négatif, les champs sur ces zones sont donnés par les relations (5.58) à (5.60). Dans ces expressions, tout est exprimé en fonction de  $\epsilon$ ,  $a$  et  $b$ . Nous allons choisir parmi ces trois variables d'état le paramètre de chargement. Deux équations sont alors nécessaires pour déterminer les autres variables d'état en fonction du paramètre de chargement :

- la première équation est donnée par la continuité de  $\gamma$  en  $y = a$  (voir la résolution du problème plastique sans délaminage pour les deux modèles de plasticité au paragraphe 5.2.3). On obtient pour la plasticité parfaite (cf. équation (5.49))

$$C_\epsilon = -2 \frac{S_{16}}{S_{11}} \epsilon = A \tau^c (b - a) + \frac{\tau^c}{\text{th}(\omega a)} \frac{\omega}{B}$$

et pour la plasticité avec écroissage négatif (cf. équation (5.61))

$$C_\epsilon = \frac{\tau_0^c}{B} \left( \frac{\omega \cos \omega^{II} (b - a) \text{ch} \omega a}{\text{sh} \omega a} - \omega^{II} \sin \omega^{II} (b - a) \right) + \frac{D \sin \omega^{II} (b - a)}{\omega^{II}}$$

- la deuxième équation provient du critère de délaminage en  $y = b^-$ . Pour la plasticité parfaite on a d'après l'équation (5.50)

$$\gamma(b^-) = \gamma^c = C_\epsilon (b - a) - \frac{A \tau^c}{2} (b - a)^2$$

et pour la plasticité avec écroissage d'après l'équation (5.59)

$$\gamma(b^-) = \gamma^c = \frac{B \gamma^c}{B \gamma^c - \tau_0^c} \left[ \alpha^{II} \sin \omega^{II} (b - a) + \beta^{II} \cos \omega^{II} (b - a) + \frac{D}{\omega^{II 2}} \right] - \frac{\tau_0^c \gamma^c}{\gamma^c B - \tau_0^c}$$

Nous avons choisi le front de plasticité  $a$  comme paramètre de chargement. La détermination de  $\epsilon$  et de  $b$  est possible numériquement pour chaque modèle de plasticité grâce aux deux équations écrites ci-dessus. Pour chaque modèle de plasticité, nous avons programmé l'ensemble des équations dans un programme en langage C. Ces programmes permettent de déterminer, pour un front de plasticité  $a$  donné l'ensemble des inconnues du problème.

**Quelques résultats intéressants.**

Nous désignons par  $h^p$  la longueur de fissure ( $h^p = c - b$ ) et par  $k$  la longueur des zones II+III fissurée et plastifiée ( $k = c - a$ , cf. figure 5.25).

Regardons l'évolution de la longueur de fissure  $h^p$  et de la longueur  $k$  de la zone globale II+III en fonction de la déformation  $\epsilon$ . Sur la figure 5.26, nous montrons l'exemple d'un  $(\pm 10)_s$  avec plasticité parfaite (l'épaisseur de couche vaut 0,13 mm). Nous voyons sur cette figure qu'après avoir atteint une première déformation critique la plasticité apparaît ( $k$  croît) sans qu'il y ait fissuration ( $h^p$  vaut zéro), mais lorsque la déformation atteint une deuxième valeur critique (le glissement vaut la valeur critique  $\gamma^c$ ), le délaminage apparaît ( $h^p$  croît). Nous remarquons aussi que le délaminage apparaît et se propage à déformation quasi constante. Enfin, sur la figure 5.27, nous avons tracé l'évolution des longueurs du maillon plastique (la zone plastique à l'avant de la fissure de longueur  $k - h^p$ ) et de la fissure ( $h^p$ ) en fonction de la longueur des zones II+III ( $k$ ) pour le même empilement  $(\pm 10)_s$ . Nous remarquons sur cette figure que la longueur  $k - h^p$  du maillon plastique est quasi constante pendant la propagation du délaminage. Les mêmes remarques peuvent être faites pour les autres empilements et l'autre modèle de plasticité.



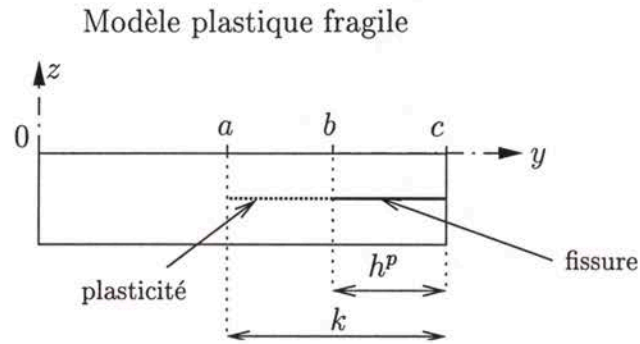


FIG. 5.25 – Définitions des longueurs de fissure  $h^p = c - b$  et des zones II+III  $k = c - a$  dans les cas plastiques.

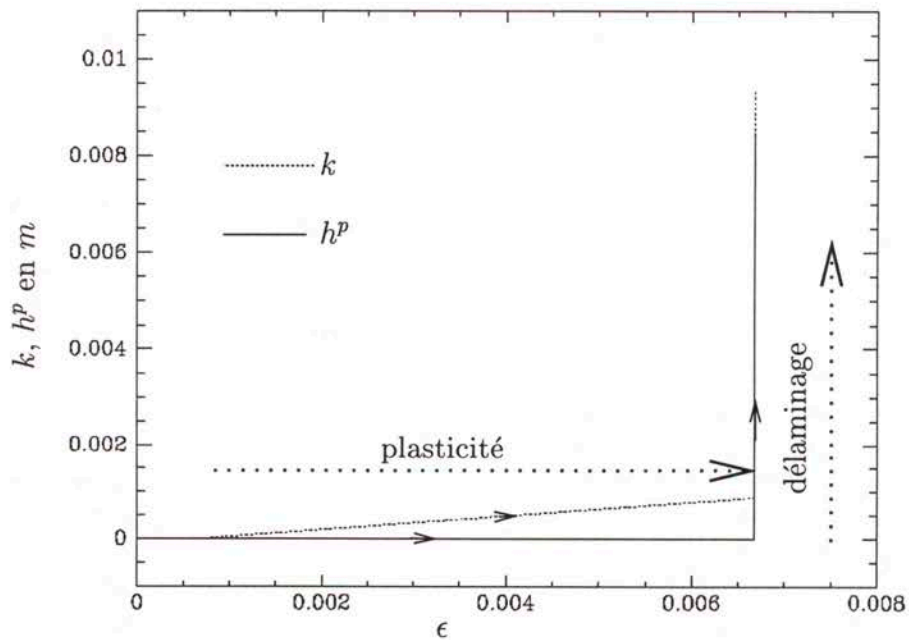


FIG. 5.26 – Evolution de la longueur de fissure ( $h^p$ ) et de la zone II+III ( $k$ ) en fonction de la déformation dans un  $(\pm 10)_s$  (plasticité parfaite).

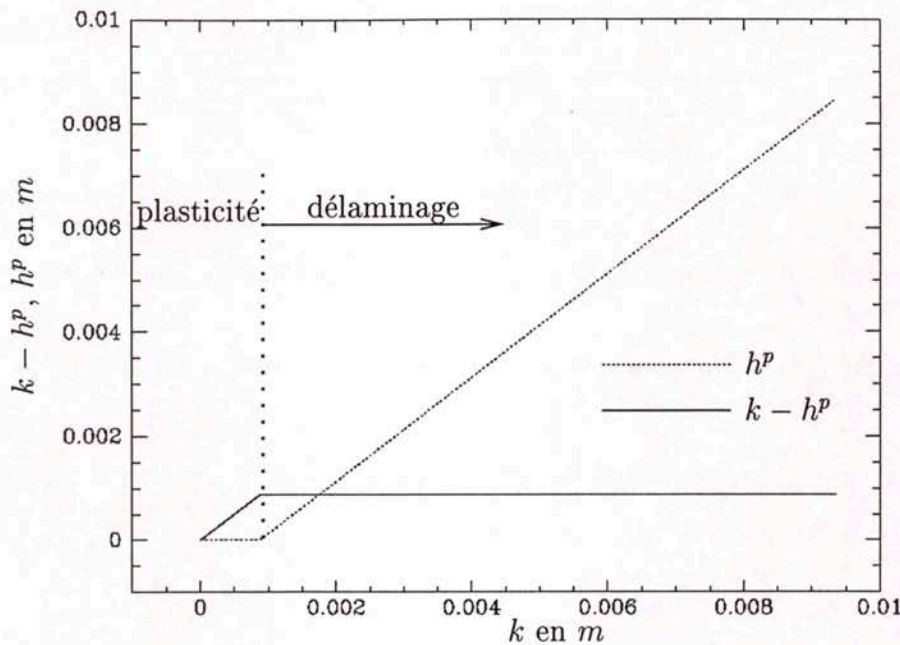


FIG. 5.27 - Evolution des longueurs du maillon plastique ( $k - h^p$ ) et de la fissure ( $h^p$ ) en fonction de  $k$  dans un  $(\pm 10)_s$  (plasticité parfaite).

### 5.5.2 Calcul des énergies dissipées et comparaison des critères.

Nous allons maintenant comparer les énergies dissipées par le délaminage élastique et plastique, c'est à dire dans le cas des critères en glissement critique et du critère en taux de restitution d'énergie  $G = G_c$ . Commençons par une remarque importante qui permettra de mieux comprendre nos explications :

*Remarque 2.* Analyser le phénomène de délaminage par un modèle élastique fragile consiste à faire une analyse moins locale et avoir une vision plus floue des phénomènes localisés en amont de la pointe de fissure, ce qui est classique sur les matériaux métalliques par exemple.

Le délaminage apparaît par cette approche élastique comme une fissure de longueur  $h$  comprise entre  $c - a$  et  $c - b$  de sorte que la pointe de la fissure peut se trouver entre le front plastique et le front de délaminage calculés par les modèles plastiques fragiles, à un endroit que nous allons préciser ci-dessous.

Calculons l'énergie dissipée dans le cas élastique fragile. Dans la théorie de Griffith [Griffith, 1920], une variation  $dS$  de surface de fissure entraîne un incrément  $dE^d$  de l'énergie dissipée tel que

$$dE^d = GdS$$

Ainsi, l'énergie dissipée par une fissure de délaminage dans notre multicouche de longueur unité vaut

$$E_G^d = G_c h \quad (5.63)$$

Pour calculer les taux de restitution d'énergie critiques  $G_c$  donnés par le  $M4-2n+1$  élastique basé sur un modèle quadricouche, nous suivons la démarche proposée à la page 132 du chapitre 4. La valeur de  $G_c$  sera obtenue par une moyenne des valeurs à épaisseur de multicouche fixée ( $n$  fixé,



$n = 1, 2, 3, 4$ ). Les valeurs de  $G_c$  sont données sur le tableau 5.4. Ainsi, grâce à l'équation (5.63),

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$G_c$ en $J/m^2$	291	396	519	670

TAB. 5.4 – Taux de restitution d'énergie critiques moyens calculés par le  $M_{4-2n+1}$ .

nous pouvons calculer les valeurs numériques des énergies dissipées par une fissure de délaminage de longueur  $h$  donnée.

Lorsqu'un critère de délaminage en glissement plastique maximal est adopté, le calcul de l'énergie dissipée par le délaminage n'est pas immédiat.

### Calcul de l'énergie dissipée pour les cas plastiques.

Par définition, l'énergie totale dissipée dans un solide quelconque s'écrit

$$E^D = W - E^{ELAST}$$

où  $W$  est le travail des forces extérieures et  $E^{ELAST}$  est l'énergie élastique totale. Ainsi, l'énergie dissipée par fissure de délaminage (il y en a quatre dans le multicouche) et pour une longueur unité de multicouche :

$$E_\gamma^d = \frac{W}{4} - \frac{E^{ELAST}}{4} \quad (5.64)$$

Le travail des efforts extérieurs est celui appliqué aux extrémités  $x = \pm L$  du multicouche et son expression vaut

$$W = \int_0^{\epsilon(a)} \left[ \int_{-c}^c \int_{-2e_p}^{2e_p} (\bar{\sigma}(L, y, z) \cdot \underline{e}_x) \underline{U}^{3D}(L, y, z) dz dy + \int_{-c}^c \int_{-2e_p}^{2e_p} (\bar{\sigma}(-L, y, z) \cdot (-\underline{e}_x)) \underline{U}^{3D}(-L, y, z) dz dy \right] d\epsilon$$

Pour notre modèle simplifié, les expressions des termes à l'intérieur de l'intégrale en  $\epsilon$  sont obtenues par un raisonnement analogue à celui réalisé pour écrire les conditions aux limites du modèle (cf. équations (2.44) à (2.47)). En appliquant l'invariance par translation suivant  $x$  et en injectant les déplacements généralisés (cf. équations (5.1) et (5.2)), on obtient :

$$W = \int_0^{\epsilon(a)} \int_{-c}^c \sum_{i=1}^4 [N_{11}^i(\epsilon L + u^i) + N_{12}^i(v^i) - N_{11}^i(-\epsilon L + u^i) - N_{12}^i(v^i)] dy d\epsilon$$

où  $N_{11}^i$  est l'effort de membrane suivant l'axe  $x$  de la couche à  $i$  et ayant pour expression d'après (5.8) :

$$N_{11}^i = -\frac{S_{16}^i}{S_{11}^i} N_{12}^i + \frac{e_p}{S_{11}^i} \epsilon.$$

On a donc, pour un multicouche de longueur unité, compte tenu des symétries

$$W = 8 \int_0^{\epsilon(a)} \left( \int_0^c N_{11}^1(y) dy \right) d\epsilon. \quad (5.65)$$

Par ailleurs, l'énergie élastique en contrainte s'écrit grâce aux symétries (cf. équations (2.51) et (2.83) à (2.86)) :

$$E^{ELAST} = 4 \int_0^c \left[ \frac{1}{e_p} (S_{11} N_{11}^1 N_{11}^1 + 2S_{16} N_{11}^1 N_{12}^1 + S_{66} N_{12}^1 N_{12}^1) + \frac{e}{3} S_{Q11} \tau_1 \tau_1 \right] \quad (5.66)$$

Grâce aux programmes donnant pour un front de plasticité  $a$  donné les valeurs des champs dans un multicouche délaminé avec interfaces plastifiables, nous pouvons calculer numériquement ces intégrales (5.65) et (5.66) et leur calcul permet d'obtenir la valeur de l'énergie dissipée par une fissure de délaminage.

Dans la suite, afin de simplifier la présentation, nous allons traiter uniquement l'exemple d'un  $(\pm 10)_s$  avec plasticité parfaite. Des résultats analogues sont obtenus pour les autres empilements et pour la plasticité avec écrouissage négatif.

Sur la figure 5.28, nous avons tracé les courbes du travail et de l'énergie élastique calculées par notre modèle plastique parfait (cf. équations (5.65) et (5.66)) en fonction de la déformation  $\epsilon$ . Nous voyons sur cette figure que le travail reste quasi constant pendant le délaminage (la déformation est à peu près constante d'après les commentaires des courbes ci-dessus) et que la dissipation par plasticité avant le délaminage est faible (les deux courbes sont peu différentes avant le délaminage). La variation de l'énergie élastique à partir de l'instant juste avant l'initiation du délaminage vaut alors l'énergie dissipée.

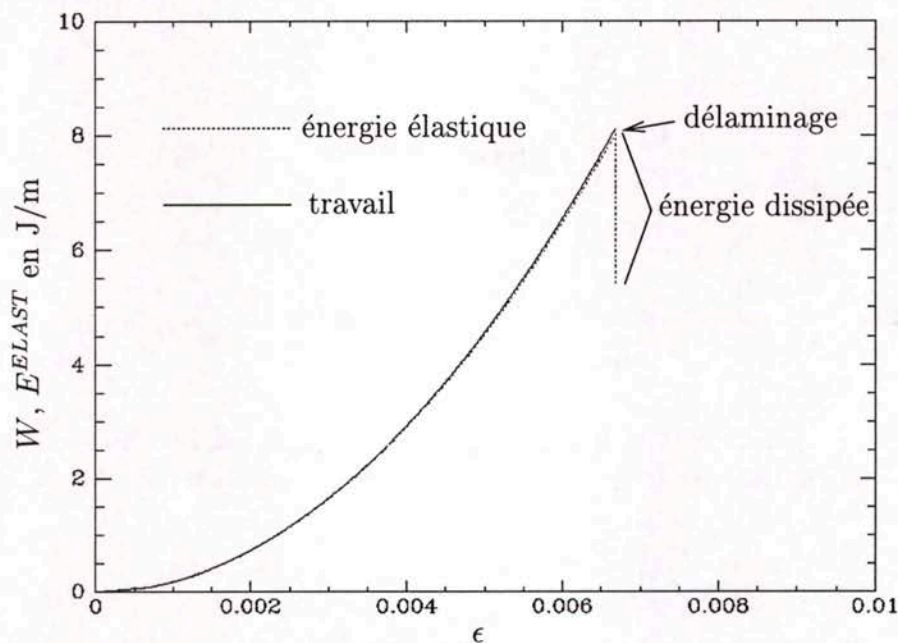


FIG. 5.28 - Evolutions du travail et de l'énergie élastique en fonction de la déformation dans un  $(\pm 10)_s$  (plasticité parfaite).

Sur la figure 5.29, nous avons tracé en trait plein les courbes de l'énergie dissipée par le délaminage calculée par notre modèle plastique parfait en fonction de la longueur de fissure  $h^p = c - b$  et de la longueur  $k = c - a$  des zones fissurée et plastifiée. Il s'agit de deux représentations de la



même dissipation mettant en lumière la dépendance de la dissipation par rapport à la taille de la fissure  $E_\gamma^d(h^p)$  d'une part et de la dissipation par rapport à la taille de la zone globale II+III (fissurée et plastifiée)  $E_\gamma^d(k)$  d'autre part. On constate que l'incrément de la dissipation pour une variation de longueur de fissure est à peu près constant dès l'initiation de la fissure car  $E_\gamma^d(h^p)$  est quasiment une droite au moins jusqu'aux abscisses qui voient l'influence de la fissure symétrique, phénomène parasite sans intérêt pour l'étude. La courbe  $E_\gamma^d(k)$  est une droite qui est quasi parallèle à  $E_\gamma^d(h^p)$  puisque le maillon plastique (la zone plastique à l'avant de la fissure) a une longueur à peu près constante au cours du délaminage. L'ensemble du phénomène est donc en régime quasi permanent. Le maillon plastique semble analogue à la zone de cohésion en avant d'un front de fissure décrit dans l'approche de [Barenblatt, 1962].

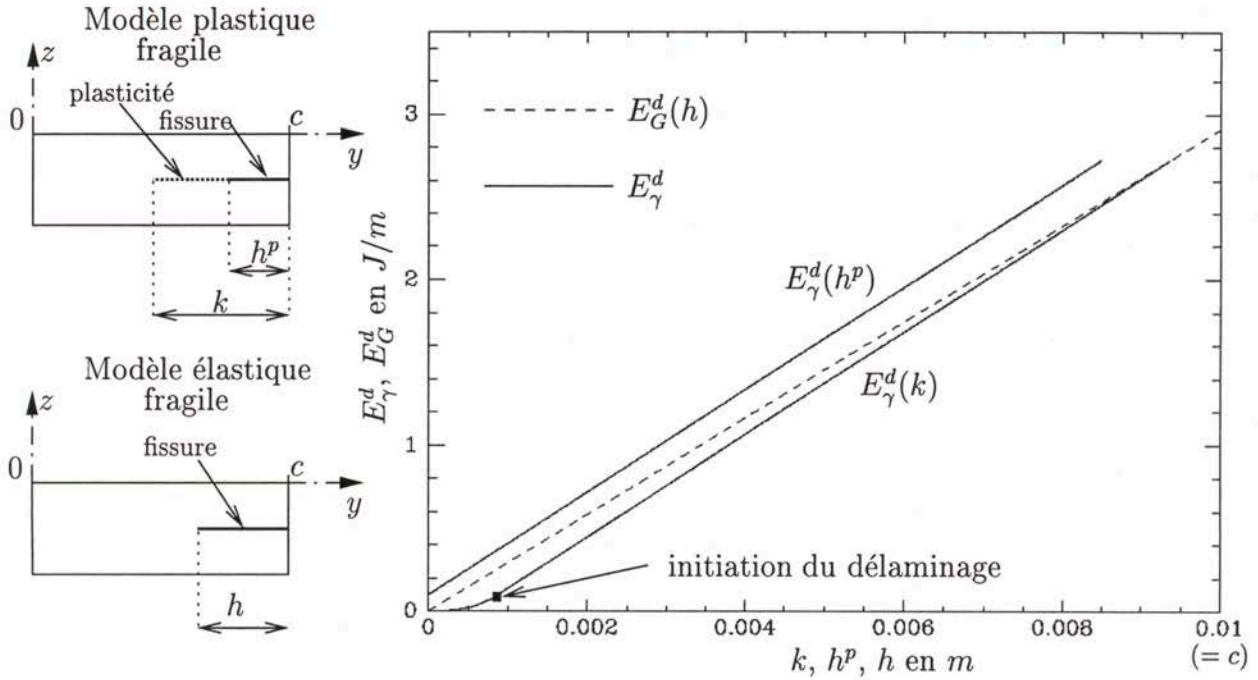


FIG. 5.29 – Comparaison des énergies dissipées dans un  $(\pm 10)_s$  : modèle élastique ( $E_G^d$ ) et modèle plastique parfait  $E_\gamma^d$  fragiles.

L'analyse plastique nous permet de définir une valeur de  $G_c$ , qui correspond à la pente des courbes en trait plein, à savoir  $309 J/m^2$ . Pour les autres empilements, on obtient les valeurs  $G_c$  données sur le tableau 5.5.

### Comparaison des approches.

Continuons avec l'exemple du  $(\pm 10)_s$  avec plasticité parfaite fragile. Cette valeur optimale de  $G_c$  identifiée par le calcul plastique parfait, est très proche de la valeur  $291 J/m^2$  trouvée par une analyse élastique et une identification par la mesure de la charge à l'initiation du délaminage (voir essais du chapitre 1, paragraphe 1.4.3). La différence entre les deux valeurs peut provenir de l'écart des valeurs des déformations de traction  $\epsilon$  à l'initiation du délaminage calculées par les deux approches (élastique et plastique). En effet, dans les deux approches on identifie les paramètres par la mesure de la charge (contrainte moyenne de traction) qui entraîne le délaminage, et donc, les déformations  $\epsilon$  prévues par les deux approches à l'initiation du délaminage sont différentes (on peut voir sur la



figure 5.22 que les courbes contrainte/déformation sont légèrement non-linéaires). Une différence de 5% entre les déformations des deux approches donne lorsque les déformations sont élevées au carré une différence de 10% environ. On pourrait alors penser que la mesure expérimentale de la déformation fournirait des renseignements sur cet aspect. Cependant, compte tenu des dispersions expérimentales, il semble difficile de mesurer avec une très bonne précision la valeur de la déformation à l'initiation du délaminage.

Les énergies dissipées par nos approches plastique et élastique ont donc des évolutions très voisines. Sur la figure 5.29, nous avons aussi tracé la courbe de l'énergie dissipée lors du délaminage calculée par le modèle élastique fragile (cf. équation (5.63)) en fonction de  $h$  (longueur de fissure) pour une valeur de  $G_c$  ( $= 291 J/m$  pour le  $(\pm 10)_s$ , voir tableau 5.4 pour les autres empilements) identifiée par l'initiation du délaminage. Nous voyons que pour de faibles longueurs  $h$  de fissure élastique, l'énergie dissipée est comprise entre les deux courbes en trait plein correspondantes à l'approche plastique avec une pente donc légèrement différente. Nous pouvons donc dire que le critère en plasticité fragile et le critère en taux de restitution d'énergie sont quasi équivalents en termes d'énergie dissipée pour des délaminages de faible profondeur (c'est le cas de nos essais, voir figure 1.25 et tableau 1.2).

Le tableau 5.5 résume les résultats des taux d'énergie dissipée pour les deux modèles plastiques fragiles choisis et pour le modèle élastique fragile pour tous les empilements  $(\pm \theta_n)_s$  testés.

$G_c$ en $J/m^2$	$(\pm 10_n)_s$		$(\pm 20_n)_s$		
	élast.	p. parf.	p. écr.	p. parf.	p. écr.
$n = 1$	291	309	308	309	308
$n = 2$	396	425	424	425	424
$n = 3$	519	562	558	562	558
$n = 4$	670	732	724	732	724

TAB. 5.5 – Taux d'énergie dissipée pour les empilements  $(\pm \theta_n)_s$  par l'approche élastique fragile et les approches plastiques fragiles.

Remarquons que si la propagation du délaminage avait lieu sans apparition de fissures transverses et si nous devions l'étudier, nous choisirions plutôt comme valeur de  $G_c$  la pente des courbes en trait plein. Cependant, nos essais montrent que la fissuration transverse accompagne l'initiation du délaminage dans nos matériaux pour le type d'essais effectué.

Par ailleurs, nos critères en glissement maximal calculé par un modèle de plasticité parfaite et avec un modèle de plasticité avec écrouissage négatif sont équivalents en termes d'énergie dissipée, pour une même longueur de fissure. Nous le montrons par exemple sur la figure 5.30 où nous avons tracé en trait plein les courbes d'énergies dissipées par le délaminage calculées par notre modèle plastique parfait en fonction de  $h^p = c - b$  et de  $k = c - a$  pour l'empilement  $(\pm 10)_s$  et en pointillés les courbes homologues avec écrouissage (l'épaisseur de couche vaut 0,13 mm). Le maillon plastique à l'avant de la fissure est légèrement plus grand pour la plasticité parfaite.

En traçant les mêmes types de courbes pour les autres empilements et pour la plasticité avec écrouissage négatif, nous avons vérifié que l'allure des courbes est la même et des remarques analogues peuvent être faites. Les critères en taux de restitution d'énergie et en glissement critique sont donc quasi-équivalents du point de vue de l'énergie dissipée par le délaminage.

Cette équivalence s'étend donc aux critères en cisaillement maximal du chapitre 4 calculés par le  $M4-2n+1$  pour des quadricouches élastiques fragiles. En effet, on a montré dans ce même chapitre



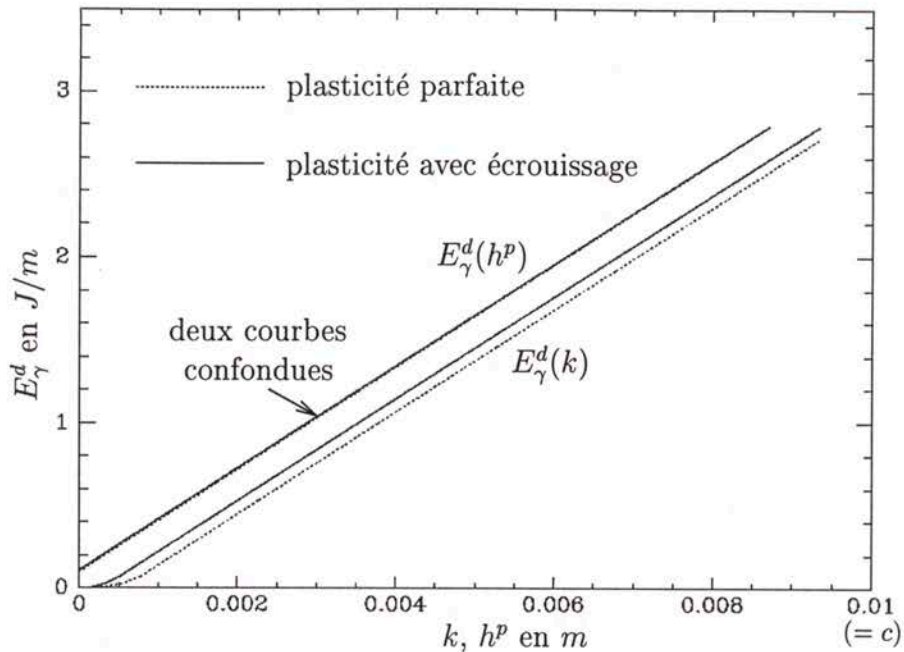


FIG. 5.30 – Comparaison des énergies dissipées par délaminage dans un  $(\pm 10)_s$  : plasticité parfaite - plasticité avec écrouissage négatif.

que ces critères sont équivalents à un critère en taux de restitution d'énergie.

## 5.6 Conclusion.

Pour conclure, nous avons développé dans ce chapitre une méthode de calcul des glissements aux interfaces  $\theta / -\theta$  des multicouches  $(\pm \theta_n)_s$  en traction mis en évidence par les essais au chapitre 1 par l'observation des bords des éprouvettes. Les essais ont montré que l'initiation du délaminage semblait gouvernée par un glissement critique. Le calcul des glissements permet donc de prédire l'initiation du délaminage. La méthode de calcul modélise le multicouche par un quadricouche, utilise les équations du modèle  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  et prend en compte deux cas de comportement des interfaces : plastique parfait et plastique avec écrouissage négatif. De par le modèle quadricouche que nous avons adopté, nous n'avons pas modélisé les effets d'épaisseur comme nous l'avons fait au chapitre précédent. L'identification des paramètres de nos modèles a été effectuée pour des valeurs de  $n$  fixées. L'évolution théorique des glissements aux bords a été comparée aux mesures expérimentales et nous avons conclu que le modèle avec plasticité avec écrouissage décrivait correctement les mesures, alors que le modèle avec plasticité parfaite reproduisait moins bien l'évolution réelle des glissements. Cependant, ce modèle avec plasticité parfaite prédit correctement l'initiation du délaminage, et cela aussi bien que le modèle de plasticité avec écrouissage. Dans le but d'établir un lien entre ces modèles en glissement critique et ceux élastiques fragiles proposés dans le chapitre précédent, nous avons aussi calculé les énergies dissipées par les mécanismes de délaminage dans le cadre des interfaces plastifiables et dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture à l'aide du  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$ . Les énergies dissipées s'avèrent pratiquement égales et les critères en taux de restitution d'énergie et en glissement critique sont quasi équivalents pour le cas de quadricouches  $(\pm \theta)_s$  d'épaisseur quelconque.



## Conclusions et perspectives.

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés à divers aspects du délaminage dans les multicouches. Nous avons réalisé des essais, développé des modèles, créé des logiciels et établi des critères qui permettent une meilleure compréhension du délaminage.

Les essais que nous avons effectués sont des essais de traction sur des empilements  $(\pm\theta_n)_s$  en carbone-époxy avec bords libres. Le polissage et l'inspection des bords par un microscope optique ont permis de mettre en évidence et de mesurer pendant nos essais de délaminage en mode III les valeurs de charge critique à l'initiation du délaminage mais aussi, ce qui est moins classique, un glissement d'interface d'origine plastique. Ce glissement atteint des valeurs de l'ordre de deux fois le diamètre de la fibre avant l'initiation du délaminage. Sa vitesse d'apparition et d'évolution est sensible aux effets d'épaisseur tout comme l'initiation du délaminage. Une unique valeur critique de glissement semble gouverner l'initiation du délaminage en mode III pour tous nos multicouches en carbone-époxy. Nos essais ont prouvé que malgré la présence du glissement d'interface, le comportement global des multicouches reste quasi-linéaire jusqu'à l'amorçage du délaminage.

Compte tenu de ces observations expérimentales nous avons adapté des modèles simplifiés développés au LAMI, appelés multiparticulaires, de façon à calculer les glissements d'interface par la prise en compte de discontinuités d'interface, et à calculer aussi des déformations anélastiques tridimensionnelles dans les couches. Les modèles de multicouches minces considérés sont le  $M4-2n+1$  et le  $M4-5n$  et initialement destinés au calcul des efforts d'interface et donc bien adaptés pour l'étude du délaminage. Dans ces modèles en contrainte, les couches deviennent respectivement des membranes ou des plaques de Reissner couplées par des efforts d'interface. Les deux modèles font apparaître explicitement parmi les efforts intérieurs généralisés des efforts de cisaillement aux interfaces. Le  $M4-5n$  présente l'avantage de faire figurer aussi les efforts d'arrachement. Une adaptation de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner, et de la méthode de Reissner pour les problèmes élastiques ont permis d'écrire les équations généralisées du problème et d'identifier les déformations anélastiques généralisées des modèles. Les champs anélastiques ont joué le rôle de variables d'état au cours de la modélisation. Avec ces modèles enrichis et avec des équations anélastiques propres au problème considéré, on est en mesure d'aborder des problèmes anélastiques quelconques.

La première application a été la modélisation des essais effectués dans ce mémoire. La résolution du problème de traction d'un multicouche rectangulaire quelconque avec, sur chacune des couches des conditions de bords quelconques en présence de champs anélastiques connus aux interfaces et dans les couches a été réalisée. Les champs ont été supposés invariants suivant la longueur du multicouche élané. Les équations des modèles ont conduit à la résolution d'un système différentiel du second ordre avec second membre. Nous avons proposé une formulation variationnelle pour la résolution du système différentiel. Les équations ont été programmées, les champs anélastiques pouvant être considérés actuellement dans les programmes sont les déformations anélastiques constantes par couche comme des déformations hygrothermiques. Le programme lié au  $M4-5n$ , est appelé



DEILAM. Des applications des logiciels pour des problèmes classiques ont été effectuées et les résultats ont été comparés avec ceux d'autres auteurs. Les résultats de DEILAM et du logiciel lié au  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  convergent sur les bords et les interfaces car il n'existe pas de singularités pour ces modèles. L'approximation des champs 3D est très correcte jusqu'à des distances au bord de l'ordre de quelques diamètres de fibre, où de toute façon on peut aussi mettre en doute les méthodes éléments finis 3D. De nombreuses applications sont possibles avec DEILAM compte tenu de sa flexibilité vis à vis des conditions de bord.

L'intégration de critères de délaminage efficaces dans ces logiciels, et surtout dans DEILAM, fait l'objet des chapitres suivants et nous permet de proposer un nouvel outil post-processeur pour l'étude des effets de bord et le dimensionnement de structures multicouches. Une première analyse de type élastique a été menée. Elle permet la modélisation de nos essais et la détermination de critères de délaminage pouvant rendre compte des effets d'épaisseur et des effets des angles.

L'analyse élastique consiste à regarder flou, de loin, les phénomènes d'interface autres que le délaminage, de telle sorte que les glissements d'interface ne sont pas pris en compte. L'approche élastique a nécessité dans un premier temps une réflexion sur la modélisation des multicouches dans le cadre de la rupture fragile. Nous avons conclu qu'une même épaisseur de couches modèles doit être conservée pour l'étude de multicouches homothétiques. De cette sorte, pour nos multicouches  $(\pm\theta_n)_s$ , nous avons pris comme couche *modèle* le pli physique élémentaire. Grâce à cette modélisation, nous avons pu rendre compte des effets d'épaisseur expérimentaux sur l'initiation du délaminage. Deux types de critères de délaminage ont été envisagés pour chacun des modèles  $\mathcal{M}_{4-5n}$ ,  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  :

- le premier est un critère empirique portant sur la valeur ponctuelle des efforts de cisaillement d'interface, en l'occurrence la valeur au bord pour nos multicouches. Cela est possible puisque nos modèles n'y présentent pas de singularités.
- Le deuxième est un critère portant sur les taux de restitution d'énergie qui, pour être appliqué à l'initiation du délaminage, requiert que l'on fasse tendre vers zéro les longueurs de fissure. Dans le calcul des taux de restitution d'énergie nous avons considéré un cas général de multicouche quelconque avec délaminage droit. La méthode du travail de refermeture de fissure et nos calculs ont montré que le taux de restitution d'énergie s'exprime tout simplement sous une forme quadratique des efforts d'interface. Dans cette expression nous avons identifié les taux individuels  $G_I$ ,  $G_{II}$  et  $G_{III}$ . Pour nos empilements et ceux de [Marion, 2000], le taux de restitution d'énergie est proportionnel au carré des cisaillements  $\tau_1 = \sigma_{13}$  et le coefficient de proportionnalité dépend peu de l'angle et de l'épaisseur du multicouche de sorte que le critère en taux de restitution d'énergie est équivalent à un critère en cisaillement maximal.

Chacun de nos critères fait intervenir une constante critique que nous identifions par le calcul des moyennes des valeurs des cisaillements ou des taux de restitution d'énergie prévues par les modèles à l'initiation expérimentale du délaminage. Les prédictions des critères donnent alors des résultats très corrects et reproduisent les effets d'épaisseur mesurés. Il est important de souligner que les critères donnent des grandeurs critiques qui dépendent de la finesse de maillage multiparticulaire choisie. Si l'épaisseur du pli élémentaire change ou si l'on veut changer la finesse de maillage multiparticulaire, l'identification est à reprendre. Le critère en taux de restitution d'énergie nous semble plus pertinent et plus rigoureusement établi qu'un critère en contrainte maximale qui lui n'a été que partiellement justifié énergétiquement. En effet, il est possible que la proportionnalité entre le carré des cisaillements et les taux des restitution d'énergie que nous avons trouvée pour nos empilements (quelqu'en soit l'épaisseur et l'angle), n'existe plus pour d'autres types d'empilements.

Le modèle  $\mathcal{M}_{4-2n+1}$  a donné d'aussi bons résultats que le modèle  $\mathcal{M}_{4-5n}$  pour nos empilements cependant pour des empilements où les efforts d'arrachement seraient importants, il est possible



que le modèle  $M4-2n+1$  ne soit pas aussi pertinent.

La deuxième approche que nous avons proposée, repose sur l'analyse des glissements calculés par le  $M4-2n+1$  afin d'établir des critères de délaminage en glissement maximal pour nos empilements. Les multicouches  $(\pm\theta_n)_s$  ont été modélisés par des quadricouches  $(\pm\theta)_s$  et cela nous a permis de réaliser nos calculs analytiquement. L'inconvénient de cette modélisation est l'absence d'effet d'épaisseur théorique, de sorte que les modèles et les critères en glissement que nous avons réalisés ne sont valables que pour une épaisseur d'empilement donnée. Cependant, l'objectif de cette partie est d'établir un lien entre ces critères élastiques fragiles et les critères en glissement d'interface constatés expérimentalement. Nous prétendons que si le lien est établi pour un  $(\pm\theta)_s$ , alors il le sera sûrement pour tout autre empilement. Les équations du modèle ont été appliquées, conjuguées avec un comportement plastique parfait et un comportement plastique à écrouissage négatif. Le deuxième comportement a donné de meilleurs résultats que le premier. Nous avons proposé deux méthodes d'identification des paramètres du comportement plastique (un paramètre par comportement). L'identification par la mesure de la valeur d'initiation du glissement s'est avéré peu fiable et peu robuste. Nous avons donc choisi d'utiliser plutôt la valeur du glissement critique provoquant le délaminage. Cela consiste à adopter comme critère de délaminage  $|\gamma| = 15\mu m$  (valeur critique moyenne des glissements mesurés) et à identifier la valeur du paramètre qui donne un glissement égal à  $15\mu m$  pour un chargement égal au chargement mesuré à l'initiation du délaminage. La moyenne des valeurs pour les différents angles donne la valeur du paramètre. Cette méthode d'identification donne de très bons résultats de prédiction d'initiation de délaminage pour les deux types de comportement plastique. La description de la cinétique de glissement au bord en fonction du chargement est en accord avec les mesures pour le cas de la plasticité avec écrouissage négatif. Par contre, le modèle de plasticité parfaite donne une évolution des glissements assez imprécise. Nous avons terminé le mémoire par une comparaison de l'énergie dissipée par le délaminage calculée avec des critères en glissement et en taux de restitution d'énergie pour un  $(\pm\theta)_s$ . La comparaison a prouvé que les critères en glissement critique et en taux de restitution d'énergie sont équivalents en termes d'énergie dissipée par le délaminage. Il est vraisemblable que la modélisation des empilements  $(\pm\theta_n)_s$  avec autant de couches modèles que de couches physiques fasse apparaître un effet d'épaisseur pertinent sur le critère en glissement d'interface de la même façon que sur les critères en cisaillements d'interface calculés par notre approche élastique. Avec ce type de modélisation, le paramètre plastique serait identique pour tous les empilements et toutes les épaisseurs de multicouche considérés (nous rappelons que nous nous sommes restreints à l'étude du quatre couches pour être en mesure de réaliser des calculs analytiques).

Dans ce mémoire nous avons aussi traité des délaminages en mode I. Bien que nous disposons de l'expression de  $G_I$ , nous n'avons pas éprouvé nos critères sur les cas de ce type de délaminage trouvés dans la littérature par des essais de traction parallèlement au bord (sur des  $(\pm 25, 90)_s$  par exemple). En effet, il nous semble que les fissures qualifiées de délaminage en mode I apparaissent plutôt par notre modèle  $M4-5n$  comme des fissures intralaminaires puisque liées à un état de contraintes  $\sigma_{33}$  dominant et quasi-uniforme suivant l'épaisseur des couches. Les essais montrent d'ailleurs qu'il y a une fissuration de couche qui accompagne le délaminage. On a d'ailleurs montré que les effets d'échelle constatés expérimentalement seraient alors des effets d'échelle de volume. Un travail important doit être effectué pour trouver des empilements ou un type d'essai pour lesquels il y ait de véritables fissures d'interface en mode I résultant d'une concentration des contraintes  $\sigma_{33}$  à l'interface. Des travaux analogues devront aussi être effectués pour trouver des essais d'initiation et de propagation de délaminage en mode II ou mixtes afin de proposer des critères de délaminage plus complets.



Une suite logique à ce travail sera aussi de prendre en compte des déformations anélastiques quelconques dans les couches comme par exemple le comportement plastique des couches. Il faudra aussi introduire l'endommagement dans nos modèles. Nous pensons que cela peut être fait directement dans les équations de comportement généralisé. La programmation de l'endommagement dans DEILAM ferait de DEILAM un logiciel très complet. D'ores et déjà, comme logiciel de bureau d'étude ou comme post-processeur de calcul éléments finis, DEILAM pourrait représenter un outil de dimensionnement des multicouches au délaminage très efficace.

## Références bibliographiques.





# Bibliographie

- [Allix, 1989] ALLIX O. *Modélisation du comportement des composites stratifiés : application à l'analyse du délaminage*. Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, 1989.
- [Allix, 1992] ALLIX O. *Une nouvelle méthode d'analyse du délaminage*. Mémoire d'habilitation à diriger les recherches, Université Paris 6, 1992.
- [Allix et al., 1995] ALLIX O., BAHLOULI N., CLUZEL C., PERRET L. *Modelling and identification of temperature-dependent mechanical behaviour of the elementary ply in carbon/epoxy laminates*. *Composites Science and Technology*, 56, pp. 883-888, 1995.
- [Allix et al., 1998] ALLIX O., LEVEQUE D., PERRET L. *Identification and forecast of delamination in composite laminates by an interlaminar interface model*. *Composites Science and Technology*, 58, pp. 671-678, 1998.
- [Asp, 1998] ASP L. E. *The effects of moisture and temperature on the interlaminar delamination toughness of a carbon/epoxy laminate*. *Composites Science and Technology*, 58, pp. 967-977, 1998.
- [Bahlouli et Gaignebet, 1991] BAHLOULI N., GAIGNEBET Y. *Une approche multicritère de la rupture des composites stratifiés*. Contrat Aérospatiale, Rapport Interne n° 108, LMT/ENS Cachan.
- [Barenblatt, 1962] BARENBLATT G. I. *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture*. Dans *Advance in Applied Mechanics*, Academic Press, pp. 55-129, 1962.
- [Benmedakhene et al., 1999] BENMEDAKHENE S., KENANE M., BENZEGGAGH M. L. *Initiation and growth of delamination in glass/epoxy composites subjected to static and dynamic loading by acoustic emission monitoring*. *Composites Science and Technology*, 59, pp. 201-208, 1999.
- [Benzeggagh, 1996] BENZEGGAGH M. L., KENANE M. *Measurement of mixed-mode delamination fracture toughness of unidirectional glass/epoxy composites with mixed-mode bending apparatus*. *Composites Science and Technology*, 56, pp. 439-449, 1996.
- [Berthelot, 1992] BERTHELOT J. Y. *Matériaux composites - comportement mécanique et analyse des structures*. Ed. Masson, 1992.
- [Bhat, 1993] BHAT N. V. *Delamination growth in graphite/epoxy composite laminates under tensile loading*. Ph. D. Thesis, Technology laboratory for advanced compopsites, Massachussets, USA, 1993.
- [Brellier, 2000] BRELLIER A. *Caractérisation thermomécanique et matérialographie des matériaux composites*. Rapport de stage scientifique, ENPC, 2000.
- [Brewer et Lagace, 1988] BREWER J.C., LAGACE P. A. *Quadratic stress criterion for initiation of delamination*. *Journal of Composite Materials*, Vol. 22, pp. 1141-1155, 1988.



- [Bui, 1978] BUI H. D. *Mécanique de la rupture fragile*. Ed. Masson, Paris, 1978.
- [Bui et al., 2000] BUI V. Q., MARECHAL E., NGUYEN-DANG H. *Imperfect interlaminar interfaces in laminated composites : delamination with the R-curve effect*. Composites Science and Technology, Vol. 60, pp. 2619-2630, 2000.
- [Caron, 1993] CARON J.-F. *Modélisation de la cinétique de fissuration transverse en fatigue dans les stratifiés*. Thèse de doctorat de l'ENPC, 1993.
- [Caron et Ehrlacher, 1997] CARON J.-F., EHRLACHER A. *Modelling the kinetics of transverse cracking in composite laminates*. Composites Science and Technology, Vol. 57, pp. 1261-1270, 1997.
- [Caron et al., 1999] CARON J.-F., CARREIRA R. P., DIAZ DIAZ A. *Critère d'initiation de délaminage dans les stratifiés*. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Vol. 327, p.1291, 1999.
- [Carreira, 1998] CARREIRA R. P. *Validations par éléments finis des Modèles Multiparticulaires de Matériaux Multicouches M4*. Thèse de doctorat de l'ENPC, 1998.
- [Carlson et Pipes, 1987] CARLSON L. A., PIPES R. B. *Experimental characterization of advanced composite materials*. University of Delaware. Prentice Hall, 1987.
- [Chaboche et al., 1998] CHABOCHE J. L., KRUCH S., POTTIER T. *Micromechanics versus macromechanics : a combined approach for the metal matrix composites constitutive modelling*. European Journal of Mechanics A/Solids, Vol. 17, pp. 885-908, 1998.
- [Chabot, 1997] CHABOT A. *Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide des M4*. Thèse de doctorat de l'ENPC, 1997.
- [Chabot et al., 2000] CHABOT A., CANTOURNET S., EHRLACHER A. *Analyse des taux de restitution d'énergie par un modèle simplifié pour un quadricouche en traction fissuré à l'interface entre deux couches*. Comptes-rendus des 12èmes Journées Nat. sur les Composites, (JNC12), Cachan, France, 2000.
- [Chyanbin et al., 1995] CHYANBIN H., KAO C. J., CHANG L. E. *Delamination fracture criteria for composite laminates*. Journal of Composite Materials, Vol. 29, pp. 1962-1987, 1995.
- [Crossman et Wang, 1982] CROSSMAN F. W., WANG A. S. D. *The dependence of tranverse cracking and delamination on ply thickness in graphite/epoxy laminates*. "Damage in composite materials", ASTM STP 775, K. L. Reifsnider, Ed., American Society for Testing and Materials, pp. 118-139, 1982.
- [Daudeville et Ladevèze, 1993] DAUDEVILLE L., LADEVÈZE P. *A damage mechanics tool for laminate delamination*. Composite Structures, Vol. 25, pp. 547-555, 1993.
- [Dhatt et Touzot, 1984] DHATT G., TOUZOT G. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Deuxième édition, Vol. 327, pp. 258-262, 1984.
- [Díaz, 1998] DIAZ DIAZ A. *Evaluation des efforts d'interface dans un matériau composite et influence sur le délaminage*. Mémoire de D.E.A. de l'ENPC, 1988
- [Díaz et Caron, 2000] DIAZ DIAZ A., CARON J.-F. *Criterion of delamination initiation in composite laminates*. Proceedings of the 8th international conference on fibre reinforced composites FRC 2000, Newcastle, England, Sept. 2000.
- [Dvorak, 2000] DVORAK G. J. *Composite materials : Inelastic behavior, damage, fatigue and fracture*. International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, p. 155, 2000.



- [Ehrlacher et al., 1994] EHLACHER A., CARON J. F., CHABOT A., NACIRI T. *Analyse des efforts d'interface à l'aide des M<sub>4</sub>*. Comptes-rendus des 9èmes Journées Nationales sur les Composites, Saint-Etienne, Nov. 1994.
- [Engrand, 1981] ENGRAND D. *A boundary layer approach to the calculation of transverse stresses along free edges of a symmetric laminated plate of arbitrary width under in plane loading*. Composite structures, pp. 247-261, 1981.
- [Flanagan, 1994] FLANAGAN G. *An efficient stress function approximation for the free-edge stresses in laminates*. International Journal of Solids and Structures, Vol. 31, No. 7, pp. 941-952, 1994.
- [Garett et Bailey, 1977] GARETT K. W., BAILEY J. E. *Multiple transverse fracture in 90° cross-ply laminates of glass fibre-reinforced polyester*. Journal of materials science, Vol. 12, 1977.
- [Gay, 1989] GAY D. *Matériaux composites*. Ed. Hermes, 2ème édition, 1989.
- [Gilletta, 1987] GILLETTA D. *Modèles de dégradation de structures composites stratifiées*. Rapport technique ONERA 13/3542 RY 061 R, 1987.
- [Girard et Louis, 1993] GIRARD R., LOUIS D. *Présentation du logiciel DAMSTRAT*. Dans une nouvelle approche des composites par la mécanique de l'endommagement. Notes de cours. Cachan, avril, 1993.
- [Guedra-Degeorges, 1993] GUEDRA-DEGEORGES D. *Principaux essais de délaminage. Exploitation*. Dans une nouvelle approche des composites par la mécanique de l'endommagement. Notes de cours. Cachan, avril, 1993.
- [Griffith, 1920] GRIFFITH A. *The phenomena of rupture and flow in solids*. Phil. Trans. Roy. Soc., Londres, 221, 16-98, 1920.
- [Haboussi et al., 2001] HABOUSSI M., DUMONTET H., BILLOET J. L. *On the modelling of interfacial transition behaviour in composite materials*. Computational Materials Science, Vol. 20, pp. 251-266, 2001.
- [Hadj-Ahmed, 1999] HADJ-AHMED R. *Modélisation des assemblages collés : application à l'optimisation du transfert des efforts par cisaillement*. Thèse de doctorat de l'ENPC, 1999.
- [Hadj-Ahmed et al., 2001] HADJ-AHMED R., FORET G., EHLACHER A. *Stress analysis in adhesive joints with a multiparticle model of multilayered materials (M<sub>4</sub>)*. International Journal of Adhesion and Adhesives, Vol. 21, pp. 297-307, 2001.
- [Hahn, 1976] HAHN H. T. *Residual stresses in polymer matrix composite laminates*. Journal of composite materials, Vol. 10, pp. 266-278, 1976.
- [Harry et al., 1998] HARRY R., LECUYER F., MARION G. *Détermination expérimentale de l'amorçage du délaminage de stratifiés à l'aide de l'émission acoustique*. Comptes-rendus des 11èmes Journées Nat. sur les Composites (JNC11), Arcachon, France, 1998.
- [He, 1999] HE Q. C. *Uniform strain fields and microstructure-independent relations in nonlinear elastic fibrous composites*. Journal of the mechanics and physics of solids, Vol. 47, pp. 1781-1793, 1999.
- [Herakovich et al., 1985] HERAKOVICH C. T., POST D., BUCZEK M. B., CZARNE R. *Free edge strain concentrations in real composite laminates : experimental-theoretical correlation*. Journal of applied mechanics, Vol. 52, pp. 787-793, 1985.
- [Icardi, 2001] ICARDI U. *A three-dimensional analysis of thick laminated beams*. Composite Structures, Vol. 52, pp. 123-135, 2001.



- [Irwin, 1958] IRWIN G. R. *Fracture*. Dans Handbuch der Physik, Vol. 6 Springer Verlag, pp. 551-590.
- [Jen et al., 1993] JEN M.-H. R., KAU Y. S., HSU J. M. *Initiation and propagation of delamination in a centrally notched composite laminate*. Journal of composite materials, Vol. 27, pp. 272-302, 1993.
- [Kant et Swaminathan, 2000] KANT T., SWAMINATHAN K. *Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites-a selective review and survey of current developments*. Composite structures, Vol. 49, pp. 65-75, 2000.
- [Kassapoglou et Lagace, 1987] KASSAPOGLOU C., LAGACE P. A. *Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates*. Journal of composite materials, Vol. 27, pp. 292-308, 1987.
- [Kim, 1989] KIM R. Y. *Experimental observations of free-edge delamination*. Dans composite materials series, Vol 5. Interlaminar response of composite materials. Edited by N. J. Pagano, pp. 111-160, 1989.
- [Kim et Soni, 1984] KIM R. Y., SONI S. R. *Experimental and analytical studies on the onset of delamination in laminated composites*. Journal of composite materials, Vol. 18, pp. 70-80, 1984.
- [Kim et Soni, 1986] KIM R. Y., SONI S. R. *Failure of composite laminates due to combined interlaminar normal and shear stresses*. Composites 86 : Recent Advances in Japan and the United States, pp. 341-350, 1986.
- [Kirchoff, 1850] KIRCHOFF G. *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe*. Journal für reine und angewandte Mathematik, Vol. 40, pp. 51-88, 1850.
- [Laalai, 1993] LAALAI I. *Effets d'échelle dans les matériaux quasi-fragiles à microstructure aléatoire : approches locale et non-locale*. Thèse de doctorat de l'ENPC, 1993.
- [Laalai, 1995] LAALAI I. *A stochastic non local damage model*. International Journal of Fracture, Vol. 76, pp. 121-140, 1995/1996.
- [Ladevèze, 1988] LADEVEZE P. *Les modèles classiques et leurs extensions pour le calcul des plaques*. Pluralis Vol. 2, "Calcul des Structures et Intelligence Artificielle", 1988.
- [Ladevèze et Le Dantec, 1992] LADEVEZE P., LE DANTEC E. *Damage modeling of the elementary ply for laminated composites*. Composites Science and Technology, Vol 43., pp. 257-267, 1992.
- [Lane et al., 2001] LANE R., HAYES S. A., JONES F. R. *Fibre/matrix stress transfer through a discrete interphase : 2. High volume fraction systems*. Composites Science and Technology, Vol. 61, pp. 565-578, 2001.
- [Lécuyer, 1991] LECUYER F. *Etude de effets de bord dans les structures minces multicouches*. Thèse de doctorat de l'Université Paris VI, 1991.
- [Lee, 1990] LEE S. M. *Failure mechanisms of edge delamination of composites*. Journal of Composite Materials, Vol. 24, pp. 1200-1212, 1990.
- [Leguillon et Sanchez-Palencia, 1987] LEGUILLON D., SANCHEZ-PALENCIA E. *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*. Masson-John Wiley, Paris New York, 1987.
- [Leguillon, 1998] LEGUILLON D. *Amorçage du délaminage sur les bords libres des stratifiés croisés - Etude de deux critères*. Comptes rendus des onzièmes journées nationales sur les composites, Arcachon. Novembre, 1998.



- [Leguillon, 1999] LEGUILLON D. *Method based on singularity theory to predict edge delamination of laminates*. International Journal of fracture, Vol. 100, pp. 105-120, 1999.
- [Lemaître et Chaboche, 1985] LEMAITRE J., CHABOCHE J. L. *Mécanique des matériaux solides*. Ed. Dunod-Bordas, Paris, 1985.
- [Lekhnitskii, 1968] LEKHNITSKII S. G. *Anisotropic plates*. Gordon and Breach, Sci. Publishers, 1968.
- [Lévêque, 1998] LÉVÊQUE D. *Analyse de la tenue au délaminage des composites stratifiés : identification d'un modèle d'interface interlaminaire*. Thèse de doctorat de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1998.
- [Limam et al., 2001] LIMAM O., FORET G., HADJ-AHMED R., EHRLACHER A. *Calcul à la rupture appliqué au multicouche : exemple de dalles en béton armé réparées par matériaux composites*. Comptes-rendus du XVe. congrès français de mécanique (CFM01), Nancy, 2001.
- [Love, 1934] LOVE A. E. H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge at the University Press, 4ème édition, 1934.
- [Marion, 2000] MARION G. *Etude expérimentale et théorique de l'amorçage du délaminage au bord de matériaux composites stratifiés*. Thèse de doctorat de l'Université Bordeaux I, 2000.
- [Mindlin, 1951] MINDLIN R. D. *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates*. Journal of applied mechanics, pp. 32-38, 1951.
- [Naciri et al., 1998] NACIRI T., EHRLACHER A., CHABOT A. *Interlaminar stress analysis with a new Multiparticle Modelization of Multilayered Materials (M4)*. Composites Science and Technology, Vol. 58, p. 337, 1998.
- [Nguyen, 2001] NGUYEN K. V. *Introduction de la plasticité de couche dans les modèles multiparticulaires de matériaux multicouches et validations expérimentales*. Mémoire de D.E.A. de l'ENPC, 2000.
- [Nigam et al., 1994a] NIGAM H., DVORAK G. J., BAHEI-EL-DIN Y. A. *An experimental investigation of elastic-plastic behavior of a fibrous boron-aluminium composite : I. Matrix-dominated mode*. International Journal of Plasticity, Vol. 10, pp. 23-48, 1994.
- [Nigam et al., 1994b] NIGAM H., DVORAK G. J., BAHEI-EL-DIN Y. A. *An experimental investigation of elastic-plastic behavior of a fibrous boron-aluminium composite : II. Fiber-dominated mode*. International Journal of Plasticity, Vol. 10, pp. 49-62, 1994.
- [O'Brien, 1982] O'BRIEN T. K. *Charcterization of delamination onset and growth in a composite laminate*. Dans Damage in Composite Materials, ASTM Special Technical Publication, pp. 140-167, 1982.
- [Ourak et al., 1990] OURAK M., NONGAILLARD B., ROUVAEN J.M., IMOULOUDENE N. *Nondestructive evaluation of composite materials using ultrasonic spectroscopy*. 1er. Congrès Français d'Acoustique, Lyon, France, pp. 1261-1264, 1990.
- [Pagano, 1969] PAGANO N. J. *Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending*. Journal of Composite Materials, Vol. 8, pp. 308-411, 1971.
- [Pagano, 1971] PAGANO N. J., PIPES R. B. *The influence of stacking sequence on laminate strength*. Journal of Composite Materials, Vol. 5, pp. 50-57, 1971.
- [Pagano, 1978] PAGANO N. J. *Stress fields in composite laminates*. International Journal of Solids and Structures, Vol. 14, pp. 385-400, 1978.



- [Pagano et Soni, 1983] PAGANO N. J., SONI S. R. *Global-local laminate variational model*. International Journal of Solids and Structures, Vol. 19, p. 207-228, 1983.
- [Pagano et Soni, 1992] PAGANO N. J., SONI S. R. *Free edge delamination prevention in composite laminates*. "Debonding/delamination of composites" Agard conference proceedings 530, 74th meeting of AGARD Structures and Materials Panel, Patras, Greece, May. 1992.
- [Pipes et Pagano, 1970] PIPES R. B., PAGANO N. J. *Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension*. Journal of Composite Materials, Vol. 4, p. 538, 1970.
- [Puppo et Evensen, 1970] PUPPO A. H., EVENSEN H. A. *Interlaminar shear in laminated composites under generalized plane stress*. Journal of composite materials, Vol. 4, pp. 204-220, 1970.
- [Purslow, 1986] PURSLOW D. *Matrix fractography of fibre-reinforced epoxy composites*. Composites, Vol. 17, No. 4, october, 1986.
- [Py, 2000] PY E. *Quantification théorique et expérimentale des erreurs dans la mesure des caractéristiques mécaniques des matériaux composites*. Rapport de stage scientifique, ENPC, 2000.
- [Raju et Crews, 1982] RAJU I. S., CREWS J. H. *Three dimensional analysis of  $(0, 90)_s$  and  $(90, 0)_s$  laminates with a central circular hole*. Composites Technology Review, Vol. 4, pp. 116-124, 1982.
- [Reddy, 1984] REDDY J. N. *On the generalization of displacement-based laminates theories*. Applied mechanics review, Vol. 42, No. 11, Part 2, 1989.
- [Reddy, 1989] REDDY J. N. *A simple higher-order theory for laminated composite plates*. Journal of applied mechanics, pp. 745-752, 1984.
- [Reddy et Robbins, 1994] REDDY J. N., ROBBINS Jr. D. H. *Theories and computational models for composite laminates*. Applied mechanics review, Vol. 47, pp. 147-169, 1994.
- [Reissner, 1945] REISSNER E. *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*. Journal of applied mechanics, A-69 ; A-77, 1945.
- [Reissner, 1950] REISSNER E. *On a variational theorem in elasticity*. J.Math.Phys., Vol. 29, pp. 90-95, 1950.
- [Rodini et Eisenmann, 1978] RODINI B. T. J., EISENMANN J. R. *An analytical and experimental investigation of edge delamination in composite laminates*. Proc. 4th conf. on fibrous composites, Leno E. M., Oplinger D. W. and Burke J. J., Eds, Plenum Press, New-York, San Diego, CA, pp. 441-457.
- [Salençon, 1983] SALENÇON J. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Paris, Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées. Cours de l'ENPC. 1983.
- [Schellekens et De Borst, 1994] SCHELLEKENS J.C.J., DE BORST R. *Free edge delamination in carbon-epoxy laminates : a novel numerical/experimental approach*. Composite Structures, Vol. 28, pp. 357-373, 1994.
- [Schipperen et Lingen, 1999] SCHIPPEREN J.H.A., LINGEN F.J. *Validation of two-dimensional calculations of free edge delamination in laminated composites*. Composite Structures, Vol. 45, pp. 233-240, 1999.
- [Soni et Kim, 1986] SONI S. R., KIM R. Y. *Delamination on composite laminates stimulated by interlaminar shear*. ASTM Special Technical Publication, pp. 286-307, 1986.



- [Stolz et Pradeilles-Duval, 1996] STOLZ C., PRADEILLES-DUVAL R. M. *Approche énergétique de la propagation dynamique de discontinuités mécaniques*. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Vol. 322, pp. 525-532, 1996.
- [Suemasu, 1999] SUEMASU H. *An experimental method to measure the mode-III interlaminar fracture toughness of composite laminates*. Composites Science and Technology, Vol. 59, pp. 1015-1021, 1999.
- An experimental method to measure the mode-III interlaminar fracture toughness of composite laminates
- [Sun et Chen, 1987] SUN C. T., CHEN J. K. *Effect of plasticity on free edge stresses in boron-aluminium composite laminates*. Journal of Composite Materials, Vol. 21, pp. 969-985, 1987.
- [Sun et Chen, 1989] SUN C. T., CHEN J. L. *A simple flow rule for characterizing nonlinear behavior of fiber composites*. Journal of Composite Materials, Vol. 23, pp. 1009-1020, 1989.
- [Sun et Zhou, 1988] SUN C. T., ZHOU S. G. *Failure of quasi-isotropic composite laminates with free edges*. Journal of Composite Technology & Research, Vol. 7, pp. 515-557, 1989.
- [Sutherland et al., 1999] SUTHERLAND L. S., SHENOI R. A., LEWIS S. M. *Size and scale effects in composites : I. Literature review*. Composites Science and Technology, 59, pp. 209-220, 1999.
- [Takeda et al., 1998] TAKEDA N., OGIHARA S., SUZUKI S., KOBAYASHI A. *Evaluation of microscopic deformation in CFRP laminates with delamination by micro-grid methods*. Journal of Composite Materials, Vol. 32, pp. 83-100, 1998.
- [Talreja, 1989] TALREJA R. *A damage mechanics analysis of interlaminar cracking in composites*. Key Engineering Materials, Vol. 37, pp. 21-34, 1989.
- [Tang, 1975] TANG S. *A boundary layer theory - Part I : Laminated composites in plane stress*. Journal of Composite Materials, Vol. 9, pp. 33-41, 1975.
- [Tao et Sun, 1998] TAO J., SUN C. T. *Influence of ply orientation on composite delamination in composite laminates*. Journal of Composite Materials, Vol. 32, pp. 1933-1947, 1998.
- [Tsai et Wu, 1971] TSAI S. W., WU E. M. *A general theory of strength for anisotropic materials*. Journal of composite materials, Vol. 5, pp. 58-80.
- [Tsai, 1988] TSAI S. W. *Composites design*. Think composites publishers, 4ème édition, 1988.
- [Verchery, 1974] VERCHERY G. *Application aux structures minces élastiques de principes variationnels mixtes. Exemple de la poutre à cisaillement transversal*. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, t. 278, p.571-574, 1974.
- [Wang, 1989] WANG A. S. D. *Fracture analysis of interlaminar cracking*. Composite materials series, 5. Interlaminar response of composite materials. Edited by N. J. Pagano, pp.69-109, 1989.
- [Wang et Choi, 1982] WANG S. S., CHOI I. *Boundary-layer effects in composite laminates. Part 1 and 2*. Journal of applied mechanics, Vol. 49, pp. 541-560, 1982.
- [Wang et Crossman, 1977a] WANG A. S. D., CROSSMAN F. W. *Some new results on edge effect in symmetric composite laminates*. Journal of Composite Materials, Vol. 11, p. 92, 1977.
- [Wang et Crossman, 1977b] WANG A. S. D., CROSSMAN F. W. *Edge effects on thermally induced stresses in composite laminates*. Journal of Composite Materials, Vol. 11, p. 300, 1977.
- [Washizu, 1975] WASHIZU K. *Variational methods in inelasticity and plasticity*. Pergamon Press, 1975.



- [Weibull, 1952] WEIBULL W. *A survey of statistical effects in the field of material failure*. Applied mechanics review, 5, 11, pp. 449-451, 1952.
- [Whitney et Sun, 1973] WHITNEY J. M., SUN C. T. *A higher order theory for extensional motion of laminated composites*. Journal of Sound and Vibration, Vol 30, pp. 85-97, 1973.
- [Whitney, 1989] WHITNEY J. M. *Experimental characterization of delamination fracture*. Dans composite materials series, Vol 5. Interlaminar response of composite materials. Edited by N. J. Pagano, pp.161-250, 1989.
- [Whitney et Nuismer, 1974] WHITNEY J. M., NUISMER R. J. *Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations*. Journal of Composite Materials, Volume 8, pp. 253-265, 1974.
- [Woo et Wei, 1999] WOOH S. C., WEI C. *A high-fidelity ultrasonic pulse-echo scheme for detecting delaminations in composite laminates*. Composites : part B, Volume 30, pp. 433-441, 1999.
- [Wu et Kuo, 1993] WU C. P., KUO H. C. *An interlaminar stress mixed finite element method for the analysis of thick laminated composite plates*. Composite Structures, Volume 24, pp. 29-42, 1993.
- [Yin, 1997] WAN-LEE YIN *The effect of temperature gradient on the free-edge interlaminar stresses in multi-layered structures*. Journal of Composite Materials, Vol. 31, p. 2460, 1997.
- [Yu, 1998] YU A., GUPTA V. *Measurement of in situ fiber/matrix interface strength in graphite/epoxy composites*. Composites Science and Technology, Vol 58, p. 1827, 1998.

## Annexes.



[The page contains extremely faint and illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the document. No specific content can be transcribed.]

## Annexe A

# Traction d'un multicouche avec bords chargés et résolution par le $\mathcal{M}4-5n$ .

Au paragraphe 3.2 du chapitre 3, nous avons décrit le problème d'un multicouche en traction avec bords chargés. Au paragraphe 3.2.3 nous avons détaillé les équations du modèle  $\mathcal{M}4-5n$  appliqué au problème (cf. équations (3.18) à (3.41)). L'ensemble des équations peut s'écrire sous la forme d'un système différentiel du premier ordre à  $16n-2$  inconnues avec second membre (dépendant des champs anélastiques généralisés connus). Cependant, la résolution est d'autant plus longue que le nombre de couches  $2n$  augmente. Pour cette raison, nous avons choisi d'extraire sous-système différentiel de dimension moins importante. Le sous-système différentiel trouvé est du deuxième ordre et est résolu numériquement moyennant une formulation variationnelle.

Les calculs qui ont permis de déterminer le sous-système différentiel, ses conditions aux limites et la formulation variationnelle n'ont pas été détaillés, nous allons dans cette annexe faire le détail des calculs. Nous allons nous référer au paragraphe 3.2 du chapitre 3 pour les équations du problème et à l'annexe B pour les matrices et vecteurs intermédiaires permettant d'aboutir aux résultats.

### A.1 Extraction du système différentiel du second ordre.

La méthode employée est décrite au paragraphe 3.2.4 du chapitre 3. Elle consiste, dans un premier temps, à choisir parmi les  $16n - 2$  inconnues, un nombre plus réduit d'inconnues que nous appelons inconnues principales et à exprimer les autres inconnues en fonction des inconnues principales. Ensuite, on détermine grâce aux équations du modèle des équations de même nombre que les inconnues principales et qui portent uniquement sur les inconnues principales.

Les inconnues principales de notre méthode sont les  $5n - 2$  champs adimensionnels suivants

$$\frac{Q_2^i}{e\bar{G}_{LN}}, \quad \frac{u^{j+1} - u^j}{e}, \quad \frac{v^{j+1} - v^j}{e}, \quad \varphi_x^i, \quad \text{et} \quad \varphi_y^i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n-1 \end{cases}$$

où

$$\bar{G}_{LN} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} G_{LN}^i \quad \text{et} \quad e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} e^i.$$

Ces champs sont les inconnues principales du problème. Pour obtenir le système différentiel cherché, nous devons donc exprimer à l'aide de certaines équations toutes les inconnues en fonction des inconnues principales et écrire à l'aide des équations non utilisées des relations portant sur les seules inconnues principales.



**A.1.1 Ecriture de toutes les inconnues en fonction des inconnues principales.**

Pour simplifier, on note pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n - 1$  :

$$Q^i = Q_2^i, \left\{ \begin{matrix} N^i = N_{22}^i \\ N_6^i = N_{12}^i \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} M^i = M_{22}^i \\ M_6^i = M_{12}^i \end{matrix} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{matrix} u^{j,j+1} = u^{j+1} - u^j \\ v^{j,j+1} = v^{j+1} - v^j \end{matrix} \right\} \quad (\text{A.1})$$

Dans cette partie, nous allons exprimer les inconnues  $Q_1^i, \tilde{\tau}^{j,j+1}, \tilde{N}^i, \tilde{M}^i, \nu^{i,i+1}$  et  $w^i$  en fonction des inconnues principales.

**Expression de  $Q_1^i$  et  $\tilde{\tau}^{j,j+1}$ .**

On écrit sous forme matricielle adimensionnelle les  $3n - 2$  équations algébriques linéaires dans (3.34) -  $2n - 2$  équations - et dans la première ligne de (3.33) -  $n$  équations -

$$\tilde{\Lambda} \tilde{\chi} + \tilde{H} \tilde{\gamma} = \tilde{k}^{an} \quad (\text{A.2})$$

avec  $\tilde{\chi}$  vecteur de dimension  $3n - 2$  défini par

$$\tilde{\chi}^t = \frac{1}{G_{LN}} \times \left( \frac{Q_1^1}{e}, \dots, \frac{Q_1^n}{e}, \tau_1^{1,2}, \dots, \tau_1^{n-1,n}, \tau_2^{1,2}, \dots, \tau_2^{n-1,n} \right), \quad (\text{A.3})$$

$\tilde{\gamma}$  vecteur de dimension  $5n - 2$  défini par (ses composantes sont les inconnues principales)

$$\tilde{\gamma}^t = \left( \frac{Q^1}{e \times G_{LN}}, \dots, \frac{Q^1}{e \times G_{LN}}, \frac{u^{1,2}}{e}, \dots, \frac{u^{n-1,n}}{e}, \frac{v^{1,2}}{e}, \dots, \frac{v^{n-1,n}}{e}, \varphi_x^1, \dots, \varphi_x^n, \varphi_y^1, \dots, \varphi_y^n \right), \quad (\text{A.4})$$

$\tilde{k}^{an}$  vecteur de dimension  $3n - 2$  défini par

$$\tilde{k}^{an} = - \left( d_{\Phi_1}^{1an}, \dots, d_{\Phi_1}^{nan}, \frac{D_1^{1,2an}}{e}, \dots, \frac{D_1^{n,n-1an}}{e}, \frac{D_2^{1,2an}}{e}, \dots, \frac{D_2^{n,n-1an}}{e} \right)^t, \quad (\text{A.5})$$

$\tilde{\Lambda}$  et  $\tilde{H}$  des matrices constantes de dimensions respectives  $(3n - 2) \times (3n - 2)$  et  $(3n - 2) \times (5n - 2)$  (leurs expressions sont données aux équations (B.1) à (B.6) de l'annexe B).

On définit la matrice  $\tilde{\Sigma}$  de dimension  $(3n - 2) \times (5n - 2)$  et le vecteur  $\tilde{r}^{an}$  de dimension  $3n - 2$  par

$$\tilde{\Sigma} = -\tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{H} \quad \text{et} \quad \tilde{r}^{an} = \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{k}^{an}, \quad (\text{A.6})$$

alors la relation qui lie les inconnues  $Q_1^i$  et  $\tilde{\tau}^{j,j+1}$  aux inconnues principales s'écrit

$$\tilde{\chi} = \tilde{\Sigma} \tilde{\gamma} + \tilde{r}^{an}. \quad (\text{A.7})$$

**Expression de  $\tilde{N}^i$  et  $\tilde{M}^i$ .**

Les équations de comportement algébriques dans (3.31) et (3.32) s'écrivent

$$N_{11}^i = -\frac{S_{12}^i}{S_{11}^i} N^i - \frac{S_{16}^i}{S_{11}^i} N_6^i + \frac{e^i}{S_{11}^i} \left( \frac{\Delta}{L} - \varepsilon_{11}^{ian} \right) \quad (\text{A.8})$$

$$M_{11}^i = -\frac{S_{12}^i}{S_{11}^i} M^i - \frac{S_{16}^i}{S_{11}^i} M_6^i - \frac{e^{i3}}{12S_{11}^i} \chi_{11}^{ian} \quad (\text{A.9})$$

Par conséquent, si on exprime les efforts  $N_{22}^i, N_{12}^i, M_{22}^i$  et  $M_{12}^i$  en fonction des inconnues principales, on obtient aussi une expression des efforts  $N_{11}^i$  et  $M_{11}^i$  faisant intervenir les inconnues principales. Les relations cherchées sont obtenues en injectant l'équation (A.7) dans les équations d'équilibre (3.18), (3.19), (3.21) et (3.22) pour  $1 \leq i \leq n$  :

$$\frac{N_6^{i'}}{\bar{G}_{LN}} = -(1 - \delta_{i,n}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma} + \tilde{r}^{an})_{n+i} + (1 - \delta_{i,1}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma} + \tilde{r}^{an})_{n-1+i} \tag{A.10}$$

$$\frac{N^{i'}}{\bar{G}_{LN}} = -(1 - \delta_{i,n}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma} + \tilde{r}^{an})_{2n-1+i} + (1 - \delta_{i,1}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma} + \tilde{r}^{an})_{2n-2+i} \tag{A.11}$$

$$\frac{M_6^{i'}}{\bar{G}_{LN}} = e (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma} + \tilde{r}^{an})_i - \frac{e^i}{2} \left[ (1 - \delta_{i,n}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma} + \tilde{r}^{an})_{n+i} + (1 - \delta_{i,1}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma} + \tilde{r}^{an})_{n-1+i} \right] \tag{A.12}$$

$$\frac{M^{i'}}{\bar{G}_{LN}} = \frac{Q^i}{\bar{G}_{LN}} - \frac{e^i}{2} \left[ (1 - \delta_{i,n}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma} + \tilde{r}^{an})_{2n-1+i} + (1 - \delta_{i,1}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma} + \tilde{r}^{an})_{2n-2+i} \right] \tag{A.13}$$

où  $(\tilde{t})_i = i$ -ème composante du vecteur  $\tilde{t}$  et  $\tilde{1}_{(m,m)} = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$  (symbole de Kronecker).

**Expression de  $\nu^{i,i+1}$  et  $w^i$ .**

Pour les efforts d'arrachement, les équations (3.35) s'écrivent sous la forme matricielle adimensionnelle suivante :

$$\tilde{\Omega} \cdot \tilde{w} + \tilde{\Gamma} \cdot \tilde{\nu} = \tilde{c}^{an} \tag{A.14}$$

avec  $\tilde{\Omega}$  et  $\tilde{\Gamma}$  des matrices  $n \times n$  constantes dont les expressions sont définies aux équations (B.7) à (B.12) de l'annexe B pour lesquelles nous avons distingué le cas du multicouche symétrique de celui du multicouche non symétrique (voir remarque 5 du paragraphe 3.2.3, page 79),

$$\tilde{w}^t = \frac{1}{e} \times (w^1, \dots, w^n), \quad \tilde{\nu}^t = \frac{1}{\bar{G}_{LN}} \times (\nu^{1,2}, \dots, \nu^{n,n+1}), \quad e = \sum_{i=1}^n \frac{e^i}{n}, \quad \bar{G}_{LN} = \sum_{i=1}^n \frac{G_{LN}^i}{n}, \quad \bar{E}_N = \sum_{i=1}^n \frac{E_N^i}{n}$$

$$\text{et } \tilde{c}^{an} = -\frac{\bar{E}_N}{\bar{G}_{LN}} \left( \frac{D_{\nu}^{1,2an}}{e}, \dots, \frac{D_{\nu}^{n,n+1an}}{e} \right)^t \tag{A.15}$$

On définit la matrice  $\tilde{E}$  de dimension  $n \times n$  par

$$\tilde{E} = -\tilde{\Gamma}^{-1} \tilde{\Omega} \tag{A.16}$$

alors

$$\tilde{\nu} = \tilde{E} \tilde{w} - \tilde{\Gamma}^{-1} \tilde{c}^{an}. \tag{A.17}$$

Par conséquent, si on exprime  $w^i$  en fonction des inconnues principales, on obtient aussi une expression des efforts  $\nu^{i,i+1}$  faisant intervenir les inconnues principales. La relation cherchée est obtenue en injectant l'équation (A.7) dans l'équation de comportement provenant de la dernière équation du système (3.33) pour  $1 \leq i \leq n$  :

$$w^{i'} = d_{\Phi 2}^{i an} - \varphi_y^i + \frac{6e\bar{G}_{LN}}{5e^i} \left[ S_{Q12}^i (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma} + \tilde{r}^{an})_i + S_{Q22}^i \frac{Q^i}{e\bar{G}_{LN}} \right]$$

$$- \frac{\bar{G}_{LN}}{10} \left\{ S_{Q12}^i \left[ (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma} + \tilde{r}^{an})_{n-1+i} (1 - \delta_{i,1}) + (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma} + \tilde{r}^{an})_{n+i} (1 - \delta_{i,n}) \right] \right.$$

$$\left. + S_{Q22}^i \left[ (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma} + \tilde{r}^{an})_{2n-2+i} (1 - \delta_{i,1}) + (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma} + \tilde{r}^{an})_{2n-1+i} (1 - \delta_{i,n}) \right] \right\} \tag{A.18}$$



**A.1.2 Ecriture du système différentiel.**

Nous allons maintenant exploiter les équations que nous n'avons pas utilisées pour trouver des équations qui ne font intervenir que les inconnues principales.

On commence par utiliser l'équation d'équilibre (3.20) dans laquelle on injecte l'expression (A.17) des efforts d'arrachement en fonction des déplacements normaux

$$\frac{Q^{i'}}{\bar{G}_{LN}} = - \left( \tilde{E}\tilde{w} - \tilde{\Gamma}^{-1} \tilde{c}^{an} \right)_i + (1 - \delta_{i,1}) \left( \tilde{E}\tilde{w} - \tilde{\Gamma}^{-1} \tilde{c}^{an} \right)_{i-1} \tag{A.19}$$

Puis on dérive cette équation et on remplace l'expression des déplacements normaux par celle trouvée en (A.18) et on obtient pour  $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} \frac{Q^{i''}}{\bar{G}_{LN}} &= \frac{1}{e} \sum_{k=1}^n (-E_{ik} + (1 - \delta_{i,1})E_{i-1,k}) \times \\ &\left\{ -\varphi_y^k + \frac{6eS_{Q12}^k \bar{G}_{LN}}{5e^k} (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_k + \frac{6eS_{Q22}^k \bar{G}_{LN}}{5e^k} \frac{Q^k}{e\bar{G}_{LN}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{10} S_{Q12}^k \bar{G}_{LN} \left[ (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{n-1+k} (1 - \delta_{k,1}) + (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{n+k} (1 - \delta_{k,n}) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{10} S_{Q22}^k \bar{G}_{LN} \left[ (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{2n-2+k} (1 - \delta_{k,1}) + (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{2n-1+k} (1 - \delta_{k,n}) \right] \right\} \\ &+ \frac{1}{e} \sum_{k=1}^n (-E_{ik} + (1 - \delta_{i,1})E_{i-1,k}) \times d_{\Phi 2}^{kan} + \left( \tilde{\Gamma}^{-1} \tilde{c}^{an} \right)'_i - (1 - \delta_{i,1}) \left( \tilde{\Gamma}^{-1} \tilde{c}^{an} \right)'_{i-1} \\ &+ t_Q^{ian} \end{aligned} \tag{A.20}$$

où  $t_Q^{ian}$  est un champ en  $y$  connu dépendant des déformations anélastiques généralisées (son expression est définie dans l'équation (B.19) de l'annexe B). A ce stade, on a déjà une famille d'équations ne faisant intervenir que les inconnues principales.

Il reste encore d'autres relations à utiliser pour obtenir des relations supplémentaires sur les inconnues principales. On injecte donc l'équation (A.8) dans les équations différentielles écrites en (3.31) et on obtient pour  $1 \leq j \leq n - 1$

$$\begin{aligned} u^{j,j+1'} &= 2 \left( \varepsilon_{12}^{j+1an} - \varepsilon_{12}^{jan} \right) + \frac{B^{j+1} N^{j+1}}{e^{j+1} \bar{G}_{LN}} + \frac{C^{j+1} N_6^{j+1}}{e^{j+1} \bar{G}_{LN}} + \frac{S_{16}^{j+1}}{S_{11}^{j+1}} \left( \frac{\Delta}{L} - \varepsilon_{11}^{j+1an} \right) \\ &\quad - \left( \frac{B^j N^j}{e^j \bar{G}_{LN}} + \frac{C^j N_6^j}{e^j \bar{G}_{LN}} + \frac{S_{16}^j}{S_{11}^j} \left( \frac{\Delta}{L} - \varepsilon_{11}^{jan} \right) \right) \end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned} v^{j,j+1'} &= \left( \varepsilon_{22}^{j+1an} - \varepsilon_{22}^{jan} \right) + \frac{A^{j+1} N^{j+1}}{e^{j+1} \bar{G}_{LN}} + \frac{B^{j+1} N_6^{j+1}}{e^{j+1} \bar{G}_{LN}} + \frac{S_{12}^{j+1}}{S_{11}^{j+1}} \left( \frac{\Delta}{L} - \varepsilon_{11}^{j+1an} \right) \\ &\quad - \left( \frac{A^j N^j}{e^j \bar{G}_{LN}} + \frac{B^j N_6^j}{e^j \bar{G}_{LN}} + \frac{S_{12}^j}{S_{11}^j} \left( \frac{\Delta}{L} - \varepsilon_{11}^{jan} \right) \right) \end{aligned} \tag{A.22}$$

où

$$A^i = \bar{G}_{LN} \times \left( S_{22}^i - \frac{S_{12}^{i2}}{S_{11}^i} \right), \quad B^i = \bar{G}_{LN} \times \left( S_{26}^i - \frac{S_{16}^i S_{12}^i}{S_{11}^i} \right)$$

$$\text{et } C^i = \overline{G}_{LN} \times \left( S_{66}^i - \frac{S_{16}^i{}^2}{S_{11}^i} \right). \tag{A.23}$$

De la même façon, si on utilise le deuxième système d'équations différentielles du système (3.32) et si on injecte l'équation (A.9), on obtient pour  $1 \leq i \leq n$

$$\varphi_x^{i'} = 2\chi_{12}^{ian} + \frac{12}{e^{i3}} \left( B^i \frac{M^i}{\overline{G}_{LN}} + C^i \frac{M_6^i}{\overline{G}_{LN}} \right) \tag{A.24}$$

$$\varphi_y^{i'} = \chi_{22}^{ian} + \frac{12}{e^{i3}} \left( A^i \frac{M^i}{\overline{G}_{LN}} + B^i \frac{M_6^i}{\overline{G}_{LN}} \right) \tag{A.25}$$

En dérivant les équations (A.21), (A.22), (A.24) et (A.25) et en injectant les équations (A.10) à (A.13) on obtient pour  $1 \leq j \leq n - 1$  :

$$\begin{aligned} u^{j,j+1''} = & \frac{B^{j+1}}{e^{j+1}} \left[ -(1 - \delta_{j,n-1}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{2n+j} + (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{2n-1+j} \right] \\ & - \frac{B^j}{e^j} \left[ (1 - \delta_{j,1}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{2n-2+j} - (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{2n-1+j} \right] \\ & + \frac{C^{j+1}}{e^{j+1}} \left[ -(1 - \delta_{j,n-1}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{n+1+j} + (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{n+j} \right] \\ & - \frac{C^j}{e^j} \left[ (1 - \delta_{j,1}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{n-1+j} - (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{n+j} \right] \\ & + t_u^{j,j+1an} + \left[ 2(\varepsilon_{12}^{j+1an} - \varepsilon_{12}^{jan}) - \frac{S_{16}^{j+1}}{S_{11}^{j+1}} \varepsilon_{11}^{j+1an} + \frac{S_{16}^j}{S_{11}^j} \varepsilon_{11}^{jan} \right]' \end{aligned} \tag{A.26}$$

$$\begin{aligned} v^{j,j+1''} = & \frac{A^{j+1}}{e^{j+1}} \left[ -(1 - \delta_{j,n-1}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{2n+j} + (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{2n-1+j} \right] \\ & - \frac{A^j}{e^j} \left[ (1 - \delta_{j,1}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{2n-2+j} - (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{2n-1+j} \right] \\ & + \frac{B^{j+1}}{e^{j+1}} \left[ -(1 - \delta_{j,n-1}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{n+1+j} + (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{n+j} \right] \\ & - \frac{B^j}{e^j} \left[ (1 - \delta_{j,1}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{n-1+j} - (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{n+j} \right] \\ & + t_v^{j,j+1an} + \left[ \varepsilon_{22}^{j+1an} - \varepsilon_{22}^{jan} - \frac{S_{16}^{j+1}}{S_{11}^{j+1}} \varepsilon_{11}^{j+1an} + \frac{S_{16}^j}{S_{11}^j} \varepsilon_{11}^{jan} \right]' \end{aligned} \tag{A.27}$$

et pour  $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} \varphi_x^{i''} = & \frac{12e}{e^{i3}} B^i \left\{ \frac{Q^i}{e\overline{G}_{LN}} - \frac{e^i}{2e} \left[ (1 - \delta_{i,n}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{2n-1+i} + (1 - \delta_{i,1}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{2n-2+i} \right] \right\} \\ & + \frac{12e}{e^{i3}} C^i \left\{ (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_i - \frac{e^i}{2e} \left[ (1 - \delta_{i,n}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{n+i} + (1 - \delta_{i,1}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{n-1+i} \right] \right\} \\ & + t_{\varphi_x}^{ian} + 2\chi_{12}^{ian'} \end{aligned} \tag{A.28}$$

$$\varphi_y^{i''} = \frac{12e}{e^{i3}} A^i \left\{ \frac{Q^i}{e\overline{G}_{LN}} - \frac{e^i}{2e} \left[ (1 - \delta_{i,n}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{2n-1+i} + (1 - \delta_{i,1}) (\tilde{\Sigma}\tilde{\gamma})_{2n-2+i} \right] \right\} \tag{A.29}$$



$$+\frac{12e}{e^{i3}}B^i \left\{ \left( \tilde{\Sigma}\tilde{\gamma} \right)_i - \frac{e^i}{2e} \left[ (1 - \delta_{i,n}) \left( \tilde{\Sigma}\tilde{\gamma} \right)_{n+i} + (1 - \delta_{i,1}) \left( \tilde{\Sigma}\tilde{\gamma} \right)_{n-1+i} \right] \right\} + t_{\varphi_y}^{i\ an} + \chi_{22}^{i\ an}$$

où  $t_u^{j,j+1\ an}$ ,  $t_v^{j,j+1\ an}$ ,  $t_{\varphi_x}^{i\ an}$  et  $t_{\varphi_y}^{i\ an}$  sont des champs en  $y$  connus et dépendant des déformations anélastiques généralisées (leurs expressions sont définies aux équations respectives (B.15) à (B.18) de l'annexe B).

Les équations (A.26), (A.27), (A.28), (A.29) et (A.20) ne font intervenir que les inconnues principales. Nous allons maintenant essayer de les mettre sous forme matricielle et on obtiendra ainsi le système différentiel cherché. Mais avant cela, nous ferons un travail supplémentaire d'adimensionnement pour l'axe  $y$ . Cela permettra de rendre ces calculs exploitables par un programme informatique. Si on ne prend pas ces précautions, on risque de rencontrer des problèmes de grande différence entre les ordres de grandeur des coefficients des matrices.

On pose pour tout  $s$  élément de  $[0; 1]$  ( $y = bs$ ) et pour  $(i, j) \in [1, n] \times [1, n - 1]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^i(s) = \frac{Q^i(bs)}{eG_{LN}}, \quad \rho^{j+n}(s) = \frac{u^{j,j+1}(bs)}{e}, \quad \rho^{j+2n-1}(s) = \frac{v^{j,j+1}(bs)}{e}, \\ \rho^{i+3n-2}(s) = \varphi_x^i(bs), \quad \rho^{i+4n-2}(s) = \varphi_y^i(bs) \end{array} \right. \tag{A.30}$$

A partir des équations (A.26), (A.27), (A.28), (A.29) et (A.20) on obtient le système différentiel adimensionnel suivant :

$$\boxed{\frac{d^2}{ds^2}\tilde{\rho}(s) = \tilde{M}\tilde{\rho}(s) + \tilde{\psi}^{an}(s) + \frac{d}{ds}\tilde{\eta}^{an}(s)} \tag{A.31}$$

où

- $\tilde{\rho} = (\rho^1, \dots, \rho^{5n-2})^t$ ,
- $\tilde{\psi}^{an}$  et  $\tilde{\eta}^{an}$  sont des vecteurs connus de dimension  $5n - 2$  dont les composantes sont des champs en  $s$  et leurs expressions font intervenir les déformations anélastiques généralisées (leurs expressions sont données aux équations (B.20) et (B.21) de l'annexe B),
- $\tilde{M}$  est une matrice  $(5n - 2) \times (5n - 2)$  constante dont les coefficients sont définis par les relations (B.22) à (B.26) de l'annexe B.

## A.2 Conditions aux limites du système différentiel.

Les inconnues principales du problème simplifié sont les fonctions  $\rho^i$  données par les équations (3.45). Nous devons donc exprimer les conditions aux limites (cf. équations (3.36) à (3.41)) en fonction des inconnues principales du problème. Sachant que les conditions aux limites en  $y = a$  ( $a$  peut valoir 0 ou  $b$  : bords du multicouche) peuvent porter aussi bien sur les déplacements ou des efforts généralisés, on doit traiter plusieurs cas de figure :

- Imposition des déplacements  $u_d^i(a)$  et  $v_d^i(a)$  pour tout  $i \in [1, n]$  (cf. équations (3.36) ou (3.39)).

Cela implique que

$$\rho^{j+n}(a/b) = \frac{u_d^{j+1}(a) - u_d^j(a)}{e} \quad \text{et} \quad \rho^{j+2n-1}(a/b) = \frac{v_d^{j+1}(a) - v_d^j(a)}{e} \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq n - 1$$

- Imposition des déplacements  $U_{d3}^i(a)$  pour tout  $i \in [1, n]$  (cf. équations (3.37) ou (3.40)). Les déplacements  $w^i$  ne font pas partie des inconnues principales, mais leur imposition au bord  $y = a$  donne après utilisation de l'équation (A.19)

$$\rho^{i'}(a/b) = \frac{b}{e} \left[ - \left( \tilde{E} \tilde{w}^d(a) - \tilde{\Gamma}^{-1} \tilde{c}^{an}(a) \right)_i + (1 - \delta_{i,1}) \left( \tilde{E} \tilde{w}^d(a) - \tilde{\Gamma}^{-1} \tilde{c}^{an}(a) \right)_{i-1} \right]$$

où  $1 \leq i \leq n$  et  $\tilde{w}^d(a) = \frac{1}{e} (U_{d3}^1(a), U_{d3}^2(a), \dots, U_{d3}^n(a))^t$ .

- Imposition des rotations  $\Phi_{d1}^i(a)$  et  $\Phi_{d2}^i(a)$  pour tout  $i \in [1, n]$  (cf. équations (3.38) ou (3.41)). Cela implique que

$$\rho^{i+3n-2}(a/b) = \Phi_{d1}^i(a) \quad \text{et} \quad \rho^{i+4n-2}(a/b) = \Phi_{d2}^i(a) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n$$

- Imposition des efforts  $T_{d1}^i(a)$  et  $T_{d2}^i(a)$  pour tout  $i \in [1, n]$  (cf. équations (3.36) ou (3.39)). Après utilisation des équations (A.21) et (A.22) issues du comportement membranaire, on obtient pour  $1 \leq j \leq n-1$

$$\begin{aligned} \rho^{j+n'}(a/b) &= 2 \frac{b}{e} \left( \varepsilon_{12}^{j+1an}(a) - \varepsilon_{12}^{jan}(a) \right) \\ &+ \frac{b}{e} \left\{ \frac{B^{j+1} T_{d2}^{j+1}(a)}{e^{j+1} \bar{G}_{LN}} + \frac{C^{j+1} T_{d1}^{j+1}(a)}{e^{j+1} \bar{G}_{LN}} + \frac{S_{16}^{j+1}}{S_{11}^{j+1}} \left( \frac{\Delta}{L} - \varepsilon_{11}^{j+1an}(a) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{B^j T_{d2}^j(a)}{e^j \bar{G}_{LN}} + \frac{C^j T_{d1}^j(a)}{e^j \bar{G}_{LN}} + \frac{S_{16}^j}{S_{11}^j} \left( \frac{\Delta}{L} - \varepsilon_{11}^{jan}(a) \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \rho^{j+2n-1'}(a/b) &= \frac{b}{e} \left( \varepsilon_{22}^{j+1an}(a) - \varepsilon_{22}^{jan}(a) \right) \\ &+ \frac{b}{e} \left\{ \frac{A^{j+1} T_{d2}^{j+1}(a)}{e^{j+1} \bar{G}_{LN}} + \frac{B^{j+1} T_{d1}^{j+1}(a)}{e^{j+1} \bar{G}_{LN}} + \frac{S_{12}^{j+1}}{S_{11}^{j+1}} \left( \frac{\Delta}{L} - \varepsilon_{11}^{j+1an}(a) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{A^j T_{d2}^j(a)}{e^j \bar{G}_{LN}} + \frac{B^j T_{d1}^j(a)}{e^j \bar{G}_{LN}} + \frac{S_{12}^j}{S_{11}^j} \left( \frac{\Delta}{L} - \varepsilon_{11}^{jan}(a) \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

- Imposition des efforts  $Q_{d3}^i(a)$  pour tout  $i \in [1, n]$  (cf. équations (3.37) ou (3.40)). On écrit donc pour  $1 \leq i \leq n$

$$\rho^i(a/b) = \frac{Q_{d3}^i(a)}{e \bar{G}_{LN}}$$

- Imposition des moments  $M_{d1}^i(a)$  et  $M_{d2}^i(a)$  pour tout  $i \in [1, n]$  (cf. équations (3.38) ou (3.41)). Après utilisation des équations (A.24) et (A.25) issues du comportement en flexion et torsion, on obtient pour  $1 \leq i \leq n$

$$\rho^{i+3n-2'}(a/b) = b \left[ 2 \chi_{12}^{ian}(a) + \frac{12}{e^{i3}} \left( B^i \frac{M_{d2}^i(a)}{\bar{G}_{LN}} + C^i \frac{M_{d1}^i(a)}{\bar{G}_{LN}} \right) \right]$$

et

$$\rho^{i+4n-2'}(a/b) = b \left[ \chi_{22}^{ian}(a) + \frac{12}{e^{i3}} \left( A^i \frac{M_{d2}^i(a)}{\bar{G}_{LN}} + B^i \frac{M_{d1}^i(a)}{\bar{G}_{LN}} \right) \right]$$



où la notation  $t' \equiv \frac{dt}{ds}$ .

Dorénavant, pour simplifier les notations, nous désignons par  $\kappa_i^a$  la valeur imposée à  $\rho^i$  ou à sa dérivée en  $s = a$ , et ce pour  $1 \leq i \leq 5n - 2$ .

Nous avons  $5n - 2 + 5n - 2 = 2 \times (5n - 2)$  conditions aux limites pour un système différentiel du second ordre à  $5n - 2$  inconnues. Le problème est donc bien posé. Pour le résoudre, nous allons faire appel à une formulation variationnelle.

Avant cela, nous allons écrire les conditions aux limites du système différentiel d'une façon plus synthétique pour que l'écriture de la formulation variationnelle soit plus simple. Pour ce faire, on définit

- $\mathbb{E}$  l'ensemble d'entiers  $\{1, 2, \dots, 5n - 2\}$
- $\mathbb{S}^0$  un sous-ensemble de  $\mathbb{E}$  dont les éléments sont les indices des composantes de  $\tilde{\rho}$  sur lesquelles on impose une condition sur leur valeur en  $s = 0$
- $\mathbb{D}^0$  un sous-ensemble de  $\mathbb{E}$  dont les éléments sont les indices des composantes de  $\tilde{\rho}$  sur lesquelles on impose une condition sur la valeur de leur dérivée en  $s = 0$
- $\mathbb{S}^1$  un sous-ensemble de  $\mathbb{E}$  dont les éléments sont les indices des composantes de  $\tilde{\rho}$  sur lesquelles on impose une condition sur leur valeur en  $s = 1$
- $\mathbb{D}^1$  un sous-ensemble de  $\mathbb{E}$  dont les éléments sont les indices des composantes de  $\tilde{\rho}$  sur lesquelles on impose une condition sur la valeur de leur dérivée en  $s = 1$ .

Les propriétés suivantes sont évidentes :

$$\mathbb{S}^0 \cup \mathbb{D}^0 = \mathbb{E}, \quad \mathbb{S}^0 \cap \mathbb{D}^0 = \emptyset, \quad \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{D}^1 = \mathbb{E} \quad \text{et} \quad \mathbb{S}^1 \cap \mathbb{D}^1 = \emptyset.$$

Avec ces définitions, les conditions aux limites du système différentiel (A.31) peuvent s'écrire comme suit :

- en  $s = 0$

$$\forall i \in \mathbb{S}^0 : \rho^i = \kappa_0^i \tag{A.32}$$

$$\forall j \in \mathbb{D}^0 : \rho^{j'} = \kappa_0^j \tag{A.33}$$

- en  $s = 1$

$$\forall i \in \mathbb{S}^1 : \rho^i = \kappa_1^i \tag{A.34}$$

$$\forall j \in \mathbb{D}^1 : \rho^{j'} = \kappa_1^j \tag{A.35}$$

### A.3 Résolution du système différentiel par une formulation variationnelle.

Le but de cette partie est de résoudre le système différentiel écrit en (A.31) moyennant une formulation variationnelle [Washizu, 1975]. Dans toute cette partie, on dira qu'un champ  $\tilde{\xi}$  de  $\mathbb{R}^{5n-2}$  est compatible avec  $\kappa$  si  $\tilde{\xi}$  vérifie les conditions aux limites écrites dans les équations (A.32) à (A.35).

#### A.3.1 Ecriture d'une première formulation variationnelle.

Soit  $\tilde{\rho}^{sol}$  la solution du système différentiel. Alors

$$\frac{d^2}{ds^2} \tilde{\rho}^{sol}(s) = \tilde{M} \tilde{\rho}^{sol}(s) + \tilde{\psi}^{an}(s) + \frac{d}{ds} \tilde{\eta}^{an}(s) \quad \text{et} \quad \tilde{\rho}^{sol} \quad \text{compatible avec} \quad \kappa.$$

Soit  $\tilde{\phi}$  un champ quelconque de  $\mathbb{R}^{5n-2}$  de classe  $C^1$  par morceaux sur  $[0; 1]$ . En multipliant scalairement par  $\tilde{\phi}$  l'équation ci-dessus, en intégrant sur  $[0; 1]$  et en faisant une intégration par parties on obtient l'équation

$$\int_0^1 [\tilde{\phi}' \cdot \tilde{\rho}^{sol'} + \tilde{\phi} \cdot (\tilde{M} \tilde{\rho}^{sol})] ds - [\tilde{\phi} \cdot \tilde{\rho}^{sol'}]_0^1 + \int_0^1 [\tilde{\phi} \cdot \tilde{\psi}^{an} - \tilde{\phi}' \cdot \tilde{\eta}^{an}] ds + [\tilde{\phi} \cdot \tilde{\eta}^{an}]_0^1 = 0 \quad (A.36)$$

On choisit dorénavant  $\tilde{\phi}$  compatible avec  $\mathbf{0}$  (conditions aux limites nulles). Les fonctions tests constituent ainsi un espace vectoriel  $\mathbf{E}^*$ .

On désigne par  $(\tilde{\zeta}^i)_{1 \leq i \leq 5n-2}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^{5n-2}$ . Ce qui nous permet d'écrire

$$\tilde{\phi}(s) = \sum_{i=1}^{5n-2} \phi_i(s) \tilde{\zeta}^i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \phi_i(0) = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{S}^0 \\ \phi_j'(0) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{D}^0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \phi_i(1) = 0 \text{ pour } i \in \mathbb{S}^1 \\ \phi_j'(1) = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{D}^1 \end{cases}$$

L'équation (A.36) s'écrit donc

$$\int_0^1 [\tilde{\phi}' \cdot \tilde{\rho}^{sol'} + \tilde{\phi} \cdot (\tilde{M} \tilde{\rho}^{sol})] ds = \sum_{j \in \mathbb{D}^1} \phi_j(1) (\kappa_j^1 - \eta_j^{an}(1)) - \sum_{j \in \mathbb{D}^0} \phi_j(0) (\kappa_j^0 - \eta_j^{an}(0)) - \int_0^1 [\tilde{\phi} \cdot \tilde{\psi}^{an} - \tilde{\phi}' \cdot \tilde{\eta}^{an}] ds \quad (A.37)$$

On adopte les notations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\tilde{\rho}, \tilde{\phi}) = \int_0^1 [\tilde{\phi}' \cdot \tilde{\rho}' + \tilde{\phi} \cdot (\tilde{M} \tilde{\rho})] ds \quad \text{forme bilinéaire} \\ l(\tilde{\phi}) = \sum_{j \in \mathbb{D}^1} \phi_j(1) (\kappa_j^1 - \eta_j^{an}(1)) - \sum_{j \in \mathbb{D}^0} \phi_j(0) (\kappa_j^0 - \eta_j^{an}(0)) \\ \qquad \qquad \qquad - \int_0^1 [\tilde{\phi} \cdot \tilde{\psi}^{an} - \tilde{\phi}' \cdot \tilde{\eta}^{an}] ds \quad \text{forme linéaire} \end{array} \right. \quad (A.38)$$

Avec ces notations, l'équation (A.37) donne la formulation variationnelle suivante :

$$\boxed{\tilde{\rho}^{sol} \text{ solution du problème} \iff \begin{cases} \tilde{\rho}^{sol} \text{ compatible avec } \kappa \\ \forall \tilde{\phi} \in \mathbf{E}^* \text{ compatible avec } \mathbf{0} : a(\tilde{\rho}^{sol}, \tilde{\phi}) = l(\tilde{\phi}) \end{cases}} \quad (A.39)$$

### A.3.2 Approximation de la solution dans un espace discret et nouvelle formulation variationnelle.

On va approcher notre problème en discrétisant l'intervalle  $[0; 1]$  en  $N + 1$  points  $(a_j)_{0 \leq j \leq N}$  de  $[0; 1]$  tels que

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_j < \dots < a_N = 1.$$



**Définitions de l'espace d'approximation  $U^*$ .**

On considère la famille  $\mathcal{B} = (\tilde{\varphi}^{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 5n-2 \\ 0 \leq j \leq N}}$  de "vecteurs chapeau" définis par

$$\tilde{\varphi}^{i,j}(s) = \varphi^j(s)\tilde{\zeta}^i$$

avec

$$\varphi^j(s) = \begin{cases} 1 + \frac{s - a_j}{a_j - a_{j-1}} & \text{si } s \in [a_{j-1}, a_j] \\ 1 - \frac{s - a_j}{a_{j+1} - a_j} & \text{si } s \in [a_j, a_{j+1}] \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Cette famille de vecteurs est une base d'un espace vectoriel qu'on note  $U$ .

Le sous-espace vectoriel  $U^*$  des champs de  $U$  compatibles avec  $\mathbf{0}$  admet pour base  $\mathcal{B}^* = (\tilde{\psi}^{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 5n-2 \\ 1 \leq j \leq N-1}}$  dont les éléments sont définis par

$$\tilde{\psi}^{i,j} = \begin{cases} \tilde{\varphi}^{i,N-1} + \tilde{\varphi}^{i,N} & \text{si } i \in \mathbb{D}^1 \text{ et } j = N-1 \\ \tilde{\varphi}^{i,0} + \tilde{\varphi}^{i,1} & \text{si } i \in \mathbb{D}^0 \text{ et } j = 1 \\ \tilde{\varphi}^{i,j} & \text{si non} \end{cases}$$

**Changement d'inconnue du problème.**

Le but est de chercher une solution à une formulation variationnelle où les champs test et la solution se trouvent dans le même espace vectoriel. On écrit

$$\tilde{\rho}^{sol} = \sum_{i \in S^0} \kappa_i^0 \tilde{\varphi}^{i,0} + \sum_{i \in S^1} \kappa_i^1 \tilde{\varphi}^{i,N} - (a_1 - a_0) \sum_{i \in \mathbb{D}^0} \kappa_i^0 \tilde{\varphi}^{i,0} + (a_N - a_{N-1}) \sum_{i \in \mathbb{D}^1} \kappa_i^1 \tilde{\varphi}^{i,N} + \tilde{\rho}^{*sol} \quad (A.40)$$

On démontre sans difficulté que  $\tilde{\rho}^{*sol} \in E^*$ . On note

$$L(\tilde{\phi}) = l(\tilde{\phi}) - a \left( \sum_{i \in S^0} \kappa_i^0 \tilde{\varphi}^{i,0} + \sum_{i \in S^1} \kappa_i^1 \tilde{\varphi}^{i,N} - (a_1 - a_0) \sum_{i \in \mathbb{D}^0} \kappa_i^0 \tilde{\varphi}^{i,0}; \tilde{\phi} \right) - a \left( (a_N - a_{N-1}) \sum_{i \in \mathbb{D}^1} \kappa_i^1 \tilde{\varphi}^{i,N}; \tilde{\phi} \right) \quad (A.41)$$

La nouvelle formulation variationnelle s'écrit donc

$$\boxed{\begin{matrix} \tilde{\rho}^{*sol} \in E^* \\ \forall \tilde{\phi} \in E^* : a(\tilde{\rho}^{*sol}, \tilde{\phi}) = L(\tilde{\phi}) \end{matrix}} \quad (A.42)$$

**Approximation de  $\tilde{\rho}^{*sol}$  dans  $U^*$ .**

On souhaite approcher  $\tilde{\rho}^{*sol}$  par

$$\bar{\rho}^{*sol} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 5n-2 \\ 1 \leq j \leq N-1}} \lambda_{i,j} \tilde{\psi}^{i,j}$$

élément de  $U^*$ . Pour ce faire, dans la formulation variationnelle (A.42), on se restreint à  $U^*$ . Le problème se réduit à trouver  $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 5n-2 \\ 0 \leq j \leq N}}$  vérifiant :

$$\forall p \in \{1, \dots, 5n-2\} \quad \text{et} \quad \forall q \in \{1, \dots, N\} \quad : \quad \sum_{\substack{1 \leq i \leq 5n-2 \\ 1 \leq j \leq N-1}} \lambda_{i,j} a(\tilde{\psi}^{i,j}, \tilde{\psi}^{p,q}) = L(\tilde{\psi}^{p,q})$$

On arrive ainsi au système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{5n-2} [\lambda_{i,1} a(\tilde{\psi}^{i,1}, \tilde{\psi}^{p,1}) + \lambda_{i,2} a(\tilde{\psi}^{i,2}, \tilde{\psi}^{p,1})] &= L(\tilde{\psi}^{p,1}) \quad \forall p = 1 \dots 5n-2 \\ \sum_{i=1}^{5n-2} [\lambda_{i,q-1} a(\tilde{\psi}^{i,q-1}, \tilde{\psi}^{p,q}) + \lambda_{i,q} a(\tilde{\psi}^{i,q}, \tilde{\psi}^{p,q}) + \lambda_{i,q+1} a(\tilde{\psi}^{i,q+1}, \tilde{\psi}^{p,q})] &= L(\tilde{\psi}^{p,q}) \\ &\forall p = 1 \dots 5n-2, \quad \forall q = 2 \dots N-2 \\ \sum_{i=1}^{5n-2} [\lambda_{i,N-2} a(\tilde{\psi}^{i,N-2}, \tilde{\psi}^{p,N-1}) + \lambda_{i,N-1} a(\tilde{\psi}^{i,N-1}, \tilde{\psi}^{p,N-1})] &= L(\tilde{\psi}^{p,N-1}) \\ &\forall p = 1 \dots 5n-2 \end{aligned} \tag{A.43}$$

On est ainsi amené à résoudre un système linéaire à  $(5n-2) \times (N-1)$  équations et  $(5n-2) \times (N-1)$  inconnues. Les coefficients et les seconds membres qui y interviennent sont calculés au paragraphe B.2 de l'annexe B. Le système d'équations peut s'écrire sous la forme synthétique :

$$\tilde{R}\tilde{\pi} = \tilde{\mu} \tag{A.44}$$

où

- $\tilde{R}$  est la matrice de rigidité de dimension  $((5n-2) \times (N-1)) \times ((5n-2) \times (N-1))$  dont les éléments sont définis par

$$R_{p+(q-1) \times (5n-2), i+(j-1) \times (5n-2)} = a(\tilde{\psi}^{i,j}, \tilde{\psi}^{p,q}) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq 5n-2 \\ 1 \leq p \leq 5n-2 \\ 1 \leq j \leq N-1 \\ 1 \leq q \leq N-1 \end{cases} \tag{A.45}$$

et sont calculés au paragraphe B.2.1 moyennant les équations (B.27) à (B.35)

- $\tilde{\pi}$  est un vecteur inconnu à  $(5n-2) \times (N-1)$  composantes définies par

$$\pi_{i+(j-1) \times (5n-2)} = \lambda_{i,j} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq 5n-2 \\ 1 \leq j \leq N-1 \end{cases} \tag{A.46}$$

- $\tilde{\mu}$  est un vecteur connu (c'est le second membre du système) à  $(5n-2) \times (N-1)$  composantes définies par

$$\mu_{i+(j-1) \times (5n-2)} = L(\tilde{\psi}^{i,j}) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq 5n-2 \\ 1 \leq j \leq N-1 \end{cases} \tag{A.47}$$

et calculées au paragraphe B.2.2 moyennant les équations (B.36) à (B.50).

A ce stade, la formulation variationnelle est entièrement écrite et la résolution du système différentiel peut maintenant être effectuée par la programmation de la formulation variationnelle et par la résolution du système d'équations linéaires (A.44).





## Annexe B

# Détail des calculs pour la résolution du problème de traction.

Dans cette annexe, nous donnons l'expression des matrices et des vecteurs nécessaires pour la résolution du problème de traction du multicouche de l'annexe A. Nous détaillons aussi les calculs des coefficients de la matrice de rigidité et du second membre de la formulation variationnelle A.43. Ceci est donc une annexe de l'annexe A et les mêmes notations sont gardées.

### B.1 Expression des matrices et des vecteurs connus du système différentiel.

Rappelons nous que nous avons exprimé toutes les inconnues du problème en fonction d'un nombre réduit d'inconnues appelées inconnues principales. Les inconnues principales du problème sont les composantes du vecteur :

$$\tilde{\gamma}^t = \left( \frac{Q^1}{e \times \bar{G}_{LN}}, \dots, \frac{Q^1}{e \times \bar{G}_{LN}}, \frac{u^{1,2}}{e}, \dots, \frac{u^{n-1,n}}{e}, \frac{v^{1,2}}{e}, \dots, \frac{v^{n-1,n}}{e}, \varphi_x^1, \dots, \varphi_x^n, \varphi_y^1, \dots, \varphi_y^n \right).$$

Pour exprimer toutes les inconnues en fonction des inconnues principales nous avons introduit des matrices et des vecteurs dont l'expression n'a pas été donnée et que nous donnerons ici.

Commençons par les matrices définies dans l'équation (A.2) pour exprimer  $Q_1^i$  et  $\tilde{\tau}^{j,j+1}$  en fonction des inconnues principales :

$\tilde{\Lambda}$  est une matrice de dimension  $(3n-2) \times (3n-2)$  définie par

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{A}_{11}^t & \tilde{A}_{12}^t \\ \tilde{A}_{11} & \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{D}_{12} & \tilde{D}_{22} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

$\tilde{H}$  matrice de dimension  $(3n-2) \times (5n-2)$  définie par

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_2 & \tilde{0}_{(n,n-1)} & \tilde{0}_{(n,n-1)} & -\tilde{1}_{(n,n)} & \tilde{0}_{(n,n)} \\ \tilde{A}_{12} & -\tilde{1}_{(n-1,n-1)} & \tilde{0}_{(n-1,n-1)} & \tilde{B} & \tilde{0}_{(n-1,n)} \\ \tilde{A}_{22} & \tilde{0}_{(n-1,n-1)} & -\tilde{1}_{(n-1,n-1)} & \tilde{0}_{(n-1,n)} & \tilde{B} \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$



où  $\tilde{A}_{kl}$  matrice de dimension  $(n-1) \times n$  définie pour  $(k, l) \in \{1, 2\}^2$  par

$$\tilde{A}_{kl} = -\frac{\bar{G}_{LN}}{10} \begin{pmatrix} S_{Qkl}^1 & S_{Qkl}^2 & 0 & & 0 \\ 0 & S_{Qkl}^2 & S_{Qkl}^3 & & 0 \\ & & \cdot & \cdot & \\ 0 & & & S_{Qkl}^{n-1} & S_{Qkl}^n \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

$\tilde{1}_{(m,m)} = (\delta_{i,j})_{1 \leq i, j \leq m}$  (symbole de Kronecker),  $\tilde{0}_{(i,j)}$  matrice nulle à  $i$  lignes et  $j$  colonnes,  $\tilde{B}$  matrice de dimension  $(n-1) \times n$  définie par

$$\tilde{B} = \frac{1}{2e} \begin{pmatrix} e^1 & e^2 & 0 & & 0 \\ 0 & e^2 & e^3 & & 0 \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & e^{n-1} & e^n \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

$\tilde{C}_k$  matrice de dimension  $(n-1) \times n$  définie pour  $k \in 1, 2$  par

$$\tilde{C}_k = \frac{6e\bar{G}_{LN}}{5} \begin{pmatrix} \frac{S_{Q1k}^1}{e^1} & 0 & & 0 \\ 0 & \frac{S_{Q1k}^2}{e^2} & & 0 \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & 0 & & \frac{S_{Q1k}^n}{e^n} \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

et  $\tilde{D}_{jk}$  matrice de dimension  $(n-1) \times (n-1)$  définie pour  $(j, k) \in \{1, 2\}^2$  par

$$\tilde{D}_{jk} = \begin{cases} \frac{\bar{G}_{LN}}{30e} (4(e^1 S_{Qjk}^1 + e^2 S_{Qjk}^2)) & \text{si } n = 2 \\ \frac{\bar{G}_{LN}}{30e} (4(e^p S_{Qjk}^p + e^{p+1} S_{Qjk}^{p+1})\delta_{p,q} - e^p S_{Qjk}^p \delta_{p,q+1} - e^q S_{Qjk}^q \delta_{p+1,q}) & \text{si } n > 2 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Passons maintenant aux matrices introduites dans l'équation (A.14) pour exprimer les efforts d'arrachement normalisés en fonction des déplacements moyens normaux normalisés. Rappelons nous que nous devons distinguer deux cas, le cas d'un multicouche symétrique et le cas d'un multicouche non symétrique (voir remarque 5 du paragraphe 3.2.3, page 79).

$\tilde{\Omega}$  est une matrice  $n \times n$  ayant pour expression

– pour le problème du multicouche symétrique

$$\text{si } n = 2 \quad \tilde{\Omega} = \frac{\bar{E}_N}{\bar{G}_{LN}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et} \quad (\text{B.7})$$

$$\text{si } n > 2 \quad \tilde{\Omega} = \frac{\bar{E}_N}{\bar{G}_{LN}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

- pour le problème du multicouche non symétrique

$$\text{si } n = 2 \quad \tilde{\Omega} = \frac{\bar{E}_N}{\bar{G}_{LN}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et} \quad (\text{B.9})$$

$$\text{si } n > 2 \quad \tilde{\Omega} = \frac{\bar{E}_N}{\bar{G}_{LN}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$\tilde{\Gamma}$  est une matrice  $n \times n$  ayant pour expression  
 - pour le problème du multicouche symétrique

$$\text{si } n = 2 \quad \tilde{\Gamma} = \frac{\bar{E}_N}{70 * e} \begin{pmatrix} 26(\frac{e^1}{E_N^1} + \frac{e^2}{E_N^2}) & 9\frac{e^2}{E_N^2} \\ 18\frac{e^2}{E_N^2} & 52\frac{e^2}{E_N^2} \end{pmatrix} \text{ et si } n > 2 \quad (\text{B.11})$$

$$\tilde{\Gamma} = \frac{\bar{E}_N}{70 * e} \begin{pmatrix} 26(\frac{e^1}{E_N^1} + \frac{e^2}{E_N^2}) & 9\frac{e^2}{E_N^2} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 9\frac{e^2}{E_N^2} & 26(\frac{e^2}{E_N^2} + \frac{e^3}{E_N^3}) & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 26(\frac{e^{n-1}}{E_N^{n-1}} + \frac{e^n}{E_N^n}) & 9\frac{e^n}{E_N^n} & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 18\frac{e^n}{E_N^n} & 52\frac{e^n}{E_N^n} & \cdot \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

- pour le problème du multicouche non symétrique

$$\text{si } n = 2 \quad \tilde{\Gamma} = \frac{\bar{E}_N}{70 * e} \begin{pmatrix} 26(\frac{e^1}{E_N^1} + \frac{e^2}{E_N^2}) & 9\frac{e^2}{E_N^2} \\ 0 & 52\frac{e^2}{E_N^2} \end{pmatrix} \text{ et si } n > 2 \quad (\text{B.13})$$



$$\tilde{\tilde{\Gamma}} = \frac{\bar{E}_N}{70 * e} \begin{pmatrix} 26\left(\frac{e^1}{E_N^1} + \frac{e^2}{E_N^2}\right) & 9\frac{e^2}{E_N^2} & \dots & \dots & 0 \\ 9\frac{e^2}{E_N^2} & 26\left(\frac{e^2}{E_N^2} + \frac{e^3}{E_N^3}\right) & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 26\left(\frac{e^{n-1}}{E_N^{n-1}} + \frac{e^n}{E_N^n}\right) & 9\frac{e^n}{E_N^n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 52\frac{e^n}{E_N^n} \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

Le dernier coefficient de la matrice  $\tilde{\tilde{\Gamma}}$  a été choisi arbitrairement. Nous avons pu faire ceci puisque l'équation que nous devons vérifier est (voir remarque 5 du paragraphe 3.2.3, page 79) :

$$\nu^{n,n+1} = 0,$$

qui est équivalente à l'équation que nous avons choisi

$$\frac{\bar{E}_N}{70 * e} \times 52 \frac{e^n}{E_N^n} \nu^{n,n+1} = 0.$$

A part ces matrices, nous avons défini aux équations (A.20) et (A.26) à (A.29) des vecteurs dépendant des déformations anélastiques généralisées. On définit pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n-1$  :

$$\bullet \quad t_u^{j,j+1 an} = \frac{B^{j+1}}{e^{j+1}} \left[ -(1 - \delta_{j,n-1}) (\tilde{r}^{an})_{2n+j} + (\tilde{r}^{an})_{2n-1+j} \right] \quad (\text{B.15})$$

$$\bullet \quad t_v^{j,j+1 an} = \frac{A^{j+1}}{e^{j+1}} \left[ -(1 - \delta_{j,n-1}) (\tilde{r}^{an})_{2n+j} + (\tilde{r}^{an})_{2n-1+j} \right] \quad (\text{B.16})$$

$$- \frac{B^j}{e^j} \left[ (1 - \delta_{j,1}) (\tilde{r}^{an})_{2n-2+j} - (\tilde{r}^{an})_{2n-1+j} \right]$$

$$+ \frac{C^{j+1}}{e^{j+1}} \left[ -(1 - \delta_{j,n-1}) (\tilde{r}^{an})_{n+1+j} + (\tilde{r}^{an})_{n+j} \right]$$

$$- \frac{C^j}{e^j} \left[ (1 - \delta_{j,1}) (\tilde{r}^{an})_{n-1+j} - (\tilde{r}^{an})_{n+j} \right]$$

$$\bullet \quad t_{\varphi_x}^{i an} = \frac{12e}{e^{i3}} B^i \left\{ -\frac{e^i}{2e} \left[ (1 - \delta_{i,n}) (\tilde{r}^{an})_{2n-1+i} + (1 - \delta_{i,1}) (\tilde{r}^{an})_{2n-2+i} \right] \right\} \quad (\text{B.17})$$

$$+ \frac{12e}{e^{i3}} C^i \left\{ (\tilde{r}^{an})_i - \frac{e^i}{2e} \left[ (1 - \delta_{i,n}) (\tilde{r}^{an})_{n+i} + (1 - \delta_{i,1}) (\tilde{r}^{an})_{n-1+i} \right] \right\}$$

$$\bullet \quad t_{\varphi_y}^{i an} = \frac{12e}{e^{i3}} A^i \left\{ -\frac{e^i}{2e} \left[ (1 - \delta_{i,n}) (\tilde{r}^{an})_{2n-1+i} + (1 - \delta_{i,1}) (\tilde{r}^{an})_{2n-2+i} \right] \right\} \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{12e}{e^{i^3}} B^i \left\{ (\tilde{r}^{an})_i - \frac{e^i}{2e} [(1 - \delta_{i,n}) (\tilde{r}^{an})_{n+i} + (1 - \delta_{i,1}) (\tilde{r}^{an})_{n-1+i}] \right\} \\
 \bullet \quad t_Q^{ian} = & \frac{1}{e} \sum_{k=1}^n (-E_{ik} + (1 - \delta_{i,1}) E_{i-1,k}) \times \left\{ \frac{6e S_{Q12}^k \bar{G}_{LN}}{5e^k} (\tilde{r}^{an})_k \right. \\
 & - \frac{1}{10} S_{Q12}^k \bar{G}_{LN} [(\tilde{r}^{an})_{n-1+k} (1 - \delta_{k,1}) + (\tilde{r}^{an})_{n+k} (1 - \delta_{k,n})] \\
 & \left. - \frac{1}{10} S_{Q22}^k \bar{G}_{LN} [(\tilde{r}^{an})_{2n-2+k} (1 - \delta_{k,1}) + (\tilde{r}^{an})_{2n-1+k} (1 - \delta_{k,n})] \right\}
 \end{aligned} \tag{B.19}$$

où  $(\tilde{t})_i = i$ -ème composante du vecteur  $\tilde{t}$ .

Nous avons aussi défini au système différentiel (A.31) deux vecteurs connus  $\tilde{\psi}^{an}$  et  $\tilde{\eta}^{an}$  de dimension  $5n - 2$ . Les expressions de leurs composantes pour tout  $s$  élément de  $[0; 1]$  ( $y = bs$ ) et pour  $(i, j) \in [1, n] \times [1, n - 1]$  sont

$$\left\{ \begin{aligned}
 \psi^{ian}(s) &= \frac{b^2}{e^2} \sum_{k=1}^n (-E_{ik} + (1 - \delta_{i,1}) E_{i-1,k}) \times d_{\phi_2}^{kan}(bs) + \frac{b^2}{e} t_Q^{ian}(bs), \\
 \psi^{j+n an}(s) &= \frac{b^2}{e} t_u^{j,j+1 an}(bs) \quad , \quad \psi^{j+2n-1 an}(s) = \frac{b^2}{e} t_v^{j,j+1 an}(bs) \quad , \\
 \psi^{i+3n-2 an}(s) &= b^2 t_{\phi_x}^{ian}(bs) \quad , \quad \psi^{i+4n-2 an}(s) = b^2 t_{\phi_y}^{ian}(bs)
 \end{aligned} \right. \tag{B.20}$$

et

$$\left\{ \begin{aligned}
 \eta^{ian}(s) &= \frac{b}{e} \left[ \left( \tilde{\Gamma}^{-1} \tilde{c}^{an}(bs) \right)_i - (1 - \delta_{i,1}) \left( \tilde{\Gamma}^{-1} \tilde{c}^{an}(bs) \right)_{i-1} \right] \\
 \eta^{j+n an}(s) &= \frac{b}{e} \left[ 2(\varepsilon_{12}^{i+1 an}(bs) - \varepsilon_{12}^{i an}(bs)) - \frac{S_{16}^{i+1}}{S_{11}^{i+1}} \varepsilon_{11}^{i+1 an}(bs) + \frac{S_{16}^i}{S_{11}^i} \varepsilon_{11}^{i an}(bs) \right] \\
 \eta^{j+2n-1 an}(s) &= \frac{b}{e} \left[ \varepsilon_{22}^{i+1 an}(bs) - \varepsilon_{22}^{i an}(bs) - \frac{S_{12}^{i+1}}{S_{11}^{i+1}} \varepsilon_{11}^{i+1 an}(bs) + \frac{S_{12}^i}{S_{11}^i} \varepsilon_{11}^{i an}(bs) \right] \\
 \eta^{i+3n-2 an}(s) &= 2b [\chi_{12}^{ian}(bs)] \quad , \quad \eta^{i+4n-2 an}(s) = b [\chi_{22}^{ian}(bs)]
 \end{aligned} \right. \tag{B.21}$$



Enfin, les coefficients de la matrice  $\tilde{M}$  constante de dimension  $(5n - 2) \times (5n - 2)$  du système différentiel (A.31) s'écrivent :

- pour  $(i, j) \in [1; n] \times [1; 5n - 2]$

$$\begin{aligned}
 M_{ij} = & \frac{6}{5ee^j} b^2 S_{Q22}^j \bar{G}_{LN} (-E_{i,j} + (1 - \delta_{i,1})E_{i-1,j}) \delta_{j,[1,n]} \\
 & + \frac{b^2}{e} \sum_{k=1}^n \frac{6}{5e^k} S_{Q12}^k \bar{G}_{LN} (-E_{i,k} + (1 - \delta_{i,1})E_{i-1,k}) \Sigma_{k,j} \\
 & + \frac{b^2}{e^2} (E_{i,j-4n+2} - (1 - \delta_{i,1})E_{i-1,j-4n+2}) \delta_{j,[4n-1,5n-2]} \\
 & + \frac{b^2}{10e^2} \sum_{k=1}^n (E_{i,k} - (1 - \delta_{i,1})E_{i-1,k}) \times \\
 & \quad \left\{ S_{Q12}^k \bar{G}_{LN} ((1 - \delta_{k,1})\Sigma_{n-1+k,j} + (1 - \delta_{k,n})\Sigma_{n+k,j}) \right. \\
 & \quad \left. + S_{Q22}^k \bar{G}_{LN} ((1 - \delta_{k,1})\Sigma_{2n-2+k,j} + (1 - \delta_{k,n})\Sigma_{2n-1+k,j}) \right\}
 \end{aligned} \tag{B.22}$$

- pour  $(i, j) \in [1; n - 1] \times [1; 5n - 2]$

$$\begin{aligned}
 M_{i+n,j} = & \frac{b^2}{e} \times \left\{ \frac{B^{i+1}}{e^{i+1}} [\Sigma_{2n-1+i,j} - (1 - \delta_{i,n-1})\Sigma_{2n+i,j}] \right. \\
 & - \frac{B^i}{e^i} [(1 - \delta_{i,1})\Sigma_{2n-2+i,j} - \Sigma_{2n-1+i,j}] \\
 & + \frac{C^{i+1}}{e^{i+1}} [\Sigma_{n+i,j} - (1 - \delta_{i,n-1})\Sigma_{n+1+i,j}] \\
 & \left. - \frac{C^i}{e^i} [(1 - \delta_{i,1})\Sigma_{n-1+i,j} - \Sigma_{n+i,j}] \right\}
 \end{aligned} \tag{B.23}$$

- pour  $(i, j) \in [1; n - 1] \times [1; 5n - 2]$

$$\begin{aligned}
 M_{i+2n-1,j} = & \frac{b^2}{e} \times \left\{ \frac{A^{i+1}}{e^{i+1}} [\Sigma_{2n-1+i,j} - (1 - \delta_{i,n-1})\Sigma_{2n+i,j}] \right. \\
 & - \frac{A^i}{e^i} [(1 - \delta_{i,1})\Sigma_{2n-2+i,j} - \Sigma_{2n-1+i,j}] \\
 & + \frac{B^{i+1}}{e^{i+1}} [\Sigma_{n+i,j} - (1 - \delta_{i,n-1})\Sigma_{n+1+i,j}] \\
 & \left. - \frac{B^i}{e^i} [(1 - \delta_{i,1})\Sigma_{n-1+i,j} - \Sigma_{n+i,j}] \right\}
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

- pour  $(i, j) \in [1; n] \times [1; 5n - 2]$

$$\begin{aligned}
 M_{i+3n-2,j} = & \frac{12b^2e}{e^{i3}} \times \left\{ B^i \left[ \delta_{i,j} - \frac{e^i}{2e} ((1 - \delta_{i,n})\Sigma_{2n-1+i,j} + (1 - \delta_{i,1})\Sigma_{2n-2+i,j}) \right] \right. \\
 & \left. + C^i \left[ \Sigma_{i,j} - \frac{e^i}{2e} ((1 - \delta_{i,n})\Sigma_{n+i,j} + (1 - \delta_{i,1})\Sigma_{n-1+i,j}) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{B.25}$$

- pour  $(i, j) \in [1; n] \times [1; 5n - 2]$

$$M_{i+4n-2,j} = \frac{12b^2e}{e^{i^3}} \times \left\{ A^i \left[ \delta_{i,j} - \frac{e^i}{2e} ((1 - \delta_{i,n})\Sigma_{2n-1+i,j} + (1 - \delta_{i,1})\Sigma_{2n-2+i,j}) \right] + B^i \left[ \Sigma_{i,j} - \frac{e^i}{2e} ((1 - \delta_{i,n})\Sigma_{n+i,j} + (1 - \delta_{i,1})\Sigma_{n-1+i,j}) \right] \right\} \quad (B.26)$$

où  $\delta_{j,[a,b]} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in [a, b] \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

## B.2 Calculs correspondants à la formulation variationnelle.

La résolution du système différentiel (A.31) est effectuée par une formulation variationnelle. Les calculs conduisent au système (A.43) écrit sous forme matricielle en (A.44). Les paragraphes suivants présentent les résultats des calculs des coefficients de la matrice de rigidité et du vecteur second membre.

### B.2.1 Coefficients de la matrice de rigidité $\tilde{R}$ .

Les coefficients de la matrice de rigidité  $\tilde{R}$  font intervenir les termes

$$a(\tilde{\psi}^{i,j}, \tilde{\psi}^{p,q}) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq 5n - 2 \\ 1 \leq p \leq 5n - 2 \\ 1 \leq j \leq N - 1 \\ 1 \leq q \leq N - 1 \end{cases}$$

. La formule générale donnant les coefficients  $a(\tilde{\psi}^{i,j}, \tilde{\psi}^{p,q})$  est écrite en (A.38). Ces coefficients sont nuls pour toutes les valeurs prises par  $i, j, p$  et  $q$  sauf

- pour  $2 \leq q \leq N - 1$  et  $\forall p, i$

$$a(\tilde{\psi}^{i,q-1}, \tilde{\psi}^{p,q}) = -\frac{\delta_{p,i}}{a_q - a_{q-1}} + M_{p,i} \frac{a_q - a_{q-1}}{6} \quad (B.27)$$

- pour  $1 \leq q \leq N - 2$  et  $\forall p, i$

$$a(\tilde{\psi}^{i,q+1}, \tilde{\psi}^{p,q}) = -\frac{\delta_{p,i}}{a_{q+1} - a_q} + M_{p,i} \frac{a_{q+1} - a_q}{6} \quad (B.28)$$

- pour  $2 \leq q \leq N - 2$  et  $\forall p, i$

$$a(\tilde{\psi}^{i,q}, \tilde{\psi}^{p,q}) = \delta_{p,i} \left( \frac{1}{a_q - a_{q-1}} + \frac{1}{a_{q+1} - a_q} \right) + M_{p,i} \frac{a_{q+1} - a_{q-1}}{3} \quad (B.29)$$

- pour  $q = 1$  et  $p \in \mathbb{S}^0$  et  $i \in \mathbb{S}^0$

$$a(\tilde{\psi}^{i,1}, \tilde{\psi}^{p,1}) = \delta_{p,i} \left( \frac{1}{a_2 - a_1} + \frac{1}{a_1 - a_0} \right) + M_{p,i} \frac{a_2 - a_0}{3} \quad (B.30)$$

- pour  $q = 1$  et  $(p, i) \in \mathbb{S}^0 \times \mathbb{D}^0$  ou  $(p, i) \in \mathbb{D}^0 \times \mathbb{S}^0$

$$a(\tilde{\psi}^{i,1}, \tilde{\psi}^{p,1}) = M_{p,i} \frac{2a_2 + a_1 - 3a_0}{6} \quad (B.31)$$



- pour  $q = 1$  et  $(p, i) \in \mathbb{D}^0 \times \mathbb{D}^0$

$$a(\tilde{\psi}^{i,1}, \tilde{\psi}^{p,1}) = \delta_{p,i} \frac{1}{a_2 - a_1} + M_{p,i} \frac{a_2 + 2a_1 - 3a_0}{3} \quad (\text{B.32})$$

- pour  $q = N - 1$  et  $p \in \mathbb{S}^1$  et  $i \in \mathbb{S}^1$

$$a(\tilde{\psi}^{i,N-1}, \tilde{\psi}^{p,N-1}) = \delta_{p,i} \left( \frac{1}{a_N - a_{N-1}} + \frac{1}{a_{N-1} - a_{N-2}} \right) + M_{p,i} \frac{a_N - a_{N-2}}{3} \quad (\text{B.33})$$

- pour  $q = N - 1$  et  $(p, i) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1$  ou  $(p, i) \in \mathbb{D}^1 \times \mathbb{S}^1$

$$a(\tilde{\psi}^{i,N-1}, \tilde{\psi}^{p,N-1}) = M_{p,i} \frac{3a_N - a_{N-1} - 2a_{N-2}}{6} \quad (\text{B.34})$$

- pour  $q = N - 1$  et  $(p, i) \in \mathbb{D}^1 \times \mathbb{D}^1$

$$a(\tilde{\psi}^{i,N-1}, \tilde{\psi}^{p,N-1}) = \delta_{p,i} \frac{1}{a_{N-1} - a_{N-2}} + M_{p,i} \frac{3a_N - 2a_{N-1} - a_{N-2}}{3} \quad (\text{B.35})$$

### B.2.2 Second membre.

Nous calculons ici le second membre du système d'équations (A.41) :

$$\begin{aligned} L(\tilde{\psi}^{p,q}) &= l(\tilde{\psi}^{p,q}) - a \left( \sum_{i \in \mathbb{S}^0} \kappa_i^0 \tilde{\varphi}^{i,0} + \sum_{i \in \mathbb{S}^1} \kappa_i^1 \tilde{\varphi}^{i,N} - (a_1 - a_0) \sum_{i \in \mathbb{D}^0} \kappa_i^0 \tilde{\varphi}^{i,0} ; \tilde{\psi}^{p,q} \right) \\ &\quad - a \left( (a_N - a_{N-1}) \sum_{i \in \mathbb{D}^1} \kappa_i^1 \tilde{\varphi}^{i,N} ; \tilde{\psi}^{p,q} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

#### Calcul du terme $l(\tilde{\psi}^{p,q})$ .

Si on remplace  $\tilde{\phi}$  par  $\tilde{\psi}^{p,q}$  dans l'expression de  $l(\tilde{\phi})$ , on obtient pour  $1 \leq p \leq 5n - 2$  et  $1 \leq q \leq N - 1$

$$l(\tilde{\psi}^{p,q}) = \delta_{q,N-1} \delta_{p,\mathbb{D}^1} (\kappa_p^1 - \eta_p^{an}(1)) - \delta_{q,1} \delta_{p,\mathbb{D}^0} (\kappa_p^0 - \eta_p^{an}(0)) - \int_0^1 [\tilde{\psi}^{p,q} \cdot \tilde{\psi}^{an} - \tilde{\psi}^{p,q'} \cdot \tilde{\eta}^{an}] ds \quad (\text{B.37})$$

Nous approchons dorénavant  $\tilde{\psi}^{an}$  et  $\tilde{\eta}^{an}$  par :

$$\tilde{\psi}^{an} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 5n-2 \\ 0 \leq j \leq N}} \mu_{i,j} \tilde{\varphi}^{i,j} \quad \text{et} \quad \tilde{\eta}^{an} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 5n-2 \\ 0 \leq j \leq N}} \beta_{i,j} \tilde{\varphi}^{i,j} \quad \text{respectivement.}$$

Ainsi, le terme  $\delta_{q,N-1} \delta_{p,\mathbb{D}^1} (\kappa_p^1 - \eta_p^{an}(1)) - \delta_{q,1} \delta_{p,\mathbb{D}^0} (\kappa_p^0 - \eta_p^{an}(0))$  dans (B.37) s'écrit pour  $1 \leq p \leq 5n - 2$  et  $1 \leq q \leq N - 1$

$$\delta_{q,N-1} \delta_{p,\mathbb{D}^1} (\kappa_p^1 - \beta_{p,N}) - \delta_{q,1} \delta_{p,\mathbb{D}^0} (\kappa_p^0 - \beta_{p,0}) \quad (\text{B.38})$$

Quant au terme  $-\int_0^1 [\tilde{\psi}^{p,q} \cdot \tilde{\psi}^{an} - \tilde{\psi}^{p,q'} \cdot \tilde{\eta}^{an}] ds$ , les calculs sont un peu plus compliqués de sorte que nous préférons séparer les calculs en deux morceaux :  $\int_0^1 \tilde{\psi}^{p,q} \cdot \tilde{\psi}^{an} ds$  et  $\int_0^1 \tilde{\psi}^{p,q'} \cdot \tilde{\eta}^{an} ds$

Terme  $\int_0^1 \tilde{\psi}^{p,q} \tilde{\psi}^{an} ds$  dans  $l(\tilde{\psi}^{p,q})$ .

Pour ce terme nous devons distinguer plusieurs cas :

- pour  $2 \leq q \leq N - 2$

$$\int_0^1 \tilde{\psi}^{p,q} \tilde{\psi}^{an} ds = \mu_{p,q-1} \frac{a_q - a_{q-1}}{6} + \mu_{p,q} \frac{a_{q+1} - a_{q-1}}{3} + \mu_{p,q+1} \frac{a_{q+1} - a_q}{6} \quad (B.39)$$

- pour  $q = 1$  et  $p \in \mathbb{S}^0$

$$\int_0^1 \tilde{\psi}^{p,1} \tilde{\psi}^{an} ds = \mu_{p,0} \frac{a_1 - a_0}{6} + \mu_{p,1} \frac{a_2 - a_0}{3} + \mu_{p,2} \frac{a_2 - a_1}{6} \quad (B.40)$$

- pour  $q = 1$  et  $p \in \mathbb{D}^0$

$$\int_0^1 \tilde{\psi}^{p,1} \tilde{\psi}^{an} ds = \mu_{p,0} \frac{a_1 - a_0}{2} + \mu_{p,1} \frac{2a_2 + a_1 - 3a_0}{6} + \mu_{p,2} \frac{a_2 - a_1}{6} \quad (B.41)$$

- pour  $q = N - 1$  et  $p \in \mathbb{S}^1$

$$\int_0^1 \tilde{\psi}^{p,N-1} \tilde{\psi}^{an} ds = \mu_{p,N-2} \frac{a_{N-2} - a_{N-1}}{6} + \mu_{p,N-1} \frac{a_N - a_{N-2}}{3} + \mu_{p,N} \frac{a_N - a_{N-1}}{6} \quad (B.42)$$

- pour  $q = N - 1$  et  $p \in \mathbb{D}^1$

$$\int_0^1 \tilde{\psi}^{p,N-1} \tilde{\psi}^{an} ds = \mu_{p,N-2} \frac{a_{N-1} - a_{N-2}}{6} + \mu_{p,N-1} \frac{3a_N - a_{N-1} - 2a_{N-2}}{6} + \mu_{p,N} \frac{a_N - a_{N-1}}{2} \quad (B.43)$$

Terme  $\int_0^1 \tilde{\psi}^{p,q} \tilde{\eta}^{an}$  dans  $l(\tilde{\psi}^{p,q})$ .

Encore une fois, nous distinguons plusieurs cas :

- pour  $2 \leq q \leq N - 2$

$$\int_0^1 \tilde{\psi}^{p,q} \tilde{\eta}^{an} ds = \frac{\beta_{p,q-1}}{2} - \frac{\beta_{p,q+1}}{2} \quad (B.44)$$

- pour  $q = 1$  et  $p \in \mathbb{S}^0$

$$\int_0^1 \tilde{\psi}^{p,q} \tilde{\eta}^{an} ds = \frac{\beta_{p,0}}{2} - \frac{\beta_{p,2}}{2} \quad (B.45)$$

- pour  $q = 1$  et  $p \in \mathbb{D}^0$

$$\int_0^1 \tilde{\psi}^{p,q} \tilde{\eta}^{an} ds = -\frac{\beta_{p,2}}{2} - \frac{\beta_{p,1}}{2} \quad (B.46)$$

- pour  $q = N - 1$  et  $p \in \mathbb{S}^1$

$$\int_0^1 \tilde{\psi}^{p,q} \tilde{\eta}^{an} ds = \frac{\beta_{p,N-2}}{2} - \frac{\beta_{p,N}}{2} \quad (B.47)$$

- pour  $q = N - 1$  et  $p \in \mathbb{D}^1$

$$\int_0^1 \tilde{\psi}^{p,q} \tilde{\eta}^{an} ds = \frac{\beta_{p,N-2}}{2} + \frac{\beta_{p,N-1}}{2} \quad (B.48)$$

Ainsi on est en mesure de calculer  $l(\tilde{\psi}^{p,q})$  pour  $1 \leq p \leq 5n - 2$  et  $1 \leq q \leq N - 1$ .



## Calcul des autres termes du second membre.

On s'intéresse ici au calcul du terme :

$$a \left( \sum_{i \in \mathbb{S}^0} \kappa_0^i \tilde{\varphi}^{i,0} + \sum_{i \in \mathbb{S}^1} \kappa_1^i \tilde{\varphi}^{i,N} - (a_1 - a_0) \sum_{i \in \mathbb{D}^0} \kappa_0^i \tilde{\varphi}^{i,0} + (a_N - a_{N-1}) \sum_{i \in \mathbb{D}^1} \kappa_1^i \tilde{\varphi}^{i,N}; \tilde{\psi}^{p,q} \right)$$

dans l'expression (B.36).

Pour ce calcul, on montre uniquement dans ce mémoire la valeur de termes qui apparaissent dans chacune des sommations de l'expression ci-dessus. Un programme informatique fera les sommations nécessaire pour obtenir la valeur du terme global. On voit que nous avons à calculer deux types de termes :  $a(\tilde{\varphi}^{i,0}, \tilde{\psi}^{p,q})$  et  $a(\tilde{\varphi}^{i,N}, \tilde{\psi}^{p,q})$ . On a pour  $1 \leq i \leq 5n-2$ ,  $1 \leq p \leq 5n-2$  et  $1 \leq q \leq N-1$  :

$$a(\tilde{\varphi}^{i,0}, \tilde{\psi}^{p,q}) = -\delta_{p,i} \delta_{p,\mathbb{S}^0} \delta_{q,1} \left( \frac{1}{a_1 - a_0} \right) + M_{p,i} \delta_{q,1} \left( \delta_{p,\mathbb{S}^0} \frac{a_1 - a_0}{6} + \delta_{p,\mathbb{D}^0} \frac{a_1 - a_0}{2} \right) \quad (\text{B.49})$$

$$a(\tilde{\varphi}^{i,N}, \tilde{\psi}^{p,q}) = -\delta_{p,i} \delta_{p,\mathbb{S}^1} \delta_{q,N-1} \left( \frac{1}{a_N - a_{N-1}} \right) + M_{p,i} \delta_{q,N-1} \left( \delta_{p,\mathbb{S}^1} \frac{a_N - a_{N-1}}{6} + \delta_{p,\mathbb{D}^1} \frac{a_N - a_{N-1}}{2} \right) \quad (\text{B.50})$$

Cela permet donc de calculer les termes du second membre (B.36) autres que  $l(\tilde{\psi}^{p,q})$ .

Nous sommes finalement en mesure de calculer le second membre  $L(\tilde{\psi}^{p,q})$  et ce  $\forall p \in [1, 5n-2]$  et  $\forall q \in [1, N-1]$ .

## Annexe C

# Détail des calculs pour l'expression du taux de restitution d'énergie.

Au paragraphe 4.4 du chapitre 4, nous avons construit un critère de délaminage portant sur le taux de restitution d'énergie. Le calcul du taux de restitution d'énergie a été effectué moyennant la méthode du travail de refermeture de fissure. Pour ce faire, nous avons dû déterminer les discontinuités des déplacements à l'interface fissurée en fonction des efforts d'interface en pointe de fissure aux paragraphes 4.4.3 et 4.4.3. Cependant, les méthodes pour exprimer les discontinuités des déplacements n'ont pas été détaillées. Nous détaillons dans cette annexe les méthodes en question.

### C.1 Détermination des discontinuités des déplacements dans le plan.

Afin de trouver l'expression des discontinuités des déplacements dans le plan, nous avons trouvé au paragraphe 4.4.3 du chapitre 4,  $3n - 2$  équations linéaires qui peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante (cf. équation (4.25)) :

$$\tilde{\Lambda}^1 \tilde{\chi}^1 = -\tilde{\gamma} \quad (\text{C.1})$$

avec  $\tilde{\chi}^1$  vecteur de dimension  $3n - 2$  défini par

$$\tilde{\chi}^{1t} = \left( \Delta Q_1^1, \dots, \Delta Q_1^n, \Delta \tau_1^{1,2}, \dots, \Delta \tau_1^{n-1,n}, \Delta \tau_2^{1,2}, \dots, \Delta \tau_2^{n-1,n} \right),$$

$\tilde{\gamma}$  vecteur de dimension  $3n - 2$  défini par

$$\tilde{\gamma}^t = \left( \underbrace{0, \dots, 0}_{n+k-1}, \gamma_1^{k,k+1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, \gamma_2^{k,k+1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k-1} \right),$$

$\tilde{\Lambda}^1 = (\lambda_{pq})_{1 \leq p, q \leq 3n-2}$  matrice de dimension  $(3n - 2) \times (3n - 2)$  que nous définissons ici par

$$\tilde{\Lambda}^1 = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{A}_{11}^t & \tilde{A}_{12}^t \\ \tilde{A}_{11} & \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{D}_{12} & \tilde{D}_{22} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.2})$$



où  $\tilde{A}_{ij}$  matrice de dimension  $(n-1) \times n$  définie pour  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$  par

$$\tilde{A}_{ij} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} S_{Qij}^1 & S_{Qij}^2 & 0 & & 0 \\ 0 & S_{Qij}^2 & S_{Qij}^3 & & 0 \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & S_{Qij}^{n-1} & S_{Qij}^n \end{pmatrix}, \quad (C.3)$$

$\tilde{C}_i$  matrice de dimension  $(n-1) \times n$  définie pour  $i \in 1, 2$  par

$$\tilde{C}_i = \frac{6}{5} \begin{pmatrix} \frac{S_{Q1i}^1}{e^1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S_{Q1i}^2}{e^2} & 0 \\ & & \cdot \\ & & & \cdot \\ 0 & 0 & & & \frac{S_{Q1i}^n}{e^n} \end{pmatrix} \quad (C.4)$$

et  $\tilde{D}_{ij}$  matrice de dimension  $(n-1) \times (n-1)$  définie pour  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$  par

$$\tilde{D}_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{30} \left( 4(e^1 S_{Qij}^1 + e^2 S_{Qij}^2) \right) & \text{si } n = 2 \\ \frac{1}{30} \left( 4(e^p S_{Qij}^p + e^{p+1} S_{Qij}^{p+1}) \delta_{p,q} - e^p S_{Qij}^p \delta_{p,q+1} - e^q S_{Qij}^q \delta_{p+1,q} \right) & \text{si } n > 2 \end{cases} \quad (C.5)$$

$\delta_{i,j}$  étant le symbole de Kronecker.

Nous définissons

- la matrice  $\tilde{\Lambda}^2$  de dimension  $(3n-4) \times (3n-4)$  déduite de la matrice  $\tilde{\Lambda}^1$  en supprimant les lignes  $n_1 = (n+k)$  et  $n_2 = (2n-1+k)$  et les colonnes  $n_1$  et  $n_2$  :

$$\tilde{\Lambda}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdot & \lambda_{1,n_1-1} & \lambda_{1,n_1+1} & \cdot & \lambda_{1,n_2-1} & \lambda_{1,n_2+1} & \cdot & \lambda_{1,3n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n_1-1,1} & \cdot & \lambda_{n_1-1,n_1-1} & \lambda_{n_1-1,n_1+1} & \cdot & \lambda_{n_1-1,n_2-1} & \lambda_{n_1-1,n_2+1} & \cdot & \lambda_{n_1-1,3n-2} \\ \lambda_{n_1+1,1} & \cdot & \lambda_{n_1+1,n_1-1} & \lambda_{n_1+1,n_1+1} & \cdot & \lambda_{n_1+1,n_2-1} & \lambda_{n_1+1,n_2+1} & \cdot & \lambda_{n_1+1,3n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n_2-1,1} & \cdot & \lambda_{n_2-1,n_1-1} & \lambda_{n_2-1,n_1+1} & \cdot & \lambda_{n_2-1,n_2-1} & \lambda_{n_2-1,n_2+1} & \cdot & \lambda_{n_2-1,3n-2} \\ \lambda_{n_2+1,1} & \cdot & \lambda_{n_2+1,n_1-1} & \lambda_{n_2+1,n_1+1} & \cdot & \lambda_{n_2+1,n_2-1} & \lambda_{n_2+1,n_2+1} & \cdot & \lambda_{n_2+1,3n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{3n-2,1} & \cdot & \lambda_{3n-2,n_1-1} & \lambda_{3n-2,n_1+1} & \cdot & \lambda_{3n-2,n_2-1} & \lambda_{3n-2,n_2+1} & \cdot & \lambda_{3n-2,3n-2} \end{pmatrix} \quad (C.6)$$

- la matrice  $\tilde{\Lambda}^3$  de dimension  $(3n-4) \times 2$  déduite des 2 colonnes  $n_1$  et  $n_2$  de la matrice  $\tilde{\Lambda}^1$

auxquelles on a enlevé les lignes  $n_1$  et  $n_2$  :

$$\tilde{\Lambda}^3 = \begin{pmatrix} \lambda_{1,n_1} & \lambda_{1,n_2} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \lambda_{n_1-1,n_1} & \lambda_{n_1-1,n_2} \\ \lambda_{n_1+1,n_1} & \lambda_{n_1+1,n_2} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \lambda_{n_2-1,n_1} & \lambda_{n_2-1,n_2} \\ \lambda_{n_2+1,n_1} & \lambda_{n_2+1,n_2} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \lambda_{3n-2,n_1} & \lambda_{3n-2,n_2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

– la matrice  $\tilde{\Lambda}^4$  de dimension  $2 \times (3n-4)$  déduite des lignes  $n_1$  et  $n_2$  de la matrice  $\tilde{\Lambda}^1$  auxquelles on a supprimé les colonnes  $n_1$  et  $n_2$  :

$$\tilde{\Lambda}^4 = \begin{pmatrix} \lambda_{n_1,1} & \cdot & \cdot & \lambda_{n_1,n_1-1} & \lambda_{n_1,n_1+1} & \cdot & \cdot & \lambda_{n_1,n_2-1} & \lambda_{n_1,n_2+1} & \cdot & \cdot & \lambda_{n_1,3n-2} \\ \lambda_{n_2,1} & \cdot & \cdot & \lambda_{n_2,n_1-1} & \lambda_{n_2,n_1+1} & \cdot & \cdot & \lambda_{n_2,n_2-1} & \lambda_{n_2,n_2+1} & \cdot & \cdot & \lambda_{n_2,3n-2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

– la matrice  $\tilde{\Lambda}^5$  de dimension  $2 \times 2$  déduite de la matrice  $\tilde{\Lambda}^1$  et définie par :

$$\tilde{\Lambda}^5 = \begin{pmatrix} \lambda_{n_1,n_1} & \lambda_{n_1,n_2} \\ \lambda_{n_2,n_1} & \lambda_{n_2,n_2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.9})$$

– le vecteur  $\tilde{\chi}^2$  de dimension  $(3n-4)$  déduit du vecteur  $\tilde{\chi}^1$  par la suppression des lignes  $n_1$  et  $n_2$  :

$$\tilde{\chi}^{2t} = (\chi_1, \dots, \chi_{n_1-1}, \chi_{n_1+1}, \dots, \chi_{n_2-1}, \chi_{n_2+1}, \dots, \chi_{3n-2}), \quad (\text{C.10})$$

il s'agit des inconnues autres que les inconnues principales et les discontinuités des déplacements,

– le vecteur  $\tilde{\chi}^3$  de dimension 2 déduit des 2 lignes  $n_1$  et  $n_2$  du vecteur  $\tilde{\chi}^1$  :

$$\tilde{\chi}^3 = \begin{pmatrix} \chi_{n_1} \\ \chi_{n_2} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.11})$$

il s'agit des opposés des inconnues principales.

Avec ces définitions, on a

$$\tilde{\Lambda}^2 \cdot \tilde{\chi}^2 = -\tilde{\Lambda}^3 \cdot \tilde{\chi}^3; \quad (\text{C.12})$$

cette équation est l'écriture des équations qui ne font pas intervenir les discontinuités des déplacements. Cela nous permet de déterminer les inconnues autres que les discontinuités des déplacements en fonction des inconnues principales :

$$\tilde{\chi}^2 = -(\tilde{\Lambda}^2)^{-1} \cdot \tilde{\Lambda}^3 \cdot \tilde{\chi}^3. \quad (\text{C.13})$$

Par ailleurs, les équations pour  $j = k$  de la famille d'équations (4.23) peuvent s'écrire sous la forme :

$$\tilde{\Lambda}^4 \cdot \tilde{\chi}^2 + \tilde{\Lambda}^5 \cdot \tilde{\chi}^3 = - \begin{pmatrix} \gamma_1^{k,k+1} \\ \gamma_2^{k,k+1} \end{pmatrix}.$$



Donc d'après l'équation (C.13) et en posant

$$\tilde{\Psi} = -\tilde{\Lambda}^4 \cdot \left( (\tilde{\Lambda}^2)^{-1} \cdot \tilde{\Lambda}^3 \right) + \tilde{\Lambda}^5 \quad (\text{C.14})$$

on obtient

$$\tilde{\Psi} \cdot \tilde{\chi}^3 = - \begin{pmatrix} \gamma_1^{k,k+1}(x, a^+) \\ \gamma_2^{k,k+1}(x, a^+) \end{pmatrix} \quad (\text{C.15})$$

Finalement, en remplaçant  $\tilde{\chi}^3$  par sa valeur, on aboutit au résultat

$$\begin{pmatrix} \gamma_1^{k,k+1}(x, a^+) \\ \gamma_2^{k,k+1}(x, a^+) \end{pmatrix} = \tilde{\Psi} \cdot \begin{pmatrix} \tau_1^{k,k+1}(x, a^-) \\ \tau_2^{k,k+1}(x, a^-) \end{pmatrix} \quad (\text{C.16})$$

Les discontinuités des déplacements dans le plan à l'interface délaminee sont ainsi exprimés en fonction des efforts de cisaillement en pointe de fissure.

## C.2 Détermination de la discontinuité du déplacement hors plan.

Afin de trouver l'expression des discontinuités hors plan, nous avons trouvé au paragraphe 4.4.3 du chapitre 4,  $n$  équations linéaires (4.29) qui peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante (cf. équation (4.30)) pour  $n > 2$  :

$$\tilde{\kappa}^1 \tilde{\nu}^1 = -\tilde{\gamma}_3 \quad (\text{C.17})$$

avec  $\tilde{\nu}^1$  vecteur de dimension  $n-1$  défini par

$$\tilde{\nu}^{1t} = (\Delta\nu^{1,2}, \dots, \Delta\nu^{n-1,n}),$$

$\tilde{\gamma}_3$  vecteur de dimension  $n-1$  défini par

$$\tilde{\gamma}_3^t = \left( \underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, \gamma_3^{k,k+1}(x, a^+), \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k-1} \right),$$

$\tilde{\kappa}^1 = (\kappa_{pq})_{1 \leq p, q \leq n-1}$  matrice de dimension  $(n-1) \times (n-1)$  ayant pour expression

$$\tilde{\kappa}^1 = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 26(e^1 S_\nu^1 + e^2 S_\nu^2) & 9e^2 S_\nu^2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 9e^2 S_\nu^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 9e^{n-1} S_\nu^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 9e^{n-1} S_\nu^{n-1} & 26(e^{n-1} S_\nu^{n-1} + e^n S_\nu^n) \end{pmatrix} \quad (\text{C.18})$$

Nous définissons pour  $n > 2$

- la matrice  $\tilde{\kappa}^2$  de dimension  $(n-2) \times (n-2)$  déduite de la matrice  $\tilde{\kappa}^1$  en supprimant la ligne  $k$  et la colonne  $k$  :

$$\tilde{\kappa}^2 = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \cdot & \cdot & \kappa_{1,k-1} & \kappa_{1,k+1} & \cdot & \cdot & \kappa_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \kappa_{k-1,1} & \cdot & \cdot & \kappa_{k-1,k-1} & \kappa_{k-1,k+1} & \cdot & \cdot & \kappa_{k-1,n-1} \\ \kappa_{k+1,1} & \cdot & \cdot & \kappa_{k+1,k-1} & \kappa_{k+1,k+1} & \cdot & \cdot & \kappa_{k+1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \kappa_{n-1,1} & \cdot & \cdot & \kappa_{n-1,k-1} & \kappa_{n-1,k+1} & \cdot & \cdot & \kappa_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \quad (\text{C.19})$$

- le vecteur  $\tilde{\kappa}^3$  de dimension  $(n-2)$  déduit de la colonne  $k$  de la matrice  $\tilde{\kappa}^1$  en supprimant la ligne  $k$

$$\tilde{\kappa}^{3t} = (\kappa_{1,k}, \dots, \kappa_{k-1,k}, \kappa_{k+1,k}, \dots, \kappa_{n-1,k}), \quad (\text{C.20})$$

- le vecteur  $\tilde{\kappa}^4$  de dimension  $(n-2)$  déduit de la ligne  $k$  de la matrice  $\tilde{\kappa}^1$  en supprimant la colonne  $k$

$$\tilde{\kappa}^{4t} = (\kappa_{k,1}, \dots, \kappa_{k,k-1}, \kappa_{k,k+1}, \dots, \kappa_{k,n-1}), \quad (\text{C.21})$$

- le vecteur  $\tilde{\nu}^2$  de dimension  $(n-2)$  déduit du vecteur  $\tilde{\nu}^1$  par la suppression de la ligne  $k$  :

$$\tilde{\nu}^{2t} = (\Delta\nu^{1,2}, \dots, \Delta\nu^{k-1,k}, \Delta\nu^{k+1,k+2}, \dots, \Delta\nu^{n-1,n}),$$

il s'agit des inconnues autres que l'inconnue principale et la discontinuité du déplacement normal à l'interface.

Avec ces définitions, on a pour  $n > 2$  :

$$\tilde{\nu}^2 = (\tilde{\kappa}^2)^{-1} \cdot \tilde{\kappa}^3 \nu^{k,k+1}(x, a^-). \quad (\text{C.22})$$

Alors, en posant

$$\psi_\nu = \left[ -\tilde{\kappa}^4 \cdot \left( (\tilde{\kappa}^2)^{-1} \cdot \tilde{\kappa}^3 \right) + \kappa_{k,k} \right] \quad (\text{C.23})$$

l'équation de comportement (4.29) pour l'interface  $k$  ( $j = k$ ) s'écrit pour  $n > 2$  :

$$\gamma_3^{k,k+1}(x, a^+) = \psi_\nu \nu^{k,k+1}(x, a^-). \quad (\text{C.24})$$

Or, pour  $n = 2$ , l'équation de comportement (4.29) pour l'interface  $k = 1$  ( $j = k$ ) donne directement :

$$\gamma_3^{k,k+1}(x, a^+) = \frac{13}{35} (e^1 S_\nu^1 + e^2 S_\nu^2) \nu^{k,k+1}(x, a^-). \quad (\text{C.25})$$

Donc, pour tous les cas la relation de proportionnalité (C.24) est valable et avec cette relation on achève le calcul des discontinuités des déplacements hors plan à l'interface fissurée en fonction du seul effort d'arrachement en pointe de fissure.



