Echantillonnage des signaux à bande limitée

Jacques Sainte-Marie

▶ **To cite this version:**

Jacques Sainte-Marie. Echantillonnage des signaux à bande limitée : Application à l'étude de l'interaction véhicule-chaussée. Mathématiques [math]. École des Ponts ParisTech, 1999. Français. NNT : 1999ENPC9922 . tel-04529892

HAL Id: tel-04529892
https://enpc.hal.science/tel-04529892

Submitted on 2 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 23949(4)

THÈSE DE DOCTORAT
DE
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

spécialité
Mathématiques et Informatique

présentée pour obtenir le titre de
DOCTEUR DE
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

par
Jacques SAINTE-MARIE

SUJET :

ÉCHANTILLONNAGE DES SIGNAUX À BANDE LIMITÉE. APPLICATION À L'ÉTUDE DE L'INTERACTION VÉHICULE-CHAUSSÉE.

Soutenue le 30 avril 1999 devant le jury composé de :

Messieurs	N. M'SIRDI	Rapporteur
	P. PINTADO	Rapporteur
	R. BOUC	Président
	P. ARGOUL	Examinateur
	M. FRÉMOND	Directeur de thèse

E.N.P.C.
INV09989

NS 23949(4)

X

THÈSE DE DOCTORAT
DE
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

spécialité

Mathématiques et Informatique

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

par

Jacques SAINTE-MARIE

SUJET :

ÉCHANTILLONNAGE DES SIGNAUX À BANDE LIMITÉE. APPLICATION À L'ÉTUDE DE L'INTERACTION VÉHICULE-CHAUSSÉE.

ÉCOLE DES PONTS&CHAUSSÉES BIBLIOTHÈQUE

Soutenue le 30 avril 1999 devant le jury composé de :

Messieurs	N. M'SIRDI	Rapporteur
	P. PINTADO	Rapporteur
	R. BOUC	Président
	P. ARGOUL	Examinateur
	M. FRÉMOND	Directeur de thèse

20

20

À mes parents et grand-parents.

Remerciements

Ces travaux ont été réalisés au Laboratoire des matériaux et des structures du génie civil où j'ai passé trois années très enrichissantes dans un environnement favorable et une ambiance agréable. Que Michel Frémond et Yves Berthaud ainsi que tous les membres de l'unité soient remerciés pour leur accueil, leur soutien et leurs conseils.

Sans Claude Lamarque (École nationale des travaux publics de l'état) et Pierre Argoul, je n'aurais pas pu entamer cette thèse. Je leur exprime toute ma reconnaissance pour les efforts qu'ils ont consentis afin de faciliter mon arrivée au Laboratoire central des ponts et chaussées.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude envers Robert Bouc (Laboratoire de mécanique et acoustique), Nacer M'Sirdi (Université de Paris VI) et Publio Pintado (Université de Castille) qui me font l'honneur de juger mon travail. Je remercie doublement Nacer M'Sirdi et Publio Pintado pour les fructueuses discussions que nous avons eues ensemble et pour le temps qu'ils ont consacrés à l'examen de mon manuscrit.

Je tiens à associer dans ces remerciements tous les membres du LMSGC que j'ai cotoyés. Il y a ceux avec qui j'ai passé de bons moments de détente, ceux avec qui j'ai travaillé et enfin ceux qui m'ont supporté pendant ces trois années, chacun pouvant appartenir à plusieurs catégories. Je pense plus particulièrement à Narimane Bourada, Xavier Chateau, Rouba El Dalati, Claude Gauthier, Juha Hartikainen, Rym Lassoued, Yves Le Floch, Rabah Namar et José Urquiza.
Merci aussi à Michèle Valenti et Lydie Obert pour leur disponibilité et leur aide.

J'ai eu également beaucoup de plaisir à travailler avec Bernard Jacob, Pierre-Yves Texier et diverses personnes du LCPC, au delà avec Victor Dolcemascolo et Marcel Siffert du LROP. Toute ma sympathie va aussi à Werner Baümgärtner (Université technique de Münich) et David Cebon (Université de Cambridge) pour leurs conseils.

Au sein de ma famille, parmi mes amis, à tout ceux qui au gré des vicissitudes de cette thèse m'ont encouragé, je dis tout simplement merci.

Résumé

On cherche tout d'abord à mettre au point des techniques d'échantillonnage de signaux basées sur le contenu spectral de ces signaux vis à vis de certaines transformations discrètes ou continues. Les méthodes proposées utilisent les propriétés des repères dans un espace de Hilbert. Des algorithmes d'échantillonnage de signaux à bande limitée selon la transformation retenue sont proposés, ils sont testés numériquement et expérimentalement.

Dans la seconde partie, les techniques d'échantillonnage proposées sont appliquées à la résolution d'un problème de génie civil : l'interaction véhicule-chaussée et le pesage en marche des véhicules lourds. Il s'agit alors de mettre en oeuvre une méthode d'échantillonnage de signaux et d'estimation de paramètres associée à un système mécanique. L'objectif est la reconstruction des variations de la force d'impact d'un essieu à partir de mesures ponctuelles de celle-ci ainsi que l'estimation de son poids statique. L'étape de reconstruction est menée à partir de fonctions adaptées au modèle simplifié de véhicule choisi et est couplée à une technique d'identification par filtrage de Kalman.

Abstract

Given a family of signals, we build several sampling techniques based on the spectral contents with respect to a discrete or continuous transform of the considered signals. The developed methods use the properties of frames in Hilbert spaces. Sampling algorithms of band limited signals for the chosen transform are propsed, they are tested with numerically simulated and experimental signals.

Then, the developed sampling techniques are used to study a problem arising in civil engineering : vehicle-pavement interaction and weigh in motion of heavy vehicles. The objective is to reconstruct, from discrete measurements given by sensors, the variations of the impact force of an axle and then to estimate its static load. For this purpose, we use some simplified models of heavy vehicles and the reconstruction is performed over a family of functions adapted to the considered model. The estimation technique is coupled with a Kalman filtering procedure.

Table des matières

1 Présentation de la thèse **15**

1.1 Présentation générale 16

1.2 Objectifs de la thèse 17

1.3 Plan de la thèse 19

1.3.1 Échantillonnage des signaux à bande limitée 20

1.3.2 Application à l'étude de l'interaction dynamique véhicule-chaussée et au pesage en marche 20

I Échantillonnage irrégulier des signaux à bande limitée **23**

2 L'échantillonnage **25**

2.1 Historique 26

2.1.1 L'interpolation 26

2.1.2 L'échantillonnage 27

2.2 Historique 28

2.3 La théorie de l'échantillonnage 32

2.3.1 Introduction 33

2.3.2 Un exemple simple 33

2.3.3 Historique de l'échantillonnage 35

2.3.4 L'échantillonnage irrégulier 38

2.3.5 Échantillonnage et analyse harmonique 39

2.3.6 Qu'est-ce qu'une transformation? 40

2.3.7 Deux tendances 41

3 Repères dans un espace de Hilbert **43**

3.1 Présentation et propriétés 44

3.1.1 Définition et premières propriétés 45

3.1.2 Deux caractérisations 51

3.1.3 Décomposition dans un repère 52

3.2 Échantillonnage et repères 55
3.2.1 Repères et formes linéaires 55
3.2.2 Reconstruction de f à l'aide de Sf 57
3.3 Propriétés des formes linéaires $\{L_n\}_{n\in I}$ autorisant l'échantillonnage 61
3.3.1 Cas où $\mathcal{H}$ est de dimension finie 64
3.4 Repères associés à une norme quelconque 65
3.5 Erreur de troncature 66
3.6 Cas d'un espace de Banach 67
3.7 Conclusion 67

4 Échantillonnage des signaux à bande limitée selon une transformation discrète 69
4.1 Présentation 70
4.2 Échantillonnage irrégulier de signaux 1D 71
4.2.1 Échantillonnage selon une famille $\{g_i\}_{i=1}^N$ 71
4.2.2 Approximation 73
4.3 Signaux 1D à bande limitée selon une transformation discrète et opérateur de repère 74
4.3.1 Notion de signal à bande limitée 74
4.3.2 L'algorithme ACT 76
4.3.3 Transformation discrète selon une famille de fonctions . 76
4.3.4 Reconstruction itérative 77
4.3.5 Reconstruction directe 79
4.3.6 Programmation 82
4.4 Suréchantillonnage 83
4.4.1 Généralités 83
4.4.2 Pseudo-inverse et approximation au sens des moindres carrés 83
4.5 Estimation d'erreurs 85
4.5.1 Exemple d'une reonstruction non stable 86
4.5.2 Erreur statistique 87
4.5.3 Erreur systématique 89
4.5.4 Repliement de spectre 90
4.6 Échantillonnage pondéré 92
4.6.1 Reconstruction pondérée : méthodes directes et itératives 94
4.6.2 Suréchantillonnage 96
4.6.3 Estimation d'erreur pour la reconstruction pondérée . . 97
4.7 Cas d'une famille $\mathcal{G}$ infinie 98
4.7.1 Transformation associée à la famille $\mathcal{G}$ 98
4.7.2 Échantillonnage dans $\mathcal{G}$ et approximation de Galerkin . 101

4.8 Échantillonnage de signaux en dimension multiple 103
4.8.1 Position du problème 104
4.8.2 Reconstruction itérative 105
4.8.3 Cas où les fonctions $\{g_i\}$ sont à variables séparables . . 105
4.9 Conclusion du chapitre 107

5 Échantillonnage des signaux à bande limitée selon une transformation "continue" 109
5.1 Présentation 110
5.2 La transformation de Fourier continue 110
5.3 Objectif 112
5.4 Transformations associées à une représentation de groupe localement compact 113
5.4.1 Représentation de groupes 113
5.4.2 Représentation de carré intégrable 115
5.4.3 Relations d'orthogonalité 116
5.5 Les transformations L_g et R_g 117
5.5.1 Continuité 118
5.5.2 L_g et R_g sont des isométries 118
5.5.3 Caractérisation de $L_g(\mathcal{H})$ et de $R_g(\mathcal{H})$ 119
5.6 Noyaux reproducteurs 121
5.6.1 Noyaux reproducteurs sur $L_g(\mathcal{H})$ et $R_g(\mathcal{H})$ 121
5.6.2 Noyaux reproducteurs sur $\mathcal{H}$ 123
5.7 Échantillonnage d'une fonction de $\mathcal{H}$ 125
5.7.1 Cas où $\mathcal{H}$ admet une fonction noyau 126
5.7.2 Échantillonnage des signaux à bande limitée 129
5.7.3 Adaptation du théorème de Shannon 129
5.7.4 Repères associés aux transformations L_g et R_g 130
5.7.5 Suite d'échantillons possédant un point d'accumulation 130
5.7.6 Estimation d'erreur 136
5.8 Échantillonnage d'une fonction de $L_g(\mathcal{H})$ 136
5.9 Représentation projective 138
5.10 Conclusion du chapitre 139

6 Illustrations numériques 141
6.1 Reconstruction de signaux à 1 variables 142
6.1.1 Signaux simulés 142
6.1.2 Signaux expérimentaux 148
6.1.3 Reconstruction de signaux non périodiques à l'aide de fonctions périodiques 150
6.2 Reconstruction d'images 154

6.2.1 Reconstruction avec des images simulées 154
6.2.2 Reconstruction avec des images expérimentales 158
6.3 Conclusion du chapitre 162

II Application au pesage en marche et à l'étude de l'interaction véhicule-chaussée 165

7 Position du problème 167
7.1 Interaction véhicule-chaussée et pesage en marche 168
7.1.1 Origines des vibrations 170
7.1.2 Les dommages causés aux chaussées 170
7.1.3 Des enjeux économiques 171
7.1.4 La législation actuelle 172
7.1.5 Son application 173
7.2 Objectifs 176
7.2.1 Analyse des effets dynamiques 177
7.2.2 Estimation du poids statique des essieux 177
7.3 État de l'art 178
7.3.1 Interaction dynamique 178
7.3.2 Pesage en marche 179

8 Reconstruction des variations de la force d'impact d'un essieu 181
8.1 Hypothèses 182
8.2 Étude de quelques modèles 182
8.2.1 Modèles d'essieux 183
8.2.2 Conclusion 194
8.3 Modèles de véhicules 194
8.3.1 Charges constantes 194
8.3.2 Véhicule à deux degrés de liberté 195
8.3.3 Véhicule rigide avec trois essieux 201
8.3.4 Un véhicule à cinq essieux - tracteur + remorque . . . 204
8.3.5 Conclusion 209
8.4 Modélisation multi-corps d'un poids lourds 210
8.5 Résolution d'un problème d'évolution par la méthode de diagonalisation 214
8.5.1 Cas général 214
8.5.2 Approximation 220
8.5.3 Solution du problème $\mathbf{M}(t)\dot{u} + \mathbf{A}(t)u = \mathbf{f}$ 221
8.5.4 Interprétation 221

8.6 Validation 222
8.6.1 Groupements d'essieux 222
8.6.2 Reconstruction à l'aide de modes propres 222
8.7 Transferts de charges permanents 228
8.7.1 Mise en équation du problème 228
8.7.2 Interprétation physique 232
8.7.3 Application numérique 233
8.7.4 Extension au cas d'autres modèles de poids lourds . . . 233
8.8 Validation des reports de charge entre essieux 234

9 Pesage en marche par système multi-capteurs 237
9.1 Estimateur du poids statique 238
9.1.1 Impossibilité du pesage en marche mono-capteur 238
9.1.2 Pesage en marche multicapteur 239
9.2 Estimation du poids statique 240
9.2.1 Reconstruction de $F(t)$ 240
9.2.2 Première procédure d'estimation du poids statique . . . 243
9.2.3 Le filtrage de Kalman 244
9.3 Validation de la procédure d'estimation du poids statique . . . 247
9.3.1 Remarques quant à la validation de la procédure d'estimation 247
9.3.2 Estimation par reconstruction sur une famille quelconque 249
9.3.3 Estimation avec reconstruction sur une famille issue de l'analyse mécanique 256
9.4 Recommandations pour les systèmes de pesage en marche . . . 260
9.4.1 Position des capteurs 260
9.4.2 Longueur de la grille 261
9.4.3 Nombre de capteurs 261
9.5 Critique des résultats 262

10 Conclusions et perspectives 263
10.1 Conclusion 264
10.1.1 Échantillonnage de signaux 264
10.1.2 Interaction véhicule-chaussée 265
10.2 Perspectives 266
10.2.1 Échantillonnage et analyse de signaux 267
10.2.2 Coopération véhicule-infrastructure-conducteur 268

A Inégalité de Wirtinger 281

Chapitre 1

Présentation de la thèse

1.1 Présentation générale

En génie civil comme dans bien d'autres domaines, on est constamment amené à étudier des signaux résultant d'un phénomène mécanique, physique ou chimique. Dans certaines situations favorables, on possède une modélisation précise du système étudié. Mais dans bien d'autres cas, exhiber un principe ou un système d'équations capable de prévoir avec précision l'évolution ou la réponse du phénomème étudié est une tâche très délicate voire impossible. Et cela même si le système est parfaitement déterministe.

L'absence de modélisation précise ne signifie pas pour autant que les signaux et réponses liés au phénomène étudié doivent être considérés comme quelconques. Par exemple, lorsque un météorologue étudie les variations de températures au mois de juillet à Dijon, il est en droit de considérer qu'elles ne seront ni négatives ni supérieures à cinquante degrés (^{o}C). De même lorsqu'on s'intéresse aux effets du vent sur les déplacements d'une structure (bâtiment, ouvrage d'art), on peut faire l'hypothèse que ceux-ci sont centrés autour d'une position d'équilibre et que les fréquences excitées par le vent se situent principalement dans le domaine des basses fréquences (quelques hertz).
Ainsi, on a généralement à sa disposition des informations qui permettent de faire des hypothèses quant aux phénomènes que l'on observe. Ces hypothèses peuvent être de simples remarques de bon sens comme dans les exemples donnés ci-dessus mais il peut aussi s'agir de conjectures plus précises telles la donnée d'une base de fonctions sur laquelle peut être développée la réponse du système observé, la période ou l'intensité du phénomène étudié, etc...

L'objet de ce travail de recherche est l'étude de systèmes mécaniques et plus particulièrement de l'estimation de paramètres régissant l'évolution de ces systèmes. Étant donné la complexité et le nombre de facteurs intervenant dans la réalisation de ces processus, il est difficile d'envisager une modélisation complète du système étudié. Par contre, on peut envisager d'en construire des modèles simplifiés et d'y ajouter des considérations mécaniques afin d'en améliorer la qualité et la précision. Une telle démarche permet de concilier une analyse mécanique ainsi qu'un traitement mathématique avec une approche plus pragmatique.

Plus précisément, le problème considéré dans le cadre de cette thèse peut être décrit de la façon suivante. On dispose de mesures discrètes, quelque(s) dizaine(s), de la réponse du système mécanique étudié. Comment peut-on estimer un ou plusieurs paramètres de ce système?

La voie suivie consiste en la reconstruction du signal mesuré à l'aide des mesures disponibles et ceci par le biais de techniques d'échantillonnage de signaux. Dans cette première étape, on cherche à mettre au point des algorithmes d'échantillonnage pouvant s'adapter à une large classe de problèmes et basés sur les propriétés spectrales des signaux étudiés.
Cette phase étant menée à bien, on cherche à illustrer les techniques proposées dans un cas concret, celui d'un poids lourd circulant sur une chaussée, les signaux à traiter étant liés aux vibrations des essieux excités par les irrégularités du profil en long du revêtement routier.

1.2 Objectifs de la thèse

En termes plus scientifiques que ceux utilisés dans le paragraphe ci-dessus, nous allons tenter de cerner les objectifs de ce travail de thèse. Soit à étudier une famille de fonctions dont chaque élément caractérise l'évolution d'un système qui peut être mécanique, économique, démographique, etc... On dispose d'un certain nombre d'échantillons de chaque fonction et on cherche à reconstruire chacune d'elles afin d'en extraire une information liée aux paramètres régissant le comportement du système étudié.

Sans information supplémentaire, le problème posé est bien entendu insoluble. En effet, si dans le plan on se donne par exemple r points $\{A_i\}_{i=1}^{r}$ de coordonnées respectives $(x_i, f(x_i))$, il existe une infinité de fonctions g vérifiant $g(x_i) = f(x_i)$. Et il n'y a aucun critère justifiant le choix d'une fonction g plutôt qu'une autre comme représentant de f.
Mais si en outre on connaît des informations quant aux spectres des signaux étudiés selon une transformation (de type Fourier, Gabor, Laplace,...) ou bien si l'on dispose d'une famille de fonctions selon laquelle on sait la reconstruction possible, alors la question posée mérite que l'on s'y attarde. Il s'agit alors de développer une technique ou d'en adapter une existante afin que la reconstruction intègre les informations même très partielles connues a priori. Une telle démarche n'est pas sans rappeler le développement pendant les années 50 et dans le cadre de l'analyse de Fourier, des travaux sur les sinus cardinaux. Ces fonctions étant intrinsèquement liées à la transformation de Fourier, elles sont naturellement un outil privilégié pour les problèmes de traitement des signaux harmoniques.
Nous avons tenté de suivre une voie parallèle à cette évolution et puisque notre objectif ne se limite pas à l'étude des seuls signaux harmoniques, on rejoint une préoccupation centrale depuis le début des années 80 en matière de traitement de signal : les techniques développées dans le cadre de l'ana-

lyse harmonique peuvent-elles être adaptées et étendues à des domaines plus larges de l'analyse fonctionnelle.

Illustrons ce propos à partir d'une situation simple. Étant donnée une fonction f vérifiant :

$$f \in L^2(\mathbb{R}), \qquad \text{supp}\, \hat{f}(z) = 0 \ \text{ pour } \ z \notin [-\omega, \omega]$$

avec $\hat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi j z t} dt$, c'est-à-dire que f vérifie une propriété spectrale vis à vis de la transformation de Fourier. On sait d'après le théorème de Shannon ([But83]) que l'on peut écrire :

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\frac{k\pi}{\omega}) \frac{\sin(\omega t - \pi k)}{\omega t - \pi k} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On déduit de ce résultat une famille de fonctions : les *sinus cardinaux* qui permettent d'effectuer la reconstruction de f à partir d'échantillons uniformément répartis sur $\mathbb{R}$. On s'aperçoit que les fonctions :

$$\left\{ \frac{\sin(\omega t - \pi k)}{\omega t - \pi k} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

ne sont pas liées à la fonction f elle-même mais aux propriétés de la transformation de Fourier. Nous reviendrons sur ce résultat très célèbre dans le paragraphe 2.3 mais il nous permet déjà d'envisager les questions que l'on pourra se poser dans une situation plus générale. De façon naturelle, on peut les formuler de la façon suivante :

- Existe-t-il d'autres types de transformation permettant d'obtenir le même type de résultat ?
- Peut-on associer une transformation à un modèle par exemple mécanique ? Ou vice-versa, comment définir une transformation à partir d'un modèle mécanique ?
- Que se passe-t-il lorsque les échantillons sont irrégulièrement espacés ou concentrés dans une région bien particulière ?
- Ce type de résultat peut-il être obtenu lorsque les échantillons ne sont plus les valeurs ponctuelles d'une fonction mais d'autres types d'informations telles les valeurs moyennes d'une fonction sur une succession d'intervalles ?

En d'autres termes, si on a à étudier une famille de fonctions $\mathcal{F} = \{f_i\}$ et si pour chaque élément f_i on connaît les $\{L_j(f_i)\}_{j=1}^{M}$ où $L_j(f_i)$ est un échantillon de f par exemple de la forme $L_j(f_i) = f_i(x_j)$, la problématique peut prendre trois formes différentes.

1. On connaît une famille de fonctions $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in I}$ qui permet d'engendrer $\mathcal{F}$ et il s'agit de trouver une condition sur les L_i et un algorithme afin d'obtenir :

$$f_{i_0}(t) = \sum_i \alpha_i g_i(t) \quad \forall i_0 \tag{1.1}$$

où le calcul de chaque α_i se fait à partir des $L_j(f_{i_0})$. On se demande alors si il existe une transformation et un modèle qui puisse être associé à la famille $\mathcal{G}$.

2. Cette fois, on dispose d'un modèle du système étudié. On va alors chercher une transformation puis lui associer une famille de fonction $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in I}$ afin d'obtenir une écriture semblable à (1.1).

3. On connaît les propriétés spectrales des f_i selon une transformation. Il reste à trouver la famille $\mathcal{G}$ associée à cette transformation et un modèle mécanique dont les éléments de $\mathcal{G}$ découlent.

On peut aussi aborder les objectifs de cette thèse sous un autre angle en faisant la distinction entre technique mathématique et analyse mécanique. De ce point de vue, la première partie de ce travail cherche à répondre à la question suivante : on a des informations, autres que de simples mesures, sur le(s) phénomène(s) étudié(s). Comment les utiliser pour le traitement des signaux que l'on possède. La seconde partie quant à elle tente de répondre à la question : comment obtenir ces informations ?
Chronologiquement, on pourrait être tenté de placer cette seconde interrogation en premier. Mais s'il est raisonnable de penser qu'une méthode d'échantillonnage puisse facilement être transposée à l'étude de nombreuses situations. Il semble que l'obtention des propriétés spectrales des réponses d'un système mécanique ne puisse pas être traitée de façon générale. La démarche sera donc exposée dans la partie II dans le cadre d'une application précise liée à la dynamique des véhicules routiers.

1.3 Plan de la thèse

La distinction précédente faite entre ce qui est plutôt du domaine mathématique ou plutôt du domaine mécanique est à la base de l'organisation de

ce mémoire. Il est divisé en deux parties complémentaires. Tout d'abord une partie traitant des problèmes de reconstruction de signaux puis une seconde partie consacrée à l'application des outils développés à l'étude du comportement vibratoire d'un véhicule lourd.

1.3.1 Échantillonnage des signaux à bande limitée

Après un bref historique des techniques d'interpolation puis d'échantillonnage, on présente les contributions récentes dans ce domaine en soulignant l'importance de la notion de repère. Cette notion est présentée ainsi que les principaux résultats qui y sont attachés. Nous proposons quelques propriétés reliant directement les concepts de repère et d'échantillonnage.

On construit ensuite des méthodes d'échantillonnage des signaux à bande limitée selon une transformation *discrète* en s'appuyant sur les propriétés des repères dans un espace de Hilbert. Les algorithmes présentés peuvent être itératifs ou directs, leur stabilité est discutée et des estimations d'erreur vis à vis de diverses formes de bruit sont fournies. Ils s'appliquent aux signaux à une ou plusieurs dimensions.
Après avoir traité du cas *discret*, les résultats liés à la théorie de la repésentation des groupes permettent de définir une transformation *continue* associée à une représentation de groupe. Des techniques d'échantillonnage de signaux possédant diverses propriétés spectrales selon ces transformations sont développées. On s'attarde principalement sur une généralisation d'un résultat de Xiao et Changbai ([Xia97]).
Finalement, les méthodes mises au point sont testées sur des signaux unidimensionnels et bidimensionnels simulés numériquement puis sur des signaux expérimentaux.

1.3.2 Application à l'étude de l'interaction dynamique véhicule-chaussée et au pesage en marche

Dans un premier temps, on cherche à construire des modèles simplifiés de poids lourds et l'on simule les forces d'impact de leurs essieux sur une portion d'uni de chaussée. On montre ainsi que l'on peut avoir une bonne approximation des variations de la force d'impact en ne considérant que les mouvements de pompage et de tangage du modèle linéaire équivalent au modèle considéré. Dans un cadre un peu plus général, on montre ensuite comment à partir d'un modèle quelconque, on peut obtenir la décomposition de la force d'impact d'un essieu sur une famille de fonctions tenant compte des caractéristiques

de la chaussée et du véhicule. À la fin de cette seconde partie, on cherche à utiliser l'analyse mécanique présentée ci-dessus ainsi que les algorithmes d'échantillonnage étudiés dans la première partie afin de mettre au point une méthode de reconstruction des variations de la force d'impact d'un essieu et d'estimation de son poids statique ; la procédure n'utilisant que quelques mesures de la force d'impact données par des capteurs insérés dans la chaussée.

Volontairement, le style et l'organisation des deux grandes parties de ce mémoire sont sensiblement différents. On a cherché à privilégier une démarche structurée dans la première et une approche plus pragmatique dans la seconde.

ÉCOLE DES PONTS&CHAUSSÉES BIBLIOTHÈQUE

Partie I

Échantillonnage irrégulier des signaux à bande limitée

Chapitre 2

L'échantillonnage

2.1 Historique

Tout au long de la première partie de ce mémoire, nous allons parler d'échantillonnage, de reconstruction, d'interpolation et d'approximation de signaux ou de fonctions. Et puisque chacun de ces termes possède une signification à la fois précise et voisine de celle des autres, il est nécessaire de définir chacune de ces expressions.
Pourtant la connaissance exacte de la signification de ces notions n'est pas suffisante pour présenter objectivement le travail effectué. En effet, ce travail est certes caractérisé par le sujet tel qu'il a été formulé, la démarche et les objectifs tels qu'ils ont été annoncés précédemment mais aussi par l'état des recherches menées sur le sujet et par l'évolution des connaissances dans des domaines voisins. Ainsi, après avoir rappelé les quelques définitions importantes, nous tenterons au travers de quelques dates et découvertes d'appréhender la génèse et l'évolution des connaissances en matière d'interpolation et d'échantillonnage.
Dans une deuxième étape, on donnera une caractérisation plus précise de la notion d'échantillonnage et on s'attardera sur les évolutions, les contributions et les enjeux actuels de la recherche dans ce domaine.

2.1.1 L'interpolation

D'un point de vue général, l'interpolation consiste au passage d'une description *discrète* à une description *continue*. Étant donnée une famille $\mathcal{G}$ de fonctions définies en tout point d'un domaine D et un ensemble de points $\{x_n\}_{n\in I} \subset D$ de ce domaine ainsi qu'un ensemble de valeurs $\{y_n\}_{n\in I}$, le problème général de l'interpolation peut être présenté de la façon suivante :

1. Existe-t-il un élément f de $\mathcal{G}$ tel que :

$$f(x_n) = y_n \qquad \forall n \in I$$

2. Si oui, comment déterminer la fonction f ?

Dans la pratique, l'interpolation est généralement intrinsèquement liée à des problèmes d'analyse numérique ou d'expérimentation où l'on obtient des résultats discrets sensés correspondre à des phénomènes continus. Afin d'illustrer les principes de l'interpolation et parmi tous les types d'interpolation existants, citons l'interpolation polynômiale. Cette technique fait, encore aujourd'hui, l'objet de nombreuses recherches aux fondements très complexes ([Wal97a], [Wal97b]) mais elle est aussi telle la prose de M. Jourdain, un outil très naturel, utilisé très communément puisqu'elle peut consister à relier un

ensemble de points par une ligne brisée.
Plus précisément, le résultat central de l'interpolation polynômiale se présente sous la forme suivante :

Théorème 1 *Soit $\mathcal{P}_N$ l'espace des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à N. Étant donnés $N+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_N$ et $N+1$ valeurs $y_0, y_1, \ldots, y_N$, il existe un unique polynôme $P \in \mathcal{P}_N$ tel que :*

$$P(x_i) = y_i \qquad i = 0, 1, \ldots, N$$

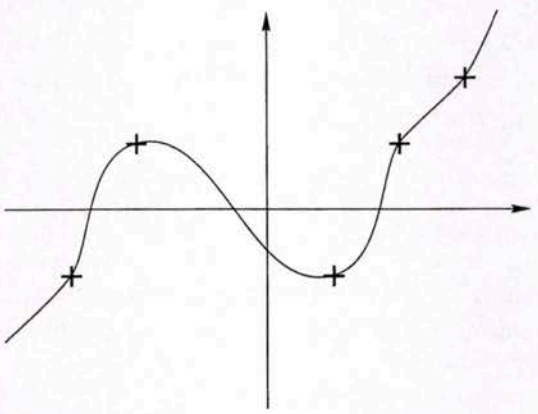


Figure 2.1 : Interpolation polynomiale

2.1.2 L'échantillonnage

Le problème de l'échantillonnage peut être considéré comme le problème dual de celui de l'interpolation, il se formule de la façon suivante.
Soit une famille de fonctions définies sur un domaine D', peut-on trouver un ensemble discret $\Lambda = \{x_i\}_{i \in I}$ de D' tel que chaque élément f de cette famille soit déterminé de manière unique par l'ensemble des valeurs $\{f(x_i)\}_{i \in I}$ qu'il prend sur Λ ? Et si oui, comment retrouver complètement cette fonction en utilisant seulement ces échantillons. C'est-à-dire peut-on avoir une écriture de f sous la forme :

$$f(x) = \sum_i f(x_i)\, g_i(x)$$

ou bien sous la forme :

$$f(x) = \sum_i a_i\, \tilde{g}_i(x)$$

où les fonctions g_i ainsi que $\tilde{g}_i$ sont à déterminer et où les coefficients a_i dépendent uniquement des échantillons $\{f(x_i)\}_{i\in I}$.

Le terme de reconstruction a quant à lui, une signification un peu plus large qui inclut celle d'échantillonnage. La reconstruction d'une fonction f à l'aide des éléments $\{g_i\}$ consiste en la recherche de coefficients a_i tel que l'on ait :

$$f(x) = \sum_i a_i \, g_i(x)$$

mais où les a_i ne sont pas obtenus nécessairement et directement grâce à des valeurs $\{f(x_i)\}$.
La distinction entre échantillonnage et reconstruction peut vite devenir subtile dès que l'on envisage des situations où les échantillons disponibles ne sont plus exactement les valeurs ponctuelles du signal étudié mais des quantités qui s'en rapprochent, du type :

$$\frac{df}{dx}(x_i) \qquad \text{ou} \qquad \int_{x_i/2}^{3x_i/2} f(t)dt.$$

Par la suite, on désignera donc par technique d'échantillonnage un procédé permettant la reconstruction à l'aide d'informations effectivement mesurables.

2.2 Historique

Ce bref historique tente grâce à certains faits marquants de retracer les grandes lignes de l'évolution de la science dans les domaines de l'interpolation et de l'échantillonnage. Il couvre la période allant du XVII^e siècle jusqu'au milieu du XX^e siècle et est largement inspiré de l'introduction de l'ouvrage de J.R. Higgins (1996) ([Hig96]) ainsi que de certains articles de Butzer et al. ([But71], [But83], [But91]).

Le XVII^e siècle

L'interpolation est née du besoin de calculer les valeurs d'une fonction qui étaient intermédiaires entre les valeurs déjà tabulées. Il s'agissait alors de pouvoir effectuer un tel calcul à partir des valeurs voisines connues sans avoir à reprendre entièrement le calcul depuis le début. Des méthodes utilisant des différences successives et modifiées furent développées par Briggs et publiées à Londres en 1624 dans l'ouvrage *Arithmetica Logarithmica.* Elles semblent la première contribution au problème de l'interpolation.
Dans les années 1650, les idées et développements apportés par Wallis eurent

une grande influence et il fut le premier à introduire le terme d'*interpolation*[1]. Mais Gregory et Newton furent les premiers à reconnaître la nature polynômiale des interpolants basés sur les différences successives. Ainsi, dans une lettre du 23 novembre 1670 à Collins, Gregory donna la première interpolation d'une fonction f par une série sous la forme :

$$f(0) + t\Delta f(0) + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f(0) + \ldots + \frac{t\ldots(t-M+1)}{M!}\Delta^M f(0) \tag{2.1}$$

où

$$\begin{aligned} \Delta f(0) &= f(1) - f(0) \\ \Delta^2 f(0) &= \Delta f(1) - \Delta f(0) = f(2) - 2f(1) + f(0) \\ &\ldots . \\ \Delta^p f(0) &= \Delta^{p-1} f(1) - \Delta^{p-1} f(0). \end{aligned}$$

Cette formule résout le problème de l'interpolation en un nombre fini de points par un polynôme de degré au plus M qui prend les valeurs $f(i)$ en $t = i$ pour $0 \leq i \leq M$.

Dans les années 1670, Newton introduisit la notion de différences divisées et de différences divisées ajustées. Sa méthode ainsi que celle de Grégory revenait en fait à considérer qu'un polynôme de la forme (2.1) est une bonne approximation de la fonction à interpoler ([Whi61], p. 250). Il condensa ainsi les formules connues à cette époque de la façon suivante :

$$f(\lambda_0) + (t-\lambda_0)f(\lambda_0,\lambda_1) + \ldots + (t-\lambda_0)\ldots(t-\lambda_{M-1})f(\lambda_0,\ldots,\lambda_M) \tag{2.2}$$

avec

$$\begin{aligned} f(\lambda_0,\lambda_1) &= \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_0)}{\lambda_1 - \lambda_0} \\ f(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2) &= \frac{f(\lambda_1,\lambda_2) - f(\lambda_0,\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_0} \\ &\text{etc}\ldots \end{aligned}$$

La formule de Newton est connue sous l'appellation *formule des différences divisées*. Elle généralise (2.1) puisque les points d'interpolation ne sont plus nécessairement des entiers mais une suite de nombres réels $(\lambda_j)_{j=0}^M$. Les deux expressions sont identiques pour $\lambda_j = j$.

[1] In *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1655.

Le XVIII^e siècle

L'expression (2.2) peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\sum_{j=0}^{M} f(\lambda_j) \frac{G_M(t)}{G'_M(\lambda_j)(t-\lambda_j)} \tag{2.3}$$

avec $G_M(t) = \Pi_{j=0}^{M}(1 - \frac{t}{\lambda_j})$. Les deux écritures (2.2) et (2.3) sont identiques puisqu'il s'agit de deux polynômes de degré M prenant les mêmes valeurs en les points $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq M}$.
Cette dernière expression est aujourd'hui appelée *formule de Lagrange*. Elle est apparue dans une série de cours que Lagrange donna à l'École Normale Supérieure à Paris en 1795. Pourtant, elle avait déjà été découverte par Waring en 1779 ([War79], p. 59) dont l'objectif était de construire un interpolant polynômial sans avoir recours aux différences successives. Ce fut une grande avancée puisque la formule de Lagrange donne l'expression de l'interpolation polynômiale directement à l'aide des échantillons sous forme d'une série.

Le XIX^e siècle

Les premiers travaux sur l'interpolation par des fonctions périodiques remontent au XIX^e siècle. Ainsi, la représentation d'une fonction périodique de la forme $p(t) = \sum_{-M}^{M} c_k e^{ikt}$ à l'aide d'un nombre fini de ces échantillons est donnée par la formule :

$$p(t) = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=0}^{2M} p(\frac{2\pi k}{2M+1}) \frac{\sin\left[(M+\frac{1}{2})\left(t - \frac{2\pi k}{2M+1}\right)\right]}{\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi k}{2M+1}\right)}.$$

Cette série finie d'échantillons a été donnée par Cauchy en 1841 bien qu'elle soit présente sous des formes un peu différentes dans les travaux de Gauss remontant aux années 1805, à ce sujet voir Burkhardt ([Bur07]).

Le XIX^e siècle vit l'extension de l'interpolation avec un nombre fini de points au cas d'un nombre infini de points (sans point d'accumulation dans $\mathbb{R}$). Cette extension se fit à partir de la formule de Lagrange et s'écrit :

$$\sum_n f(\lambda_n) \frac{\phi(z)}{\phi'(\lambda_n)(z-\lambda_n)}$$

où ϕ est une fonction possédant des racines simples aux points $\{\lambda_n\}$. Une formule plus générale est :

$$\sum_n f(\lambda_n) \left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^{s_n} \frac{\phi(z)}{\phi'(\lambda_n)(z-\lambda_n)}$$

dans laquelle (s_n) est une suite d'entiers choisis afin d'assurer la convergence ([Whi35], p. 3).
En 1899, Borel fit $\lambda_n = n$ dans la formule précédente et utilisant le fait que la fonction $sin\,\pi z$ possède les zéros appropriés, il obtint le premier résultat concernant les séries faisant intervenir des sinus cardinaux. Borel fut à l'origine, en 1897, d'un autre résultat significatif. Il observa que toute fonction de la forme :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{ixt} dx$$

avec une condition peu restrictive sur g, est déterminée de façon unique par ses échantillons $f(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Ce résultat est déterminant puisqu'il montre qu'il montre l'équivalence entre les informations contenues dans un signal continu et celles contenues dans un ensemble discret. On peut considérer que ces deux contributions de Borel sont le point de départ de toutes les techniques d'échantillonnage telles que nous les connaissons.

Toujours au XIX^e siècle, on peut aussi mentionner les travaux de Guichard (1884). Lui aussi étendit l'interpolation de Lagrange au cas d'un nombre de points infini mais pour des fonctions à croissance particulière (espaces de Bernstein). Sa méthode est aujourd'hui connue sous le nom d'interpolation de Valiron.

Le XX^e siècle

Pendant la première moitié du XX^e siècle, il y eut beaucoup de travaux sur les séries de sinus cardinaux en utilisant sous diverses formes la formule de Lagrange. Ces séries furent redécouvertes plusieurs fois dans des circonstances diverses. Citons par exemple Whipple en 1910 et E.T. Whittaker en 1915 ([Whi15]) qui indépendamment l'un de l'autre, retrouvèrent ces séries en travaillant sur les fonctions à bande limitée. Selon Butzer et Stens ([But92]), ce fut Ogura en 1920 qui fournit la première démonstration rigoureuse de la représentation de certaines fonctions par série de sinus cardinaux. Dans les années 1930, plusieurs études parurent dans lesquelles les séries de sinus cardinaux et les séries de Valiron étaient utilisées pour déduire le comportement d'une fonction à partir de la connaissance de ces valeurs sur une suite de points.

En 1941, Hardy ([Har41]) remarqua que les composants des séries de sinus cardinaux étaient orthogonaux, ce fut alors le point de départ de nombreuses recherches en matière d'échantillonnage et de reconstruction de fonctions à

partir de bases d'espaces de Hilbert puis de Banach.

L'année 1949 vit la publication de nombreux résultats obtenus apparemment indépendament, citons ceux de Weston ([Wes49]) et de Someya mais surtout la contribution de Shannon ([Sha49]) qui introduisit des méthodes d'échantillonnage dans le domaine du transport d'informations. Des travaux antérieurs tels que ceux de Raabe en 1939 ne sont pas sans similitudes avec ceux de Shannon. Citons surtout les résultats publiés par Kotel'nikov en 1933 qui restèrent peu connus en occident jusque dans les années 60. Ces développements, plus particulièrement ceux de Shannon, s'avérèrent très utiles et trouvèrent un vaste champ d'applications dans le domaine des communications et plus particulièrement en traitement des signaux. Ces applications ont joué et continuent à jouer un rôle très importants dans le développement des recherches. Tout d'abord elles ont contribué à les financer et donc à les stimuler mais aussi à les orienter et peut-être parfois à les contraindre dans des secteurs bien précis.

Il est important de mentionner au XX^e siècle deux autres contributions importantes. Tout d'abord les travaux de de la Vallée Poussin ([But97]) qui en 1908 développa une théorie de l'échantillonnage des signaux à temps limité (un signal u est dit à temps limité si $u(t) = 0$ pour $t \notin \Omega$ où Ω est un intervalle borné de $\mathbb{R}$). Mais aussi les recherches de Beurling qui dans les années 1930 a mis au point, indépendemment des auteurs précédemment cités, des techniques d'échantillonnage ne prenant pas uniquement en compte les valeurs d'une fonction en certains points mais aussi les valeurs de ses dérivées. Ces travaux ont été révélés par une étude Valeer en 1985 ([Val85]).

2.3 La théorie de l'échantillonnage

Le paragraphe précédent nous a permis de définir brièvement les notions d'interpolation et d'échantillonnage ainsi que de retracer l'évolution de ces deux disciplines. Nous avons déjà mentionné que la distinction entre ces deux notions n'est pas toujours évidente ; d'un point de vue historique elle est apparue dans les années 1950. Nous nous proposons donc dans ce paragraphe de définir de façon plus précise la notion d'échantillonnage et de mentionner les résultats importants et les évolutions propres à la théorie de l'échantillonnage depuis une cinquantaine d'années.

2.3.1 Introduction

Supposons qu'une fonction f définie en tout point d'un domaine D admette un développement de la forme :

$$f(t) = \sum_{n \in I} f(\lambda_n) S_n(t)$$

où $\{\lambda_n\}_{n \in I}$ est un ensemble de points de D et $\{S_n\}_{n \in I}$, une famille de fonctions définies sur D. Les fonctions S_n sont indépendantes des abscisses λ_n. Le membre de droite de l'égalité ci-dessus est une représentation de f à l'aide de ces échantillons. L'obtention et l'étude de telles représentations est l'objet de la théorie de l'échantillonnage.

Mais on peut aussi présenter l'échantillonnage sous un autre angle. Soit Φ, l'application linéaire d'un espace de fonctions E dans $\mathbb{R}^I$ telle que :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^I \\ & f & \mapsto & \{f(\lambda_n)\}_{n \in I}. \end{array}$$

Échantillonner la fonction f signifie alors exprimer, à l'aide de la famille des fonctions $\{S_n\}$, l'antécédent de f par Φ. Cette façon de présenter les problèmes d'échantillonnage sera privilégiée tout au long de ce travail, elle met en évidence les différences entre les questions d'interpolation et d'échantillonnage. Lorsque l'on cherche à interpoler une fonction f à l'aide des éléments d'une famille $\{S_n\}$, on a généralement :

$$f \notin \text{vect}\,(S_n)$$

et il ne s'agit plus d'un problème de reconstruction mais d'approximation de f.

Cependant ces différences, bien réelles en théorie ont tendance à s'estomper quand on cherche à appliquer *in situ* des techniques d'échantillonnage. En effet, dès que l'on possède des échantillons obtenus expérimentalement, on doit tenir compte du bruit sur chaque mesure et on a alors couplé les problèmes d'échantillonnage et d'approximation.

2.3.2 Un exemple simple

Avant de s'attarder sur les problèmes de l'échantillonnage d'une fonction, nous tentons de cerner les contraintes que nous allons rencontrer par le biais de deux exemples simples.

Premières constatations

Soit $\mathcal{X}$, l'espace des fonctions définies sur $[-1,1]$ et de la forme: $\{a_0 + a_1 x, (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2\}$ et soit $(x_0, x_1) \in [-1,1]^2$. Il est clair que $\mathcal{X}$ est un espace vectoriel de dimension 2. Considérons que l'échantillonnage dont on dispose est donné:

$$L_0 : f \mapsto f(x_0) \quad \text{et} \quad L_1 : f \mapsto f(x_1).$$

Ainsi, on peut écrire:

$$f(x) = a_0 + a_1 x = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

soit:

$$f(x) = L_0(f)\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + L_1(f)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \tag{2.4}$$

Cette écriture fournit une décomposition d'un élément de $\mathcal{X}$ à l'aide de ces échantillons. Bien que très simple, cet exemple nous permet de faire deux remarques:

1. pour qu'une telle décomposition soit utile et applicable, il faut que les fonctions servant pour la reconstruction ici $S_0(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}$ et $S_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ soient indépendantes de la fonction f considérée.

2. Cet exemple illustre en fait la constatation suivante: par deux points distincts passe une unique droite. Mais dans la pratique, lorsque les mesures $L_0(f)$ et $L_1(f)$ sont bruitées et lorsque les points x_0 et x_1 se rapprochent l'un de l'autre, la détermination de la droite qui les relie devient plus complexe. Cette constatation est d'une grande importance dès que l'on parle d'échantillonnage irrégulier et pose le problème de la répartition géométrique des échantillons vis à vis de la stabilité de la reconstruction.

Secondes constatations

Considérons cette fois que $\mathcal{X}$ représente l'espace des fonctions définies sur $[-1,1]$ et de la forme: $\{a_0 + a_1 x^2, (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2\}$. $\mathcal{X}$ est toujours un espace vectoriel de dimension 2. Mais contrairement au cas précédent, les éléments de $\mathcal{X}$ étant des paraboles, deux points distincts ne suffisent pas toujours à déterminer entièrement un élément de $\mathcal{X}$. En effet, les éléments de $\mathcal{X}$ étant pairs par rapport à l'axe des ordonnées, si l'on choisit $x_1 = -x_0$, l'information apportée par $L_1(f)$ sera identique à celle contenue dans $L_0(f)$ (figure 2.2).

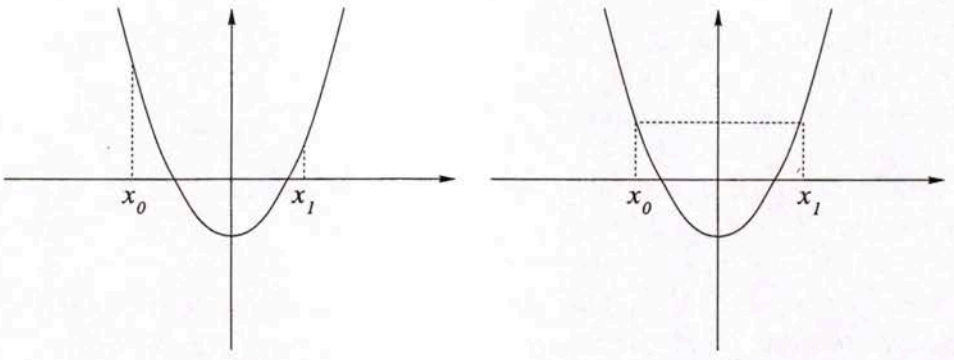


Figure 2.2 : *(a)* cas où $x_0 \neq -x_1$ et *(b)* cas où $x_0 = -x_1$.

Sur cet exemple on voit que tout élément f de $\mathcal{X}$ pourra se mettre sous une forme analogue à (2.4) :

$$f(x) = L_0(f)\frac{x^2 - x_1^2}{x_0^2 - x_1^2} - L_1(f)\frac{x^2}{x_0^2 - x_1^2}$$

dès que $|x_0| \neq |x_1|$.

2.3.3 Historique de l'échantillonnage

Après les travaux de Borel à la fin du XIX^e siècle, la notion d'échantillonnage d'une fonction et de fréquence d'échantillonnage apparaît à la fin des années 1920 et plus particulièrement avec les travaux de Nyquist. Si on échantillonne un signal à une fréquence trop faible (sous-échantillonnage), on perd de l'information et on ne pourra donc pas reconstruire l'original mais à partir d'une fréquence limite (échantillonnage) ou au delà (suréchantillonnage), les échantillons contiennent toute l'information apportée par le signal.

Cette notion de fréquence d'échantillonnage a permis le lien entre la valeur d'une fonction en un point et le produit de cette même fonction par une distribution de Dirac ; cette correspondance aboutira à l'échantillonnage d'une fonction f par le biais du peigne de Dirac selon l'expression :

$$f_s(t) = f(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - n\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n\tau)\delta(t - n\tau).$$

Cette écriture bien que peu rigoureuse d'un point de vue mathématique a été utilisée à partir des années 50 pour obtenir de multiples formules de

reconstruction. Elle suggèra alors qu'une fonction f puisse être représentée sous la forme :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n\tau)g(t - n\tau)$$

où g est une fonction indépendante de f. Le problème fut donc de trouver une fonction g ainsi qu'une valeur de τ adéquates.

Les travaux de J.M. Whittaker en 1935 ([Whi35]) apportaient des éléments de réponse à ces questions, mais ce fut l'ingénieur en électricité russe Kotel'nikov qui en 1933 ([Kot33]) proposa le premier théorème d'échantillonnage pour les fonctions à énergie finie et dont la transformation de Fourier est à support dans $[-\omega, \omega]$, sous la forme :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n\pi}{\omega}\right) \operatorname{sinc}(\omega t - n\pi) \tag{2.5}$$

où $\operatorname{sinc}(v) = \sin v/v$. Pour les raisons évoquées au paragraphe 2.2, cette égalité porte le nom de thèorème d'échantillonnage de Shannon-Kotel'nikov. Ce résultat est d'une importance capitale en théorie des communications puisqu'il établit, pour une large catégorie de signaux, que toute l'information contenue dans une fonction peut être connue à partir de la connaissance d'un certain nombre de ces échantillons.

Ce théorème fut l'objet de multiples variantes ([Jer65]) et fut ensuite étendu aux espaces de *Bernstein* et de *Paley-Wiener*, voir à ce sujet les ouvrages de Young et Higgins ([You80], pp. 105-109 et [Hig96], pp. 48-76). Il faut noter que ce théorème d'échantillonnage dans une formulation un peu plus générale se rapproche d'autres résultats d'analyse célèbres. Ainsi, on montre ([Hig96], p. 90-100) que les cinq résultats ci-dessous sont rigoureusement équivalents.

Théorème d'échantillonnage généralisé *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ *telle que* $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ *alors on a :*

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{\omega}\right) sinc(\omega t - n) + \sqrt{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 - e^{2\pi i k\omega t}) \int_{(2k-1)\pi\omega}^{(2k+1)\pi\omega} \hat{f}(x) e^{ixt} dx.$$

Le second terme est du au phénomène de repliement de spectre, voir (4.5).

Formule sommatoire de Poisson *Soit* $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ *et telle que* $f' \in L^1(\mathbb{R})$, *on a alors la convergence absolue et l'égalité des séries :*

$$\sqrt{A} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(Ak) = \sqrt{B} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(Bk) \quad A > 0,\ AB = 2\pi.$$

Formule sommatoire d'Euler-MacLaurin *Si* $f \in C^{2r+1}[n,m]$ *avec* $r \in \mathbb{N}^*$ *et* $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ *avec* $n < m$ *alors il vient :*

$$\sum_{k=n}^{m} f(k) = \int_n^m f(t)dt + \frac{f(n)+f(m)}{2} + \sum_{k=1}^{r} B_{2k} \frac{f^{2k-1}(m) - f^{2k-1}(n)}{(2k)!} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi ik)^{2r+1}} \int_n^m f^{2r+1}(t) e^{-2\pi ikt} dt$$

où les B_{2k} *sont les nombres de Bernoulli pairs.*

Formule sommatoire d'Abel-Plana *Soit* f *une fonction holomorphe dans le domaine* $D = \{z \in \mathbb{C},\ Re(z) \geq 0\}$ *et telle que la série* $\sum_0^\infty f(n)$ *ou l'intégrale* $\int_0^\infty f(t)dt$ *soient convergentes. On suppose de plus que :*

$$\lim_{v \to \infty} |f(u \pm iv)| e^{-2\pi v} = 0$$

localement uniformément en u *et que :*

$$\int_0^\infty |f(u \pm iv| e^{-2\pi v} dv$$

existe pour tout $u \geq 0$ *et tend vers 0 quand* $u \to \infty$. *On a alors :*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = \frac{f(0)}{2} + \int_0^\infty f(u)du + i \int_0^\infty \frac{f(iv) - f(-iv)}{e^{2\pi v} - 1} dv.$$

Fonction ζ de Riemann *La fonction* ζ *de Riemann définie par :*

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$$

est holomorphe pour $Re(z) > 1$ *et satisfait l'équation fonctionnelle :*

$$\xi(\zeta) = \xi(1 - \zeta)$$

avec $\xi(\zeta) = \frac{z(z-1)}{2} \pi^{-z/2} \Gamma(z/2) \zeta(z)$, *la fonction* Γ *d'Euler étant définie par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt \quad Re(z) > 0.$$

Ces résultats (excepté celui concernant la fonction ζ) font explicitement référence à un échantillonnage régulier mais ils peuvent être étendus au cas d'échantillons quasi-régulièrement espacés. Citons par exemple les travaux de Paley et Wiener qui à partir de la relation (2.5), relièrent les perturbations sur les fonctions sinc $(\omega t - \pi n)$ à des perturbations de l'espacement des échantillons, ([Fei93b], p. 10-13).

À la suite des travaux de Shannon, la recherche en matière de reconstruction de fonctions se développa plus particulièrement dans des domaines liés à la théorie de l'information et cela grâce à des outils d'analyse harmonique. L'analyse de Fourier grâce à la dualité de la représentation temps-fréquence ainsi que les cinq outils mentionnés ci-dessus permirent d'obtenir de nombreux théorèmes d'échantillonnage à partir des propriétés de la transformée de Fourier de la fonction considérée ainsi que des propriétés d'orthogonalité dans les espaces de Hilbert.
De nombreux travaux mériteraient d'être évoqués mais nous préférons nous attarder sur quelques développements traitant de l'échantillonnage irrégulier.

2.3.4 L'échantillonnage irrégulier

À l'origine, ce problème fut traité par extension du cas où les échantillons sont régulièrement espacés. Complétant les travaux de Paley et Wiener, Duffin et Schaffer ([Duf52]) proposèrent un algorithme de reconstruction où les échantillons sont fortement non régulièrement espacés. L'échantillonnage irrégulier souleva des questions théoriques importantes et les travaux de Beurling, Maillavin et Landau ([Beu64], [Beu67], [Lan67]) au milieu des années 60 en sont la concrétisation.

Diverses méthodes directes ou itératives de reconstruction ont été mises au point. Un grand nombre d'entre elles utilisent les propriétés des repères dans un espace de Hilbert. Les contributions les plus significatives en matière d'échantillonnage irrégulier semblent être celles de Papoulis ([Pap77]), de Marvasti ([Mar86], [Mar89]), de Sauer et Allebach ([Sau87]), de Xiao ([Xia97]) ainsi que les travaux effectués au Département d'Analyse Harmonique (NUHAG) de l'université de Vienne (Autriche). À ce propos, citons plus particulièrement les contributions très importantes apportées par Feichtinger, Gröchenig et Strohmer ([Fei91], [Fei92b], [Grö93a], [Fei93a], [Fei93b], [Str97] et [Str95]). Le paragraphe suivant tente de trouver un dénominateur commun à toutes ces recherches.

2.3.5 Échantillonnage et analyse harmonique

L'analyse de Fourier permet entre autre, d'avoir deux représentations équivalentes d'un signal : signal temporel et signal fréquentiel. Cette dualité est obtenue par le biais de la transformation de Fourier continue ou discrète :

$$f \iff \mathcal{F}(f)(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt$$
$$s \iff \mathcal{T}(s)(p) = \sum_{k=0}^{N} s(k)e^{-2i\pi\frac{kp}{N}}.$$

Et si la transformation de Fourier d'un signal appartient à un espace de fonctions relativement simple - c'est le cas des signaux à bande limitée i.e. les signaux pour lesquels la transformation de Fourier s'annule à l'extérieur d'un certain intervalle - on peut alors mettre au point des techniques d'échantillonnage utilisant les propriétés de la représentation fréquentielle, voir figure 2.3.

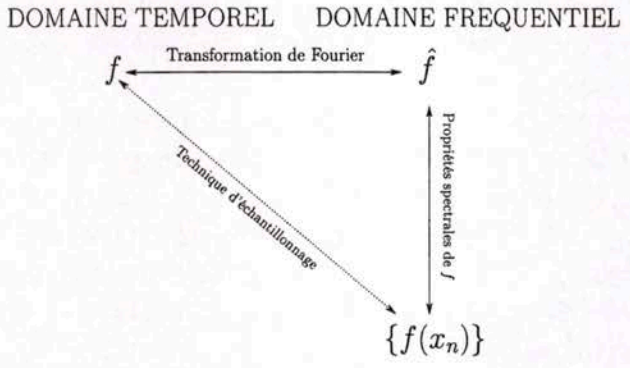


Figure 2.3 : Mise au point d'une technique d'échantillonnage à partir des propriétés de la représentation fréquentielle d'un signal.

Il est certain qu'un grand nombre de signaux sont tout à fait adaptés à ce type d'analyse et jusqu'au milieu des années 1980, la théorie de l'échantillonnage a été principalement développée et employée dans le contexte de l'analyse harmonique. Son utilisation dans le domaine plus large de l'analyse fonctionnelle est récente et coïncide avec les premiers résultats concernant l'échantillonnage irrégulier et l'apparition de nouvelles techniques telles les ondelettes. Dans un premier temps, divers résultats et algorithmes liés à la transformation de Fourier traditionnelle ont été développés pour les transformations de Gabor ([Chr95], [Fei97]), transformations de Fourier à temps court ([Fei92c], [Fei95]) et transformation en ondelettes ([Fei92a], [Grö93b]).

Avec l'apparition du formalisme lié aux transformations associées à une représentation de groupe ([Duf76], [Gro85]), des techniques d'échantillonnage associées à ce type de transformation sont apparues, voir à ce sujet Christensen ([Chr96]) ainsi que le paragraphe 5.7.5 de ce mémoire.

Même si on observe actuellement le développement d'outils propres à l'analyse fonctionnelle et comme le montre la conclusion de l'article de Xiao et Zou ([Xia97]), il reste beaucoup à faire pour que le traitement de signal soit considéré comme partie intégrante de l'analyse fonctionnelle. C'est dans cette logique que tente de s'inscrire ce travail.

2.3.6 Qu'est-ce qu'une transformation ?

À plusieurs reprises et particulièrement dans le paragraphe précédent, nous avons parlé de transformations fonctionnelles parmi lesquelles la transformation de Fourier. Ces outils sont très utiles en traitement de signal et la construction mathématique d'une transformation sera évoquée dans les paragraphes 4.7 et 5.4. Un formalisme permettant ces constructions est donné en 4.3.3 (p. 76).
D'un point de vue pratique, une transformation est comme son nom l'indique, une représentation équivalente qui permet de privilégier certaines composantes des fonctions étudiées. Ainsi, la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ d'une fonction f donne les composantes harmoniques qui composent f. Par exemple, la représentation dans le domaine fréquentiel des fonctions sinus et sinus cardinal est respectivement deux distributions de Dirac et une fonction caractéristique d'intervalle (figure 2.4).

Suivant les propriétés que possèdent les fonctions à étudier, on peut donc être amené à utiliser ou à définir une transformation fonctionnelle associée aux composantes des signaux étudiés.
Les transformations fonctionnelles sont à la base de presque toutes les techniques d'échantillonnage ou de reconstruction développées. En effet sans informations a priori sur la composition des signaux étudiés, les méthodes proposées ne peuvent être que très générales et peu précises. Il est évident que la reconstruction de la fonction représentée par la figure 2.5 ci-dessous peut être reconstruite à partir d'éléments de la forme $\{e^{i\pi nt}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ mais cela nécessitera un grand nombre (infini) d'éléments alors que la reconstruction à partir de fonctions affines par morceaux est immédiate.
Si l'on cherche à classifier les techniques d'échantillonnage ou de reconstruction, cette remarque illustre parfaitement les deux grandes familles que l'on peut distinguer.

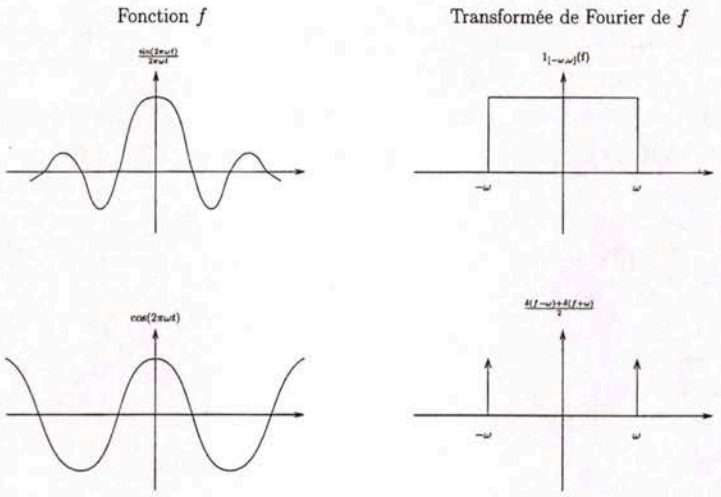


Figure 2.4 : Deux types de fonctions dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ a des propriétés remarquables.

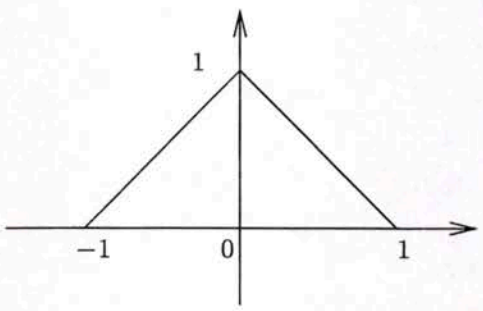


Figure 2.5 : Fonction dont les singularités font apparaître des harmoniques hautes fréquences dans sa transformée de Fourier.

2.3.7 Deux tendances

Au delà du contexte dans lequel elles sont développées, on peut observer deux grandes tendances dans les techniques d'échantillonnage présentées ces dernières années.

1. Des résultats valables pour des signaux vivant dans des espaces fonctionnels grands mais qui sont souvent difficilement applicables dans la pratique. Leurs implications sont très grandes mais leurs applications *in situ* sont plus délicates. Mentionnons les contributions suivantes ([Fei92b], [Chr96]).

2. Des algorithmes constructifs, applicables à des familles plus restreintes de signaux et facilement implémentables. Ces outils faciles d'utilisation et robustes s'adaptent particulièrement bien aux problèmes d'ingénierie. Citons notamment ([Grö93a], [Str95], [Str97]).

Tout au long de ce mémoire, notre démarche cherche à s'inscrire dans ce second point même si nous envisagerons des résultats plus théoriques dans le chapitre 5.

Chapitre 3

Repères dans un espace de Hilbert

L'objet de ce chapitre est la présentation d'un outil, *les repères* généralisant la notion de base orthonormale dans un espace de Hilbert. Nous tentons de démontrer qu'il est particulièrement adapté à la résolution des problèmes de reconstruction mais aussi d'approximation de signaux.
Dans un premier temps, on présente cette notion ainsi que ces principales propriétés. Dans la seconde partie, on cherche à étendre les résultats classiques au cas où les échantillons ne sont pas uniquement les valeurs ponctuelles d'une fonction puis on s'attarde sur la façon dont les repères peuvent être utilisés en matière d'échantillonnage.

3.1 Présentation et propriétés

Définition 1 *Une base $\{e_n\}_{n\in J}$ est appelée une base orthonormée si les vecteurs qui la compose sont orthogonaux deux à deux et si ils sont de plus normés c'est-à-dire :*

$$e_n \perp e_m \ \ pour \ \ n \neq m \qquad \|e_n\| = 1 \quad \forall n \in I. \tag{3.1}$$

Soit $\mathcal{H}$, un espace de Hilbert séparé où le produit scalaire est noté $\langle .,. \rangle$ et la norme $\|.\|$. Pour tout espace de Hilbert séparé, on peut construire une base orthonormale. Si $\{e_n\}$ est une base orthonormale pour $\mathcal{H}$ alors l'égalité de Parseval donne :

$$\sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2 \quad \forall x \in H,$$

on a aussi la propriété de décomposition de tout élément de $\mathcal{H}$:

$$\exists ! \ \{c_n\} \ \text{ telle que } \ x = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n = \sum_n c_n e_n.$$

Cette dernière propriété de décomposition étant en fait équivalente à l'égalité de Parseval.

En théorie, l'existence de bases orthonormales adaptées à une situation spécifique est capitale ; citons le résultat qui établit que pour tout opérateur T compact auto-adjoint dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres de T. Dans la pratique, les bases orthonormales sont souvent difficilement utilisables. En effet, les vecteurs e_n doivent pouvoir être calculés rapidement, simplement et à l'aide de méthodes numériquement stables. Par exemple, la procédure d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est tès largement instable, le résultat dépend essentiellement de l'ordre des vecteurs de la famille à orthonormaliser.

Les repères sont à la fois une alternative et une généralisation des bases orthonormales. En abandonnant les conditions d'orthogonalité et d'unicité de la décomposition, on bénéficie d'une plus grande liberté dans le choix des vecteurs $\{e_n\}$, tout en maîtrisant le comportement des coefficients c_n et en conservant la propriété de génération des éléments de l'espace à partir des éléments de la famille $\{e_n\}$. Ils ont été pour la première fois introduits par Duffin et Schaeffer dans le contexte des séries de Fourier non harmoniques ([Duf52]). Pour un exposé plus complet de leur utilisation dans le cadre des séries de Fourier non harmoniques, voir [You80]. Peu usités en analyse avant le début des années 80, les repères ont été, sous l'impulsion de A. Grossmann à partir de 1984, un outil important pour les techniques d'analyse en ondelettes ([Dau86]).

Si la condition (3.1) définissant une base orthonormée $\{e_n\}$ est très contraignante et ne permet pas en général à la famille $\{e_n\}$ de satisfaire des propriétés supplémentaires ; les conditions définissant un repère sont plus souples et peuvent donc être renforcées ou adaptées suivant le problème étudié. Ainsi, étant donné un repère $\{f_i\}_{i\in I}$, tout élément f de $\mathcal{H}$ peut être décomposé en $\sum c_i f_i$ où la suite $\{c_i\}$ peut toujours être choisie de façon canonique mais il n'y a pas unicité puisque la famille $\{f_i\}$ n'est pas nécessairement libre.
Ainsi, un grand nombre des travaux de recherches ont consisté en la mise au point de repères adaptés à des structures existantes telles les ondelettes de Gabor ([Chr95], [Fei97]), les repères exponentiels ([Ber97]) ou les repères associés à des séries de sinus cardinaux ([Fei93b]).

3.1.1 Définition et premières propriétés

Nous présentons ci-dessous les principales propriétés des repères dans un espace de Hilbert en privilégiant les propriétés qui seront utiles dans les problèmes de reconstruction de signaux.
La présentation ci-dessous est inspirée de [Chr93]. Une description précise et complète des propriétés ainsi que les preuves de certains résultats non démontrés ici se trouvent dans [Duf52] et [Hei89].

Dans toute la suite, $\mathcal{H}$ désigne un espace de Hilbert séparé muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$, linéaire par rapport à la première composante, la norme associée est notée $\|.\|$. I désigne un ensemble d'indice dénombrable.

Définition 2 *Une famille $\{f_i\}_{i\in I}$ d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est appelée famille de Bessel si :*

$$\exists B > 0 \text{ tel que } \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Une famille de Bessel est bornée, en effet en faisant $f = f_j$ dans l'égalité précédente, il vient :

$$\sum_{i\neq j} |\langle f_j, f_i\rangle|^2 + |\langle f_j, f_j\rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

ce qui fournit : $\|f_j\|^2 \leq B$.

Définition 3 *Une base $\{\phi_n\}$ d'un espace $\mathcal{H}$ est dite inconditionnelle si pour tout élément f de $\mathcal{H}$ tel que $f = \sum c_n\phi_n$, la série $\sum c_n\phi_n$ converge vers f après n'importe quelle permutation de ses termes. Par extension, on dit qu'une série $\sum c_n\phi_n$ converge inconditionnellement si elle converge après n'importe quelle permutation de ses termes.*

Les deux résultats suivants vont permettre d'introduire la notion de repère.

Lemme 1 *Soit $\{f_i\}_{i\in I}$ une famille de Bessel, alors la série $\sum_{i\in I} c_i f_i$ converge de façon inconditionnelle pour toute suite $\{c_i\}_{i\in I} \in l^2(I)$ et l'on a :*

$$\left\|\sum_{i\in I} c_i f_i\right\|^2 \leq B\sum_{i\in I} |c_i|^2 \quad \forall \{c_i\}_{i\in I} \in l^2(I).$$

PREUVE : Voir [Duf52]. ◊

Lemme 2 *Soit une famille $\{f_i\}_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{H}$, les propriétés suivantes sont alors équivalentes :*

(i) $\sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 < \infty \ \forall f \in \mathcal{H}$,

(ii) $\{f_i\}_{i\in I}$ *est une famille de Bessel,*

(iii) la série $\sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle f_i$ *converge pour tout* $f \in \mathcal{H}$.

PREUVE : $(i) \Rightarrow (ii)$ Par hypothèse, l'application :

$$\Phi : f \mapsto \{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I}$$

va de $\mathcal{H}$ dans $l^2(I)$ et d'après le théorème du graphe fermé, ϕ est continue. Ainsi :

$$\sum |\langle f, f_i\rangle|^2 = \|\Phi(f)\|^2 \leq \|\Phi\|^2 \|f\|^2.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Évident d'après le lemme 1.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Soit $f \in \mathcal{H}$, on a :

$$\langle \sum \langle f, f_i\rangle f_i, f\rangle = \sum |\langle f, f_i\rangle|^2. \ \Diamond$$

Étant donnée une famille de Bessel, on peut définir l'opérateur :

$$\begin{aligned} T : l^2(\mathbb{N}) &\to \mathcal{H} \\ f &\mapsto Tf = \{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I} \end{aligned}$$

et grâce au lemme précédent, on peut introduire T^* l'adjoint de T :

$$\begin{aligned} T^* : \mathcal{H} &\to l^2(\mathbb{N}) \\ \{c_i\} &\mapsto T^*\{c_i\} = \sum_{i\in I} c_i f_i. \end{aligned}$$

En composant T^* et T, on fait apparaître l'opérateur S tel que :

$$\begin{aligned} S : \mathcal{H} &\to \mathcal{H} \\ f &\mapsto \sum_{i\in I} \langle f, f_i\rangle f_i. \end{aligned}$$

Nous avons déjà signalé que les repères étaient nés d'une généralisation de la notion de base orthonormale. Il n'est donc pas étonnant de voir que l'expression de l'opérateur S étend la formule de la projection orthogonale $\sum \langle f, e_i\rangle e_i$ au cas où les $\{e_i\}$ ne forment plus une base orthonormale.
En utilisant l'inégalité de Schwarz sur $l^2(I)$, il vient que :

$$\begin{aligned} \|Sf\|^2 &= \sup_{\|g\|=1} \left| \sum_{i\in I} \langle f, f_i\rangle \langle f_i, g\rangle \right| \\ &\leq \sup_{\|g\|=1} B\|f\|^2 \, B\|g\|^2 = B^2\|f\|^2 \end{aligned}$$

et

$$\langle Sf, f\rangle = \langle f, Sf\rangle = \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \tag{3.2}$$

ceci assure que S est un opérateur borné, auto-adjoint et positif.

Définition 4 *Une famille $\{f_i\}_{i\in I}$ est dite totale (ou complète) dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ si :*

$$\{\langle f, f_i\rangle = 0 \quad \forall i \in I\} \Rightarrow f = 0.$$

À plusieurs reprises, nous utiliserons les familles totales par le biais de la caractérisation suivante :

Proposition 1 *$\{f_i\}$ est totale si et seulement si $\overline{vect\{f_i\}} = \mathcal{H}$*

PREUVE : Soit V_I la fermeture dans $\mathcal{H}$ du sous-espace vectoriel engendré par la famille $\{f_i\}_{i\in I}$. On considère P_I, la projection orthogonale sur V_I et Q_I, la projection orthogonale sur $V_I^{\perp}$. Pour tout $f \in \mathcal{H}$, on a :

$$f = P_I f + Q_I f$$

avec $\langle Q_I f, f_i\rangle = 0$ pour tout $i \in I$. Or puisque $\{f_i\}$ est totale, on a donc :

$$Q_I f = 0 \quad \text{soit} \quad P_I f = f \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

et donc $\mathcal{H} = V_I$. Pour montrer la réciproque, supposons que $\overline{\text{vect}\{f_i\}} = \mathcal{H}$ et soit $g \in \mathcal{H}$ avec $\langle g, f_i\rangle = 0\ \forall i$ et $g \neq 0$. Puisque $\{f_i\}$ est dense dans $\mathcal{H}$, il existe une suite $\{g_n\}$ d'éléments de $\mathcal{H}$ ayant pour limite g. La forme linéaire $f \mapsto \langle g, f\rangle$ étant continue, on a :

$$\begin{aligned} \langle g, g\rangle &= \langle g, \lim g_i\rangle \\ &= \lim\langle g, g_i\rangle \\ &= 0. \ \Diamond \end{aligned}$$

La proposition suivante statue sur les propriétés d'injectivité et de surjectivité de l'opérateur S.

Proposition 2 *On a les deux implications suivantes :*

(i) S est injectif ssi la famille $\{f_i\}_{i\in I}$ est totale

(ii) S surjectif $\Rightarrow$ S injectif.

PREUVE : *(i)* Supposons que $\{f_i\}_{i\in I}$ soit totale et que $f \in \ker S$, il vient alors :

$$0 = \langle Sf, f\rangle = \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2$$

et donc $\langle f, f_i \rangle = 0$ pour tout $i \in I$. Et puisque $\overline{\text{vect}\{f_i\}_{i\in I}} = \mathcal{H}$, on en déduit : $\langle f, g \rangle = 0$, $\forall g \in \mathcal{H}$ et donc $f = 0$.
Supposons que $\{f_i\}_{i\in I}$ ne soit pas totale et soit $g \in (\text{vect}\{f_i\}_{i\in I})^{\perp} \backslash 0$. Alors :

$$Sg = \sum_{i\in I} \langle g, f_i \rangle f_i = 0$$

et S n'est pas injectif.
(ii) Supposons que S soit surjectif et soit $f \in \ker S$. On a alors $\langle f, f_i \rangle = 0 \ \ \forall i$. Puisque S est surjectif, il existe $g \in \mathcal{H}$ tel que $Sg = f$ c'est-à-dire :

$$\sum_{i\in I} \langle g, f_i \rangle f_i = f$$

il vient donc que :

$$\|f\|^2 = \langle f, Sg \rangle = \sum_{i\in I} \langle g, f_i \rangle \langle f, f_i \rangle = 0. \ \diamondsuit$$

Définition 5 *Une famille $\{f_i\}_{i\in I} \in \mathcal{H}$ telle que :*

$$\exists A, B > 0 \qquad A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \tag{3.3}$$

est appelée un repère. A et B sont les bornes du repère. Un repère $\{f_i\}_{i\in I}$ est dit exact si : $\forall I' \subset I, I' \neq I$ $\{f_i\}_{i\in I'}$ n'est plus un repère.

On peut définir une relation d'ordre partiel sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Étant donnés deux opérateurs $F, G : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, on dira que $F \leq G$ si et seulement si $\langle Ff, f \rangle \leq \langle Gf, f \rangle \ \ \forall f \in \mathcal{H}$. La relation (3.2) assure alors que l'on a[1] :

$$A\, I_d \leq S \leq B\, I_d. \tag{3.4}$$

On a vu que S était auto-adjoint ce qui permet d'établir le lemme suivant :

Lemme 3 *L'opérateur de repère S est tel que :*

$$\|S\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle Sf, f \rangle|.$$

PREUVE : Soit $\alpha = \sup_{\|f\|=1} |\langle Sf, f \rangle|$, on a évidemment la première inégalité $\alpha \leq \|S\|$. Et puisque S est auto-adjoint, on a :

$$\text{Re}\,(\langle Sf, g \rangle) = \frac{1}{4}[\langle S(f+g), f+g \rangle - \langle S(f-g), f-g \rangle].$$

[1] I_d désigne l'identité de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$

D'après la définition de α, il vient que :

$$\langle S(f+g), f+g\rangle \leq \alpha\|f+g\|^2 \quad \text{et} \quad \langle S(f-g), f-g\rangle \leq \alpha\|f-g\|^2$$

et donc :

$$\mathrm{Re}\left(\langle Sf, g\rangle\right) \leq \frac{\alpha}{4}\left(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2\right) = \alpha\|f\|^2\,\|g\|^2.$$

En remplaçant g par $\frac{\|f\|}{\|g\|}g$, on obtient :

$$|\langle Sf, g\rangle| \leq \alpha\|f\|\,\|g\|.$$

En prenant $g = Sf$, il vient :

$$\|Sf\|^2 \leq \alpha\|f\|\,\|Sf\|$$

et ceci étant vérifié pour tout $f \in \mathcal{H}$, cela implique $\|S\| \leq \alpha$. $\Diamond$

En utilisant la relation 3.4, le lemme précédent permet d'écrire :

$$\|I_d - \frac{1}{B}S\| \leq \|\frac{B-A}{B}I_d\| < 1.$$

Considérons alors pour $N \in \mathbb{N}$, la quantité :

$$\sum_{k=0}^{N}(I_d - \frac{1}{B}S)^k$$

classiquement on a :

$$\frac{1}{B}S\sum_{k=0}^{N}(I_d - \frac{1}{B}S)^k = I_d - (I_d - \frac{1}{B}S)^{N+1}$$

et puisque $\|(I_d - \frac{1}{B}S)^k\| \leq \|I_d - \frac{1}{B}S\|^k \to 0$ quand $k \to \infty$, il vient que $\frac{1}{B}S$ et donc S sont inversibles par le biais d'une série de Neumann ([Hut80], p.86-87) avec :

$$S^{-1} = \frac{1}{B}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(I_d - \frac{1}{B}S\right)^k.$$

Un calcul simple fournit de plus que S^{-1} est borné et vérifie :

$$B^{-1}I_d \leq S^{-1} \leq A^{-1}I_d.$$

On obtient alors deux décompositions possibles d'un élément de $\mathcal{H}$:

$$f = SS^{-1}f = \sum_{i\in I}\langle f, S^{-1}f_n\rangle f_n \tag{3.5}$$

$$= S^{-1}Sf = \sum_{i\in I}\langle f, f_n\rangle S^{-1}f_n. \tag{3.6}$$

La famille $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ forme le repère dual, de bornes A^{-1} et B^{-1}, du repère $\{f_i\}_{i\in I}$. Les décompositions (3.5) et (3.6) ne sont pas nécessairement uniques puisque $\{f_n\}_{n\in I}$ n'est pas a priori une base. On peut aussi montrer que tout repère qui est une base hilbertienne est une base de Riesz. Réciproquement toute base de Riesz est un repère (cf. [You80], p.37).

3.1.2 Deux caractérisations

On présente deux caractérisations des repères à l'aide de propriétés de l'opérateur S. Dès que l'on travaille en dimension finie, la seconde est très utile.

Théorème 2 *$\{f_i\}_{i\in I}$ est un repère de bornes A et B si et seulement si l'opérateur :*

$$Sf = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle f_i$$

existe et est borné avec : $A \leq S \leq B$.

PREUVE : La démonstration de ce résultat est évidente. Elle résulte pour la partie directe de l'égalité :

$$\langle Sf, f\rangle = \sum_{i\in I}|\langle f, f_i\rangle|^2$$

et pour la réciproque de la définition 5 ainsi que des propriétés de la relation d'ordre partiel sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. $\Diamond$

Théorème 3 *$\{f_i\}_{i\in I}$ est un repère si et seulement si S est surjectif sur $\mathcal{H}$*

PREUVE : $\{f_i\}$ est un repère entraîne d'après le lemme 3 que S est bijectif donc injectif. Supposons l'existence et la surjectivité de l'opérateur S. Alors :

$$\langle Sf, f\rangle = \sum_{i\in I}|\langle f, f_i\rangle|^2 < \infty \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

i.e. $\{f_i\}_{i\in I}$ est une famille de Bessel et grâce au lemme 2, on a l'existence d'une constante B telle que :

$$\sum_{i\in I}|\langle f, f_i\rangle|^2 \leq B\,\|f\|^2.$$

La proposition 2 assure aussi que S est borné et inversible donc :

$$0 \in \rho(S)$$

où $\rho(S)$ est le résolvent de S. On sait de plus que :

$$A = \inf_{\|f\|=1} \langle Sf, f \rangle \in \sigma(S)$$

où $\sigma(S)$ est le spectre de S. Ce qui implique $A > 0$, on a ainsi :

$$A\|f\|^2 \leq \langle Sf, f \rangle = \sum_{i \in I} \langle f, f_i \rangle^2$$

soit finalement :

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

et donc le résultat énoncé. $\Diamond$

3.1.3 Décomposition dans un repère

Les relations (3.5) et (3.6) constituent une propriété essentielle puisqu'elles permettent de décomposer grâce aux opérateurs S et S^{-1}, tout élément de $\mathcal{H}$ sur les vecteurs du repère. Les deux propositions suivantes permettent d'obtenir l'expression de S^{-1} ainsi qu'un algorithme itératif de reconstruction d'un élément de $\mathcal{H}$ à partir de la seule connaissance de la valeur de Sf.

Proposition 3 *Soit $\{f_i\}_{i \in I}$, un repère d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et soit S_λ l'opérateur :*

$$S_\lambda f = \lambda \sum_{i \in I} \langle f, f_i \rangle f_i$$

où λ est un paramètre de relaxation. Alors on a l'inégalité :

$$\|f - S_\lambda f\| \leq \gamma(\lambda)\|f\|$$

avec $\gamma(\lambda) = max\{|1 - \lambda A|, |1 - \lambda B|\}$.

PREUVE : D'après la relation (3.2) et la relation de définition (3.3), on obtient facilement :

$$(1 - \lambda A)\|f\|^2 \leq \langle (I_d - S_\lambda)f, f \rangle \leq (1 - \lambda A)\|f\|^2.$$

Or en appliquant le lemme 3 à $I_d - S_\lambda$ qui est auto-adjoint, et en utilisant l'encadrement précédent il vient directement que :

$$\|(I_d - S_\lambda)\| \leq \gamma(\lambda). \ \Diamond$$

Proposition 4 *Soit D, un opérateur borné de l'espace $\mathcal{H}$ vérifiant :*

$$\|f - Df\| \leq \gamma \|f\| \quad \forall f \in \mathcal{H} \tag{3.7}$$

où γ et une constante telle que $0 < \gamma < 1$. Alors D est inversible sur $\mathcal{H}$ et f peut être reconstruit à partir de Df par l'itération :

$$d_0 = 0, \qquad d_{n+1} = d_n + D(f - d_n)$$

et on a $\lim_{n\to\infty} d_n = f$ avec l'estimation :

$$\|f - d_n\| \leq \gamma^n \|f\|.$$

PREUVE : D'après (3.7), la norme de $I_d - D$ est inférieure à 1, ce qui assure que D est inversible et que son inverse peut-être obtenu à l'aide d'une série de Neumann :

$$D^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I_d - D)^n.$$

On a alors pour tout $f \in \mathcal{H}$:

$$f = D^{-1}Df = \sum_{n=0}^{\infty} (I_d - D)^n Df.$$

En prenant une somme partielle, on démontre aisément qu'avec :

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} (I_d - D)^k Df,$$

on a la récurence :

$$d_{n+1} = d_n + D(f - d_n) \tag{3.8}$$

avec $\lim_{n\to+\infty} d_n = f$. De (3.8), on tire immédiatement que $\|f - d_n\| \leq \gamma^n \|f\|$. $\Diamond$

Si l'on rassemble les résultats des deux propositions précédentes il vient que dès que l'on dispose d'un repère dans un espace $\mathcal{H}$, tout élément f de cet espace peut être reconstruit de façon itérative par la seule connaissance de la valeur $S_\lambda f$. On voit à ce stade apparaître le lien existant entre repère et échantillonnage puisque si la quantité $S_\lambda f$ ne dépend que de la valeur de certains échantillons de f alors on dispose d'une technique d'échantillonnage. En effet, on dispose alors d'une méthode permettant de reconstruire f à partir

de la seule connaissance de certains de ses échantillons. L'étude de la correspondance entre repère et échantillonnage fait l'objet de la suite de ce chapitre mais avant de l'aborder plus directement, il est important de faire quelques commentaires quant aux problèmes numériques liés à l'utilisation des repères.

Remarque 1 : Si l'on suppose connues les bornes du repère, la combinaison des propositions (3) et (4) indique que l'opérateur S_λ ne sera inversible que pour les valeurs $\lambda < 1/B$. On vérifie aisément que la valeur optimale du paramètre de relaxation λ est :

$$\lambda_{opt} = \frac{2}{A+B}$$

ce qui founit la valeur optimale du taux de convergence :

$$\gamma(\lambda_{opt}) = \frac{B-A}{B+A}.$$

Remarque 2 : Les bornes du repère A et B jouent un rôle considérable puisqu'elles définissent la vitesse de convegence des algorithmes présentés ci-dessus. Il est donc important de les estimer le plus précisement possible. L'obtention de la borne supérieure B n'est généralement pas problématique puisqu'elle exprime la continuité de l'application : $f \mapsto \langle f, f_n \rangle_{n \in I}$ de $\mathcal{H}$ dans $l^2(I)$. Par contre une estimation correcte de la borne inférieure A est souvent très délicate à obtenir et il n'existe pas de méthode générale et constructive permettant de la calculer ou de l'estimer. Dans de nombreux problèmes faisant intervenir un algorithme du type de celui présenté dans la proposition 4, l'existence des bornes du repère n'est connue que de façon théorique et il n'en existe aucune estimation précise ([Fei93b], p.10-11).
Cette difficulté numérique n'est pas liée à l'algorithme utilisé mais à la structure de l'opérateur S. Lorsque l'on travaille dans un espace $\mathcal{H}$ de dimension finie, les méthodes itératives discutées ci-dessus reviennent alors à chercher la solution d'un système linéaire $T\mathbf{a} = \mathbf{b}$. On pourrait alors penser que l'on s'affranchit ainsi des problèmes de vitesse de convergence mais puisque la borne A appartient au spectre de l'opérateur S_λ, le conditionnement de la matrice T dépend toujours des valeurs des bornes du repère.

3.2 Échantillonnage et repères

Après une présentation de résultats classiques, il s'agit maintenant d'aborder plus directement les problèmes d'échantillonnage. Tout d'abord, nous allons montrer que les propriétés des repères formés de vecteurs $\{f_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{H}$ peuvent s'étendre à une famille de formes linéaires $\{L_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{H}^*$ où les $L_i(f)$ sont des échantillons de $f \in \mathcal{H}$. Ensuite, nous proposons diverses conditions nécessaires et/ou suffisantes pour que les échantillons d'une fonction permettent sa reconstruction.

3.2.1 Repères et formes linéaires

Lorsque l'on parle d'un échantillon d'une fonction, il s'agit souvent de sa valeur en un point. Pourtant dans la pratique, suivant le phénomène étudié et les instruments métrologiques dont on dispose, cet échantillon peut avoir une forme un peu plus générale et il peut être représenté par l'image de la fonction par une forme linéaire. Ainsi, les quatre formes linéaires suivantes :

$$L_1(f) = f(b_1) - f(a_1), \qquad L_2(f) = \int_a^b f(t)\,dt,$$

$$L_3(f) = \left(\frac{df}{dt}\right)(t_0), \qquad L_4(f) = \int_a^{a+2\pi} f(t)\cos(2\pi kt)\,dt$$

représentent quatre échantillons de f.

La présentation faite dans le paragraphe 3.1.1 de la partie précédente part d'une famille de vecteurs $\{f_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{H}$, chaque f_i peut être identifié à la forme linéaire $F_i(.) = \langle ., f_i\rangle$. Nous allons montrer que pour des formes linéaires quelconques, des propriétés analogues à celles énoncées dans les parties 3.1.2 et 3.1.3 précédentes peuvent être obtenues. Certaines démonstrations sont identiques à celles vues précédemment et ne seront donc pas reprises ici.

Définition 6 *On appellera famille de Bessel de $\mathcal{H}^*$, une famille $\{L_i\}_{i\in I}$ de formes linéaires sur $\mathcal{H}$ telle que :*

$$\exists\, B > 0 \ \textit{tel que} \ \sum_{i\in I} |L_i(f)|^2 \leq B\|f\|^2 \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Une famille de Bessel est bornée puisque l'on a en particuliers :

$$|L_j(f)|^2 \leq B\|f\|^2 \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

ce qui fournit : $\|L_j\|^2_{\mathcal{H}^*} \leq B$. Et de la même façon que dans la partie 3.1.1, on a le lemme suivant.

Lemme 4 *Soit une famille $\{L_i\}_{i\in I} \subset (\mathcal{H}^*)^I$, les propriétés suivantes sont alors équivalentes :*

(i) $\sum_{i\in I} |L_i(f)|^2 < \infty \quad \forall f \in \mathcal{H}$,

(ii) $\{L_i\}_{i\in I}$ *est une famille de Bessel,*

(iii) la série $\sum_{i\in I} L_i(f)\bar{L}_i$ *converge pour tout* $f \in \mathcal{H}$.

Étant donnée une famille de Bessel, on peut donc définir l'opérateur S par :

$$\begin{aligned} S : \mathcal{H} &\to \mathcal{H}^* \\ f &\mapsto Sf = \sum_{i\in I} L_i(f)\bar{L}_i \end{aligned}$$

et de la même façon que précédemment, on montre que :

$$\|Sf\|^2_{\mathcal{H}^*} \leq B^2\|f\|^2 \quad \text{et} \quad \langle Sf, f\rangle = \sum_{i\in I} |L_i(f)|^2 \tag{3.9}$$

où $\langle .,. \rangle$ est le crochet de dualité. Ceci assure une nouvelle fois que que S est un opérateur borné et positif. La proposition suivante caractérise les propriétés d'injectivité et de surjectivité de l'opérateur S.

Proposition 5 *On a les deux propriétés suivantes :*

(i) S est injectif ssi $\{L_i\}_{i\in I}$ est une famille totale

(ii) S surjectif $\Rightarrow$ S injectif.

La définition donnée au paragraphe 3.1.1 devient :

Définition 7 *Une famille $\{L_i\}_{i\in I} \subset (\mathcal{H}^*)^I$ telle que pour tout f de $\mathcal{H}$, on ait :*

$$\exists A, B > 0 \qquad A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} |L_i(f)|^2 \leq B\|f\|^2, \tag{3.10}$$

est appelée un repère. A et B sont les bornes du repère.

La relation (3.9) assure que $A\, I_d \leq S \leq B\, I_d$ et en reprenant le lemme 3 on montre que S est inversible. Nous obtenons alors une décomposition d'un élément de $\mathcal{H}$ sous la forme :

$$\begin{aligned} f &= S^{-1}Sf \\ &= \sum_{i\in I} L_i(f)S^{-1}\bar{L}_i \end{aligned} \tag{3.11}$$

et d'un élément de $\mathcal{H}^*$ sous la forme :

$$\begin{aligned} L &= SS^{-1}L \\ &= \sum_{i\in I} L_i(S^{-1}L)\bar{L}_i. \end{aligned}$$

Les deux théorèmes vus au paragraphe 3.1.2 et caractérisant un repère à l'aide des propriétés de l'opérateur S s'énoncent et se démontrent de façon identique, on a ainsi :

Théorème 4 *$\{L_i\}_{i\in I}$ est un repère de bornes A et B si et seulement si l'opérateur :*

$$Sf = \sum_{i\in I} L_i(f)\bar{L}_i$$

existe et est borné avec : $A \leq S \leq B$.

Théorème 5 *$\{L_i\}_{i\in I}$ est un repère si et seulement si S est surjectif.*

3.2.2 Reconstruction de f à l'aide de Sf

Après avoir étendu la notion de repère à tout type de formes linéaires, nous cherchons à adapter la relation de décomposition (3.11) au problème de l'échantillonnage. Plus précisement, on cherche à obtenir un algorithme itératif de reconstruction d'un élément de $\mathcal{H}$ à partir de la seule connaissance de la valeur de Sf, elle-même fonction des échantillons $\{L_i(f)\}$.
Dans cette partie, $\mathcal{H}$ désigne toujours un espace de Hilbert séparé avec en outre la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{H}, \quad &\exists \text{ une constante } M_x \text{ telle que} \\ &|f(x)| \leq M_x \|f\| \ \ \forall x. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Dans la terminologie de Young ([You80], p.16), un tel espace est appelé *espace de Hilbert fonctionnel.* La propriété (3.12) traduit en fait la continuité sur $\mathcal{H}^*$ (muni de la norme induite par celle de $\mathcal{H}$) de toutes les formes linéaires Φ_x définies par :

$$\begin{aligned} \Phi_x : \quad \mathcal{H} &\to \mathbb{K} \\ f &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Puisque Φ_x est une forme linéaire bornée, d'après le théorème de représentation de Riez, on peut écrire qu'il existe $K_x \in \mathcal{H}$ tel que :

$$f(x) = \langle f, K_x \rangle \quad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{3.13}$$

Définition 8 *La fonction K définie sur $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ par :*

$$K(x, y) = \langle K_y, K_x \rangle \tag{3.14}$$

est appelée noyau reproducteur de l'espace $\mathcal{H}$.

En combinant la relation (3.13) avec la définition 8, on obtient la propriété qui justifie le qualificatif *reproducteur* et que nous utiliserons à plusieures reprises par la suite :

$$\langle K(x, .), f(.) \rangle = f(x) \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Si $\{\phi_n\}_{n \in I}$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}$, en appliquant la formule de la projection orthogonale à K_x, il vient que :

$$K_x = \sum_{n \in I} \bar{\phi_n}(x) \phi_n$$

et donc que :

$$K(x, y) = \sum_{n \in I} \phi_n(y) \bar{\phi_n}(x). \tag{3.15}$$

Tout espace de Hilbert séparé possède une base orthonormale $\{\phi_n\}_{n \in I}$, ce qui permet d'envisager la quantité $K(x, y) = \sum_{n \in I} \phi_n(y) \bar{\phi_n}(x)$. Mais si l'espace considéré est trop grand, l'application $x \mapsto K(x, y)$ appartient à un espace de distributions. Illustrons cette dernière remarque dans la situation suivante. On sait que $\{t \mapsto (2\omega)^{-1/2} e^{i\pi nt/\omega},\ n \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormale de $L^2([-\omega, \omega])$ et puisque l'on a :

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-ixz} \chi_{[-\omega,\omega](z)}\right)(t) = \frac{\sin \omega(t - x)}{\pi(t - x)}$$

où χ_A est la fonction caractéristique de l'intervalle A et $\mathcal{F}f(z) = \int f(t) e^{-itz} dt$, il vient que la famille :

$$\left\{ t \mapsto \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{\sin(\omega t - \pi n)}{(\omega t - \pi n)},\ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

est une base orthonormale du sous-espace $\mathcal{B}_\omega$ de $L^2(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{B}_\omega = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \operatorname{supp} \mathcal{F}f \subseteq [-\omega, \omega] \right\}.$$

Ainsi, sur $L^2([-\omega, \omega])$ et même sur $L^2(\mathbb{R})$ tout entier, l'expression du noyau reproducteur est donnée par :

$$K_1(x, y) = \frac{1}{2\omega} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi n(x-y)} = \delta(x - y)$$

où δ est la distribution de Dirac. Par contre, si on considère la fonction K_2 définie sur $\mathcal{B}_\omega$ par :

$$K_2(x,y) = \sum_{n\in I} \phi_n(y)\bar{\phi}_n(x)$$

avec $\phi_n(x) = \text{sinc}\,(\omega x - \pi n)$, on peut écrire :

$$K_2(x,y) = \frac{\omega}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin(\omega x - \pi n)}{(\omega x - \pi n)} \frac{\sin(\omega y - \pi n)}{(\omega y - \pi n)} = \frac{\sin \omega(x-y)}{\pi(x-y)}.$$

Pour tout $f \in \mathcal{B}_\omega$, on a alors :

$$f(x) = \langle f, \frac{\sin \omega(x-t)}{\pi(x-t)} \rangle,$$

K_2 est donc bien un noyau reproducteur sur $\mathcal{B}_\omega$ avec de plus $x \mapsto K_2(x,y) \in \mathcal{B}_\omega$.

Une présentation générale de la théorie des noyaux se trouve dans ([Sch73]). Concernant les principales propriétés du noyau d'un opérateur, on peut se reporter à [Dau85a] (pp. 971-984). L'utilisation des noyaux reproducteurs dans la résolution des équations différentielles et aux dérivées partielles est développée dans ([Ber53]). Dans les parties 4.1 et 5.2, nous reviendrons sur les propriétés des noyaux reproducteurs associés à des transformations. En attendant, le résultat suivant permet de caractériser les espaces possédant un noyau reproducteur.

Théorème 6 *Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert dont $\{\phi_n\}_{n\in I}$ est une base orthonormée, alors on a l'équivalence :*

(i) $\mathcal{H}$ possède un noyau reproducteur K avec $K(x,y) = \sum_{n\in I} \phi_n(y)\bar{\phi}_n(x)$ et convergence de la série pour tout x et tout y.

(ii) pour tout x, on a : $\sum_{n\in I} |\phi_n(x)|^2 < +\infty$.

PREUVE : La démonstration de $(i) \Rightarrow (ii)$ est évidente puisqu'il suffit de faire $x = y$ dans l'expression (3.15). Quant à la réciproque, elle découle de l'inégalité de Schwarz sur $l^2(I)$ appliquée à $\sum_{n\in I} \phi_n(y)\bar{\phi}_n(x)$. $\Diamond$

Corollaire 1 *Un espace de dimension finie de fonctions définies sur un intervalle V admet une fonction noyau.*

PREUVE : La démonstration est évidente à l'aide du théorème précédent. $\Diamond$

Il est facile de voir qu'un espace de Hilbert possède au plus un noyau reproducteur et pour étendre la relation (3.15), si $\{\phi_n\}$ est une base de $\mathcal{H}$ et $\{\phi_n^*\}$ une base bi-orthogonale i.e. telle que $\langle \phi_n, \phi_m^* \rangle = \delta_n^m$ alors au sens de la convergence forte, une expression du noyau reproducteur de $\mathcal{H}$ est :

$$K(x,y) = \sum_{n \in I} \phi_n(y) \bar{\phi}_n^*(x).$$

À l'aide du noyau reproducteur sur $\mathcal{H}$, nous allons maintenant adapter les propositions 3 et 4 (p. 53) dans le cas où le repère est constitué par des formes linéaires quelconques.

Proposition 6 *Soit $\{L_i\}_{i \in I}$ une famille de formes linéaires formant un repère de $\mathcal{H}$ et soient $(f, L) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$ tels que $L = \langle f, . \rangle$. En considérant l'opérateur :*

$$S_\lambda f = \lambda \sum_{i \in I} L_i(f) \bar{L}_i$$

alors on a l'encadrement :

$$\|Lf - S_\lambda f\|_{\mathcal{H}^*} \leq \gamma(\lambda) \|f\| \tag{3.16}$$

avec $\gamma(\lambda) = max\{|1 - \lambda A|, |1 - \lambda B|\}$.

PREUVE : La démonstration est identique à celle de la proposition 3. En utilisant les relations (3.9) et (3.10), on obtient que la norme de $L - S_\lambda$ sur $\mathcal{H}^*$ est inférieure à $\gamma(\lambda)$. $\Diamond$

Par contre la méthode de reconstruction d'un élément de $\mathcal{H}$ à partir de la connaissance de $S_\lambda f$ développée dans la proposition 4 n'est plus tout à fait applicable. Mais grâce à l'élément $K_x \in \mathcal{H}$ défini par (3.14), on peut très facilement obtenir un algorithme analogue. Soit l'application :

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \mathcal{H}^* & \to & \mathcal{H} \\ & F & \mapsto & (x \mapsto F(K_x)), \end{array} \tag{3.17}$$

on vérifie instantanément que Ψ est linéaire et que $(x \mapsto F(K_x)) \in \mathcal{H}$. Si $F \in \mathcal{H}^*$ alors il existe $h \in \mathcal{H}$ vérifiant $F(.) = \langle h, . \rangle$ et on a alors $F(K_x) = h(x)$. En revenant à la définition de la norme sur $\mathcal{H}^*$:

$$\|F\|_{\mathcal{H}^*} = \sup_{\|g\| \neq 0} \frac{|F(g)|}{\|g\|}$$

et puisque $F(g) = \langle F(K_x), g \rangle$, il vient que $\|F\|_{\mathcal{H}^*} = \|\Psi(F)\|_{\mathcal{H}}$. Considérons $\{\tilde{f}_i\}_{i \in I}$ la famille de $\mathcal{H}$ définie par $\tilde{f}_i = \Psi(L_i)$, il vient :

$$\Psi\left(L_f(f) - S_\lambda f\right) = f - \lambda \sum_{i \in I} \langle f, \tilde{f}_i \rangle \tilde{f}_i = f - \tilde{S}_\lambda f$$

ce qui fournit :

$$\|f - \tilde{S}_\lambda f\|_{\mathcal{H}} = \|\Psi(f - \tilde{S}_\lambda f)\|_{\mathcal{H}} = \|L(f) - S_\lambda f\|_{\mathcal{H}^*} \leq \gamma(\lambda)\|f\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.18}$$

On peut alors appliquer directement la proposition 4 (p. 53) et l'on obtient que pour $|\gamma(\lambda)| < 1$, l'itération :

$$\begin{aligned} \tilde{h}_0 &= 0 \\ \tilde{h}_{n+1} &= \tilde{h}_n + \tilde{S}_\lambda(f - \tilde{h}_n) \end{aligned}$$

converge vers f avec l'estimation :

$$\|f - \tilde{h}_n\| \leq \gamma^n \|f\|_{\mathcal{H}}.$$

À plusieurs reprises et plus particulièrement lors de l'introduction des fonctions noyaux, nous avons évoqué les relations qu'il existe entre repère et échantillonnage, la partie suivante a pour objet d'approfondir ces similitudes.

3.3 Propriétés des formes linéaires $\{L_n\}_{n\in I}$ autorisant l'échantillonnage

On a vu que dès qu'une famille d'échantillons forme un repère sur $\mathcal{H}$, on sait reconstruire tout élément de $\mathcal{H}$ à l'aide de ses échantillons. En se reportant à la figure 3.1 ci-dessous, cela signifie que l'on sait faire de le passage dans les sens (III) et (IV). Il nous faut maintenant voir les propriétés que doivent posséder les formes linéaires $\{L_n\}_{n\in I}$ pour qu'elles engendrent un repère, c'est-à-dire à quelle(s) condition(s) on a le passage dans les sens (I) et (II).

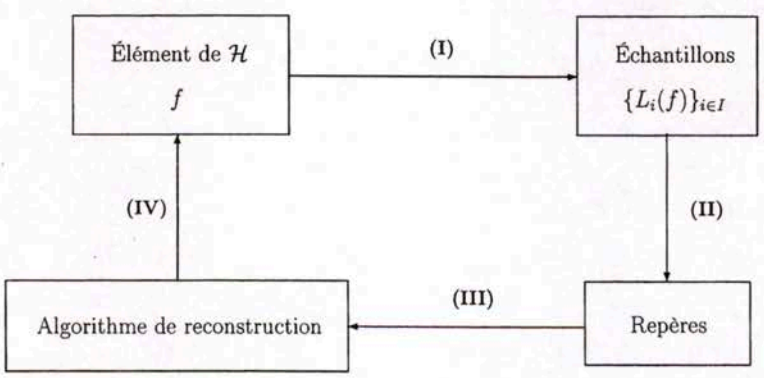


Figure 3.1 : L'échantillonnage via un repère.

Reprenons l'application Φ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathcal{H} & \to & \mathbb{K}^I \\ & & f & \mapsto & \{L_i(f)\}_{i\in I}. \end{array}$$

Pour que les formes linéaires $\{L_i\}_{i\in I}$ permettent l'échantillonnage de tout élément de $\mathcal{H}$, il est nécessaire que pour chaque $\{y_i\}_{i\in I} \in \operatorname{Im}\Phi$, il existe un unique $f \in \mathcal{H}$ tel que $\Phi(f) = \{y_i\}_{i\in I}$. Ce qui correspond à la définition de l'injectivité de Φ que l'on peut relier aux propriétés des formes linéaires par le résultat suivant :

Lemme 5 *L'application Φ est injective si et seulement si $\{L_i\}_{i\in I}$ est une famille totale de $\mathcal{H}^*$.*

PREUVE : Supposons que Φ soit injective et soit f telle que $L_i(f) = 0 \ \forall i \in I$. Alors $f \in \ker\Phi$ e donc $f = 0$. Réciproquement si $f \in \ker\Phi$, d'après la définition 4, on a $f = 0$. $\Diamond$

Le lemme précédent est à rapprocher de la proposition 5 (p. 56), on voit ainsi que l'injectivité de Φ est équivalente à l'injectivité S. Mais d'après le théorème 5 (p. 57), ce n'est pas l'injectivité de Φ ou de S qui assure que les $\{L_i\}$ forment un repère, c'est sa surjectivité. On donc a le résultat suivant :

Théorème 7 *$\{L_i\}_{i\in I}$ est un repère si et seulement si*

$$\begin{cases} \sum |L_i(f)|^2 < +\infty \ \ \forall f \in \mathcal{H} \\ \{L_i\}_{i\in I} \ \textit{est dense dans} \ \mathcal{H}^*. \end{cases}$$

PREUVE : Si $\{L_i\}_{i\in I}$ est un repère, c'est en particuliers une famille de Bessel et donc $\sum |L_i(f)|^2 < +\infty \ \ \forall f \in \mathcal{H}$. De plus, l'opérateur associé au repère est injectif donc la famille $\{L_i\}_{i\in I}$ est totale. Supposons maintenant que :

$$\sum |L_i(f)|^2 < +\infty \ \ \forall f \in \mathcal{H}$$

cela implique d'après le lemme 4 (p. 56) que l'opérateur S défini par $Sf = \sum L_i(f)\bar{L}_i$ est bien défini et qu'il existe une constante B telle que $S \leq B$. Supposons en outre, que :

$$\inf_{\|f\|=1} \sum |L_i(f)|^2 = 0$$

alors il existe une suite $\{g_n\}$ de $\mathcal{H}$ avec $\|g_n\| = 1 \ \forall n$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum |L_i(g_n)|^2 = 0$$

et puisque $\{g_n\}$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite $\{g_{\phi(n)}\}$ convergente vers $g \in \mathcal{H}$. L'opérateur S étant continu, on a $Sg = 0$ soit $L_i(g) = 0\ \forall i$ et puisque $\{L_i\}_{i\in I}$ est une famille totale, on en déduit que $g = 0$. Ce qui est impossible puisque $\|g_n\| = 1$. On a donc nécessairement :

$$\inf_{\|f\|=1} \sum |L_i(f)|^2 \geq A > 0$$

ce qui assure que $0 < A \leq S$ et le théorème 4 (p. 57) permet alors de conclure. $\Diamond$

La condition $\sum |L_i(f)|^2 < +\infty\ \forall f \in \mathcal{H}$ qui a du être rajoutée pour s'assurer que les $\{L_i\}$ forment un repère peut s'interpréter de différentes façons. Elle signifie que l'énergie au sens de $l^2(I)$ contenue dans les échantillons de f est finie. Et en revenant au lemme 5 (p. 56), on voit qu'elle signifie également que l'application Φ de $(\mathcal{H}, \|.\|)$ dans $(\mathbb{K}^I, \|.\|_{l^2(I)})$ est continue. Le théorème précédent a donc le corollaire suivant :

Corollaire 2 *$\{L_i\}_{i\in I}$ est un repère si et seulement si :*

$$\begin{cases} \Phi \textit{ est continue de } (\mathcal{H}, \|.\|) \textit{ dans } (\mathbb{K}^I, \|.\|_{l^2(I)}) \\ \Phi \textit{ injective.} \end{cases}$$

Nous avons déja mentionné que l'injectivité de Φ est une condition nécessaire pour faire de l'échantillonnage à partir des formes linéaires $\{L_i\}$. Et nous venons de voir que si l'on rajoute la continuité de Φ au sens de $l^2(I)$, cette condition devient suffisante pour que la reconstruction soit menée avec l'opérateur S.
On peut alors penser qu'en théorie, l'utilisation des repères restreint la généralité des problémes étudiés. Mais dès que l'on cherche à mettre en oeuvre les algorithmes proposés ci-dessus, on doit tenir compte des incertitudes numériques ou expérimentales sur les échantillons $\{L_i(f)\}$. Ainsi si l'on dispose des échantillons $L_i\tilde{(f)} = L_i(f) + \epsilon_i$, on souhaite naturellement que :

$$\Phi^{-1}\left(\{L_i\tilde{(f)}\}\right) \to \Phi^{-1}\left(\{L_i(f)\}\right) \quad \text{quand} \quad \epsilon_i \to 0 \tag{3.19}$$

ce qui signifie que l'application Φ^{-1} doit être continue sur $\operatorname{Im}\Phi$ et donc Φ continue sur $\mathcal{H}$.

En faisant intervenir le noyau reproducteur K défini sur $\mathcal{H}$, on obtient l'équivalence suivante :

Proposition 7 *La famille* $\{L_i\}$ *engendre* $\mathcal{H}^*$ *si et seulement si la famille* $\{L_i(k(x,.))\}$ *engendre* $\mathcal{H}$.

PREUVE : Soit $f \in \mathcal{H}$ puisque la famille $\{L_i\}$ engendre $\mathcal{H}^*$, il existe $\{c_i\}$ telle que $\sum_i c_i L_i \to \langle f, . \rangle$, soit :

$$\sum_i c_i L_i(K(x,.)) \to \langle f, K(x,.) \rangle = f(x).$$

Réciproquement si $L \in \mathcal{H}^*$, puisque la famille $\{L_i(K(x,.))\}$ engendre $\mathcal{H}$, il existe $f \in \mathcal{H}$ et $\{c_i\}$ telles que :

$$\sum_i c_i \langle L_i(K(x,.),.\rangle = \sum_i c_i L_i(.) \to \langle f, . \rangle = L(.). \ \Diamond$$

On peut alors reformuler le théorème 7 de la façon suivante.

Théorème 8 $\{L_i\}_{i \in I}$ *est un repère si et seulement si :*

$$\begin{cases} \sum |L_i(f)|^2 < +\infty \ \ \forall f \in \mathcal{H} \\ \{L_i(K(x,.))\}_{i \in I} \ \ \textit{est dense dans} \ \ \mathcal{H}. \end{cases}$$

3.3.1 Cas où $\mathcal{H}$ est de dimension finie

Dans la pratique, le nombre d'échantillons dont on dispose pour reconstruire un signal est fini. Dans ce cas, l'espace $\mathcal{H}$ ne pourra pas être de dimension infinie et la seule question sera l'injectivité de l'application Φ. Les problèmes de continuité des applications linéaires ne se posant pas en dimension finie, le théorème 7 devient :

Théorème 9 *Toute fonction* f *d'un espace de Hilbert de dimension finie peut être reconstruite à partir de ses échantillons* $\{L_i(f)\}_{i \in I}$ *si et seulement si* $vect\{L_i\} = \mathcal{H}^*$.

Et on peut décliner ce résultat de plusieurs façons différentes.

Corollaire 3 *Soit* $\{e_j\}_{j \in J}$ *une base de* $\mathcal{H}$. *Soit la matrice* G *définie par* $G_{i,j} = L_i(e_j)$. *Les trois propositions suivantes sont alors équivalentes :*

(i) Les formes linéaires $\{L_i\}_{i \in I}$ *permettent d'échantillonner tout élément de* $\mathcal{H}$

(ii) $rang\, G = card\, J$

(iii) $\ker G = \{0\}$.

Corollaire 4 *Si $dim\mathcal{H} = card I$, toute foncion pourra être reconstruite à partir des $\{L_i(f)\}_{i\in I}$ si et seulement si $\{L_i\}_{i\in I}$ est une famille libre de $\mathcal{H}^*$.*

Pour illustrer ces derniers résultats, revenons sur l'exemple donné au paragraphe 2.3.2 (p. 33). Soit $\mathcal{X}$ l'espace des fonctions définies sur $[-1,1]$ de la forme : $\{a_0 + a_1x^2, (a_0,a_1) \in \mathbb{R}^2\}$. $L_0(f) = f(x_0)$, $L_1(f) = f(x_1)$ sont deux formes linéaires sur $\mathcal{X}$ avec $-1 \leq x_0, x_1 \leq 1$. D'après les deux corollaires précédents, la reconstruction à partir de L_0 et L_1 est possible dès que :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0^2 \\ 1 & x_1^2 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) \neq 0$$

et l'on retrouve la condition obtenue intuitivement.

Remarque : En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes donc en se reportant au paragraphe 3.4, on a immédiatement que toute norme de la forme :

$$N \,:\, f \mapsto N\left(\{L_i(f)\}_{i\in I}\right)$$

définit un repère.

Ainsi s'achève la présentation des repères et de leurs propriétés générales en matière de reconstruction. On présente ci-dessous trois résultats plus directemnt liés à la manière de construire des repères. Ils seront bien entendu complétés ultérieurement dans des situations plus particulières.

3.4 Repères associés à une norme quelconque

On n'est plus nécessairement dans le cas où l'espace $\mathcal{H}$ est de dimension finie. La relation de définition (3.10) montre que l'application :

$$N_2 \,:\, f \mapsto \sqrt{\sum_{i\in I} |L_i(f)|^2}$$

est une norme sur $\mathcal{H}$, équivalente à la norme naturelle $\|.\| \,:\, f \mapsto \sqrt{\langle f, f\rangle}$. D'une façon plus générale, si N est une norme sur $\mathcal{H}$ ne faisant intervenir que des formes linéaires c'est-à-dire une application de la forme :

$$N \,:\, f \mapsto N\left(\{L_i(f)\}_{i\in I}\right)$$

et si de plus N est équivalente à $\|.\|$ alors l'opérateur :

$$\begin{array}{rccl} S_N \,:\, & \mathcal{H} & \to & \mathcal{H}^* \\ & f & \mapsto & \dfrac{1}{2}\left(N(f + .) - N(f - .)\right) \end{array}$$

défini un opérateur de repère associé à N. Et tous les résultats vus précédemment se démontrent de façon identique.

3.5 Erreur de troncature

Dans la pratique, les échantillons mesurés expérimentalement dont on dispose sont généralement bruités et en nombre fini. Il faut alors souhaiter que dans ces circonstances, les algorithmes que nous venons de présenter convergent vers une approximation de la solution exacte.
On est dans la situation où la famille $\{L_i\}_{i\in I}$ forme un repère :

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} |L_i(f)|^2 \leq B\|f\|^2 \quad \forall\, f \in \mathcal{H},$$

mais où l'on ne dispose pour un signal f que des échantillons $\{L_i(f)\}_{i=1}^r$. Il est clair que la famille $\{L_i\}_{i=1}^r$ forme un repère de l'espace :

$$\mathcal{H}_r = \bigcap_{i>r} L_i^{\perp} = \left(\bigcup_{i>r} L_i\right)^{\perp} \subset \mathcal{H}$$

c'est-à-dire :

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i=1}^{r} |L_i(f)|^2 \leq B\|f\|^2 \quad \forall\, f \in \mathcal{H}_r.$$

Soit f_r un élément de $\mathcal{H}_r$ vérifiant $L_i(f_r) = L_i(f)$ pour tout $i \leq r$ et construit grâce aux algorithmes proposés précédemment. Puisque l'on a un repère sur $\mathcal{H}$, il vient l'encadrement :

$$\begin{aligned} \|f - f_r\|^2 &\leq \frac{1}{A}\sum_{i\in I} |L_i(f - f_r)|^2 \\ &= C\sum_{i>r} |L_i(f - f_r)|^2 \end{aligned}$$

et puisque $f_r \in (\bigcup_{i>r} L_i)^{\perp}$, on obtient :

$$\|f - f_r\|^2 \leq C\sum_{i>r} |L_i(f)|^2.$$

Si $\lim_{r\to+\infty} \sum_{i\in I} |L_i(f - f_r)|^2 = 0$, on a ainsi une approximation de f. Cette idée sera reprise plus complètement dans le paragraphe 4.7.2 (p. 101).

3.6 Cas d'un espace de Banach

Jusqu'à présent nous avons envisagé les repères dans un espace de Hilbert, mais il est possible d'étendre cette notion aux espaces de Banach, ([Grö91]). Dans un espace de Hilbert, la relation de définition d'un repère :

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} |L_i(f)|^2 \leq B\|f\|^2$$

qui comme nous l'avons vu traduit une équivalence de normes, mène directement à à la formule de reconstruction :

$$f = \sum_{i\in I} L_i(f) S^{-1} \bar{L}_i.$$

Ceci n'est plus vrai dans un espace de Banach et l'on adopte alors la définition suivante.

Définition 9 *Soit $\mathcal{E}$, un espace de Banach sur un corps $\mathbb{K}$ et $\mathcal{E}_d$, un espace de Banach de suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Étant données les suites $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset (\mathcal{E}^*)^{\mathbb{N}}$ et $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset (\mathcal{E})^{\mathbb{N}}$, si l'on a :*

(i) $\{\langle x, y_i\rangle\} \in \mathcal{E}_d$ *pour tout* $x \in \mathcal{E}$,

(ii) les normes $\|x\|_{\mathcal{E}}$ *et* $\|\{\langle x, y_i\rangle\}\|_{\mathcal{E}_d}$ *sont équivalentes,*

(iii) $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle x, y_i\rangle x_i$ *pour tout* $x \in \mathcal{E}$,

alors le couple $(\{y_i\}, \{x_i\})$ *est appelé décomposition atomique de* $\mathcal{E}$ *par rapport à* $\mathcal{E}_d$. *Si l'équivalence des normes est donnée par :*

$$A\,\|x\|_{\mathcal{E}} \leq \|\{\langle x, y_i\rangle\}\|_{\mathcal{E}_d} \leq B\,\|x\|_{\mathcal{E}}$$

alors A et B sont un choix possible pour les bornes du repère.

Très utile dans de nombreuses situations telles le cas des espaces L^p pondérés, cette extension aux espaces de Banach ne nous est pas indispensable dans les situations que nous rencontrerons. Nous avons donc choisi de nous restreindre dans la suite, aux cas des espaces de Hilbert.

3.7 Conclusion

Partant d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, nous venons de voir quelles propriétés devaient vérifier des formes linéaires $\{L_i\}$ pour qu'elles permettent d'échantillonner tout élément de $\mathcal{H}$.

Avant cela nous avions vu comment à partir d'un repère et des échantillons $\{L_i(f)\}$ d'un élément de $\mathcal{H}$ on pouvait reconstruire totalement f. Nous avons aussi montré que les conditions permettant de réaliser ces deux opérations étaient compatibles et complémentaires.
Il nous reste maintenant à nous intéresser aux espaces $\mathcal{H}$ dans lesquels ces outils peuvent être utilisés.

Chapitre 4

Échantillonnage des signaux à bande limitée selon une transformation discrète

Cette partie est consacrée à l'utilisation de transformations discrètes pour l'échantillonnage des signaux à bande limitée. Nous proposons une technique utilisant les résultats obtenus dans la partie 3.1 et étendant au cas d'une transformation discrète quelconque les résultats obtenus par Feichtinger et al. ([Str95], [Str97]) pour la transformation de Fourier discrète.

La méthode proposée dans ce chapitre est tout d'abord exposée dans le cas de signaux unidimensionnels avec un nombre fini d'échantillons puis pour des signaux de dimension multiple, on évoque enfin le cas d'un nombre infini d'échantillons. Nous donnons des estimations d'erreurs dues au bruitage des échantillons et au phénomène de repliement de spectre.

4.1 Présentation

Soit à étudier des signaux provenant d'un système dont la modélisation est délicate. Cela ne signifie pourtant pas qu'il soit impossible de recueillir des renseignements sur ces signaux tels leurs amplitudes de variations, la forme de leurs modes propres ou leurs limites aux bornes de l'intervalle d'étude. Nous allons chercher à intégrer ce type d'information à des techniques d'échantillonnage.

Afin d'illustrer ceci, prenons un exemple simple : un essieu circulant sur une chaussée (voir figure ci-dessous).

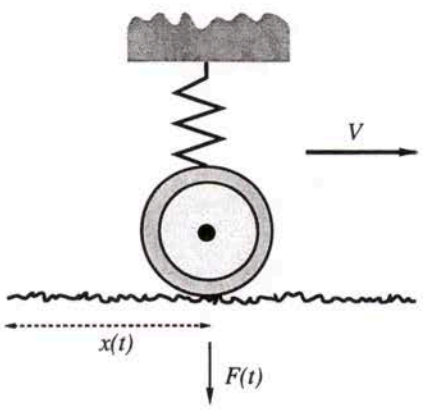


Figure 4.1 : Essieu de véhicule circulant sur une chaussée.

Étant donné le nombre de paramètres mis en jeu (mécanique et uni de la chaussée, comportement du pneumatique, type de suspension, température, etc...), ce système bien que relativement simple est très complexe à étudier.

L'obtention d'un modéle décrivant par exemple les variations au cours du temps de $F(t)$, la force dynamique appliquée par le pneumatique en mouvement sur la chaussée est très délicate. Une simple étude mécanique et du bon sens nous révèlent pourtant que :

1. les variations de la force dynamique sont bornées et centrées autour d'une valeur moyenne
2. si on assimile l'essieu à un système masse+ressort, le signal représentant les variations de $F(t)$ peut être approché par des fonctions trigonométriques relativement simples.

ECOLE DES PONTS&CHAUSSÉES BIBLIOTHÈQUE

Ainsi, si l'on cherche à reconstruire les variations de $F(t)$ à partir de certaines valeurs mesurées $\{F(t_i)\}_{i=1}^r$, il est possible d'effectuer la reconstruction à partir de polynômes de la forme $x \mapsto x^k$ mais les deux remarques ci-dessus montrent instantanément que ce choix n'est sans doute pas le plus judicieux et que des fonctions harmoniques semblent mieux adaptées à la mécanique du problème. Ce petit exemple montre que la prise en compte des considérations mécaniques se fait principalement par le biais du choix de la famille des fonctions pour la reconstruction.

4.2 Échantillonnage irrégulier de signaux 1D

On s'intéresse au cas où on dispose d'un nombre fini d'échantillons. Soit $\mathcal{E}$ un espace de Hilbert de fonctions définies sur un intervalle V. Soit s, un élément de $\mathcal{E}$ dont on connaît les échantillons $L_1(s), \ldots, L_r(s)$ avec $r \in \mathbb{N}$, on cherche donc à retrouver l'expression de $s(t)$ pour tout $t \in V$ avec la seule connaissance des $\{L_i(s)\}$.
Comme nous l'avons déjà signalé dans le partie 2.3, si l'on introduit l'opérateur Φ tel que :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E} & \to & \mathbb{C}^r \\ \Phi : s & \mapsto & \{L_j(s)\}_{j=1}^r, \end{array} \tag{4.1}$$

ce problème revient à chercher l'antécédent de $\{L_j(s)\}$ par Φ. Par définition, cet antécédent existe et la problématique est donc de mettre au point une technique simple, rapide et stable afin de calculer $\Phi^{-1}(\{L_j(s)\})$.

4.2.1 Échantillonnage selon une famille $\{g_i\}_{i=1}^N$

Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{E}$ avec pour tout $1 \leq i \leq N$, $g_i \subset \mathcal{H}$. Le problème de l'éhantillonnage selon la famille $\{g_i\}_{i=1}^N$ revient donc

à chercher une combinaison des éléments g_i du type :

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i g_i(t)$$

telle que l'on ait :

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i g_i(t) = s(t) \quad \forall t \in V, \tag{4.2}$$

les $\{\alpha_i\}$ étant calculés à partir des $\{L_i(s)\}$. Il paraît naturel de demander à la famille $\{g_i\}_{i=1}^N$ de permettre l'échantillonnage non pas d'une seule fonction s mais d'un grand nombre d'éléments de $\mathcal{H}$, par exemple de tout les éléments du sous-espace $\mathcal{H}$. Ceci revient à dire que le système :

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i L_j(g_i) = L_j(s) \quad \forall j = 1, \ldots, r \tag{4.3}$$

avec $r \geq N$, doit admettre au moins une solution $\{\beta_i\}_{i=1}^N$ pour tout s de $\mathcal{H}$. Puisque l'information contenue dans les $\{L_i(s)\}$ doit permettre de déterminer complètement s, cette solution est de plus unique. Ainsi, une condition suffisante pour que l'échantillonnage à partir des $\{L_j(s)\}$ soit possible pour tout s de $\mathcal{H}$ est que la matrice G de termes génériques :

$$G_{i,j} = L_i(g_j)$$

vérifie :

$$\ker G = \{0\}. \tag{4.4}$$

On retrouve naturellement la condition donnée au paragraphe 3.3.1 (p. 64).

On peut chercher à étendre la condition précédente afin que la reconstruction soit non seulement possible pour un r-uplet $(L_1, \ldots, L_r)$ de formes linéaires sur $\mathcal{H}$ mais pour tout r-uplet appartenant à :

$$\mathcal{L}_r = \left\{(L_1, \ldots, L_r) \in (\mathcal{H}^*)^r \,,\; r < +\infty\right\}.$$

Ceci nous amène donc à introduire les deux définitions suivantes.

Définition 10 *Une famille de fonctions $\{g_i\}_{i=1}^N$ est dite unisolvente sur $\mathcal{L}_r$ si pour tout $(L_1, \ldots, L_r) \in \mathcal{L}_r$, il existe un N-uplet $(\tilde{L_1}, \ldots, \tilde{L_N})$ extrait de $(L_1, \ldots, L_r)$, i.e. $\tilde{L_i} \in (L_1, \ldots, L_r)$ tel que :*

$$\det\left(\tilde{L_i}(g_j)\right) \neq 0.$$

Définition 11 *Un espace de dimension finie $\mathcal{H}$, de fonctions définies sur un intervalle V est dit $\mathcal{L}_r$-échantillonnable à partir de la famille $\{g_i\}_{i=1}^N$ si pour tout élément $(L_1, \ldots, L_r)$ de $\mathcal{L}$ et pour tout s de $\mathcal{H}$, les échantillons $\{L_i(s)\}_{i=1}^r$ permettent de reconstruire complétement s.*

À partir de la condition 4.4 et des deux définitions précédentes, on obtient le résultat suivant.

Théorème 10 *$\mathcal{H}$ est dit $\mathcal{L}_r$-échantillonnable à partir de la famille $\{g_i\}_{i=1}^N$ si et seulement si $\{g_i\}_{i=1}^N$ est unisolvente sur $\mathcal{L}_r$.*

4.2.2 Approximation

Si en théorie, l'existence d'un antécédent de $\{L_j(s)\}_{j=1}^r$ par Φ est assurée, il n'en est pas de même dans la pratique puisque les mesures sont généralement bruitées et on dispose alors des informations $\{L_j(s) + \epsilon_j\}$. Dans ce cas, le problème revient à chercher une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{H}$ telle que :

$$\sum_i \alpha_i L_j(g_i) = L_j(s) + \epsilon_j \quad \forall\, j = 1, \ldots, r. \tag{4.5}$$

Sans hypothèse supplémentaire sur les quantités ϵ_j, une condition suffisante pour que ce problème admette une solution est que :

$$\operatorname{rang} G = \dim \operatorname{Im} \Phi = r.$$

Et d'après les propriétés de G vues au paragraphe précédent, il vient en utilisant le théorème du rang que $\dim \mathcal{H} = \dim \ker G + \operatorname{rang} G$ ce qui fournit :

$$r = \dim \mathcal{H}$$

et puisque l'on a $r \geq N$, cela impose : $r = N$. Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des $\{\alpha_i\}$ tels que :

$$\tilde{s}(t) = \sum_i \alpha_i g_i(t)$$

avec $L_i(\tilde{s}) = L_i(s) + \epsilon_i$, est que la matrice G soit non singulière. La quantité :

$$d = \|s - \tilde{s}\|_{\mathcal{E}}$$

traduit la qualité de l'approximation.

Afin de réduire les perturbations engendrées par les ϵ_i et donc de minimiser d, nous verrons plus tard que le "suréchantillonnage" qui consiste en une augmentation du nombre d'échantillons disponibles est un bon remède. Dans ce cas, il n'y a généralement plus de solution exacte au problème (4.5) mais une solution approchée au sens de la minimisation d'un critère d'erreur.

4.3 Signaux 1D à bande limitée selon une transformation discrète et opérateur de repère

4.3.1 Notion de signal à bande limitée

Dans la littérature, on assimile généralement les signaux à bande limitée aux signaux à bande limitée selon la transformation de Fourier (discrète ou continue). La transformation de Fourier discrète (T.F.D.) d'ordre N est l'application de $\mathbb{C}^N$ dans lui-même définie par :

$$\mathcal{F}s(k) = \hat{s}(p) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s(k)\, e^{-2\pi jkp/N}.$$

Considérons les signaux s_1 et s_2 tels que :

$$\begin{aligned} s_1 &: t \mapsto e^{2\pi jt/N} + e^{10\pi jt/N} + e^{14\pi jt/N} \\ s_2 &: t \mapsto e^{2\pi jt^2/N} + e^{10\pi jt^2/N} + e^{14\pi jt^2/N} \end{aligned}$$

on a alors :

$$\begin{aligned} \hat{s}_1(p) &= \left(\delta_p^1 + \delta_p^5 + \delta_p^7\right) \\ \hat{s}_2(p) &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi jk(k-p)/N} + e^{2\pi jk(5k-p)/N} + e^{2\pi jk(7k-p)/N} \end{aligned}$$

par exemple pour $N = 11$, les harmoniques des signaux $\hat{s}_1$ et $\hat{s}_2$ sont :

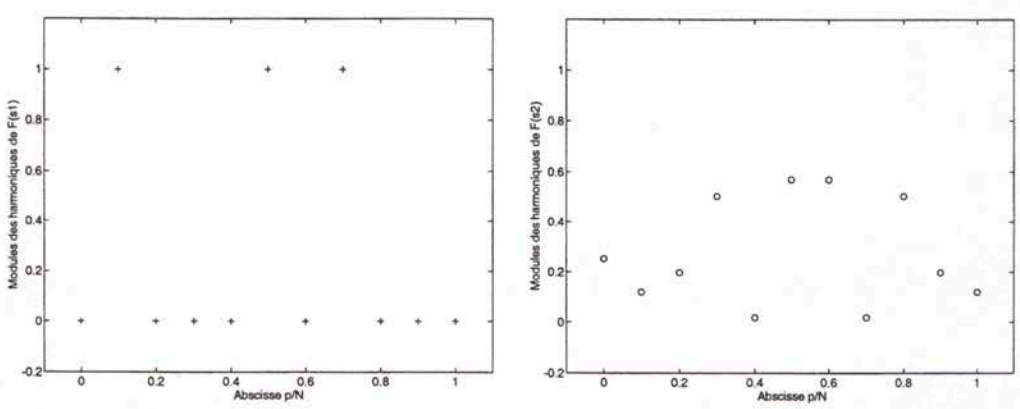


Figure 4.2 : Module des harmoniques de la T.F.D. de s_1 et s_2.

La figure ci-dessus montre que le signal s_1 n'est en fait composé que de trois harmoniques alors que le signal s_2 "excite" chacun des harmoniques. La définition d'un signal à bande limitée selon la transformation de Fourier discrète est donc la suivante.

Définition 12 *Un signal s tel que :*

$$\hat{s}(k) = 0 \quad pour \ |k \ mod \ N| > M$$

est dit à bande limitée (selon la T.F.D.), de largeur de bande M.

Cette définition s'adapte naturellement au cas de la transformée de Fourier continue. Par extension, si $\mathcal{T}$ est une transformation agissant sur un espace fonctionnel $\mathcal{E}$, un signal s de $\mathcal{E}$ sera dit à bande limitée selon $\mathcal{T}$ de largeur de bande Ω lorsque l'on aura :

$$\mathcal{T}s(x) = 0 \quad \text{pour} \ x \notin \Omega.$$

Nous reviendrons au paragraphe 5.4 sur l'existence et les propriétés de telles transformations. Dans cette partie, nous utiliserons uniquement des transformations discrètes dont les propriétés sont semblables à celles de la transformation de Fourier discrète.

En terme de reconstruction, les signaux à bande limitée sont d'une très grande importance puisque si $\mathcal{T}$ est une transformation discrète agissant sur un espace de fonctions $\mathcal{E}$ et s'écrivant :

$$\mathcal{T}s(.) = \sum_k s(x_k) f_k(.) \qquad \mathcal{T}^{-1}y(.) = \sum_p y(x_p) g_p(.)$$

et si $\mathcal{B}_\Omega$ est l'espace des signaux à largeur de bande inférieure à Ω, on aura pour tout $s \in \mathcal{B}_\Omega$:

$$\begin{aligned} s(.) = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}s(.) &= \sum_i \mathcal{T}s(x_i) g_i(.) \\ &= \sum_{i \,/\, x_i \in \Omega} \mathcal{T}s(x_i) g_i(.) \end{aligned}$$

et donc $s \in \text{vect}\,\{g_i \,/\, x_i \in \Omega\}$ alors que $\mathcal{E} = \text{vect}\,\{g_i\}$. La reconstruction d'un élément de $\mathcal{E}$ peut alors se faire avec une famille de fonctions de cardinal inférieur à celui d'une base de $\mathcal{E}$. Plus la largeur de bande Ω est petite, plus le nombre d'éléments nécessaires à la reconstruction sera faible.

Nous allons voir dans le paragraphe 4.3.4 comment combiner cette propriété avec celles des repères pour construire une méthode d'échantillonnage irrégulier pour les problèmes de dimension finie. Dans le cas où les fonctions g_i sont les polynômes trigonométriques i.e. $g_i(t) = e^{2\pi j i t}$, une telle méthode dite "algorithme ACT" existe déjà.

4.3.2 L'algorithme ACT

En 1995, T. Strohmer, H.G. Feichtinger et K. Gröchenig ([Str95]) ont proposé une méthode appelée "Adaptative Conjugate Toeplitz matrix" pour l'interpolation et l'extrapolation des signaux à bande limitée selon la transformation de Fourier discrète. Elle permet une reconstruction directe ou itérative de signaux 1D ou 2D ([Fei92c]) à partir d'un échantillonnage irrégulier fini. Nous avons utilisé cet algorithme pour la reconstruction de signaux dynamiques liés à l'étude de l'interaction véhicule-chaussée ([Sai97a], [Sai97b]), il s'est révélé efficace et robuste vis à vis du bruitage des mesures.

Nous nous proposons de développer une technique d'échantillonnage analogue non plus basée seulement sur la T.F.D. et les polynômes trigonométriques mais s'appuyant sur une transformation discrète quelconque et la famille de fonctions qui lui est associée.

4.3.3 Transformation discrète selon une famille de fonctions

$\mathcal{E}$ désigne toujours un espace de Hilbert de fonctions définies sur un intervalle borné V et $\mathcal{H}$, un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{E}$. On introduit $\mathcal{G} = \{g_i(t)\}_{i=1}^{N}$, une famille de fonctions de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{L} = \{L_i\}_{i=1}^{r}$, une famille de r formes linéaires sur $\mathcal{E}$. On suppose que les familles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{G}$ vérifient la condition (4.4) c'est-à-dire :

$$\ker G = \{0\}.$$

Puisque $\ker G = \{0\}$, il existe une matrice F, de taille $N \times r$ telle[1] que :

$$\bar{F}\, G = I_{d_N}.$$

On peut alors définir sur $\mathcal{H}$, la transformation $\mathcal{T}$ associée aux familles $\mathcal{G}$ et $\mathcal{L}$ par :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T} : \mathbb{C}^N & \to & \mathbb{C}^N \\ \{L_i(s)\}_{1\le i\le N} & \mapsto & \mathcal{T}s(q) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} L_k(s)\bar{F_{k,q}} \quad \text{pour } q = 1, \ldots, N. \end{array}$$

Cette transformation est naturellement bijective et l'on a :

$$L_k(s) = \sum_{p=1}^{N} \mathcal{T}s(p)\, L_k(g_p).$$

[1] I_{d_N} représente la matrice identité de taille N.

On définit alors l'espace des signaux à largeur de bande Ω selon $\mathcal{T}$ par :

$$\mathcal{B}_\Omega = \left\{ s \in \mathbb{C}^N \ / \ \mathcal{T}s(k) = 0 \ \text{ pour } k \notin \Omega \subset \{1, \ldots, N\} \right\} \tag{4.6}$$

Ainsi, si $s \in \mathcal{B}_\Omega$, il vient :

$$L_p(s) = \sum_{k \in \Omega} \mathcal{T}s(k)\, L_p(g_k)$$

et si $f \in \mathcal{H}$ est telle que :

$$f(t) = \sum_{k \in \Omega} \mathcal{T}s(k)\, g_k(t) \qquad \forall t \in V$$

alors $L_p(s) = L_p(f)$ et le problème de l'interpolation d'un signal $t \mapsto f(t)$ sur l'intervalle V est alors de savoir à quelle(s) condition(s) les échantillons $\{L_i(f)\}_{i=1}^r$ permettent de déterminer complètement f sur V et de trouver un algorithme de reconstruction. Dès lors que l'on travaille en dimension finie, il est évident d'un point de vue théorique que la famille d'échantillons $\{L_i(p)\}_{i \in \{1,\ldots,r\}}$ peut contenir autant d'informations que le signal f, pour cela il suffit de choisir les échantillons correctement et en nombre suffisant. Par contre la mise au point de méthodes de reconstruction stables et applicables à des problèmes de dimension finie mais grande où l'on dispose de plusieurs milliers d'échantillons est plus délicate surtout lorsqu'il s'agit d'échantillonnage irrégulier et de mesures bruitées.

4.3.4 Reconstruction itérative

Nous donnons dans cette partie, une méthode constructive pour l'échantillonnage des signaux à bande limitée selon la ransformation $\mathcal{T}$. Les résultats utilisés sont des applications directes de ceux présentés dans la partie 3.1.

Soit $\mathcal{P}_\Omega$ l'espace des fonctions f telles que :

$$\mathcal{P}_\Omega = \left\{ f \in \mathcal{H} \ / \ f(t) = \sum_{i \in \Omega} a_i g_i(t) \right\} \tag{4.7}$$

Théorème 11 *Soient $L_1, \ldots, L_r$, r formes linéaires sur $\mathcal{E}$ et $f \in \mathcal{P}_\Omega$. Alors f est déterminée de façon unique par les r points $L_i(f)$ si et seulement si $dim\{L_1, \ldots, L_r\} \geq card\Omega = |\Omega|$. Dans ce cas il existe deux constantes $0 < A \leq B$ telles que :*

$$A \|f\|^2 = A \int_V |f(t)|^2 dt \leq \sum_{i=1}^r |L_i(f)|^2 \leq B \int_V |f(t)|^2 dt = B \|f\|^2 \tag{4.8}$$

PREUVE : L'espace vectoriel $\mathcal{P}_\Omega$ est de dimension finie (au plus $|\Omega|$) et l'on applique directement le théorème 9 du paragraphe 3.3.1 (p. 64). $\Diamond$

La relation (4.8) permet d'obtenir divers algorithmes de reconstruction. En effet, $\mathcal{P}_\Omega$ est un espace de dimension finie de fonctions définies sur V donc il admet une fonction noyau $k_{\mathcal{P}_\Omega}(x,y) = \langle k_x, k_y \rangle$ (théorème 1, p. 59) telle que :

$$f(t) = \langle k_{\mathcal{P}_\Omega}(.,t), f(.) \rangle \qquad \forall f \in \mathcal{P}_\Omega$$

où $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathcal{E}$. On peut aussi définir l'opérateur de repère $\tilde{S}$ introduit au paragraghe 3.2.2 (p. 57) :

$$\tilde{S}f(t) = \sum_{i=1}^{r} L_i(f) L_i \bar{k}(.,t).$$

Lemme 6 *Sous les hypothèses du théorème 11 avec $\lambda < \frac{1}{B}$ où B est la constante définie dans (4.8), l'itération :*

$$f_0 = 0, \qquad f_n = f_{n-1} + \lambda \tilde{S}(f - f_{n-1}) \tag{4.9}$$

converge vers f pour tout $f \in \mathcal{P}_\Omega$. De plus, on a :

$$\|f - f_n\| \leq \rho^n \|f\| \tag{4.10}$$

où $\rho = max\{|1 - \lambda A|, |1 - \lambda B|\} < 1$. Et puisque les itérations précédentes ne nécessitent que la connaissance des $\{L_i(f)\}_{1 \leq i \leq r}$, il s'agit bien d'une reconstruction de f à partir de ses échantillons.

PREUVE : On vérifie aisément que l'on a $\langle \tilde{S}f, f \rangle = \sum_{i=1}^{r} |L_i(f)|^2$ pour tout $f \in \mathcal{P}_\Omega$ et grâce à (4.8), on obtient :

$$(1 - \lambda B)\|f\|^2 \leq \langle (Id - \lambda S)f, f \rangle \leq (1 - \lambda A)\|f\|^2$$

et la proposition 6 ainsi que la relation (3.18) (p. 60) nous fournissent :

$$\|f - f_n\| = \|(Id - \lambda S)(f - f_{n-1})\| \leq \rho \|f - f_{n-1}\| \leq \ldots \leq \rho^n \|f\|$$

où $\rho = \max\{|1 - \lambda A|, |1 - \lambda B|\} < 1$. Ce qui assure la convergence de l'itération. $\Diamond$

L'itération (4.9) converge vers f sans que l'on ne fasse intervenir explicitement la famille des fonctions $\{g_i(t)\}$ mais elle intervient indirectement par le biais de la fonction noyau. Ci-dessous, nous allons modifier l'itération (4.9) afin de tenir compte du fait que la reconstruction se fait sur certains

éléments de la famille $\mathcal{G}$.
Soit $\{\phi_n\}_{1\leq n\leq|\Omega|}$ est une base orthonormée de $\mathcal{P}_\Omega$, introduisons la matrice $T \in \mathcal{M}_{|\Omega|}(\mathbb{C})$ et le vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{|\Omega|}$ définis par :

$$T_{k,l} = \sum_{i=1}^{r} L_i(g_l)\overline{L_i(\phi_k)} \quad \text{pour } 1 \leq k,l \leq |\Omega| \tag{4.11}$$

$$b_k = \sum_{i=1}^{r} L_i(f)\overline{L_i(\phi_k)} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq |\Omega|. \tag{4.12}$$

Lemme 7 *Soit $f = \sum_{k\in\Omega} a_k g_k(t) \in \mathcal{P}_\Omega$ et $L_1, \ldots, L_r$ une famille de formes linéaires sur $\mathcal{H}$ de rang $\geq |\Omega|$. Alors, pour λ suffisament petit, l'itération :*

$$\mathbf{a}_0 = 0, \qquad \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_{n-1} - \lambda T\mathbf{a}_{n-1} + \lambda\mathbf{b} \quad \textit{pour } k \geq 1 \tag{4.13}$$

converge vers $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k\in\Omega}$.

PREUVE : On a $k_{\mathcal{P}_\Omega}(x,y) = \sum_{n\in\Omega} \phi_n(x)\overline{\phi_n}(y)$, (cf. relation (3.15), p. 58) et on vérifie en remplaçant l'expression de $k_{\mathcal{P}_\Omega}$ dans celle de l'opérateur de repère d'une part que :

$$\tilde{S}f(t) = \sum_{i=1}^{r} L_i(f) \sum_{n\in\Omega} L_i(\phi_n)\phi_n(t)$$

et d'autre part en utilisant l'expression de f à l'aide des g_k que :

$$\tilde{S}f(t) = \sum_{n\in\Omega} \left(\sum_{k\in\Omega} \sum_{i=1}^{r} L_i(g_k)L_i(\phi_n)a_k \right) \phi_n(t).$$

Ainsi, les coefficients de $\tilde{S}f(t)$ sont donnés par le vecteur $T\mathbf{a} = \mathbf{b}$. L'itération (4.13) est alors une reformulation de la récurence (4.9) mais ne portant que sur les coefficients de la décomposition de f sur $\mathcal{G}$. $\Diamond$

4.3.5 Reconstruction directe

Comme nous l'avons souligné à plusieurs reprises, la reconstruction d'un signal f à partir de ses échantillons $\{L_i(f)\}$ consiste en l'inversion de l'opérateur $\Phi : f \mapsto \{L_i(f)\}$ et puisque nous travaillons en dimension finie, on peut écrire Φ sous la forme d'une matrice et l'itération donnée par le lemme 7 revient donc à la résolution d'un système linéaire matriciel $T\,\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Et on a le lemme suivant.

Lemme 8 *Sous les même hypothèses qu'au lemme 7, si* $\{L_i(f)\}_{i=1}^r$ *sont* r *échantillons de* $f \in \mathcal{P}_\Omega$ *et si* $\mathbf{b}$ *est défini tel qu'en (4.12), alors le vecteur* $\mathbf{a} = (a_k)_{k\in\Omega}$ *tel que :*

$$\mathbf{a} = T^{-1}\mathbf{b} \quad \in \mathbb{C}^{|\Omega|}$$

permet d'obtenir : $f(t) = \sum_{k\in\Omega} a_k g_k(t) \in \mathcal{P}_\Omega$.

PREUVE : Suivant que la famille $\mathcal{G}$ sera orthonormale ou pas, on peut envisager deux démonstrations différentes.

Cas où la famille $\mathcal{G}$ est orthonormale

Dans ce cas, le noyau de l'espace engendré par la famille $\mathcal{G}$ peut être défini par : $k_{\mathcal{P}_\Omega}(x,y) = \sum_{n\in\Omega} g_n(x)\overline{g_n}(y)$ et on sait déjà que l'itération (4.13) converge et que sa limite $\mathbf{a}$ ne peut être que telle que $T\,\mathbf{a} = \mathbf{b}$. De plus en remplaçant par l'expression des coefficients de T, il vient que :

$$\begin{aligned}
\langle T\mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle_{\mathbb{C}^{|\Omega|}} &= \sum_i^r \sum_{k\in\Omega} a_k L_i(g_k) \sum_{l\in\Omega} \overline{a_l L_i(g_l)} \\
&= \sum_i^r L_i\left(\sum_{k\in\Omega} a_k g_k(t)\right) L_i\left(\sum_{l\in\Omega} \overline{a_l g_l(t)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^r |L_i(f)|^2 \\
&= \langle Sf, f\rangle_{\mathcal{E}}
\end{aligned}$$

et donc $\langle T\mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle > 0$ pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{*\,|\Omega|}$, ce qui assure l'inversibilité de T.

Cas où la famille $\mathcal{G}$ n'est pas orthonormale

Si la famille $\mathcal{G}$ n'est pas orthonormale, la relation $\langle T\mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle_{\mathbb{C}^{|\Omega|}} = \langle Sf, f\rangle_{\mathcal{E}}$ n'est plus nécessairement vérifiée et l'on doit invoquer d'autres arguments afin de prouver l'inversibilité de la matrice T.
Soit $\{\phi_n(x)\}_{n\in\Omega}$, la famille de fonctions obtenue par orthnormalisation de la famille $\mathcal{G}$ (par exemple par le procédé de Gram-Schmidt), on a donc :

$$g_j(x) = \sum_{p\le j} \alpha_p^j \phi_p(x)$$

soit

$$L_i(g_j) = \sum_{p\in\Omega} \alpha_p^j L_i(\phi_p) \quad \text{avec} \begin{cases} p > j \Rightarrow \alpha_p^j = 0 \\ \alpha_p^p > 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, ce que l'on peut écrire matriciellement :

$$\{L_i(\phi_j)\} = \{L_i(g_j)\}\{\alpha_i^j\}$$

où la matrice $\{\alpha_i^j\}$ est inversible puisque triangulaire supérieure sans terme nul sur la diagonale. Or la matrice T peut s'écrire $T = \overline{\{L_i(\phi_j)\}}^T \{L_i(g_j)\}$ soit :

$$T = \{\overline{\alpha_i^j}\}^T \{\overline{L_i(g_j)}\}^T \{L_i(g_j)\} \tag{4.15}$$

De la même façon que précédemment, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \langle \left(\{\overline{\alpha_i^j}\}^{-1}\right)^T T\mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle &= \langle \{\overline{L_i(g_j)}\}^T \{L_i(g_j)\}\mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle \\ &= \sum_i^r \sum_{k\in\Omega} a_k L_i(g_k) \sum_{l\in\Omega} \overline{a_l L_i(g_l)} \\ &= \sum_{i=1}^r |L_i(f)|^2. \end{aligned}$$

La matrice $\{\overline{L_i(g_j)}\}^T \{L_i(g_j)\}$ est hermitienne et positive, ceci assure l'inversibilité de la matrice $(\{\overline{\alpha_i^j}\}^{-1})^T T$ et donc de la matrice T. $\Diamond$

L'utilisation des lemmes 7 et 8 requiert la connaissance d'une base orthonormale de l'espace $\mathcal{P}_\Omega$. Mais certains arguments utilisés dans la démonstration précédente vont permettre de s'affranchir de cette contrainte. En effet, à l'aide la relation (4.14) on calcule :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_m = \{\overline{\alpha_i^j}\}^T \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_{i=1}^r L_i(f) \sum_{p\in\Omega} \overline{\alpha_p^j}\, \overline{L_i(\phi_p)} \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_{i=1}^r L_i(f) L_i(g_j) \\ \vdots \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

En utilisant la relation (4.15), on définit la matrice T_m par :

$$T_m = \left(\{\overline{\alpha_i^j}\}^{-1}\right)^T T = \{\overline{L_i(g_j)}\}^T \{L_i(g_j)\} \tag{4.17}$$

et les lemmes 7 et 8 peuvent être réécrits à l'aide T_m et $\mathbf{b}_m$ de la façon suivante sans faire intervenir la base $\{\phi_n\}$.

Lemme 9 *Soit $f = \sum_{k\in\Omega} a_k g_k(t) \in \mathcal{P}_\Omega$ et $L_1, \ldots, L_r$ une famille de formes linéaires sur $\mathcal{E}$ de rang $\geq |\Omega|$. Alors, pour λ suffisament petit, l'itération :*

$$\mathbf{a}_0 = 0, \qquad \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_{n-1} - \lambda T_m \mathbf{a}_{n-1} + \lambda \mathbf{b}_m \quad \text{pour } k \geq 1 \tag{4.18}$$

converge vers $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k\in\Omega}$.

Lemme 10 *Sous les même hypothèse qu'au lemme 7, si* $\{L_i(f)\}_{i=1}^{r}$ *sont* r *échantillons de* $f \in \mathcal{P}_\Omega$ *et si* $\mathbf{b}_m$ *est défini tel qu'en (4.16), alors le vecteur* $\mathbf{a} = (a_k)_{k\in\Omega}$ *tel que :*

$$\mathbf{a} = T_m^{-1}\mathbf{b}_m \quad \in \mathbb{C}^{|\Omega|}$$

permet d'obtenir : $f(t) = \sum_{k\in\Omega} a_k g_k(t) \in \mathcal{P}_\Omega$.

4.3.6 Programmation

Dans l'algorithme ACT ([Fei93a]), T est une matrice de Toeplitz, elle a donné son nom à l'algorithme "Adaptative Conjuguate Toeplitz method". L'inversion d'une matrix de Toeplitz de taille M se fait en $\mathcal{O}(M \log M)$ opérations ([Amm88]). Mais dès lors que la famille $\mathcal{G}$ n'est plus celle des polynômes trigonométriques, T n'est plus nécessairement une matrice de Toeplitz et suivant la taille de M, on privilégiera une méthode itérative ou directe pour inverser T où T_m.

Pour la résolution des problèmes de taille moyenne ou grande par exemple de l'ordre de 10^3 ou 10^4 échantillons lorsque le conditionnement de la matrice T est satisfaisant, la méthode d'accélération de convergence de Richardson qui accompagne les algorithmes itératifs présentés précédemment est tout à fait adaptée. Par contre si l'on a traiter un problème de taille supérieure (10^6 échantillons) et si la matrice T est mal conditionnée avec de plus une largeur de bande voisine du nombre d'échantillons, il est nécessaire d'envisager une amélioration à l'accélération de Richardson.
Puisqu'on est dans une situation où les matrices T et T_m sont définies positives, de nombreux algorithmes sont envisageables. On rappelle ci-dessous celui du gradient conjugué.

Proposition 8 *Soit* $T \in \mathcal{M}_M(\mathbb{C})$ *une matrice définie positive dont la plus petite (resp. grande) valeur propre est notée* λ *(resp.* Λ*). Soit* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^M$ *et* $\mathbf{r}_0 = \mathbf{q}_0 = \mathbf{b} - T\mathbf{x}_0$*, alors pour* $n \geq 1$*, l'itération :*

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_n} &= \mathbf{x}_{n-1} + \frac{\langle \mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{q}_{n-1}\rangle}{\langle T\mathbf{q}_{n-1}, \mathbf{q}_{n-1}\rangle}\mathbf{q}_{n-1} \\
\mathbf{r}_n &= \mathbf{r}_{n-1} - \frac{\langle \mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{q}_{n-1}\rangle}{\langle T\mathbf{q}_{n-1}, \mathbf{q}_{n-1}\rangle}T\mathbf{q}_{n-1} \\
\mathbf{q}_n &= \mathbf{r}_n - \frac{\langle \mathbf{r}_n, T\mathbf{q}_{n-1}\rangle}{\langle T\mathbf{q}_{n-1}, \mathbf{q}_{n-1}\rangle}\mathbf{q}_{n-1}
\end{aligned}$$

est telle que $(\mathbf{x}_n)$ *converge en au plus* M *itérations vers la solution de* $T\mathbf{a} = \mathbf{b}$ *avec de plus l'encadrement :*

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\|_T \leq 2\left(\frac{\sqrt{\Lambda} - \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\Lambda} + \sqrt{\lambda}}\right)^n \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}\|_T$$

où $\|\mathbf{x}\|_T = \langle \mathbf{x}, T\mathbf{x} \rangle^{1/2}$ *est la norme associée à* T.

4.4 Suréchantillonnage

4.4.1 Généralités

Lorsque l'on échantillonne un signal à bande limitée, on ne connaît pas nécessairement la largeur de bande, on ne connaît donc pas exactement le nombre minimum d'échantillons permettant de faire la reconstruction. Dans une telle situation ou bien lorsque l'on cherche à minimiser les bruits de mesures en rendant certaines informations redondantes, on est conduit à choisir un nombre d'échantillons strictement supérieur au minimum requis. On est alors dans une situation de *suréchantillonnage*, c'est-à-dire qu'il y a redondance des informations fournies par les échantillons. On a plus d'équations que d'inconnues au problème.
Dans la pratique, les problèmes de suréchantillonnage posent d'importantes difficultés puisque dès que les mesures sont bruitées, l'existence d'une solution exacte au problème n'est plus garantie et il s'agit alors d'un problème de minimisation. En effet, si l'on considère l'espace $\mathcal{P}_\Omega$ introduit ci-avant et l'application linéaire Φ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathcal{P}_\lambda^\Omega & \to & \mathbb{K}^I \\ & & f & \mapsto & \{L_i(f)\}_{i \in I}, \end{array}$$

et si ϵ_i est le bruit sur la mesure numéro i, le suréchantillonnage se traduit par $\operatorname{rang} \Phi < \operatorname{rang} \{L_i(.) + \epsilon_i\}_{i \in I}$, la surjectivité de Φ n'est alors plus assurée et le problème n'admet donc pas nécessairement de solution. Le suréchantillonnage avec des mesures non bruitées est pris en compte dans les résultats énoncés au paragraphe 4.3 et nous allons montrer qu'en présence de bruit, ces même résultats peuvent être utilisés et fournissent une solution approchée du problème au sens de la minimisation d'un critère.

4.4.2 Pseudo-inverse et approximation au sens des moindres carrés

Nous allons démontrer dans cette partie que les algorithmes de reconstruction des signaux à bande limitée présentés ci-dessus peuvent être utilisés pour l'échantillonnage et le suréchantillonnage avec des mesures bruitées. Ils fournissent alors une approximation "au sens des moindres carrés" sur l'espace $\mathcal{P}_\Omega$ des signaux à bande limitée.

Considérons que sous les hypothèses du théorème 11 (p. 77), on a échantillonné un signal f de $\mathcal{P}_\Omega$ et que chaque échantillon $L_i(f)$ est entaché d'une erreur. On dispose donc en fait des mesures $\{\tilde{L_i(f)}\}$.
La relation (4.11) définissant les coefficients des matrices T et T_m montre que celles-ci ne sont pas modifiées par le bruitage des mesures. Les matrices T et T_m sont donc toujours inversibles (voir démonstration du lemme 8) et les itérations toujours convergentes. Ainsi, on est assuré que les algorithmes proposés vont converger vers un signal $\tilde{f}$ de $\mathcal{P}_\Omega$ et nous allons chercher à caractériser les propriétés de ce signal.

On appelle G, la matrice de terme générique :

$$G_{i,j} = L_i(g_j) \quad \text{pour } (i,j) \in \{(1,\dots,r) \times \Omega\}$$

on constate alors que le vecteur $\tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{m}$ et la matrice T_m définis par les relations (4.17) et (4.16) sont obtenus en effectuant les produits :

$$T_m = \overline{G}^T G \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{m} = G^T \tilde{\mathbf{L}}$$

où $\tilde{\mathbf{L}} = \left(\tilde{L_1(f)}, \dots, \tilde{L_r(f)}\right)$. Ainsi, le vecteur $\tilde{\mathbf{a}}$ tel que $\tilde{f}(t) = \sum_k \tilde{a}_k g_k(t)$ soit solution du problème de la reconstruction à partir des échantillons bruités $\tilde{\mathbf{L}}$ vérifie :

$$\overline{G}^T G\, \tilde{\mathbf{a}} = \overline{G}^T \tilde{\mathbf{L}}. \tag{4.19}$$

Or cette dernière équation est analogue à celle que l'on obtient lorsque l'on résout le problème de minimisation[2] :

$$\min_{\tilde{p} \in \mathcal{P}_\Omega} \sum_{i=1}^{r} |L_i(\tilde{p}) - \tilde{L_i(f)}|^2 = \min_{\{\tilde{\mathbf{a}}_i\}_{i \in \Omega}} \|G\, \tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{L}}\|_2^2. \tag{4.20}$$

En effet, le problème (4.20) revient à minimiser la fonctionnelle :

$$J(\tilde{\mathbf{a}}) = \langle G\, \tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{L}}, G\, \tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{L}} \rangle$$

et en calculant l'extremum de J, on retrouve alors l'équation (4.19). Ceci équivaut à dire que les algorithmes d'échantillonnages reviennent à calculer :

$$\tilde{\mathbf{a}} = pinv(G) \overline{G}^T \tilde{\mathbf{L}}$$

où $pinv(G)$ est la pseudo-inverse de G. À propos des propriétés de la pseudo-inverse, le lecteur pourra se reporter au chapitre 3 de [Chr93] (pp. 44-60).

[2] $\|.\|_2$ désigne la norme naturelle sur l^2.

Nous venons donc de montrer que dans le cas du suréchantillonnage avec des mesures bruitées, la solution fournie par les algorithmes de reconstruction est la meilleure approximation au sens des moindres carrés sur l'espace des signaux à bande limitée.

Remarque : L'analogie avec la méthode des moindres carrés nous fournit une seconde démonstration de l'inversibilité de la matrice $T_m = \overline{G}^T G$. En effet, on sait que le problème :

$$\min_{\{\tilde{\mathbf{a}}_i\}_{i\in\Omega}} \|G\,\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{L}}\|_2^2$$

admet une unique solution $\tilde{\mathbf{a}} = \left(\overline{G}^T G\right)^{-1} \overline{G}^T \tilde{\mathbf{L}}$ dès que les vecteurs colonnes de G sont linéairement indépendants. Et ceci est bien vérifié d'après l'hypothèse faite ($\ker G = \{0\}$) sur les formes linéaires L_i et la famille de fonctions $\mathcal{G}$.

En conclusion de cette partie, on peut affirmer que d'un point de vue théorique, la technique proposée d'échantillonnage des signaux à bande limitée est stable vis à vis des problèmes de suréchantillonnage et de bruitage des mesures. Les résultats fournis sont exacts si le problème admet effectivement une solution ou constituent une approximation au sens des moindres carrés (sur l'espace des signaux à bande limitée) si le problème n'admet pas de solution.

4.5 Estimation d'erreurs

Après avoir étudié de façon qualitative le comportement sous certaines perturbations, des techniques d'échantillonnage présentées, nous proposons une étude quantitative. Il s'agit d'obtenir des estimations de l'erreur induite sur la reconstruction par le bruitage des mesures.

Dans la pratique, les échantillons sont généralement obtenus grâce à des mesures expérimentales ou des calculs numériques. Ils sont alors entachés d'une certaine erreur, ce qui signifie que la mesure disponible pour l'utilisateur n'est pas la valeur exacte du phénomène mais une valeur approchée. On peut distinguer plusieurs types d'erreurs :

1. l'erreur statistique : c'est souvent la source d'erreur la plus importante, elle ne provient pas du mécanisme mis en jeu pour la mesure mais du phénomène mesuré. La mesure disponible $\tilde{m}_i = m_i + \epsilon_i$ n'est pas tout

à fait la mesure exacte m_i, ϵ_i est le bruit sur la $i^{\text{ième}}$ mesure et ϵ_i varie lorsque l'on mesure le même phénomène dans des conditions identiques. En terme de forme linéaire, cela revient à considérer $L_i(\tilde{f})$ au lieu de $L_i(f)$.

2. L'erreur systématique : contrairement à l'erreur statistique, elle est inhérente au dispositif de mesure et la différence $\epsilon_i = \tilde{m}_i - m_i$ est constante lorsque l'on répète une expérience dans les mêmes conditions. Mathématiquement, cela signifie que l'on a une forme linéaire $\tilde{L}_i$ et non pas L_i.

3. Le repliement de spectre : cette erreur est intrinsèquement liée au traitement des signaux à bande limitée, elle intervient lorsque l'on fait l'hypothèse de signaux à largeur de bande Ω et qu'en réalité les signaux sont de largeur de bande Ω' avec $\Omega \subset \Omega'$. Cette notion sera présentée plus en détail dans la partie 4.5.4.

Ces différentes sources d'erreurs sur les échantillons ont tendance à perturber le comportement des algorithmes présentés et la stabilité des algorithmes vis à vis de ces perturbations est une condition impérative à l'applicabilité de ces méthodes. La terme de stabilité signifie qu'une faible erreur sur les échantillons engendrera une faible modification des résultats donnés par l'algorithme en d'autres termes, que l'algorithme n'amplifie pas les erreurs. D'un point de vue théorique, ceci se traduit par la continuité d'un opérateur et nous retrouvons la condition (3.19) donnée page 63.

4.5.1 Exemple d'une reonstruction non stable

Soit $\mathbb{R}_n[X]$, l'espace des polynômes de degré au plus n et soient $l_0, \ldots, l_n$, les polynômes de Lagrange associés aux noeuds distincts $t_0, t_1, \ldots, t_n$. Les polynômes l_k sont définis par :

$$l_k(t) = \frac{\Pi_{i \neq k}(t - t_k)}{\Pi_{i \neq k}(t_k - t_i)}$$

pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a alors l'échantillonnage :

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} P(t_k) l_k(t).$$

Si l'on tente de faire une reconstruction de P avec des mesures bruitées $\{P(t_k) + \epsilon_k\}$ où ϵ est un bruit gaussien centré de variance 0.2, on obtient le résultat suivant (voir figure 4.3).

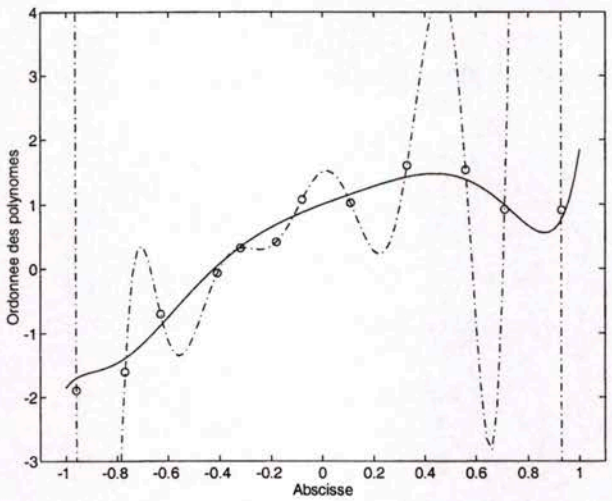


Figure 4.3 : Reconstruction d'un polynôme de degré 11 avec des échantillons bruités. '–' courbe exacte, '-.' reconstruction avec les échantillons 'o'.

On peut voir que cette instabilité vient du fait que si collectivement, les l_k vérifient $\sum_{k=0}^{n} l_k(t) \equiv 1$, ils n'ont pas un signe constant et peuvent donc prendre individuellement des valeurs arbitrairement grandes alors que leur somme reste bornée. Et il est important que les algorithmes proposés s'affranchissent de ce type de comportement ainsi que d'autres problèmes numériques tels le phénomène de résonance de Runge.

4.5.2 Erreur statistique

Attardons nous tout d'abord sur les erreurs liées au phénomène mesuré, on considère donc que les mesures sont bruitées de telle sorte que $L_i(\tilde{f}) = L_i(f) + \epsilon_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, r\}$ avec $(\tilde{f}, f) \in (\mathcal{P}_\Omega)^2$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(t) - f(t) &= \sum_{i \in \Omega} (\tilde{a}_i - a_i) g_i(t) \\
&= \sum_{i \in \Omega} \left(T_m^{-1}(\tilde{\mathbf{b}}_m - \mathbf{b}_m) \right)_i g_i(t) \\
&= \langle T_m^{-1}(\tilde{\mathbf{b}}_m - \mathbf{b}_m), \mathbf{P}_\Omega \rangle \\
&= \langle T_m^{-1} \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_{j=1}^{r} \epsilon_j L_j(g_k) \\ \vdots \end{pmatrix}, \mathbf{P}_\Omega \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{r} \epsilon_j \langle T_m^{-1} \mathbf{L}_{\Omega,j}, \mathbf{P}_\Omega \rangle_{\mathbb{C}^\Omega}
\end{aligned}$$

où $\mathbf{L}_{\Omega,j} = (L_j(g_1), L_j(g_2), \ldots, L_j(g_{|\Omega|}))^T$ et $\mathbf{P}_\Omega = (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_{|\Omega|}(t))^T$. Or, $\langle T_m^{-1}\mathbf{L}_{\Omega,j}, \mathbf{P}_\Omega\rangle_{\mathbb{C}^\Omega}$ représente en fait le signal $h_j \in \mathcal{P}_\Omega$ solution du problème de minimisation :

$$\sum_{j=1}^{r} \left|L_j(h_i) - \delta_i^j\right|^2 = \min_{h\in\mathcal{P}_\Omega} \sum_{j=1}^{r} \left|L_j(h) - \delta_i^j\right|^2$$

où δ_i^j est le symbole de Kronecker et en écrivant $h_j(t) = \sum_k a_k^j g_k(t)$, il vient que le vecteur $(a_k^j)_{k\in\Omega}$ est la solution au sens des moindres carrés du système :

$$\begin{cases} a_1^i L_1(g_1) + \ldots + a_{|\Omega|}^i L_1(g_{|\Omega|}) = 0 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_1^i L_i(g_1) + \ldots + a_{|\Omega|}^i L_i(g_{|\Omega|}) = 1 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_1^i L_r(g_1) + \ldots + a_{|\Omega|}^i L_r(g_{|\Omega|}) = 0. \end{cases}$$

Soit finalement :

$$\tilde{f}(t) - f(t) = \sum_{i\in\Omega} \epsilon_i \langle \mathbf{F}_i, \mathbf{P}_\Omega\rangle \tag{4.21}$$

où $\mathbf{F}_i = (f_{i,1}, \ldots, f_{i,|\Omega|}))^T$ et $F = (f_{i,j})$ est la matrice de terme générique $(\{\overline{L_i(g_j)}\}^T\{L_i(g_j)\})^{-1}\{L_i(g_j)\}^T$.

Si les formes linéaires $\{L_1, \ldots, L_r\}$ sont indépendantes, on peut introduire la famille bi-orthogonale[3] $\{f_j^\perp\}_{j=1}^r$ associée à la famille $\{L_1, \ldots, L_r\}$, elle est telle que $L_i(f_j^\perp) = \delta_i^j$. Et l'on voit alors que :

$$f_j^\perp(t) = \langle F_j, \mathbf{P}_\Omega(t)\rangle.$$

La relation (4.21) devient alors :

$$\tilde{f}(t) - f(t) = \sum_{i\in\Omega} \epsilon_i f_i^\perp(t).$$

Remarque : Dans le cas où $\mathcal{G} = \{e^{2\pi ikt}\}_{k=-M}^M$ et si les formes linéaires vérifient $L_i : f \mapsto f(t_i)$ avec $t_{i+1} - t_i = \frac{1}{2M+1}$ i.e. pour un échantillonnage régulier, la famille bi-orthogonale associée aux échantillons t_i est donnée par $f_j^\perp(t) = \frac{1}{2M+1} D_M(t - t_j)$ où D_M est le noyau de Dirichlet défini par :

$$D_M(t) = \sum_{k=-M}^{M} e^{2\pi ikt} = \frac{\sin \pi(2M+1)t}{\sin \pi t}.$$

[3]Pour la définition et les principales propriétés des familles bi-orthogonales, voir ([Hig96]), p.25.

On retrouve alors que l'erreur est donnée par :

$$\tilde{f}(t) - f(t) = \sum_{i=-M}^{M} \frac{\epsilon_i}{2M+1} D_M(t - t_i).$$

4.5.3 Erreur systématique

On considère maintenant le bruit engendré par l'erreur systématique et l'on admet qu'il prend la forme $\tilde{L}_i(f) = L_i(f) + r_i(f)$. En reprenant le formalisme du paragraphe 4.4.2, le problème à résoudre s'écrit alors :

$$\min_{\{\tilde{\mathbf{a}}_i\}_{i\in\Omega}} \| (G + \Delta G)\, \tilde{\mathbf{a}} - (\mathbf{L} + \Delta \mathbf{L}) \|_2 \tag{4.22}$$

où ΔG est la matrice de terme générique $\Delta G_{i,j} = r_i(g_j)$ et $\Delta \mathbf{L}$, le vecteur de composantes $r_i(f)$. On suppose en outre que la famille des formes linéaires $\{\tilde{L}_1, \ldots, \tilde{L}_r\}$ vérifie les hypothèses du théorème 11, c'est-à-dire qu'elle est de rang supérieure à $|\Omega|$. Dans ce cas, le problème 4.22 admet une unique solution $\tilde{\mathbf{a}}$ qui est donnée par la formule :

$$\tilde{\mathbf{a}} = \left(\overline{G}^T G + \overline{\Delta G}^T G + \overline{G}^T \Delta G + \overline{\Delta G}^T \Delta G\right)^{-1} \left(\overline{G}^T + \overline{\Delta G}^T\right) (\mathbf{L} + \Delta \mathbf{L}).$$

On introduit la matrice $\Delta H = \overline{\Delta G}^T G + \overline{G}^T \Delta G + \overline{\Delta G}^T \Delta G$ et $|||.|||$, une norme matricielle sur l'espace $\mathcal{M}_{|\Omega|}(\mathbb{C})$[4], on suppose en outre que l'on a $|||(\overline{G}^T G)^{-1} \Delta H||| < 1$, la relation précédente s'écrit alors :

$$\tilde{\mathbf{a}} = \left(I_d + \left(\overline{G}^T G\right)^{-1} \Delta H\right)^{-1} \left(\overline{G}^T G\right)^{-1} \left(\overline{G}^T + \overline{\Delta G}^T\right) (\mathbf{L} + \Delta \mathbf{L})$$

et en utilisant les séries de Neumann, on a l'écriture :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left((\overline{G}^T G)^{-1} \Delta H\right)^k\right) \left(\overline{G}^T G\right)^{-1} \left(\overline{G}^T + \overline{\Delta G}^T\right) (\mathbf{L} + \Delta \mathbf{L}) \\ &= \mathbf{a} + \mathcal{O}(\Delta H, \Delta G, \Delta \mathbf{L}). \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $|||\Delta G||| \to 0$, on a : $\tilde{\mathbf{a}} \to \mathbf{a}$ et donc si $\tilde{f}(t) = \sum \tilde{a}_i g_i(t)$, alors il vient :

$$\|\tilde{f} - f\| \to 0 \quad \text{quand} \quad |||\Delta G||| \to 0.$$

[4] On peut par exemple prendre la norme définie par :

$$|||A||| = \sup_{\|X\|_2 = 1} \|AX\|_2$$

subordonnée à la norme usuelle $\|.\|_2$ sur $\mathbb{C}^n$

4.5.4 Repliement de spectre

Afin de se représenter clairement le problème du repliement de spectre, considérons tout d'abord le cas particuliers des signaux à bande limitée selon la transformation de Fourier discrète sur $\mathbb{C}^N$:

$$\mathcal{F}s(k) = \hat{s}(k) = \frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N} s(p)e^{-2\pi ikp/N}.$$

Tout signal à largeur de bande $2M+1$, c'est-à-dire appartenant à l'espace :

$$\mathcal{B}_M = \left\{ s \in \mathbb{C}^N \mid \hat{s}(k) = 0 \text{ pour } |k \bmod N| > M \right\}$$

peut être vu, dans le domaine fréquentiel, comme un signal ne possédant des harmoniques qu'aux abscisses $-M, -M+1, \ldots, M$ (voir figure 4.4).

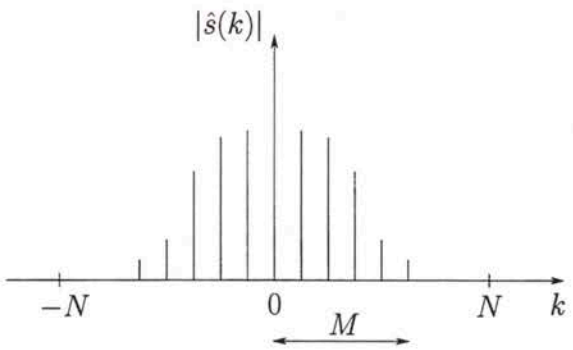


Figure 4.4 : Signal à largeur de bande $2M+1$.

Considérons l'espace $\mathcal{B}_{M'}$ avec $M' < M$ et un élément s de $\mathcal{B}_M$. Dans cette situation, le repliement de spectre intervient lorsque l'on cherche à échantillonner le signal s sur l'espace $\mathcal{B}_{M'}$. Cela signifie que l'on cherche à reconstruire le signal s à partir des harmoniques $\{e^{-2\pi ikt}\}_{k=-M'}^{M'}$. Les phénomènes de repliement de spectre interviennent dès lors que l'on diminue la taille de l'espace de fonctions utilisé pour la reconstruction. Le sous-échantillonnage, c'est-à-dire lorsque le nombre d'échantillons disponible est inférieur au minimum requis, entraîne des problèmes de repliement de spectre puisque pour s'assurer de la convergence des algorithmes, il est nécessaire de diminuer la taille de la famille de fonctions sur laquelle s'opère la reconstruction.

Si le signal s appartient à l'espace $\mathcal{B}_M/\mathcal{B}_{M'}$, il est évident qu'une reconstruction exacte à partir de seulement $2M'+1$ harmoniques est impossible

mais d'après le paragraphe 4.4.2, l'algorithme utilisé avec les échantillons $\{L_i(s)\}_{i=1}^{r}$ convergera vers s_{re}, la solution du problème de minimisation :

$$\sum_{i=1}^{r} |L_i(s_{re}) - L_i(s)|^2 = \min_{s' \in \mathcal{B}_{M'}} \sum_{i=1}^{r} |L_i(s') - L_i(s)|^2.$$

D'un point de vue matriciel, la décomposition de s_{re} :

$$s_{re}(t) = \sum_{k=-M'}^{M'} a_k^{'} e^{2\pi ikt}$$

est donc obtenue par résolution (par moindre carrés) du système :

$$G^{re}\mathbf{a}' = \mathbf{L}'$$

avec $G^{re}_{k,l} = L_l(e^{-2\pi ikt})$ et $\mathbf{L}^{'} = L_l(s)$ pour $|k| \leq M'$ et $1 \leq l \leq r$. On peut se rendre compte que ce système est extrait du système :

$$G\,\mathbf{a} = \mathbf{L}$$

avec $G_{k,l} = L_l(e^{-2\pi ikt})$ et $\mathbf{L} = \{L_l(s)\}$ pour $|k| \leq M$ et $1 \leq l \leq r$. Il faut noter que le repliement ne consiste pas à faire une simple troncature dans la décomposition, c'est-à-dire à remplacer $\sum_{|k|\leq M} a_k e^{2\pi ikt}$ par $\sum_{|k|\leq M'} a_k e^{2\pi ikt}$. En effet, la meilleure approximation d'une fonction f d'un espace $\mathcal{E}$ sur un sous-espace $\mathcal{H}$ de $\mathcal{E}$ n'est pas nécessairement la restriction $f_{/\mathcal{H}}$ de f à $\mathcal{H}$.

Dans le cas d'une transformation discrète associée à une famille de fonctions $\mathcal{G}$, ces remarques sont encore valables. Si l'on cherche à échantillonner un élément f de l'espace $\mathcal{P}_\Omega$ sur l'espace $\mathcal{P}_{\Omega'}$ avec $\Omega' \subseteq \Omega$ et sous réserve que les échantillons le permettent, on aura :

$$\|f_{re} - f\| = \min_{g \in \mathcal{P}_{\Omega'}} \|g - f\| = \mathrm{d}(\mathcal{P}_{\Omega'}, f) \tag{4.23}$$

où $\mathrm{d}(.,.)$ représente la distance associée à la norme $\|.\|$.

Remarque : Dans le cas où la largeur de bande de la fonction f devient très grande, à la limite lorsqu'elle n'est plus à bande limitée et si les échantillons $\{L_i(f)\}$ assurent la convergence de l'algorithme utilisé, l'égalité ci-dessus reste vraie.

4.6 Échantillonnage pondéré

Même si les algorithmes itératifs présentés dans la partie 4.3 sont facilement applicables, l'estimation des constantes A et B de la relation de définition d'un repère étant délicate, cela ne permet pas toujours d'obtenir une estimation précise du critère de convergence ainsi que de la vitesse de convergence (voir les remarques à la fin de la partie 3.1.3, p. 52). La méthode ci-dessous évite cet écueil et propose une variante pondérée de la notion de repère, les pondérations sont fonctions de la répartition géométrique des échantillons au sein d'un intervalle borné. Les constantes A et B sont alors obtenues par application d'une inégalité de Bernstein et dépendent de la position géométrique des échantillons. Les pondérations permettent de plus de priviligier l'information apportée par certains échantillons.
À l'aide de considérations géométriques sur leur répartition, on peut développer cette méthode quelque soit la forme des échantillons. On se limite ici au cas où les échantillons peuvent être classés suivant une relation d'ordre et on considère que les formes linéaires sont de la forme $L_i : f \mapsto f(t_i)$. On considère que les éléments de $\mathcal{H}$ sont des fonctions définies sur un intervalle borné V et que le produit scalaire sur $\mathcal{H}$ est donné par : $\langle f, g \rangle = \int_V fg$.

Théorème 12 *Soit $t_1 < ... < t_r$, r instants d'échantillonnage dans l'intervalle V tels que :*

$$\delta = max\,(t_{j+1} - t_j) \quad pour\ j = 1, \ldots, r$$

sans réduire la généralité du problème, on supposera que $0 \leq t_1 < ... < t_r < 1$ et soit $f \in \mathcal{P}_\Omega$ avec f suffisamment régulière pour que :

$$\exists\, \alpha \quad \text{tel que} \quad \|f'\|^2 \leq \alpha \|f\|^2.$$

Alors f est déterminée de façon unique par les r points $f(t_i)$ et on a l'encadrement :

$$(1 - \frac{\delta\pi}{\alpha})^2 \|f\|^2 \leq \sum_{i=1}^{r} |f(t_i)|^2 \frac{t_{i+1} - t_{i-1}}{2} \leq (1 + \frac{\delta\pi}{\alpha})^2 \|f\|^2. \tag{4.24}$$

PREUVE : On a ici besoin de l'inégalité de Wirtinger, sa démonstration figure en annexe, (le lecteur pourra également se reporter à [Har34]) : *Si $f, f' \in L^2([a,b])$ avec $f(a) = 0$ ou bien $f(b) = 0$ alors on a :*

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leq \frac{4}{\pi}(b-a)^2 \int_a^b |f'(t)|^2 dt. \tag{4.25}$$

$\mathcal{T}$ désigne toujours la transformation discrète selon la famille $\mathcal{G}$ et $\mathcal{L}$, la famille des formes linéaires $\{L_1, \ldots, L_r\}$ introduite au paragraphe 4.3.3 (p. 76). La projection orthogonale P de $l^2(V^N)$ dans $\mathcal{B}_\Omega$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(Ps)(k) &= \mathcal{T}s(k) \quad \text{pour } k \in \Omega \\ \mathcal{T}(Ps)(k) &= 0 \quad \text{pour } k \in N/\Omega \end{aligned}$$

et soit χ_j, la fonction caractéristique de l'intervalle $[y_{j-1}, y_j]$ avec $y_j = (t_{j+1} + t_j)/2$. Les pondérations ω_j associées aux intervalles $[y_{j-1}, y_j]$ sont alors telles que :

$$w_j = y_j - y_{j-1} = (t_{j+1} - t_{j-1})/2$$

et pour conserver la périodicité, on pose $t_{r+1} = t_1 + 1$ et $t_0 = t_r - 1$, les pondérations vérifient alors :

$$\sum_{j=1}^{r} \omega_j = 1.$$

Introduisons l'opérateur :

$$\mathcal{A}f = P\left(\sum_{j=1}^{r} f(t_j)\chi_j\right).$$

Si $f \in \mathcal{P}_\Omega$, on a $P(f) = f$ et donc :

$$\begin{aligned} \|f - \mathcal{A}f\|^2 &= \|P(f) - \mathcal{A}f\|^2 \\ &= \left\| P\left(\sum_{j=1}^{r}(f - f(t_j))\chi_j\right)\right\|^2 \\ &\leq \left\|\left(\sum_{j=1}^{r}(f - f(t_j))\,\chi_j\right)\right\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{r}\int_{y_{j-1}}^{y_j} |f - f(t_j)|^2 dx \end{aligned}$$

et en appliquant l'inégalité de Wirtinger (4.25) à la décomposition :

$$\sum_{j=1}^{r}\int_{y_{j-1}}^{y_j} |f - f(t_j)|^2 dx = \sum_{j=1}^{r}\int_{y_{j-1}}^{t_j} |f - f(t_j)|^2 dx + \sum_{j=1}^{r}\int_{t_j}^{y_j} |f - f(t_j)|^2 dx$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \|f - \mathcal{A}f\|^2 &\leq \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2 \sum_{j=1}^{r} \int_{y_{j-1}}^{y_j} |f'(x)|^2 dx \\ &= \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2 \|f'\|^2 \\ &\leq \left(\frac{\delta\alpha}{\pi}\right)^2 \|f\|^2. \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$\|f - \mathcal{A}f\| \leq \left(\frac{\delta\alpha}{\pi}\right) \|f\|.$$

Le calcul précédent fournit l'inégalité $|||I - \mathcal{A}||| = \sup_{g \in \mathcal{P}_\Omega} \|g - \mathcal{A}g\| \leq \gamma < 1$ et donc $|||\mathcal{A}^{-1}||| \leq (1-\gamma)^{-1}$. Ainsi $\forall f \in \mathcal{P}_\Omega$, on a :

$$\begin{aligned} (1-\gamma)^2 \|f\|^2 &= (1-\gamma)^2 \|\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}f\|^2 \\ &\leq (1-\gamma)^2 \|\mathcal{A}^{-1}\|^2 \left\| P\left(\sum_{i=1}^{r} f(t_i)\chi_i\right)\right\|^2 \\ &\leq \left\|\sum_{i=1}^{r} f(t_i)\chi_i\right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{r} |f(t_i)|^2 \frac{t_{i+1} - t_{i-1}}{2}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

De plus, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r} |f(t_i)|^2 \frac{t_{i+1} - t_{i-1}}{2} &\leq \left(\|f\| + \left\| f - \sum_{i=1}^{r} |f(t_i)|^2 \frac{t_{i+1} - t_{i-1}}{2}\right\|\right)^2 \\ &\leq (1+\gamma)^2 \|f\|^2. \end{aligned} \tag{4.27}$$

En rassemblant les inégalités (4.26) et (4.27), on obtient l'encadrement annoncé. L'existence d'un repère de bornes $(1 - \delta\pi/\alpha)^2$ et $(1 + \delta\pi/\alpha)^2$ assure que l'opérateur qui lui est associé est inversible et donc que f est déterminée de façon unique par ses échantillons $\{f(t_i)\}$. $\Diamond$

4.6.1 Reconstruction pondérée : méthodes directes et itératives

Les algorithmes de reconstruction directs et itératifs figurant dans les paragraphes 4.3.4 et 4.3.5 s'adaptent tout naturellement à la structure de ce

repère pondéré. Les résultats sont énoncés ci-dessous mais les démonstrations étant identiques à celles précédemment proposées, elles ne seront pas entièrement reprises ici.

Théorème 13 *Si $f \in \mathcal{P}_\Omega$ et sous les mêmes hypothèses qu'au théorème 12, λ étant un paramètre de relaxation vérifiant $0 < \lambda < 2/(1+\gamma)^2$, l'algorithme itératif suivant permet la reconstruction de f :*

$$\begin{aligned} f_0(t) &= 0 \\ f_{n+1}(t) &= f_n(t) + \lambda \sum_{j=1}^{r} (f(t_j) - f_n(t_j))\, \omega_j k_{\mathcal{G}}(t, t_j). \end{aligned} \tag{4.28}$$

De plus la convergence de la suite (f_n) est géométrique de raison $\rho = max\{|1-\lambda(1+\gamma)^2|, |1-\lambda(1-\gamma)^2|\}$.

PREUVE : La démonstration de la convergence est identique à celle effectuée pour le corollaire 6. Les bornes du repère données par la relation (4.24), permettent de calculer effectivement les valeurs optimales de λ et de ρ. Soit :

$$\lambda_{opt} = \frac{\pi^2}{\pi^2 + \delta^2\alpha^2} \qquad \rho_{opt} = \frac{2\pi\alpha\delta}{\pi^2 + \alpha^2\delta^2}. \ \Diamond$$

On peut introduire de la même manière qu'aux lemmes 9 et 10 (p. 81), la matrice $T_m^\omega \in \mathcal{M}_{|\Omega|}(\mathbb{C})$ et le vecteur $\mathbf{b}_m^\omega \in \mathbb{C}^{|\Omega|}$ définis par :

$$T_{m\,k,l}^{\omega} = \sum_{i=1}^{r} w_i g_l(t_i) g_k(t_i) \quad \text{pour } (l,k) \in \Omega^2 \tag{4.29}$$

$$\mathbf{b}_{m\,k}^{\omega} = \sum_{i=1}^{r} w_i f(t_i) g_k(t_i) \qquad \text{pour } k \in \Omega. \tag{4.30}$$

L'itération (4.28) peut alors se réécrire sous forme matricielle et l'on obtient la formulation suivante :

Lemme 11 *Si $f(t) = \sum_{k\in\Omega} a_k g_k(t) \in \mathcal{P}_\Omega$ et si $t_1 < \ldots < t_r$ sont r instants d'échantillonnage dans V. Alors l'itération :*

$$\mathbf{a}_0 = 0, \qquad \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_{n-1} - \lambda T_m^\omega \mathbf{a}_{n-1} + \lambda \mathbf{b}_m^\omega \qquad \textit{pour } n \geq 1 \tag{4.31}$$

converge vers $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k\in\Omega}$.

L'itération donnée par le lemme précédent équivaut à la résolution du système linéaire $T_m^\omega \mathbf{a} = \mathbf{b}_m^\omega$ et on a le lemme suivant :

Lemme 12 *Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème 12, si* $\{f(t_i)\}_{i=1}^r$ *sont* r *échantillons de* $f \in \mathcal{P}_\Omega$, *si* T_m^ω *et* $\mathbf{b}_m^\omega$ *sont définis tels qu'en (4.30) et (4.29), alors le vecteur* $\mathbf{a} = (a_k)_{k\in\Omega}$ *tel que :*

$$\mathbf{a} = (T_m^\omega)^{-1}\, \mathbf{b}_m^\omega \ \in \mathbb{C}^{|\Omega|}$$

permet d'obtenir : $f(t) = \sum_{k\in\Omega} a_k g_k(t) \in \mathcal{P}_\Omega$.

PREUVE : Il suffit de démontrer que la matrice T_m^ω est inversible. Elle peut s'écrire :

$$T_m^\omega = \left(\overline{G}_m^\omega\right)^T G_m^\omega$$

où G_m^ω est la matrice définie par $G_{m\,i,j}^\omega = \sqrt{\omega_i} g_j(t_i)$. Puisque $\sqrt{\omega_i} > 0$ pour tout i, on vérifie aisément que le rang des vecteurs colonnes de G_m^ω est égal au rang des vecteurs colonnes de G_m, ce qui assure que T_m^ω est inversible. On a également :

$$\begin{aligned}
\langle T_m^\omega \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle &= \langle \left(\overline{G}_m^\omega\right)^T G_m^\omega \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle \\
&= \langle G_m^\omega \mathbf{a}, G_m^\omega \mathbf{a}\rangle \\
&= \|G_m^\omega \mathbf{a}\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^r \omega_i |f(t_i)|^2 \geq 0. \ \Diamond
\end{aligned}$$

4.6.2 Suréchantillonnage

Les remarques faites au paragraphe 4.4 (p. 83) s'appliquent également ici et le problème du suréchantillonnage avec des mesures bruitées ne possède généralement pas de solution exacte. Dans ce cas, la reconstruction pondérée présentée ci-dessus converge vers la meilleure approximation, sur l'espace des signaux à bande limitée considéré, au sens des moindres carrés pondérés. En effet, avec les même notations qu'au paragraphe 4.4.2, il est facile de voir que le suréchantillonnage avec des mesures bruitées revient à calculer la solution :

$$\tilde{\mathbf{a}} = pinv\,(G_m^\omega)\, \overline{G_m^\omega}^T \tilde{\mathbf{L}}$$

qui est associée au problème de minimisation :

$$\min_{g\in\mathcal{P}_\Omega} \sum_{i=1}^r \omega_i |g(t_i) - (f(t_i) + \epsilon_i)\,|^2 = \min_{\{a_i\}_{i\in\Omega}} \|G_m^\omega \mathbf{a} - \tilde{\mathbf{L}}\|^2.$$

4.6.3 Estimation d'erreur pour la reconstruction pondérée

Les remarques faites au paragraphe 4.5 ainsi que les estimations d'erreur données se transposent facilement au cas où le repère est pondéré. Les résultats ne sont donc pas repris ici.

4.7 Cas d'une famille $\mathcal{G}$ infinie

Nous allons tenter de montrer que les méthodes présentées précédemment avec un nombre fini d'échantillons peuvent être étendues au cas où les signaux étudiés sont à bande limitée selon une transformation associée à une famille de fonctions $\{g_i\}$ de cardinal infini. Cela peut permettre entre autre, de mettre au point des techniques d'échantillonnage associées à des transformations telles la transformation de Zak définie formellement par :

$$Zf(t,\omega) = \sqrt{a} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(ta + ka)\, e^{2\pi i k\omega}$$

avec $(t,\omega) \in \mathbb{R}^2$ et $a > 0$ fixé. Dans la pratique, le cas d'un nombre infini d'échantillons n'est pas très utile puisqu'il n'est pas expérimentalement réalisable. Par contre il peut être intéressant de savoir si la reconstruction à l'aide d'une famille infinie d'échantillons $\{L_i(f)\}$ est un cas limite quand $r \to +\infty$ d'une reconstruction avec la famille $\{L_i(f)\}_{i=1}^{r}$ sur une sous-famille de $\mathcal{G}$ de cardinal fini.
La démarche employée ici est différente de celle utilisée au début de ce chapitre où nous avions défini la transformation discrète puis montrer l'existence d'un repère associé à cette transformation. Ici, nous allons supposer l'existence d'un repère et montrer qu'il est possible de construire une transformation associée à ce repère.

4.7.1 Transformation associée à la famille $\mathcal{G}$

Soit $\mathcal{G} = \{g_i\}$ une famille de cardinal infini de fonctions et soit $\mathcal{H}$, l'adhérence de vect $\{g_i\}$, on fait l'hypothèse que $\mathcal{H}$ ainsi défini est un espace de Hilbert séparé. On suppose de plus que l'application Φ telle que :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{H} &\to \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ f &\mapsto \{L_j(f)\} \end{aligned}$$

est continue de $\mathcal{H}$ dans l^2 munis de leurs normes naturelles et que $\{L_i\}$ est une famille totale de $\mathcal{H}^*$. Grâce à l'équivalence donnée par le corollaire 2 (p. 63), on sait que la famille $\{L_i\}$ forme un repère de $\mathcal{H}$. On peut alors envisager le théorème suivant.

Théorème 14 *L'opérateur Φ étant continu et injectif, il existe un opérateur Θ continu de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{H}$ munis de leurs normes naturelles tel que :*

$$\Theta \circ \Phi = I_{d_{\mathcal{H}}}.$$

PREUVE : Montrons tout d'abord l'existence de Θ. Soit R, un supplémentaire de $\operatorname{Im}\Phi$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et soit Π de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{H}$ tel que :

$$\begin{aligned} \Pi(l) &= f \quad \text{si } l \in \operatorname{Im}\Phi \quad \text{avec } \Phi(f) = l \\ \Pi(l) &= 0 \quad \text{si } l \in R. \end{aligned}$$

On montre aisément que Π est linéaire. Soit $l \in \operatorname{Im}\Phi$ et soient f, f' deux antécédents de l. On a alors :

$$f - f' \in \ker \Phi$$

et l'injectivité de Φ assure donc que Π est définie sans ambiguité. De plus pour tout $l \in \operatorname{Im}\Phi$, il existe un $f \in \mathcal{H}$ tel que l'on ait la relation :

$$\|\Pi(l)\| = \|\Pi \circ \Phi(f)\| = \|f\| \leq \frac{1}{A} \|\Phi(f)\| \leq \frac{1}{A} \|l\|,$$

A étant la borne inférieure du repère, ce qui assure que Π est continu. Alors $\Theta = \Pi$ convient. $\Diamond$

Remarque : La condition d'injectivité de l'opérateur Φ est à rapprocher de la condition $\ker G = \{0\}$ donnée dans le cas d'une transformation finie (p. 72).

Lorsque nous avons défini la transformation associée aux familles $\mathcal{G}$ et $\{L_i\}$ de cardinal fini, on a utilisé la matrice G de termes génériques $\{L_i(g_j)\}$. Nous allons nous appuyer sur cette présentation lorsque les familles ne sont plus de cardinal fini et pour cela nous allons introduire, avec le résultat suivant, la notion de "matrices infinies" dans l^2.

Théorème 15 *Si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont deux espaces de Hilbert, il existe un isomorphisme*[5] *de $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ sur $S(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ qui à un opérateur $C \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ associe une forme sesquilinéaire $c(x, y)$ définie par :*

$$c(x, y) = \langle C\, x, y \rangle, \quad \forall\, (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$$

et on a :

$$\|c\| = \|C\|.$$

[5] $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ désigne l'ensemble des application linéaires bornées de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ et $S(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ désigne l'ensembles des formes sesquilinéaires continue sur $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

PREUVE : La démonstration est aisée (voir [Dau85b] p. 1186). ◊

On sait de plus que puisque $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert séparé, $\mathcal{H}$ et l^2 sont isomorphes et isométriques. Ceci nous prouve à l'aide du théorème précédent, l'existence d'une suite double $\phi = \{\phi_{h,k}\}$ vérifiant :

$$\sum_{h,k=1}^{\infty} |\phi_{h,k}|^2 \leq +\infty$$

et telle que pour tout $f \in \mathcal{H}$ et tout $l \in l^2$:

$$\exists\, l' \in l^2 \quad \text{tel que} \quad \langle \Phi(f), l \rangle_{l^2} = \phi(l', l) = \sum_{h,k=1}^{\infty} \phi_{h,k} l'_k \overline{l_h}.$$

Ainsi en faisant $l = \delta^h$ dans la relation précédente, δ^h étant le vecteur de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de coordonnées $\{\delta^h_j\}$ i.e. dont toutes les composantes sont nulles sauf la $h^{\text{ième}}$ qui vaut 1, on obtient que pour tout $f \in \mathcal{H}$, il existe $l' \in l^2$ tel que :

$$L_h(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_{h,k}\, l'_k \tag{4.32}$$

et on note $\Phi(f) = \phi\, l' = \{\sum_{k=1}^{\infty} \phi_{h,k}\, l'_k\}$. Suivant le même principe, on introduit la suite double $\theta = \{\theta_{h,k}\}$ avec pour tout $l \in l^2$:

$$\Theta\, l = \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \sum_{k=1}^{\infty} \theta_{h,k}\, l_k \\ \vdots \end{array} \right\},$$

la propriété vérifiée par Θ et Φ se transpose aux matrices infinies θ et ϕ avec :

$$\theta\, \phi\, l = l \qquad \text{pour tout } l \in l^2.$$

On peut maintenant définir la transformation $\mathcal{T}$ associée aux familles $\mathcal{G}$ et $\{L_i\}$ par :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T} : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ \{L_k(f)\}_{k\in\mathbb{N}} & \mapsto & \{\langle \phi\, l', \theta^* \delta^q \rangle_{l^2}\}_{q\in\mathbb{N}} \end{array} \tag{4.33}$$

où l'espace de Hilbert l^2 est identifié à son dual et θ^* représente l'adjoint de θ. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on vérifie que la relation de définition (4.33) a bien un sens.

On vérifie également que $\mathcal{T}$ est inversible à gauche puisque pour tout $f \in \mathcal{H}$, il existe l' tel que l'on ait :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}f(q) &= \langle \phi\, l', \theta^* \delta^q \rangle_{l^2} \\ &= \langle \phi l', \theta^* \delta^q \rangle_{l^2} \\ &= \langle \theta \phi l', \delta^q \rangle_{l^2} \\ &= \langle l', \delta^q \rangle_{l^2} \\ &= l'_q \end{aligned}$$

ce qui assure l'injectivité et la continuité de $\mathcal{T}$. Et donc finalement en utilisant la relation (4.32), il vient :

$$L_k(f) = \sum_p \phi_{k,p}\, \mathcal{T}f(p)$$

soit :

$$\{L_k(f)\}_{k\in\mathbb{N}} = \phi \circ \mathcal{T}f.$$

Remarque : Les $\{L_i\}$ formant une famille de Bessel, on a $\sum_{p=1}^{\infty} |L_p(g_k)|^2 \leq +\infty$. Si de plus les $\{L_i\}$ et $\{g_k\}$ vérifient :

$$\sum_{k,p=1}^{\infty} |L_p(g_k)|^2 \leq +\infty$$

ou bien si il existe M_1 et M_2 tels que les deux conditions ci-dessous soient satisfaites :

$$\sum_p |L_p(g_k)| \leq M_1 \quad \text{et} \quad \sum_k |L_p(g_k)| \leq M_2$$

alors on vérifie aisément que l'on a $\phi = \{L_p(g_k)\}$ (voir [Dau85b] p. 1187).

4.7.2 Échantillonnage dans $\mathcal{G}$ et approximation de Galerkin

À la transformation $\mathcal{T}$ sont associés des signaux à bande limitée et des algorithmes identiques à ceux présentés dans les paragraphes 4.3.4 et 4.3.5 peuvent être développés. Dans la pratique de tels algorithmes ne sont pas directement utilisables puisqu'ils nécessitent une infinité d'échantillons, ils ne seront pas présentés en détail ici. Suivant la même démarche qu'au paragraphe 4.3, ils s'adaptent facilement des résultats donnés dans 3.2 (p. 55).
Par contre si $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'espaces réalisant une approximation de Galerkin de $\mathcal{H} = \overline{\text{vect}\{g_i\}}$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une famille

d'indices α_n à support fini telle que $\{L_i\}_{i\in\alpha_n}$ soit un repère de $\mathcal{H}_n$. On construit alors une suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{H}$, chacun étant construit à l'aide des échantillons $\{L_i(f)\}_{i\in\alpha_n}$ et telle que $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{H}} f$.

On rappelle qu'une approximation de Galerkin d'un espace de Hilbert est définie (voir [Dau85a], pp. 608-609) de la façon suivante.

Définition 13 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'espaces vectoriels de dimension finie vérifiant les axiomes :*

$$\begin{cases} \mathcal{H}_n \subset \mathcal{H} \\ \mathcal{H}_n \to \mathcal{H} \ \textit{quand}\ n \to \infty \quad \textit{au sens suivant :} \end{cases}$$

il existe $\mathcal{V}$ sous-espace dense de $\mathcal{H}$, tel que pour tout $v \in \mathcal{V}$, on sache construire une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant :
pour tout n, $h_n \in \mathcal{H}_n$ et $h_n \to h$ dans $\mathcal{H}$ lorsque $n \to \infty$.
L'espace $\mathcal{H}_n$ s'appelle approximation de Galerkin d'ordre n de $\mathcal{H}$.

Ainsi, si la famille $\{L_i\}_{i=1}^{+\infty}$ de formes linéaires sur $\mathcal{H}$ forme un repère de $\mathcal{H}$ et si l'on cherche à reconstruire un élément $f \in \mathcal{H}$ à partir de ses échantillons $\{L_i(f)\}_{i=1}^{+\infty}$, on peut envisager la méthode suivante :

1. on construit $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'espaces réalisant une approximation de Galerkin de $\mathcal{H}$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\{L_i\}_{i\in\alpha_n}$ ($\operatorname{card}\alpha_n < +\infty$) soit un repère de $\mathcal{H}_n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on applique les algorithmes d'échantillonnage donnés dans les paragraphes 4.3.4 et 4.3.5 avec les échantillons $\{L_i(f)\}_{i\in\alpha_n}$. D'après les estimations d'erreurs fournies au paragraphe 4.5.4, on construit ainsi une suite (f_n) où $f_n \in \mathcal{H}_n$ est défini de façon unique par :

$$\sum_{i=1}^{\alpha_n} |L_i(f_n) - L_i(f)|^2 = \min_{g\in\mathcal{H}_n} \sum_{i=1}^{\alpha_n} |L_i(g) - L_i(f)|^2$$

et $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{H}} f$ puisque $\|f - f_n\| = \mathrm{d}(f, \mathcal{H}_n) \xrightarrow{\mathcal{H}} 0$.

On donne une illustration de cette démarche ci-dessous.

Exemple : D'après le théorème de Shannon, toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}\hat{f} \subset [-\omega, \omega]$ peut être écrite :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n\pi}{\omega}\right) \operatorname{sinc}(\omega t - n\pi) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ce qui donne une formule d'échantillonnage régulier de f. On peut alors se demander dans quelle mesure des échantillons quelconques $\{f(t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ permettent de réaliser un échantillonnage irrégulier de f ?
Pour répondre à cette question, on rappelle le théorème suivant du à Duffin et Schaeffer ([Duf52]).

Théorème 16 *Si il existe trois constantes $0 < \epsilon < 1$, $\alpha > 0$ et $L > 0$ telles que $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit une suite vérifiant :*

$$\begin{cases} |t_n - t_m| \geq \alpha > 0 \quad \textit{pour } n \neq m \\ \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left| t_n - \epsilon \frac{\pi n}{\omega} \right| \leq L \leq +\infty \end{cases}$$

alors il existe deux constantes $0 < A \leq B$ dépendant uniquement de ϵ, α et L telles que pour tout $f \in \mathcal{B}_\omega = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \,/\, supp\, \hat{f} \subset [-\omega, \omega]$, on ait :

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(t_n)|^2 \leq B \|f\|^2. \tag{4.34}$$

Ainsi, pour une suite (t_n) vérifiant les hypothèses précédentes, les formes linéaires $L_i : f \mapsto f(t_i)$ forment un repère de $\mathcal{B}_\omega$. On introduit alors les espaces $\mathcal{H}_n = \text{vect}\{\text{sinc}(\omega t - t_i)\}_{|i|\leq n}$ et on vérifie aisément que ces espaces réalisent une approximation de Galerkin de $\mathcal{B}_\omega$. On montre aussi très simplement que les formes linéaires $L_i : f \mapsto f(t_i)$ pour $|i| \leq n$ forment un repère de $\mathcal{H}_n$.

Cette méthode permet de construire effectivement pour tout $f \in \mathcal{B}_\omega$, une suite de fonctions (f_n) convergent vers f où chaque f_n est construit à partir des éhantillons $\{f(t_i)\}_{|i|\leq n}$. Une telle construction est d'autant plus utile qu'on ne connaît que l'existence des constantes A et B de la relation (4.34), aucun encadrement de la borne inférieure A n'est à ce jour connu ([Fei93b], p.316).

4.8 Échantillonnage de signaux en dimension multiple

Nous venons d'étudier l'échantillonnage des signaux unidimensionnels à bande limitée selon une transformation discrète. Il est naturel de s'interroger sur les possibilités d'extension de ces méthodes au cas des signaux à p variables ($p > 1$). Nous allons montrer dans ce paragraphe qu'une telle généralisation ne pose aucun problème.
Afin de mettre en évidence les similitudes avec le cas des fonctions d'une seule variable, la présentation ainsi que les notations utilisées ci-dessous ont été choisies le plus proche possible de celles du paragraphe 4.2 (p. 71).

4.8.1 Position du problème

On cherche à échantillonner sur un domaine $V_p \subset \mathbb{C}^p$, un signal f à p variables à l'aide des échantillons :

$$\{f(M_i)\}_{i \in I_p}$$

avec pour tout $i \in I_p$, $M_i \in V_p$, le problème peut être formulé de la façon suivante.
Si $\mathcal{E}$ est un espace de Hilbert de fonctions à p variables définies sur un domaine V_p et si $\mathcal{H}$ est un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{E}$, le problème de l'échantillonnage de f est de trouver une technique permettant de retrouver f à partir de $\Phi_p(f)$:

$$\begin{array}{rccl} \Phi_p & : & \mathcal{H} & \to & \mathbb{C}^{I_p} \\ & & f & \mapsto & \{f(P_i)\}_{i \in I_p}. \end{array} \tag{4.35}$$

On adopte une démarche similaire à celle détaillée dans le cas des signaux à une seule variable. Si $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=1}^{N_p}$ est une famille de fonctions telle que $\text{vect}\{g_j\} = \mathcal{H}$ et si ${}^pT_m$ est la matrice de Φ_p i.e. ${}^pT_{m\,i,j} = g_j(P_i)$ ou plus généralement de termes génériques ${}^pT_{m\,i,j} = L_i(g_j)$ où les L_i sont des formes linéaires sur $\mathcal{H}$ alors une condition pour que les $\{L_i\}$ permettent d'échantillonner les éléments de $\mathcal{H}$ est :

$$\ker\ {}^pT_m = \{0\}.$$

Cette condition permet d'affirmer qu'il existe une matrice F, de taille $N_p \times |I_p|$ telle que :

$$\bar{F}\,T = I_{N_p}.$$

On peut alors définir la transformation $\mathcal{T}_p$ associée aux familles $\mathcal{G}$ et $\{L_i\}$ par :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{T}_p & : & \mathbb{C}^{N_p} & \to & \mathbb{C}^{N_p} \\ & & \{L_q(f)\} & \mapsto & \mathcal{T}_p f(q) = \displaystyle\sum_{k \in I_p} L_k(f) F_{k,q} \end{array}$$

cette transformation est bijective et l'on a :

$$L_k(f) = \sum_{p=1}^{N_p} \mathcal{T}s(p) L_k(g_p).$$

De la même façon qu'au paragraphe 4.3.4, nous présentons maintenant des algorithmes itératifs et directs de reconstruction d'un élément f de $\mathcal{H}$ à partir de ces échantillons $\{L_k(f)\}$ en tenant compte de ses propriétés spectrales selon la transformation $\mathcal{T}_p$.

4.8.2 Reconstruction itérative

L'espace des signaux discrets à bande limitée Ω^p selon $\mathcal{T}_p$ peut être défini par :

$$\mathcal{B}_{\Omega^p} = \{f \in \mathcal{H} \,/\, \mathcal{T}_p f(k) = 0 \text{ pour } k \notin \Omega^p \subset \{1, \ldots, N_p\}\}$$

et on définit $\mathcal{P}_{\Omega^p}$, l'espace des fonctions f à bande limitée Ω^p c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}_{\Omega^p} = \left\{ f \in \mathcal{H} \,/\, f(t) = \sum_{i \in \Omega^p} a_i g_i(t_1, \ldots, t_p) \right\}.$$

Théorème 17 *Soient $\{L_i\}_{i \in I_p}$ une famille de formes linéaires sur $\mathcal{E}$ et $f \in \mathcal{P}_{\Omega^p}$. Alors f est déterminée de façon unique par les points $L_i(f)$ si et seulement si $dim\{L_i\}_{i \in I_p} \geq card\Omega^p$. Dans ce cas il existe deux constantes $0 < A \leq B$ telles que :*

$$A \int_{\mathcal{E}} |f(t_1, \ldots, t_p)|^2 dt_1 \ldots dt_p \leq \sum_{i=1}^{r} |L_i(f)|^2 \leq B \int_{\mathcal{E}} |f(t_1, \ldots, t_p)|^2 dt_1 \ldots dt_p$$

soit :

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i=1}^{r} |L_{\sigma_i}(f)|^2 \leq B\|f\|^2. \tag{4.36}$$

Nous ne reprenons pas les résultats déjà utilisés pour les signaux à une seule dimension. Les résultats et leurs démonstrations sont identiques, de même les remarques quant au suréchantillonnage, aux estimations d'erreurs et aux approximations restent valables.
Dans cette situation, les bornes A et B du repère doivent être estimées avec d'autant plus de précision que pour les signaux à p variables, la taille des problèmes est très grande. Ainsi pour une image de taille $L = 768$ par $l = 512$ et à largeur de bande $L/2$ et $l/2$, on doit considérer au minimum 100000 échantillons. Les repères pondérés sont alors très utiles et se présentent sous la même forme qu'au paragraphe 4.6 (p. 92).

4.8.3 Cas où les fonctions $\{g_i\}$ sont à variables séparables

Nous avons montré que les techniques d'échantillonnage des signaux à une variable s'appliquent de la même manière aux signaux à p variables. Mais, nous venons aussi de voir que si d'un point de vue théorique les résultats sont identiques, il n'en est pas de même pour la mise en oeuvre numérique.

En effet, dès que l'on traite de signaux à plusieurs variables le nombre d'échantillons devient vite très grand. Ainsi, si pour un signal 1D on a besoin d'au moins r échantillons, pour une image ayant les même caractéristiques il faudra au moins r^2 échantillons.
Dans ces conditions, les méthodes de reconstructions directes deviennent vite difficilement opérationnelles et on s'oriente plutôt vers les méthodes itératives.

Dans certaines situations, l'échantillonnage d'un signal à p variables peut pourtant se ramener à l'échantillonnage de p signaux à une seule variable. En effet, si les fonctions $\{g_i\}$ utilisées pour la reconstruction sont à variables séparables c'est-à-dire de la forme :

$$g_i(t^1, \ldots, t^p) = g_i^1(t^1) g_i^2(t^2) \ldots g_i^p(t^p)$$

avec :

$$\text{vect}\,\{g_i(t^1, \ldots, t^p)\}_{i \in \Omega^p} = \text{vect}\,\{g_{i_1}^1(t^1) g_{i_2}^2(t^2) \ldots g_{i_p}^p(t^p)\}$$

et si les formes linéaires L_i vérifient :

$$\forall i \in I_p \quad \exists M_i \in V_p \quad \text{tel que} \quad L_i \,:\, f \mapsto f(M_i),$$

le problème formulé en 4.35 revient à chercher les coefficients $\{\alpha_{i_1,\ldots,i_p}\}$ tels que :

$$\sum_{i_1,\ldots,i_p} \alpha_{i_1,\ldots,i_p}\, g_{i_1}^1(t^1) g_{i_2}^2(t^2) \ldots g_{i_p}^p(t^p) = f(t^1, \ldots, t^p) \quad \forall\, M = (t^1, \ldots, t^p) \in V_p \tag{4.37}$$

sachant que :

$$\sum_{i_1,\ldots,i_p} \alpha_{i_1,\ldots,i_p}\, g_{i_1}^1(t_{j_1}^1) g_{i_2}^2(t_{j_2}^2) \ldots g_{i_p}^p(t_{j_p}^p) = f(t_{j_1}^1, \ldots, t_{j_p}^p) \quad \forall\, j_1, \ldots, j_p.$$

Ainsi, pour $j_2, \ldots, j_p$ fixés, il s'agit de chercher les coefficients $\{\alpha_{i_1,\ldots,i_p}\}$ tels que :

$$\sum_{i_1 \in \Omega_1^p} \cdots \sum_{i_p \in \Omega_p^p} \alpha_{i_1,\ldots,i_p} g_{i_1}^1(t^1) g_{i_2}^2(t_{j_2}^2) \ldots g_{i_p}^p(t_{j_p}^p) = f(t^1, t_{j_2}^2, \ldots, t_{j_p}^p) \quad \forall\, t^1$$

et ceci correspond à l'échantillonnage du signal $s_1 \,:\, s \mapsto s(t^1, t_{j_2}^2, \ldots, t_{j_p}^p)$ à une variable. On se ramène ainsi de l'échantillonnage d'un signal à p variables, à celui de plusieurs signaux à une seule variable.

Remarque : Si l'on cherche à analyser des signaux selon la transformation de Fourier discrète 2D :

$$\hat{f}(i_1, i_2) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} f(n,m) e^{-2j\pi(i_1 n + i_2 m)/N^2} \right)$$

l'espace $\mathcal{P}_M$ des signaux à bande limitée de largeur M est alors défini par :

$$\left\{ f \mid f(u,v) = \sum_{i_1=-M}^{M} \sum_{i_2=-M}^{M} y_{i_1,i_2} e^{2j\pi(i_1 u + i_2 v)} \right\}$$

et les fonctions servant à la reconstruction étant à variables séparables, on peut alors appliquer les résultats du paragraphe ci-dessus aux fonctions :

$$g^1_{i_1}(t^1) g^2_{i_2}(t^2) = e^{2j\pi i_1 t^1} e^{2j\pi i_2 t^2}.$$

Cette technique, utilisée par T. Strohmer ([Str97]), permet d'étendre l'algorithme ACT aux signaux 2D pour la reconstruction d'images à bande limitée selon la tranformation de Fourier discrète. Cette méthode sera utilisée au chapitre 6 (p. 141).

4.9 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'échantillonnage des signaux à bande limitée selon une transformation discrète qui peut être assimilé à la reconstruction selon une famille de fonctions $\{g_i\}_{i=1}^N$.
On a présenté des algorithmes itératifs, directs ou pondérés valables également pour les signaux à plusieurs dimensions. En résumé, les algorithmes consistent en le calcul de la meilleure approximation du signal initial au sens d'un critère quadratique faisant intervenir les échantillons connus du signal.

La technique repose sur le calcul du pseudo-inverse d'un opérateur injectif, sa caractéristique principale réside dans le fait que la taille du problème correspond à la largeur du spectre $|\Omega|$ et est indépendante du nombre d'échantillons considéré.

On a commencé à envisager dans ce chapitre certains problèmes numériques liés au mauvais conditionnement des opérateurs utilisés. Pour s'affranchir de ces problèmes, il serait possible de développer des outils de préconditionnement. Mais puisque par la suite on s'intéressera principalement à des problèmes de taille réduite (quelques dizaines d'échantillons), cette voie n'a

volontairement pas été approfondie.

Si on se rapporte au premier chapitre de ce mémoire définissant les objectifs (p. 17) de cette thèse, on peut voir que l'on a ici répondu à certaines interrogations concernant les relations entre transformation, signaux à bande limitée et échantillonnage selon une famille associée à cette transformation. On a montré également combien les repères étaient liés à l'échantillonnage selon une famille de fonctions non orthogonales entre elles.

La majeure partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de l'échantillonnage fini et des transformations *discrètes* finies (avec un nombre fini d'harmoniques). Dans de telles situations, les problèmes de continuité et de densité ne se posent pas vraiment. Ils vont être abordés dans le chapitre suivant avec l'étude des transformations *continues*.

Chapitre 5

Échantillonnage des signaux à bande limitée selon une transformation "continue"

5.1 Présentation

Alors que dans le chapitre précédent nous avons étudié le cas des transformations discrètes, nous nous attardons maintenant sur l'étude des transformations associées à des représentations de groupes localement compacts. Nous allons montrer que même si dans cette situation le formalisme est plus complexe les résultats obtenus et les arguments utilisés sont analogues à ceux du chapitre 4.

Si le chapitre précédent doit être rapproché des articles de Feichtinger et al. ([Grö93a], [Str95], [Str97]), celui-ci rejoint les travaux de Grossmann, Gabor, Meyer, Heil et Feichtinger. Il s'agit de voir dans quelle mesure on peut étendre au cas de transformations quelconques, les résultats obtenus ([Hei89], [Fei92b], [Grö93b], [Xia97]) à propos de l'échantillonnage des signaux à bande limitée selon la transformation de Fourier continue. Les travaux figurant ci-dessous tentent de prolonger le théorème de Shannon qui permet d'affirmer que tout signal f à énergie finie $f \in L^2(\mathbb{R})$ et dont le spectre selon la transformation de Fourier continue appartient à l'intervalle $[-\pi\omega, \pi\omega]$, peut être représenté par la série :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\frac{n\pi}{\omega}) \operatorname{sinc}(\omega t - n\pi). \tag{5.1}$$

5.2 La transformation de Fourier continue

On considère généralement que les fonctions à largeur de bande Ω sont des éléments de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathcal{F}(f)(z) = 0$ si $z \notin \Omega$ où la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est définie par :

$$\mathcal{F}(f)(z) = \hat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi j z t} dt.$$

L'échantillonnage d'un signal à bande limitée f se trouve alors associé à l'analyse de Fourier et de nombreux travaux ont consisté en la mise au point d'algorithmes permettant la reconstruction de f à partir d'un ensemble d'échantillons $\{f(t_i)\}_{i\in I}$ ou plus généralement $\{L_i(f)\}_{i\in I}$ sous la forme :

$$f(t) = \sum_{i\in I} L_i(f) g_i(t)$$

où les g_i sont telles que $\mathcal{F}g_i$ est à largeur de bande Ω.

Le développement ci-dessus fait naturellement apparaître les deux problèmes principaux que pose l'échantillonnage :

- Comment choisir les échantillons i.e. quelles formes linéaires $\{L_i\}_{i\in I}$ prendre ?
- Quelle famille de fonctions $\{g_i\}_{i\in I}$ choisir ?

Dans le cadre de l'analyse de Fourier, si l'on choisit des échantillons de la forme $f \mapsto f(t_i)$ où les t_i sont régulièrement espacés, on retrouve la formulation de Shannon donnée par la relation (5.1).

On peut envisager le cas où les points de mesure $\{t_i\}$ sont quasiment régulièrement espacés, des considérations à propos des perturbations d'une base orthonormale d'un espace de Hilbert fournissent des résultats permettant aussi une reconstruction. On peut citer à ce sujet les travaux de Paley et Wiener ([Pal34]) ainsi que ceux de Duffin et Schaeffer [Duf52]. Même si ces travaux ont un grand intérêt théorique, leur utilisation est rendue très délicate dans la pratique puisque généralement, soit les méthodes proposées ne sont pas constructives ([Beu64]) soit elles sont numériquement instables ou difficiles à mettre en oeuvre (voir la seconde remarque dans [Fei93b], p. 315).

Pour l'échantillonnage complètement irrégulier, les résultats sont moins nombreux mais récemment plusieurs pistes ont été proposées. Chronologiquement, citons tout d'abord les tentatives visant à transformer des échantillons irrégulièrement espacés en échantillons régulièrement espacés ([Cla85], [Cor88]). Ces méthodes fournissent des reconstructions exactes mais pour une faible population de fonctions, cette population dépendant de plus de la répartition des échantillons.
Plusieurs contributions ont aussi été apportées récemment tout d'abord par Feichtinger et al. ([Fei92b]) qui ont développé des techniques d'échantillonnage irrégulier à partir d'un ensemble d'échantillons possédant une densité suffisante. Ces méthodes ont l'avantage d'être valables pour de nombreux espaces fonctionnels (autres que L^2) appelés treillis de Banach et notamment pour les espaces L^p_w losque la fonction poids w est dite sous-multiplicative i.e. $w(x+y) \leq w(x)\, w(y)$.
Feichtinger, Gröchenig ont non seulement obtenus des résultats d'échantillonnage à l'aide des propriétés de la transformation de Fourier mais aussi pour toute transformation associée à une représentation intégrable ou de carré intégrable d'un groupe localement compact ([Fei89a], [Fei89b]). Christensen a quant à lui étendu ces résultats au cas des représentations projectives

([Chr96]). Chacun d'eux utilisent les propriétés des repères pour obtenir des formules de reconstruction mais il ne s'agit la plupart du temps que de résultats d'existence.

Citons aussi Walnut et Heil ([Hei89]) qui ont proposé des méthodes de reconstruction pour des fonctions possédant des propriétés vis à vis de la transformation de Gabor, leurs techniques utilisant les propriétés des repères. Ils montrent aussi que les propriétés de la représentation de groupe associée à la transformation en ondelette ne permettent pas d'étendre directement à celle-ci les algorithmes démontrés pour la transformation de Gabor.
Ajoutons les travaux de Xiao et Zou ([Xia97]) qui ont développé des algorithmes de reconstruction à partir d'une suite d'instant d'échantillonnage possédant un point d'accumulation. Cette dernière methode diffère des résultats mentionnés ci-dessus puisqu'elle est indépendante de la notion de repère. Elle s'appuie sur les liens entre les fonctions à bande limitée et les fonctions ou représentations analytiques.

5.3 Objectif

Il est intéressant de noter que la plupart des travaux traitant de la théorie de l'échantillonnage font appel à des considérations d'analyse fonctionnelle et que malgré ces liens apparemment naturels, il existe dans la littérature peu de références où ces similitudes sont exploitées. Ainsi, la plupart des références citées dans le paragraphe ci-dessus concernant l'échantillonnage irrégulier ont pour cadre l'analyse de Fourier. Cette idée peut être illustrée par une phrase de Nyquist ([Nyq28]) : "Cardinal series have found favor in signal-processing applications, undoubtedly because of the neat way in which it fits into the accompanying Fourier analysis". Naturellement, l'identification faite entre échantillonnage et analyse de Fourier a des origines historiques que nous avons déjà évoquées au paragraphe 2.3.5 (p. 39). Mais elle subsiste aujourd'hui alors qu'il ne semble plus exister d'obstacles empêchant les outils et techniques développés depuis trente ans dans le cadre de l'analyse de Fourier de s'étendre au cas plus général de l'analyse fonctionnelle.

Cette barrière de séparation entre analyse harmonique et analyse fonctionnelle semble pourtant avoir été franchie dans une discipline apparue récemment : les ondelettes. Ainsi, on peut voir dans les premiers résultats publiés sur les ondelettes comme par exemple les ondelettes de Gabor, l'influence de l'analyse de Fourier. Mais le formalisme entourant les ondelettes s'étant développé, il s'appuie maintenant sur des résultats liés à la théorie de

la représentation projective des groupes (cf. [Gro85], [Gro97]).

Notre objectif est donc de développer des techniques de reconstruction similaires à celles présentées par Heil et Walnut ou Xiao et Zou dans le cadre d'une transformation quelconque associée à une représentation de groupe.
Deux voies sont envisageables, travailler sur des espaces fonctionnels de grandes tailles afin d'obtenir des méthodes assez générales mais qui s'avèrent souvent difficiles à mettre en oeuvre. Ou bien se restreindre à des espaces de taille plus réduite auquel cas les techniques mises au point sont plus directement utilisables mais applicables pour une plus petite famille de signaux et donc de phénomènes.
De ces deux possibilités, nous avons privilégié la seconde afin de pouvoir par la suite adapter les résultats obtenus à des modèles de système mécanique bien précis.

Dans les deux paragraphes suivants (5.4) et (5.5), nous présentons rapidement les arguments qui permettent de construire une transformation sur un espace de Hilbert. Le formalisme est celui de Grossmann et al. ([Gro85]). Et avant d'apporter quelques compléments aux méthodes proposées par Higgins ([Hig96], p. 31), on précise (paragraphes 5.7 et 5.6) les liens entre transformations, fonctions noyaux et échantillonnage.
Le résultat principal de ce chapitre est l'extension du résultat de Xiao et Zou ([Xia97]). On présente également une technique d'échantillonnage utilisant non plus les échantillons d'une fonction mais les échantillons de sa transformée.

5.4 Transformations associées à une représentation de groupe localement compact

5.4.1 Représentation de groupes

La présentation faite ci-dessous s'inspire de ([Dau85a], pp.102-103) ainsi que de ([Sch70], pp. 66 et 82). On rappelle tout dabord les définitions essentielles suivantes.

Définition 14 *On appelle groupe topologique, un ensemble G qui est muni d'une part d'une structure de groupe pour la loi notée . et d'autre part d'une topologie telle que les applications définies par la structure de groupe c'est-à-*

dire :

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \to & G \\ (x,y) & \mapsto & x.y \end{array} \qquad \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto x^{-1} \end{array}$$

soient continues.

Définition 15 *On dit qu'un groupe topologique est localement compact si il est séparé et si tout point admet un voisinage compact. En particuliers $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont localement compacts.*

Nous introduisons ci-dessous la notion de représentation d'un groupe et nous en donnons quelques propriétés. Soit $\mathcal{H}$, un espace de Hilbert dont le produit scalaire noté $\langle .,. \rangle$ est linéaire par rapport à la seconde composante, la norme associée est notée $\|.\|$. $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ désigne l'espace vectoriel des endomorphismes continus de $\mathcal{H}$.

Définition 16 *Soit $(G,.)$ un groupe non nécessairement commutatif. On appelle représentation de G dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, une application :*

$$\begin{array}{rcl} G & \to & \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ x & \mapsto & \mathcal{U}(x) \end{array}$$

telle que $\mathcal{U}(x_1) \circ \mathcal{U}(x_2) = \mathcal{U}(x_1.x_2)$.

Une représentation est dite unitaire si :

$$\|\mathcal{U}(x)f\| = \|f\| \qquad \text{pour tout } \ f \in \mathcal{H}.$$

Elle est dite continue si pour tout $f \in \mathcal{H}$, l'application $x \mapsto \mathcal{U}(x)f$ est continue de G dans $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{U}$, une représentation continue de G dans $\mathcal{H}$ et g un vecteur de $\mathcal{H}$. On considère la famille de vecteurs :

$$\mathcal{X} = \{\mathcal{U}(x)g,\ x \in G\}$$

cette famille dépend du choix de g. Un élément g est dit cyclique si vect $\mathcal{X}$ est dense dans $\mathcal{H}$ ou de façon équivalente si l'on a :

$$(\langle f, \mathcal{U}(x)g \rangle = 0 \quad \forall x \in G) \ \Rightarrow \ f = 0.$$

On dit que $\mathcal{U}$ est irréductible si tout élément non nul de $\mathcal{H}$ est cyclique.

5.4.2 Représentation de carré intégrable

G désigne un groupe localement compact, d'élément neutre e. La théorie de la mesure assure que dans de tels groupes, il existe une mesure invariante à gauche appelée mesure de Haar à gauche et unique à une constante près. Cette mesure à gauche sera notée dx avec :

$$d(yx) = dx \qquad x \in G.$$

De même, il existe une mesure à droite notée $d_R x$ et telle que :

$$d_R(xy) = d_R(x) \qquad x \in G.$$

Aux mesures dx et $d_R x$, on peut associer la fonction Δ vérifiant :

$$d_R(x) = \Delta^{-1}(x)dx \quad \text{et} \quad d(xy) = \Delta(y)dx$$

et telle que Δ est un homomorphisme de $(G, .)$ dans le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Ainsi, Δ vérifie :

$$\Delta(e) = 1 \qquad \Delta(x.y) = \Delta(x)\Delta(y).$$

Si $\Delta(x) \equiv 1$, le groupe G est dit unimodulaire et l'on a identité entre les mesures à droite et à gauche. Pour une description plus complète des représentations de groupes non-unimodulaires, voir [Duf76].

Représentation à droite et à gauche

Soit $\Phi \in L^2(G, dx)$ et $a \in G$, on définit la représentation à droite λ pour tout $\lambda(a)\Phi \in L^2(G, dx)$ par :

$$(\lambda(a)\Phi)(x) = \Phi(a^{-1}x) \quad x \in G.$$

De la même façon, si $\Psi \in L^2(G, d_R x)$ et $a \in G$ on introduit $\rho(a)\Psi \in L^2(G, d_R x)$ telle que :

$$(\rho(a)\Psi)(x) = \Psi(xa) \quad x \in G.$$

Représentations de carrés intégrables

Soit $x \mapsto \mathcal{U}(x)$ une représentation unitaire d'un groupe localement compact G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Définition 17 *Un vecteur g de $\mathcal{H}$ est dit admissible si :*

$$\int_G |\langle \mathcal{U}(x)g, g\rangle|^2 dx < +\infty. \tag{5.2}$$

Dans l'équation (5.2), la mesure à gauche dx peut être remplacée par la mesure à droite puisque l'on a :

$$\langle \mathcal{U}(x), g, g \rangle = \langle g, \mathcal{U}(x^{-1})g \rangle$$

et donc :

$$\begin{aligned} \int |\langle \mathcal{U}(x), g, g \rangle|^2 dx &= \int |\langle g, \mathcal{U}(x^{-1})g \rangle|^2 dx \\ &= \int |\langle \mathcal{U}(x^{-1})g, g \rangle|^2 dx \\ &= \int |\langle g, \mathcal{U}(x)g \rangle|^2 d_R x. \end{aligned}$$

Définition 18 *La représentation $\mathcal{U}$ est dite de carré intégrable si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $\mathcal{U}$ est irréductible,

(ii) il existe au moins un vecteur non nul de $\mathcal{H}$ qui soit admissible.

Remarque : La fonction constante égale à 1 est admissible mais n'est pas une représentation de carré intégrable pour la représentation $\mathcal{U} : x \mapsto e^{ixt}$. Par contre, nous verrons plus loin que si $g \in L^2(\mathbb{R})$ alors la présentation :

$$\mathcal{U} : x \mapsto e^{ixt} g(t)$$

est de carré intégrable, il s'agit de la transformation de Fourier en temps court.

5.4.3 Relations d'orthogonalité

Pour les groupes compacts unimodulaires, les relations d'orthogonalité ont été étudiées par Weyl dans les années 1920. Dans le cas des groupes non unimodulaires, les résultats sont plus récents (cf. [Duf76]) et ils sont concrétisés par le théorème suivant. Sa démonstration étant longue et complexe, elle ne figure pas ici mais le lecteur pourra se reporter à ([Gro85], pp. 2478-2479).

Théorème 18 *Soit $\mathcal{U}$ une représentation de carré intégrable d'un groupe G agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors il existe un unique opérateur auto-adjoint C de $\mathcal{H}$ dans lui-même tel que :*

(i) l'ensemble des vecteurs admissibles coincide avec le domaine de C,

(ii) si g_1 et g_2 sont deux vecteurs admissibles et si f_1 et f_2 sont deux éléments de $\mathcal{H}$, alors on a :

$$\int_G \overline{\langle \mathcal{U}(x)g_1, f_1\rangle}\langle \mathcal{U}(x)g_2, f_2\rangle dx = \langle Cg_2, Cg_1\rangle\langle f_1, f_2\rangle, \tag{5.3}$$

(iii) si le groupe G est unimodulaire alors C est multiple de l'identité.

En particuliers, on a le corollaire suivant.

Corollaire 5 *Si $g_1 = g_2 = f_1 = f_2$ alors d'après (5.3), pour tout vecteur admissible g on a :*

$$\langle Cg, Cg\rangle = \frac{1}{\|g\|^2}\int |\langle \mathcal{U}(x)g, g\rangle|^2 dx.$$

Et si $g_1 = g_2 = g$, la relation devient :

$$\int \overline{\langle \mathcal{U}(x)g, f_1\rangle}\langle \mathcal{U}(x)g, f_2\rangle dx = \frac{\int |\langle \mathcal{U}(x)g, g\rangle|^2}{\|g\|^2}\langle f_1, f_2\rangle. \tag{5.4}$$

5.5 Les transformations L_g et R_g

Soit $\mathcal{U}$ une représentation de carré intégrable dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. D'après la relation (5.2), à tout vecteur g admissible on peut associer le nombre postif c_g tel que :

$$c_g = \frac{1}{\|g\|^2}\int |\langle \mathcal{U}(x)g, g\rangle|^2 dx = \frac{1}{\|g\|^2}\int |\langle \mathcal{U}(x)g, g\rangle|^2 d_R x.$$

À toute fonction f de $\mathcal{H}$, on associe les fonctions $L_g f$ et $R_g f$ définies sur G et telles que pour tout $x \in G$:

$$L_g f(x) = \frac{1}{\sqrt{c_g}}\langle \mathcal{U}(x)g, f\rangle \tag{5.5}$$

$$R_g f(x) = \frac{1}{\sqrt{c_g}}\langle g, \mathcal{U}(x)f\rangle. \tag{5.6}$$

On vérifie aisément que l'on a :

$$R_g f(x) = L_g f(x^{-1}).$$

La fonction $x \mapsto L_g f(x)$ est appelée la transformation de f selon L_g. Elle dépend de la représentation $\mathcal{U}$ et du choix du vecteur admissible g. On a la

même chose pour $R_g f$.

Remarque : Afin de se représenter la signification de la transformation L_g, on peut se reporter à la définition de la transformation de Fourier à fenêtre (ou en temps court). Ainsi, si on considère la représentation unitaire, irréductible et continue de $\mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{U}(x)g = e^{ixt}g(t)$$

où g est une fonction admissible i.e. de $L^2(\mathbb{R})$, on peut définir $S_g f$ telle que :

$$S_g f(x) = \gamma_g \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt}\overline{g(t)}f(t)dt$$

où γ_g est la constante de normalisation $\gamma_g = (1/\int |g(t)|^2 dt)^{1/2}$.

5.5.1 Continuité

La continuité de la représentation $\mathcal{U}$ ainsi que celle du produit scalaire assure la continuité sur G des fonctions $L_g f$ et $R_g f$. De plus, l'inégalité de Schwarz assure que les fonctions $L_g f$ et $R_g f$ sont bornées sur G puisque l'on a pour tout $x \in G$:

$$|L_g f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{c_g}}\|g\|\,\|f\| \qquad \text{et} \qquad |R_g f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{c_g}}\|g\|\,\|f\|.$$

Avec la définition de L_g, on a pour tout $f \in \mathcal{H}$ et pour tout $(a, x) \in G^2$:

$$L_g f(a^{-1}x) = \langle \mathcal{U}(a^{-1}x), g, f\rangle = \langle \mathcal{U}(x)g, \mathcal{U}(a)f\rangle$$

ce qui se traduit par :

$$\lambda(a)L_g = L_g\mathcal{U}(a). \tag{5.7}$$

De la même façon pour la transformation R_g, il vient :

$$\rho(a)R_g = R_g\mathcal{U}(a).$$

5.5.2 L_g et R_g sont des isométries

Nous avons vu dans le paragraphe 5.4.3 certaines propriétés d'orthogonalité associées à la représentation $\mathcal{U}$ et nous allons voir comment se traduisent ces relations au niveau des transformations L_g et R_g. On a la proposition suivante.

Proposition 9 *(i) L'application $f \mapsto L_g f$ est une isométrie de $\mathcal{H}$ dans $L^2(G, dx)$ et donc pour tout couple $(f_1, f_2) \in \mathcal{H}^2$ on a :*

$$\langle L_g f_1, L_g f_2 \rangle = \int \overline{L_g f_1(x)} L_g f_2(x) dx = \langle f_1, f_2 \rangle.$$

(ii) L'application $f \mapsto R_g f$ est une isométrie de $\mathcal{H}$ dans $L^2(G, d_R x)$ et donc pour tout couple $(f_1, f_2) \in \mathcal{H}^2$ on a :

$$\langle R_g f_1, R_g f_2 \rangle = \int \overline{R_g f_1(x)} R_g f_2(x) dx = \langle f_1, f_2 \rangle.$$

PREUVE : La démonstration de cette proposition est immédiate en utilisant les relations (5.3) et (5.4). $\Diamond$

Remarque : Cette dernière proposition est l'analogue du théorème de Plancherel pour la transformation de Fourier i.e. $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

5.5.3 Caractérisation de $L_g(\mathcal{H})$ et de $R_g(\mathcal{H})$

Notre objectif étant d'étudier l'échantillonnage de fonctions en tenant compte des propriétés de leurs transformées, nous devons connaître les espaces dans lesquels vivent ces transformées. Cette connaissance fait l'objet du paragraphe ci-dessous. Il est à noter que nous allons introduire naturellement les noyaux reproducteurs que nous avons utilisés déjà à plusieurs reprises (voir p.58).
Soit g un vecteur admissible pour la représentation $\mathcal{U}$. On définit la fonction p_g telle que :

$$\begin{aligned} p_g(x) &= \frac{1}{c_g} \langle \mathcal{U}(x) g, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{c_g}} L_g g(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c_g}} R_g g(x^{-1}). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Puisque g est un vecteur admissible pour $\mathcal{U}$, il vient que $p_g \in L^2(G, dx) \cap L^2(G, d_R x)$. On a alors les propositions suivantes caractérisant les images de $\mathcal{H}$ par L_g et R_g.

Proposition 10 *Soient $(\Phi, \Psi) \in L^2(G, dx) \times L^2(G, d_R x)$ alors on a les deux équivalences suivantes :*

(i) $\Phi \in L_g(\mathcal{H}) \subset L^2(G, dx)$ si et seulement si pour tout $x \in G$ on a :

$$\Phi(x) = \int p_g(y^{-1}x) \Phi(y) dy. \tag{5.9}$$

(ii) $\Psi \in R_g(\mathcal{H}) \subset L^2(G, d_R x)$ *si et seulement si pour tout* $x \in G$ *on a :*

$$\Psi(x) = \int p_g(yx^{-1})\Psi(y)d_R y. \tag{5.10}$$

PREUVE : Supposons que $\Phi \in L_g(\mathcal{H})$. Il existe donc $f \in \mathcal{H}$ tel que $\Phi(y) = L_g f(y)$, en utilisant les relations (5.5) et (5.8) de définition de L_g et de p_g ainsi que la relation (5.7), il vient que :

$$\begin{aligned}
\int p_g(y^{-1}x)\Phi(y)dy &= \frac{1}{\sqrt{c_g}} \int \overline{L_g g(x^{-1}y)}\Phi(y)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{c_g}} \int \overline{(\lambda(x)L_g g)\,(y)}\Phi(y)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{c_g}} \int \overline{L_g\,(\mathcal{U}(x)g)\,(y)}\Phi(y)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{c_g}} \int \overline{L_g\,(\mathcal{U}(x)g)\,(y)}L_g f(y)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{c_g}} \langle \mathcal{U}(x)g, f\rangle = L_g f(x) = \Phi(x).
\end{aligned}$$

Pour la réciproque, on suppose que l'on a un vecteur $\Phi \in L^2(G, dx)$ tel que :

$$\Phi(x) = \int p_g(y^{-1}x)\Phi(y)dy \qquad x \in G.$$

Nous allons tout d'abord montrer que pour tout $\Phi \in L^2(G, dx)$, la quantité ϕ définie par :

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{c_g}} \int_G \Phi(x)\mathcal{U}(x)g\; dx \tag{5.11}$$

est un vecteur de $\mathcal{H}$. L'intégrale (5.11) est faiblement convergente, donc pour tout $\psi \in \mathcal{H}$, la fonction $x \mapsto \langle \psi, \mathcal{U}(x)g\rangle$ appartient à $L^2(G, dx)$. Ainsi, pour tout $\Phi \in L^2(G, dx)$, l'intégrale :

$$\frac{1}{\sqrt{c_g}} \int_G \langle \psi, \mathcal{U}(x)g\rangle \Phi(x)dx = \int \overline{L_g \psi(x)}\Phi(x)dx$$

existe. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(G, dx)$ et le fait que L_g est une isométrie, on obtient que :

$$\left| \frac{1}{\sqrt{c_g}} \int_G \langle \psi, \mathcal{U}(x)g\rangle \Phi(x)dx \right| \leq \|\Phi\|_{L^2(G,dx)} \|\psi\|_{\mathcal{H}},$$

le théorème de représentation de Riez permet alors de conclure que la quantité :

$$\frac{1}{\sqrt{c_g}} \int_G \Phi(x) \mathcal{U}(x) g \, dx$$

défini un vecteur de $\mathcal{H}$. On vérifie alors aisément que :

$$L_g \left(\frac{1}{\sqrt{c_g}} \int_G \Phi(x) \mathcal{U}(x) g dx \right) (y) = \Phi(y).$$

ÉCOLE DES PONTS&CHAUSSÉES BIBLIOTHÈQUE

Ce qui démontre que :

$$L_g^{-1} \Phi = \frac{1}{\sqrt{c_g}} \int_G \Phi(x) \mathcal{U}(x) g \, dx \tag{5.12}$$

et que :

$$R_g^{-1} \Psi = \frac{1}{\sqrt{c_g}} \int_G \Psi(x) \mathcal{U}(x^{-1}) g d_R x \tag{5.13}$$

avec convergence faible des intégrales. $\Diamond$

5.6 Noyaux reproducteurs

Le résultat précédent nous a permit d'établir certaines propriétés des transformations étudiées et notamment leur inversibilité. Avant de mettre en oeuvre ces résultats dans le cadre de l'échantillonnage, nous revenons sur la définition de la fonction p_g.

5.6.1 Noyaux reproducteurs sur $L_g(\mathcal{H})$ et $R_g(\mathcal{H})$

Les relations (5.9) et (5.10) ne sont pas sans rappeler les propriétés des fonctions noyaux introduites page 58. À cette occasion, nous avions vu que dans un espace de Hilbert dont $\{\phi_n\}_{n \in I}$ est une base orthonormale on pouvait définir :

$$k(x, y) = \sum_{n \in I} \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)}. \tag{5.14}$$

Et que l'on avait alors pour tout vecteur f de l'espace :

$$\langle k(x, y), f(y) \rangle = f(x).$$

La comparaison entre cette dernière relation et les équations (5.9) et (5.10) inspire deux remarques. D'une part, les fonctions $(x, y) \mapsto p_g(y^{-1}x)$ et $(x, y) \mapsto k(x, y)$ vérifient des propriétés analogues et d'autre part, elles ont des expressions très différentes. La proposition suivante permet de faire le lien entre l'expression de la fonction p_g et celle de la fonction k.

Proposition 11 *$(x,y) \mapsto p_g(y^{-1}x)$ est le noyau reproducteur sur $L_g(\mathcal{H})$ et on a l'écriture :*

$$\forall (x,y) \in G^2 \qquad p_g(y^{-1}x) = \sum_n L_g(\phi_n)(x)\overline{L_g(\phi_n)(y)}$$

où $\{\phi_n\}_{n\in I}$ est une famille orthonormale totale de $\mathcal{H}$.

PREUVE : Puisque $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert séparé, d'après le théorème de Zorn ([Dau85a], p. 1126), il possède une base orthonormale i.e. une famille orthonormale dénombrable totale $\{\phi_n\}_{n\in I}$. Et d'après les propriétés d'isométrie de la transformation L_g, la famille $\{L_g(\phi_n)\}_{n\in I}$ est une famille orthonormale totale de $L_g(\mathcal{H}) \subset L^2(G,dx)$. Grâce à l'expression :

$$p_g(x) = \frac{1}{\sqrt{c_g}} L_g g(x),$$

on en déduit que $p_g \in L_g(\mathcal{H})$ et donc il existe une suite $\{\alpha_n\}$ telle que $p_g(x) = \sum_n \alpha_n L_g(\phi_n)(x)$. Pour x fixé dans G, on a donc la relation :

$$p_g(x^{-1}y) = \sum_n \alpha_n^x L_g(\phi_n)(y). \tag{5.15}$$

La relation (5.9) écrite pour tout les ϕ_n donne :

$$\begin{aligned} L_g(\phi_n)(x) &= \int p_g(y^{-1}x) L_g(\phi_n)(y) dy \\ &= \int \overline{p_g(x^{-1}y)} L_g(\phi_n)(y) dy, \end{aligned}$$

soit en remplaçant p_g par son expression dans (5.15), il vient :

$$L_g(\phi_{n_0})(x) = \sum_n \overline{\alpha_n^x} \int \overline{L_g(\phi_n)}(y) L_g(\phi_{n_0})(y) dy$$

ce qui fournit directement $\alpha_{n_0}^x = \overline{L_g(\phi_{n_0})(x)}$ et donc finalement :

$$p_g(y^{-1}x) = \sum_n L_g(\phi_n)(x)\overline{L_g(\phi_n)(y)}.$$

Cette dernière expression est identique à celle donnée par (5.14) puisque $\{L_g(\phi_n)\}_{n\in I}$ est une base orthonormale de $L_g(\mathcal{H})$. $\Diamond$

On a le même résultat en utilisant la transformation R_g.

5.6.2 Noyaux reproducteurs sur $\mathcal{H}$

Nous avons vu que l'existence d'un vecteur $g \in \mathcal{H}$ admissible pour la représentation $\mathcal{U}$ c'est-à-dire tel que $\int |\langle \mathcal{U}(x)g, g\rangle|^2 dx < +\infty$ équivaut à l'existence d'un noyau reproducteur $p_g = L_g g$ sur $L_g(\mathcal{H})$. La proposition 12 va nous permettre de relier une nouvelle fois l'existence d'un noyau reproducteur sur $\mathcal{H}$ aux propriétés de $\mathcal{U}$ et du vecteur admissible g. On donne également l'expression de ce noyau reproducteur sur $\mathcal{H}$.

Proposition 12 *Il existe une fonction noyau sur $\mathcal{H}$ si et seulement si il existe un vecteur g de $\mathcal{H}$ admissible pour la représentation $\mathcal{U}$ et tel que pour tout t :*

$$x \mapsto \mathcal{U}(x)g(t) \in L^2(G, dx). \tag{5.16}$$

PREUVE : Si g est un vecteur admissible vérifiant (5.16) alors on peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans les intégrales (5.12) et (5.13) qui ne sont plus prises au sens faibles. Pour tout $\Phi \in L_g(\mathcal{H})$, on a alors :

$$|L_g^{-1}\Phi(x)| \leq M\|\Phi\|_{L^2(G,dx)}\|\mathcal{U}(x)g\|_{L^2(G,dx)} = M_t\|\Phi\|_{L^2(G,dx)}.$$

Pour tout $f \in \mathcal{H}$ et tout t on a donc :

$$|f(t)| = \left|L_g^{-1}\left(L_g f\right)\right| \leq M_t\|L_g f\|_{L^2(G,dx)} = M_t\,\|f\|_{\mathcal{H}},$$

ce qui caractérise un espace de Hilbert possédant une fonction noyau. Pour la réciproque, on suppose que $\mathcal{H}$ admet une fonction noyau k. Si $\{\phi_n\}_{n\in I}$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}$, on a vu que l'on pouvait écrire :

$$k(u, v) = \sum_{n\in I} \overline{\phi_n(u)}\phi_n(v).$$

Pour tout $x \in G$, on a donc :

$$\mathcal{U}(x)g = \sum_{n\in I} \langle \mathcal{U}(x)g, \phi_n\rangle\overline{\phi_n}$$

or par définition de L_g, on a $\langle \mathcal{U}(x)g, \phi_n\rangle = L_g\phi_n(x)$ soit :

$$\mathcal{U}(x)g = \sum_{n\in I} L_g\phi_n(x)\overline{\phi_n}$$

et ainsi :

$$\begin{aligned}\int \overline{\mathcal{U}(x)g}\mathcal{U}(x)gdx &= \sum_{n\in I}\sum_{p\in I}\overline{\phi_p}\phi_n \int \overline{L_g\phi_n(x)}L_g\phi_p(x)dx \\ &= \sum_{n\in I}\overline{\phi_n}\phi_n \\ &< +\infty\end{aligned}$$

d'après le résultat donné page 59. Ce qui assure que $x \mapsto \mathcal{U}(x)g \in L^2(G, dx)$ pour tout t. $\Diamond$

Exemple : On définit la représentation de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R})$ par :

$$\mathcal{U}(x, y)f(t) = e^{-x/2}f(e^{-u}t - v)$$

où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in L^2(\mathbb{R})$, la loi de groupe étant définie par $(x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, e^{-x_2}x_1 + x_2)$. On peut alors vérifier ([Hei89], p.644) que $\mathcal{U}$ est une représentation unitaire de carré intégrable de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $H_+^2(\mathbb{R})$ et $H_-^2(\mathbb{R})$. $H_+^2(\mathbb{R})$ (resp. $H_-^2(\mathbb{R})$) est le sous espace de $L^2(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{supp} \mathcal{F}f \subset [0, +\infty[$ (resp. $\operatorname{supp} \mathcal{F}f \subset]-\infty, 0]$). On vérifie aussi aisément que pour tout vecteur g, on a $(x, y) \mapsto \mathcal{U}(x, y)g \in L^2(\mathbb{R}^2, dxdy)$. Donc d'après le résultat précédent, $H_+^2(\mathbb{R})$ (resp. $H_-^2(\mathbb{R})$) possède une fonction noyau.
On peut aussi noter que $\mathcal{U}$ est une représentation unitaire de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R})$ qui possède des vecteurs cycliques et admissibles mais qui n'est pas irréductible. Dans ces conditions, les transformations L_g ne sont plus des isométries et on ne peut pas conclure quant à l'existence d'une fonction noyau sur $L^2(\mathbb{R})$. Ce qui est heureux puisqu'une telle fonction n'existe pas sur L^2 tout entier.

L'existence d'un noyau reproducteur sur $\mathcal{H}$ étant assurée, nous en cherchons une expression autre que celle donnée par la proposition 11 et faisant intervenir la représentation $\mathcal{U}$ et le vecteur g.

Proposition 13 *Si la représentation $\mathcal{U}$ et le vecteur g vérifient pour tout t :*

$$x \mapsto \mathcal{U}(x)g(t) \in L^2(G, dx) \cap L^1(G, dx)$$

alors $k(u, v) = \int_G \overline{\mathcal{U}(x)g(u)}\mathcal{U}(x)g(v)dx$ est un noyau reproducteur de $\mathcal{H}$.

PREUVE : Afin de démontrer la proposition précédente, il suffit de montrer que pour tout $f \in \mathcal{H}$ et tout v, on a :

$$\langle k(u, v), f(u)\rangle = f(v).$$

On note $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathcal{H}} \overline{f_1(u)} f_2(u) du$ le produit scalaire sur $\mathcal{H}$, on a alors :

$$\begin{aligned}\int_G dx \int_{\mathcal{H}} \left| \mathcal{U}(x)g(u)\overline{\mathcal{U}(x)g(v)}f(u) \right| du &\leq \int_G \left| \overline{\mathcal{U}(x)g(v)} \right| \|\mathcal{U}(x)g\|_{\mathcal{H}} \|f\|_{\mathcal{H}} dx \\ &\leq \|g\|_{\mathcal{H}} \|f\|_{\mathcal{H}} \int_G |\mathcal{U}(x)g(v)|\, dx \\ &< +\infty.\end{aligned}$$

$\mathcal{H}$ et $L^2(G, dx)$ étant des espaces topologiques séparés on peut définir la mesure produit $du \otimes dx$ et le calcul précédent permet d'appliquer le théorème de Fubini soit :

$$\begin{aligned}\int_G dx \int_{\mathcal{H}} \mathcal{U}(x)g(u)\overline{\mathcal{U}(x)g(v)}f(u)du &= \int_{\mathcal{H}} du \int_G \mathcal{U}(x)g(u)\overline{\mathcal{U}(x)g(v)}f(u)dx \\ &= \int_{\mathcal{H}\otimes G} \mathcal{U}(x)g(u)\overline{\mathcal{U}(x)g(v)}f(u)dudx.\end{aligned}$$

Ainsi il vient :

$$\begin{aligned}\langle k(u,v), f(u) \rangle &= \int_G dx \int_{\mathcal{H}} \mathcal{U}(x)g(u)\overline{\mathcal{U}(x)g(v)}f(u)du \\ &= \int_G \mathcal{U}(x)g(v)L_g f(x)dx \\ &= f(v),\end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition. $\Diamond$

Remarque : La condition $x \mapsto \mathcal{U}(x)g(t) \in L^2(G, dx) \cap L^1(G, dx)$ pour tout t est à rapprocher de la construction de coorbites d'espaces associés à la représentation $\mathcal{U}$. À ce sujet, voir Feichtinger et Gröchenig ([Fei89a] p. 320).

5.7 Échantillonnage d'une fonction de $\mathcal{H}$

Après avoir construit et décrit les propriétés de transformations associées à des représentations de groupe. Nous cherchons à mettre au point des techniques d'échantillonnage pour les fonctions possédant des propriétés spectrales intéressantes vis à vis de ces transformations.

Dans un premier temps, nous montrons que le théorème d'échantillonnage de Shannon peut s'adapter à un espace $\mathcal{H}$ possédant un noyau reproducteur lui-même vérifiant une condition vis à vis des échantillons choisis.
On aborde ensuite le cas des signaux à bande limitée et on montre que la méthode précédente est alors plus aisée à appliquer car la condition que doit vérifier le noyau reproducteur est alors moins contraignante.

Finalement, on étend au cas des signaux à bande limitée selon une transformation associée à une représentation de groupe la méthode proposée par Xiao et Zou ([Xia97]).

5.7.1 Cas où $\mathcal{H}$ admet une fonction noyau

On suppose que l'espace $\mathcal{H}$ admet une fonction noyau k et soit $\{L_i\}_{i\in I}$ une suite de formes linéaires vérifiant :

$$\langle L_i\left(k(u,.)\right), L_j\left(k(u,.)\right)\rangle = \delta_{i,j}$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. On a alors le résultat suivant :

Théorème 19 *Pour tout $f \in vect\{L_i\left(k(u,.)\right)\}_{i\in I}$, on a la relation :*

$$f(t) = \sum L_i(f) L_i\left(k(u,t)\right).$$

PREUVE : Si $f \in \text{vect}\,\{L_i\left(k(u,.)\right)\}_{i\in I}$, on peut trouver (c_i) telle que :

$$f(t) = \sum_i c_i L_i\left(k(u,t)\right)$$

les propriétés de k permettent d'écrire :

$$L_i(f) = \langle f(t), L_i\left(k(u,t)\right)\rangle = \sum_j c_j \langle L_j\left(k(u,t)\right), L_i\left(k(u,t)\right)\rangle$$

soit :

$$L_i(f) = c_i. \quad \Diamond$$

Il faut noter que ce résultat ne permet pas de statuer sur l'échantillonnage de tout élément de $\mathcal{H}$ et que la condition d'orthogonalité vérifiée par les formes linéaires $\{L_i\}$ est restrictive. Mais on peut adapter ce théorème en utilisant les propriétés des systèmes bi-orthonormaux.

Définition 19 *Deux familles $\{\phi_n\}$ et $\{\phi_n^*\}$ d'un espace de Hilbert vérifiant $\langle \phi_n, \phi_n^*\rangle = \delta_{n,m}$ forment un système bi-orthonormal.*

Théorème 20 *Si $\{\phi_n\}$ est une base de $\mathcal{H}$ alors elle détermine une unique famille $\{\phi_n^*\}$ telle que $\{\phi_n, \phi_n^*\}$ soit un système bi-orthonormal.*

Ce résultat, du à Marti ([Mar69]) assure de l'existence de tels systèmes. Quant à leurs constructions, on peut utiliser la méthode de Gram-Schmidt même si celle-ci est numériquement relativement instable. Si $\{\phi_n\}$ est une base de $\mathcal{H}$, le système $\{\phi_n, \phi_n^*\}$ constitue une paire de bases pour $\mathcal{H}$ et chacune d'elle est appelée la base duale de l'autre. Le lemme suivant est alors une variante du théorème 19.

Lemme 13 *Soit une famille de formes linéaires $\{L_i\}_{i\in I}$ telle que $\{L_i(k(x,.))\}$ engendre $\mathcal{H}$. Alors il existe un ensemble d'indices $J \subset I$ tel que pour tout $f \in \mathcal{H}$, on ait la formule :*

$$f = \sum_{n\in J} L_n(f)\, L_n(k(x,.))^*.$$

Si de plus $\{L_n(k(x,.))\}_{n\in J}$ est une base orthonormale alors on a :

$$f = \sum_{n\in J} L_n(f)\, L_n(k(x,.))/L_n(L_n\, k(x,.)).$$

PREUVE : La démonstration est évidente puisque il existe $J \subset I$ tel que $\{L_n(k(x,.))\}_{n\in J}$ soit une base de $\mathcal{H}$ et tout $f \in \mathcal{H}$ peut être décomposé sur la famille $\{L_n(k(x,.))^*\}_{n\in J}$ et on a ainsi :

$$f = \sum_{n\in J} \langle f, L_n(k(x,.))\rangle L_n(k(x,.))^* = \sum_n L_n(f)\, L_n(k(x,.))^*.$$

La seconde égalité provient directement du fait que :

$$\|L_n(k(x,.))\|^{-1} = \langle L_n(k(x,.), L_n(k(x,.))\rangle^{-1/2} = L_n(L_n\, k(x,.))^{-1/2}. \ \Diamond$$

Ce dernier résultat est plus intéressant que le théorème 19 puisque son application ne requiert plus que la famille des formes linéaires $\{L_i\}$ vérifie une condition d'orthogonalité mais seulement une condition de génération. Nous allons chercher à obtenir une caractérisation plus simple de cette condition de génération.
Soit $f \in \text{vect}\,\{L_i(k(x,.))\}_{i\in I}$, si $\{\phi_n\}$ est une base orthonormée de $\mathcal{H}$, espace de Hilbert séparé, on peut trouver des coefficients $\{c_i\}$ tels que :

$$f = \sum_i c_i\, L_i(k(x,.)) \quad \Leftrightarrow \quad f = \sum_i c_i \sum_n L_i(\phi_n)\overline{\phi_n}$$

$$\Leftrightarrow \quad f = \sum_n \left(\sum_i c_i L_i(\phi_n)\right)\overline{\phi_n}.$$

On a donc l'équivalence suivante $\text{vect}\,\{L_i(k(x,.))\} = \mathcal{H}$ si et seulement si pour toute suite $\{y_n\} \in l^2$, il existe $\{c_i\}$ telle que $\forall\, n \ \sum_i c_i L_i(\phi_n) = y_n$.
En conservant les notations déjà utilisées, on appelle Φ l'opérateur associé aux formes linéaires $\{L_i\}$ et tel que $\Phi : f \mapsto \{L_i(f)\}$. En utilisant le théorème 15 (page 99), on voit que l'on peut trouver une forme sesquilinéaire a sur $\mathcal{H} \times l^2$ telle que :

$$\langle \Phi f, y\rangle_{l^2} = a(f,y) \quad \text{pour tout } (f,y) \in \mathcal{H} \times l^2$$

et la matrice *infinie* de a dans la base othonormée $\{\phi_i, y^n\}$ de $\mathcal{H} \times l^2$ est la matrice de termes génériques $(L_n(\phi_i))$ ($\{y^n\}$ est la base orthonormée naturelle de l^2). La condition vect $\{L_i(k(x,.))\} = \mathcal{H}$ est alors équivalente à la surjectivité de la transposée de la matrice Φ et donc à l'injectivité de la matrice de $\overline{\Phi}$ donc de Φ. En particuliers, si les formes linéaires $\{L_i\}$ forment un repère (voir corollaire 2, page 63), cette condition est vérifiée. Le lemme 13 a donc le corollaire suivant :

Corollaire 6 *Soit une famille de formes linéaires $\{L_i\}_{i\in I}$ formant un repère de $\mathcal{H}$. Alors il existe un ensemble d'indices $J \subset I$ tel que pour tout $f \in \mathcal{H}$, on ait la formule :*

$$f = \sum_{n\in J} L_n(f)\, L_n(k(x,.))^*.$$

Si de plus $\{L_n(k(x,.))\}_{n\in J}$ est une base orthonormale alors on a :

$$f = \sum_{n\in J} L_n(f)\, L_n(k(x,.))/L_n(L_n\, k(x,.)).$$

Pour la construction des repères, on peut réutiliser la notion de matrice infinie vue au paragraphe 4.7 (p. 98) et on a le résultat suivant.

Proposition 14 *Si $\{L_i\}$ est une famille de formes linéaires telle que la matrice infinie de termes génériques $L_i(\phi_n)$ existe (i.e. $\sum_{i,n} |L_i(\phi_n)|^2 < +\infty$ où (ϕ_n) est une base orthonormale de $\mathcal{H}$) et est injective alors la famille $\{L_i\}$ forme un repère de $\mathcal{H}$.*

PREUVE : D'après le corollaire 2 vu page 63, il suffit de montrer que l'opérateur $\Phi : f \mapsto L_i(f)$ est continu et injectif.
Puisqu'il existe un noyau reproducteur k sur $\mathcal{H}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\|\Phi(f)\|_{l^2} &= \sum_i |L_i(f)|^2 \\
&= \sum_i |L_i(\langle k(x,y), f\rangle)|^2 \\
&\leq \sum_i \|L_i(\langle k(x,y)\|^2 \|f\|^2 \\
&\leq B\|f\|^2.
\end{aligned}$$

Quant à l'injectivité, on considère un élément f tel que pour tout i, on ait : $L_i(f) = 0$. Puisque il existe une suite (c_n) telle que :

$$f = \sum_n c_n \phi_n$$

il vient que :

$$L_i(f) = 0 \text{ pour tout } i \Rightarrow \sum_n c_n L_i(\phi_n) = 0 \text{ pour tout } i$$

et l'injectivité de la matrice $(L_i(\phi_n))$ permet de conclure. $\Diamond$

5.7.2 Échantillonnage des signaux à bande limitée

De la même façon que pour la transformation de Fourier (discrète ou continue) on peut définir la notion de signaux ou fonctions à bande limitée selon les transformations L_g et R_g. Ainsi, un élément de $\mathcal{H}$ pour lequel on a la propriété :

$$L_g f(x) = 0 \quad (\text{resp. } R_g f(x) = 0) \quad \forall\, x \notin \Omega \subset G$$

sera dit à largeur de bande Ω selon L_g (resp. R_g).
Les espaces de signaux à bande limitée ont la propriété intéressante de posséder des fonctions noyaux. En effet si on considère la tranformation L_g et si Ω est une partie bornée de G, la formule d'inversion de L_g nous donne que pour tout $f \in \mathcal{B}_\Omega = \{f \in \mathcal{H} \,/\, \text{supp}\,(L_g f) \subset \Omega\}$, on a :

$$f(t) = \int_\Omega L_g f(x) \mathcal{U}(x) g dx = \int_G L_g f(x) 1_\Omega(x) \mathcal{U}(x) g dx$$

où 1_Ω est la fonction caractéristique de Ω. En utilisant que L_g est une isométrie et que $x \mapsto 1_\Omega(x)\mathcal{U}(x)g$ est un élément de $L^2(G, dx)$ car continue et à support fini, il vient que :

$$|f(t)| \leq \|f\|\, M_t$$

ce qui assure d'après la définition donnée page 57 que $\mathcal{B}_\Omega$ admet une fonction noyau.

5.7.3 Adaptation du théorème de Shannon

Le théorème de Shannon que nous avons rappelé à plusieurs reprises apparaît comme une application directe dans le cadre de l'analyse de Fourier[1] du lemme 13 ainsi que du corollaire 6 proposés ci-dessus puisque sur $\mathcal{B}_\Omega = \{f \,/\, \text{supp}\, \hat{f} \subset [-\omega, \omega]\}$, la quantité $k(x, y) = \text{sinc}\, \omega(x-y)$ est un noyau reproducteur qui vérifie en outre $\langle k(x, n\pi), k(x, m\pi)\rangle = \delta_{n,m}$ et vect $\{k(x, n\pi)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \mathcal{B}_\Omega$.

Afin de simplifier les notations, on considére que les échantillons d'une fonction sont formés par des valeurs ponctuelles de cette fonction i.e. L_i :

[1] À noter cependant que la représentation $\mathcal{U} : x \mapsto e^{-ixt}$ n'est pas de carré intégrable sur L^2.

$f \mapsto f(t_i)$.
Soit h_Ω un élément de $L^2(G, dx)$ tel que :

1. $h_\Omega(x) = 1$ pour tout $x \in \Omega$
2. $\int_G h_\Omega(x)\mathcal{U}(x)gdx \in \mathcal{H}$.

On suppose en outre qu'il existe une suite t_i vérifiant la propriété d'orthogonalité :

$$\int_G \overline{h_\Omega(x)\mathcal{U}(x)g(t_i)}\mathcal{U}(x)g(t_j)dx = \delta_{i,j}.$$

Soit $\{k(t_i, u)\}$ la famille de fonctions définie par :

$$k(t_i, u) = \int_G h_\Omega(x)\mathcal{U}(x)g(t_i)dx.$$

On peut appliquer le théorème précédent et on a :

$$f(t) = \sum_i f(t_i)k(t_i, t).$$

Remarque : Les résultats présentés dans les parties 5.7.1, 5.7.2 et 5.7.3 peuvent être rapprochés du lemme de Kramer (voir [Hig96], p. 78).

5.7.4 Repères associés aux transformations L_g et R_g

D'une façon générale, l'existence et la caractérisation de repères d'un espace de Hilbert sur lequel est définie une représentation de groupe de carré intégrable est donnée par le théorème de décomposition atomique ([Fei89a] p. 332). Ce résultat statue également sur les possibilités d'échantillonnage sur l'espace en question et permet a priori la mise au point de méthodes constructives basées sur les séries de Neumann.
Dans la pratique, ces méthodes sont difficilement applicables car les itérations font appel à des δ-partitions de l'unité qui sont très couteuses en temps de calcul lors d'une implémentation numérique.

5.7.5 Suite d'échantillons possédant un point d'accumulation

On considère un groupe localement compact G et une représentation unitaire de carré intégrable $\mathcal{U}$ du groupe G dans un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$ tels qu'ils ont été définis dans la partie 5.4.1, L_g désigne une transformation sur $\mathcal{H}$ associée à la représentation $\mathcal{U}$. On suppose de plus que $\mathcal{H}$ admet un

noyau reproducteur.
On rappelle que si une fonction f vérifie les deux conditions :

$$\begin{array}{l} t \mapsto f(t) \in C^\infty(S) \\ \forall t \in S \ \ \forall n \quad \left|\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}\right| \leq \alpha^n n! \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \tag{5.17}$$

alors en utilisant le théorème de Prigsheim ([Dav63], p. 14), il vient que f est analytique sur S. On désigne par $\mathcal{X}$ l'ensemble des couples de suites $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ t_n \in D \text{ compact donné} \\ (x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}} \text{ est bornée} \\ \forall m \in \mathbb{N} \quad \det T_m \neq 0 \end{array} \right. \tag{5.18}$$

où $T_m(i,j) = \mathcal{U}(x_j^{-1}x_m)g(t_i)$ pour $1 \leq i,j \leq m$.

Théorème 21 *Soit $f \in \mathcal{H}$ une fonction à bande limitée Ω selon la transformation L_g et (t_n, x_m) un couple de $\mathcal{X}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on définit la suite $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{H}$ telle que :*

$$\phi_m(t) = \sum_{k=1}^{m} E_m(k)\mathcal{U}(x_k^{-1}x_m)g(t)$$

où les coefficients $E_m(k)$ pour $1 \leq k \leq m$ sont choisis de telle sorte que :

$$f(t_n) = \phi_m(t_n) \qquad 1 \leq n \leq m$$

c'est-à-dire :

$$f(t_n) = \sum_{k=1}^{m} E_m(k)\mathcal{U}(x_k^{-1}x_m)g(t_n). \tag{5.19}$$

alors la famille de fonctions $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers f.

La démonstration de ce théorème, donnée ci-dessous est inspirée par celle fournie par Xiao et Zou, ([Xia97]). Comme nous l'avons fait à plusieurs reprises, on peut étendre ce résultat au cas où les échantillons ne sont pas de la forme $f(t_n)$ mais $L_n(f)$ où L_n est une forme linéaire. Une telle extension est l'objet du corollaire suivant. Il est fourni sans preuve, elle s'adapte simplement de la démonstration du théorème 21.

Corollaire 7 *Si $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de formes linéaires sur $\mathcal{H}$, (x_m) une suite bornée de G et f une fonction à bande limitée Ω selon L_g avec :*

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \det T_m \neq 0 \quad \text{où } T_m(i,j) = L_i\left(\mathcal{U}(x_j^{-1}x_m)g\right),$$

alors la famille de fonctions $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\phi_m(t) = \sum_{k=1}^{m} E_m(k)\mathcal{U}(x_k^{-1}x_m)g(t)$$

et où les coefficients $E_m(k)$ sont tels que $L_n(f) = L_n(\phi_m)$ pour $1 \leq k \leq m$, converge uniformément vers f sur tout compact du domaine de définition de $\mathcal{H}$.

PREUVE DU THÉORÈME 21 : Puisque le couple de suites (t_n, x_m) appartient à $\mathcal{X}$, le système :

$$f(t_n) = \sum_{k=1}^{m} E_m(k)\mathcal{U}(x_k^{-1}x_m)g(t_n) \quad 1 \leq n \leq m$$

admet une unique solution $\{E_m(k), k = 1, \ldots, m\}$ ce qui assure de l'existence de ϕ_m pour tout m. Soit S, un compact contenant D alors il existe $(M_1, r_1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ tels que $m \geq M_1 \Rightarrow (|\mathcal{U}(x_m)g(t) - g(a)| \leq r_1 \ \forall t \in S)$ et soit r_2, un réel vérifiant :

$$0 < r_1 < r_2 \quad \text{et} \quad 0 < \frac{2r_1}{r_2 - r_1} < 1.$$

Pour $a \in D$, on définit alors les ensembles D_1 et D_2 par $D_2 = \{z \,/\, |z - g(a)| < r_2\} \supset D_1 = \{z \,/\, |z - g(a)| < r_1\}$. On introduit les suites (h_m) et (p_m) de fonctions telles que :

$$\begin{aligned} h_m(z) &= \int_\Omega L_g f(\omega)\mathcal{U}(\omega x_m^{-1})1_{D_2}(z)d\omega \\ p_m(z) &= \sum_{k=1}^{m} E_m(k)\mathcal{U}(x_k^{-1})1_{D_2}(z) \end{aligned}$$

où $z \mapsto 1_{D_2}(z)$ est un élément de $\mathcal{H}$ tel que pour tout $x \in G$, on ait :

$$\begin{aligned} &z \mapsto 1_{D_2}(z) = z \ \ \forall z \in D_2 \\ &z \mapsto \mathcal{U}(\omega\Omega^m)1_{D_2}(z) \quad \text{vérifie (5.17).} \end{aligned}$$

En prenant $g_m(t_n) = \mathcal{U}(x_m)g(t_n)$, il vient d'après le choix des coefficients $E_m(k)$ que :

$$h_m(g_m(t_n)) = p_m(g_m(t_n)) \quad \text{pour tout } m \geq M \text{ et } 1 \leq n \leq m.$$

Soit r_m, le polynôme de degré au plus m, interpolateur de h_m et de p_m en les noeuds $\{g_m(t_n), n = 1, \ldots, m\}$.
En utilisant les hypothèses (5.17) ainsi que le théorème de Pringsheim rappelé dans la présentation, on vérifie aisément que $h_m(z)$ et $p_m(z)$ sont analytiques sur D_2 et on applique le théorème de Hermite ([Dav63], p.68). Pour $m \geq M_1$ et $z \in D_1$, on a donc l'égalité :

$$h_m(z) - r_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{(z - g_m(t_1)) \ldots (z - g_m(t_m))\, h_m(t)}{(t - g_m(t_1)) \ldots (t - g_m(t_m))\, (t - z)}\, dt \quad (5.20)$$

$$p_m(z) - r_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{(z - g_m(t_1)) \ldots (z - g_m(t_m))\, p_m(t)}{(t - g_m(t_1)) \ldots (t - g_m(t_m))\, (t - z)}\, dt \quad (5.21)$$

où $C_2 = \{z \,/\, |z - g(a)| = r_2\}$ est la frontière de D_2. Puisque $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert possédant un noyau reproducteur k (voir paragraphe 5.6.2), il vient :

$$|\mathcal{U}(\omega x_m^{-1}) 1_{D_2}(t)| \leq M_t \|\mathcal{U}(\omega x_m^{-1}) 1_{D_2}(t)\| = M_t \|1_{D_2}(t)\|,$$

on sait de plus que $L_g(\mathcal{H})$ admet une fonction noyau donc :

$$|L_g f(\omega)| \leq \tilde{M}_\omega \|L_g f\|_{L^2(G,dx)} = M'_\omega \|f\|.$$

Ainsi on a l'encadrement :

$$|h_m(t)| \leq \|1_{D_2}(t)\| \|f\| \int_\Omega M'_\omega M_t d\omega \leq \tilde{M}_{t,\Omega}$$

et $\tilde{M}_{t,\Omega}$ est borné sur $\mathcal{C}_2$. Ceci fournit :

$$|h_m(t)| \leq A_h \quad \text{pour tout } t \in C_2. \quad (5.22)$$

Pour $m > M_1$ et $1 \leq n \leq m$, on a $g_m(t_n) \in D_1$ donc on peut écrire $g_m(t_n) = g(a) + r_{m,n} e^{i\theta_{m,n}}$ avec $0 \leq r_{m,n} \leq r_1$ et $\theta_{m,n} \in [0, 2\pi]$. De même, on peut écrire tout élément (t, z) de $C_2 \times D_1$ sous la forme :

$$\begin{aligned} t &= g(a) + r_2 e^{i\theta_2} \\ z &= g(a) + r e^{i\theta} \end{aligned}$$

avec $(\theta_2, \theta) \in [0, 2\pi[\times [0, 2\pi[$ et $0 \leq r \leq r_1$. On vérifie alors aisément que l'on a pour $(t, z) \in C_2 \times D_1$ et $1 \leq n \leq m$:

$$|z - g_m(t_n)| \leq 2r_1, \quad |t - g_m(t_n)| \geq r_2 - r_1, \quad |t - z| \geq r_2 - r_1. \quad (5.23)$$

En combinant les relations (5.20), (5.22) et (5.23), on arrive à l'inégalité :

$$|h_m(z) - r_m(z)| \leq A'_h \left(\frac{2r_1}{r_2 - r_1}\right)^m \quad \forall z \in D_1. \quad (5.24)$$

De la même façon que précédemment, nous allons maintenant chercher à obtenir un encadrement de $|p_m(z) - r_m(z)|$ sur D_1.
D'après la relation (5.21), on a :

$$|p_m(z) - r_m(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_2} \frac{|z - g_m(t_1)| \dots |z - g_m(t_m)|\, |p_m(t)|}{|t - g_m(t_1)| \dots |t - g_m(t_m)|\, |t - z|}\, dt$$

et en réutilisant les arguments qui ont permis d'établir la relation (5.22), il vient :

$$|p_m(t)| \leq A_p \, \|p_m\|.$$

On a donc pour tout $z \in D_1$, l'encadrement :

$$|p_m(z) - r_m(z)| \leq A_p' \left(\frac{2r_1}{r_2 - r_1}\right)^m \sum_{k=1}^{m} |E_m(k)| \tag{5.25}$$

et en réunissant les inégalités (5.24) et (5.25), on obtient pour tout $z \in D_1$:

$$\begin{aligned} |h_m(z) - p_m(z)| &\leq |h_m(z) - r_m(z)| + |p_m(z) - r_m(z)| && (5.26) \\ &\leq \left(A_h' + A_p' \sum_{k=1}^{m} |E_m(k)|\right) \left(\frac{2r_1}{r_2 - r_1}\right)^m . && (5.27) \end{aligned}$$

Il reste donc à trouver un encadrement convenable de la quantité $\sum_{k=1}^{m} |E_m(k)|$.

Pour toute matrice T_m de $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ (resp. tout vecteur X_m de $\mathbb{C}^m$), on définit la norme $|||.|||_1$ de T_m (resp. la norme $\|.\|_1$ de X_m) par :

$$|||T_m|||_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |T_m(i,j)| \qquad \left(\text{resp.} \quad \|X_m\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |X_m(i)|\right)$$

et soient E_m et F_m les vecteurs $\mathbb{C}^m$ définis par :

$$E_m = \begin{pmatrix} E_m(1) \\ \vdots \\ E_m(m) \end{pmatrix} \qquad F_m = \begin{pmatrix} f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_m) \end{pmatrix}.$$

Si i_0 est le plus petit entier naturel tel que $g(t_{i_0}) \neq 0$, on a :

$$\forall m \geq i_0 \quad |||T_m|||_1 \geq |g(t_{i_0})| = \alpha_0$$

et puisque $|||.|||_1$ est une norme d'algèbre, la matrice T_m étant inversible on en déduit :

$$m = |||I_m|||_1 = |||T_m\, T_m^{-1}|||_1 \leq |||T_m|||_1 \; |||T_m^{-1}|||_1$$

où I_m est la matrice identité de taille m. Soit pour tout $m \geq i_0$:

$$|||T_m^{-1}|||_1 \leq \frac{m}{|||T_m|||_1} \leq \frac{m}{\alpha_0}.$$

Ainsi pour $m \geq i_0$, on a la relation :

$$\begin{aligned} \|E_m\|_1 &= \|T_m^{-1} F_m\|_1 \\ &\leq |||T_m^{-1}|||_1 \, \|F_m\|_1 \\ &\leq \frac{m}{\alpha_0} \|F_m\|_1. \end{aligned}$$

Mais puisque la suite $(|f(t_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est continue sur un compact donc bornée, il existe α' tel que :

$$\sum_{k=1}^{m} |f(t_k)| \leq \alpha' m$$

c'est-à-dire :

$$\|E_m\|_1 = \sum_{k=1}^{m} |E_m(k)| \leq \tilde{\alpha}\, m^2$$

et donc finalement, on obtient l'encadrement :

$$|h_m(z) - p_m(z)| \leq \tilde{A}\, m^2 \left(\frac{2r_1}{r_2 - r_1}\right)^m \tag{5.28}$$

ce qui assure que $\lim_{m\to\infty} |h_m(z) - p_m(z)| = 0$ uniformément pour $z \in D_1$. Pour $m \geq M_1$ et pour tout $t \in S$, on a :

$$|\mathcal{U}(x_m) g(t) - g(a)| \leq r_1$$

ainsi $z_m(t) = \mathcal{U}(x_m) g(t) \in D_1$ pour $m > M_1$ et $t \in S$. En reportant $z_m(t)$ dans la relation (5.27), il vient que :

$$\lim_{m\to\infty} |h_m(z_m(t)) - p_m(z_m(t))| = 0$$

uniformément pour $t \in S$. Mais en remplaçant l'expression de $z_m(t)$ dans les expressions de h_m et p_m, on obtient :

$$\begin{aligned} h_m(z_m(t)) &= \int_\Omega L_g(f)(w) \mathcal{U}(w x_m^{-1}) \circ \mathcal{U}(x_m) g(t) dw = f(t) \\ p_m(z_m(t)) &= \sum_{k=1}^{m} E_m(k) \mathcal{U}(x_k^{-1} x_m) g(t) = \phi_m(t). \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$\lim_{m\to\infty} |\phi_m(t) - f(t)| = 0$$

uniformément pour $t \in S$. $\Diamond$

5.7.6 Estimation d'erreur

Théorème 22 *Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème 21, pour tout compact S il existe deux réels $(\tilde{A}, \lambda) \in \mathbb{R}\times]0,1[$ et un entier N tel que pour tout $m > N$ on ait l'encadrement :*

$$|\phi_m(t) - f(t)| < \tilde{A}\,\lambda^m \quad \forall t \in S.$$

PREUVE DU THÉORÈME 22 : Soit α tel que :

$$\alpha = \frac{2r_1}{r_2 - r_1}$$

d'après la démonstration du théorème précédent, on a $0 < \alpha < 1$ et soit $\delta > 0$ tel que $0 < \alpha + \delta < 1$. Or il existe N tel que :

$$m > N \;\Rightarrow\; m^2\,(\alpha+\delta)^m < 1$$

donc d'après la relation (5.28), pour tout $m > N$ on a :

$$|\phi_m(t) - f(t)| < \tilde{A}\,(\alpha+\delta)^m \quad \forall t \in S. \;\Diamond$$

Le théorème 21 ne rentre pas complètement dans le moule des résultats d'échantillonnage utilisant les propriétés des repères. En effet, si l'on considère un couple (t_n, x_m) vérifiant les hypothèses du théorème 21 pour lequel la suite (t_n) est convergente et possède une limite par exemple $a \neq e$. Alors si $f \in \mathcal{B}_\Omega$ avec $\|f\| = 1$, il vient :

$$\sum_n |f(t_n)|^2 \to +\infty$$

et l'on n'a pas la possibilité de construire un repère sur $\mathcal{H}$. Dans cette situation, le théorème 21 permet tout de même de statuer mais dans ces conditions T_m sera mal conditionnée et le calcul des $E_m(k)$ délicat.

5.8 Échantillonnage d'une fonction de $L_g(\mathcal{H})$

Dans tout ce paragraphe, nous traiterons le cas de l'échantillonnage à l'aide des propriétés de la transformation L_g. On peut, de façon analogue, obtenir les mêmes résultats avec la transformation R_g ; ceux-ci ne sont présentés ici.

On considère l'espace $L_g(\mathcal{H})$, d'après la partie 3.2.2, on sait qu'il existe une fonction noyau sur $L_g(\mathcal{H})$ et nous avons vu au paragraphe précédent

diverses expressions de cette fontion noyau p_g.
Soit $\mathcal{L} = \{L_i\}_{i\in I}$, une famille de formes linéaires sur $L_g(\mathcal{H})$ telle que $\mathcal{L}$ engendre le dual de $L_g(\mathcal{H})$. Soient f, un élément de $\mathcal{H}$ et F, son image par L_g. Si la famille $\mathcal{L}$ est telle que :

$$\sum |L_i(F)|^2 < +\infty$$

alors on peut définir un repère (voir page 61) et un opérateur de repère $\tilde{S}_\lambda$ par :

$$\tilde{S}_\lambda(F) = \lambda \sum_{i\in I} L_i(F) L_i(p_g(y^{-1}x))$$

et appliquer les résultats obtenus dans la partie 4.3.4. L'algorithme :

$$\begin{aligned} \tilde{h}_0 &= 0 \\ \tilde{h}_{n+1} &= \tilde{h}_n + \tilde{S}_\lambda(F - \tilde{h}_n) \end{aligned}$$

converge alors vers F pour $|\gamma(\lambda)| < 1$ avec $\gamma(\lambda) = \max\{|1-\lambda A|, |1-\lambda B|\}$. On a de plus l'estimation :

$$\|F - \tilde{h}_n\| \leq \gamma(\lambda)^n \|F\|_{L_g(\mathcal{H})}.$$

En utilisant les formules d'inversion de la transformation L_g, la méthode précédente permet d'échantillonner un signal f de $\mathcal{H}$ à partir d'échantillons de $L_g(f)$. En effet, si $\tilde{h} = \lim_{n\to+\infty} \tilde{h}_n$, on a la relation :

$$f = L_g^{-1}(\tilde{h})$$

ce qui donne une expression de f en fonction des $\{L_i\,(L_g(f))\}$.

Sous cette forme, la technique proposée ci-dessus n'est utilisable pratiquement que si le nombre de mesures L_i est fini i.e. l'espace $\mathcal{H}$ de dimension finie. Dans le cas où $\mathcal{H}$ est de dimension infinie, le résultat peut avoir un intérêt théorique mais dans la pratique, on est obligé de se limiter à un nombre fini de mesures. Il est donc important de voir si l'on peut obtenir une approximation de la reconstruction à partir d'une sous-famille de $\mathcal{L}$ c'est-à-dire une famille $\{L_i\}_{i\in J}$ où J est un ensemble d'indice de cardinal fini.

Supposons que la famille $\{L_i\}_{i\in J}$ forme un repère d'un sous espace $\mathcal{H}_J$ de $\mathcal{H}$. Alors on peut introduire l'opérateur de repère $\tilde{S}_\lambda^J$ défini pour $F \in L_g(\mathcal{H})$ par :

$$\tilde{S}_\lambda^J(F) = \lambda \sum_{i\in J} L_i(F) L_i(p_g(y^{-1}x))$$

et utiliser les résultats obtenus dans la partie 4.3.4 qui nous permettent d'affirmer que l'itération :

$$\begin{aligned} \tilde{h}_0^J &= 0 \\ \tilde{h}_{n+1}^J &= \tilde{h}_n^J + \tilde{S}_\lambda^J(F - \tilde{h}_n^J) \end{aligned}$$

converge vers h^J la meilleure approximation au sens des moindres carrés de F sur $L_g(\mathcal{H}_J)$. Or puisque $h^J \in L_g(\mathcal{H}_J)$, il existe $f^J \in \mathcal{H}_J$ tel que :

$$h^J = L_g(f^J)$$

et puisque la transformation L_g est une isométrie, il vient que :

$$\|f - f^J\| = \|F - h^J\| = \min_{g \in L_g(\mathcal{H}^J)} \|F - g\| = \mathrm{d}(F, L_g(\mathcal{H}^J)).$$

5.9 Représentation projective

Dans tout ce chapitre, on s'est restreint aux représentations de groupes localement compacts, mais on peut aussi envisager le cas des représentations projectives. Elles sont défines de la façon suivante :

Définition 20 *G désigne toujours un groupe localement compact et $U(\mathcal{H})$ l'ensembles des opérateurs unitaires sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Une représentation projective de G sur $\mathcal{H}$ est alors une fonction ρ de G dans $U(\mathcal{H})$ vérifiant :*

(i) $\rho(e) = I_d$,

(ii) il existe une fonction continue c de $G \times G$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$\rho(x.y) = c(x, y)\rho(x)\rho(y), \quad \forall (x, y) \in G^2,$$

(iii) l'application $x \mapsto \langle \rho(x) f_1, f_2 \rangle$ est une fonction de Borel sur G pour tout $(f_1, f_2) \in \mathcal{H}^2$.

À l'aide des représentations projectives, on construit sur le même principe que pour les représentations, des transformations intégrables ou de carré intégrable. Ce formalisme n'est pas présenté ici, pour une description détaillée voir [Chr93] (pp. 61-78). Mais nous avons vérifié que tous les résultats présentés dans ce chapitre et particulièrement le théorème 21 s'adaptent aisément au cas des représentations projectives.

5.10 Conclusion du chapitre

Comme nous l'avons annoncé au tout début, l'objet de cette thèse ne réside pas dans l'étude de problèmes d'échantillonnage faisant intervenir des structures et espaces très complexes. Mais les questions abordées dans ce chapitre sont révélatrices des difficultés rencontrées dans les problèmes d'échantillonnage avec un nombre importants de mesures ou par exemple lorsque l'on cherche à échantillonner la solution d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles fortement non linéaire.
Dans ce cas, certaines difficultés surmontées par la théorie (continuité, conditionnement,...) et liées à la structure des problèmes rencontrés rendent les applications numériques délicates.

Il faut remarquer que tous les problèmes évoqués dans ce chapitre et particulièrement ceux traités aux paragraphes 5.7.1 (p. 126), 5.7.3 (p. 129) et 5.7.5 (p. 130) sont des cas limites de situations envisagées au chapitre précédent. Pour cette raison, nous ne nous présenterons pas directement dans le chapitre suivant d'illustrations numériques des situations présentées ci-dessus, on s'attardera plutôt sur des exemples simples mais où la taille du problème peut devenir importante (voir paragraphe 6.2, p. 154).

Pour reprendre directement les objectifs annoncés au début de la thèse, ajoutons également que par le biais du théorème 18 (p. 117), on a montré qu'une transformation permettait de définir un opérateur auto-adjoint auquel on peut naturellement associer un modèle de système mécanique. La réciproque de ce problème qui consiste à pouvoir associer une transformation à un modèle de système mécanique (équations différentielles ou aux dérivées partielles) n'a pas été abordée. Hormis l'ouvrage de Bergman et Schiffer ([Ber53]) traitant quasiment exclusivement des fonctions de Green, nous n'avons pas trouvé de références à ce sujet.

Chapitre 6

Illustrations numériques

Dans cette partie, nous nous attardons sur divers exemples de reconstruction de signaux menés à l'aide des outils d'échantillonnage présentés dans les pages précédentes. Nous étudions le cas de signaux à une variable puis le cas de signaux à deux variables, c'est-à-dire d'images. Dans chacune des situations, nous présentons d'abord des résultats obtenus avec des signaux simulés numériquement puis des résultats correspondant à des signaux enregistrés expérimentalement. Les exemples présentés sont volontairement très divers mais dans chaque situation, un des exemples se rapporte au problème de dynamique des véhicules qui sera étudié dans la seconde partie de ce mémoire.

6.1 Reconstruction de signaux à 1 variables

On cherche à mettre en pratique les algorithmes de reconstruction obtenus dans les paragraphes 4.3.4 (p. 77) et 4.3.5 (p. 79) ainsi que 4.6 (p. 92).

6.1.1 Signaux simulés

Échantillonnage avec des polynômes trigonométriques

Soit à étudier un signal f. On cherche à le reconstruire sur la base des polynômes trigonométriques $\mathcal{B}_M = \{e^{2\pi jkt}\}_{|k|\leq M}$ à l'aide des méthodes directes et itératives présentées pages 77 et 79.
Dans le premier exemple ci-dessous (figure 6.1), le signal f considéré appartient à l'espace engendré par $\mathcal{B}_M$:

$$f(t) = \sum_{k=-M}^{M} \alpha_k e^{2\pi jkt}$$

pour $M = 25$, si les échantillons sont choisis correctement et en nombre suffisant on aura une reconstruction exacte. Le signal f et sa reconstruction f_{ec} à partir des échantillons $\{f(t_i)\}$ ('o' sur la figure 6.1) sont confondus aux erreurs numériques près ($< 10^{-8}\%$).

Pour le second exemple (figure 6.2), le signal f n'appartient plus à $\mathcal{B}_M$ mais à l'espace des séries de Fourier non harmoniques c'est-à-dire :

$$f(t) = \sum_{k=-M}^{M} \alpha_k e^{2\pi j\lambda_k t}$$

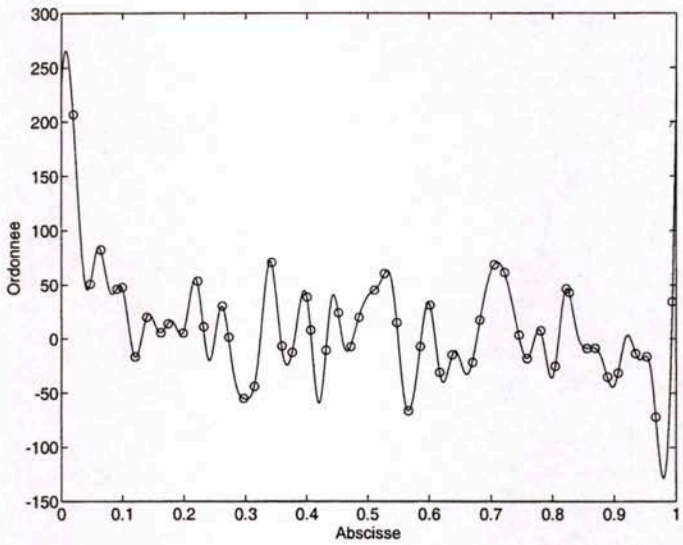


Figure 6.1 : Échantillonnage irrégulier mené avec 50 échantillons. 'o' position des échantillons choisis.

avec $\lambda_k \in [-25, 25]$, $M = 25$. Et l'on souhaite toujours reconstruire f sur $\mathcal{B}_M$, on cherche un élément f_{ec} de $\mathcal{B}_M$ tel que :

$$f_{ec}(t_i) = f(t_i) \quad \text{pour } i = 1, \ldots, 50.$$

Il s'agit a priori d'un problème d'approximation mais f appartenant à $L^2[0,1]$ et puisque $\{e^{2\pi jkt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base de $L^2[0,1]$, on peut considérer qu'il s'agit d'un problème de repliement de spectre entre les espaces $\mathcal{B}_{25}$ et $L^2[0,1] = \mathcal{B}_{+\infty}$. On utilise alors les estimateurs d'erreurs donnés au paragraphe 4.5 (p. 85) et plus particulièrement l'estimation (4.23) donnée page 91 qui nous permet d'affirmer que f_{ec} est la meilleure approximation de f sur $\mathcal{B}_{25}$ au sens du critère :

$$\sum_{i=1}^{25} |f(t_i) - f_{ec}(t_i)|^2 .$$

On rappelle que les t_i sont choisis de telles sortes qu'ils forment un repère et que donc l'application : $g \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{25} |g(t_i)|^2}$ est une norme sur $\mathcal{B}_{25}$.

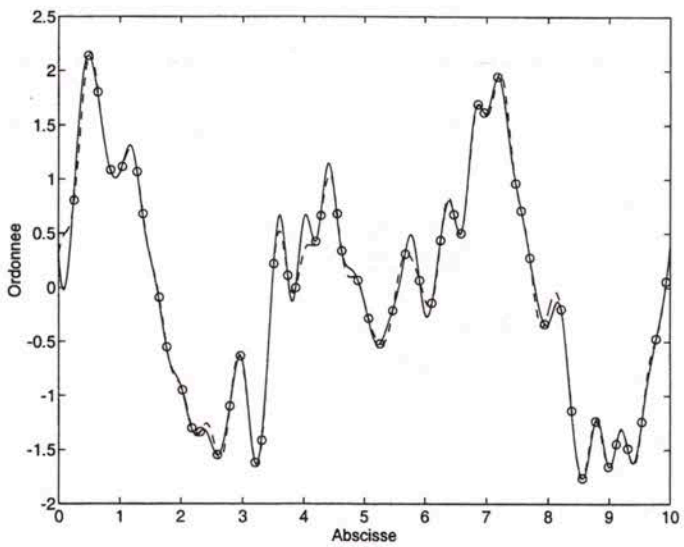


Figure 6.2 : Échantillonnage irrégulier mené avec 50 échantillons. 'o' position des échantillons choisis.

Échantillonnage avec des sinus cardinaux

On considère maintenant un signal f appartenant à l'espace de fonctions engendré par la famille :

$$\mathcal{G} = \left\{ \frac{\sin(\omega t - \pi\beta_k)}{\omega t - \pi\beta_k} \right\}_{1 \leq k \leq 50}$$

avec $\omega = \frac{5\pi}{2}$ et où les β_k sont choisis tels que pour tout $1 \leq k \leq 50$, on ait : $-25 \leq \beta_k \leq 25$. On échantillonne le signal f à l'aide des échantillons $\{\tilde{f}(t_i)\}_{1 \leq i \leq 50}$ tels que :

$$\tilde{f}(t_i) = f(t_i) * (1 + \epsilon_i)$$

où les t_i sont choisis arbitrairement dans l'intervalle $[-10, 10]$ et où ϵ_i est une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[-0.07, 0.07]$. La figure 6.3 montre un exemple de reconstruction illustrant la stabilité des algorithmes utilisés vis à vis du bruitage des mesures (voir paragraphe 4.5.2). On présente également (figure 6.4-(b)) le bruit sur chaque mesure ainsi que la courbe représentant la différence entre le signal initial et sa reconstruction f_{ec} (figure 6.4-(a)).

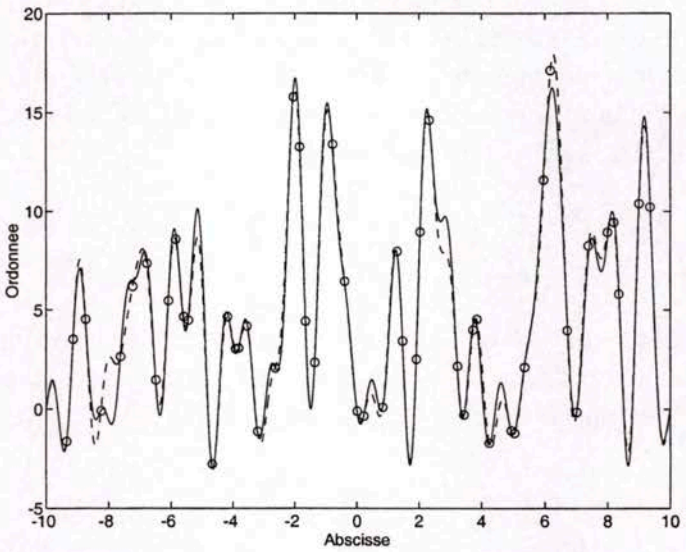
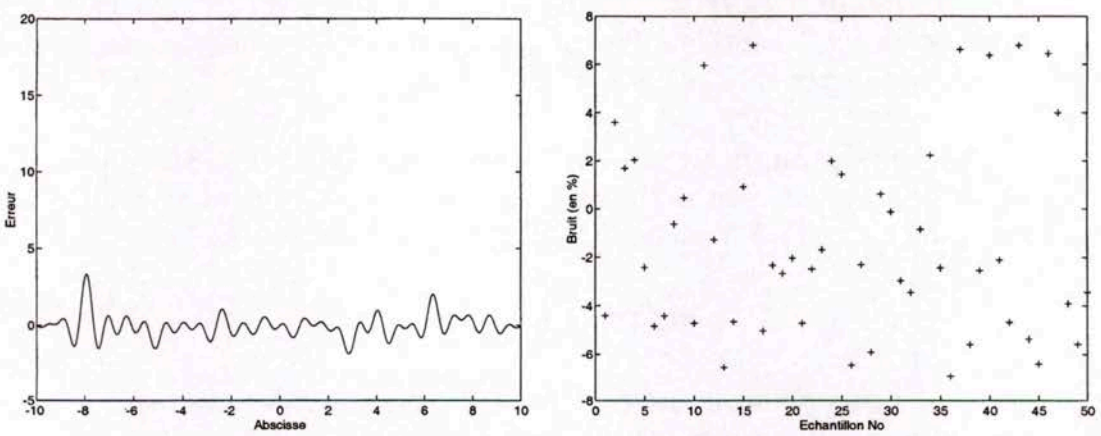


Figure 6.3 : Échantillonnage irrégulier mené avec 50 échantillons, 'o' position des échantillons choisis - '—' signal initial, '- -' signal estimé.



(a) *(b)*

Figure 6.4 : *(a)* différence entre le signal initial et le signal estimé $f - f_{ec}$ - *(b)* bruits ϵ_i (en %) ajoutés aux échantillons $\{f(t_i)\}$.

Cas où les échantillons sont de la forme $L_i(f) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$

Le paragraphe 3.2.1 (p. 55) nous a permis d'établir que l'on pouvait construire des repères non seulement grâce aux formes linéaires $f \mapsto f(t_i)$ mais à partir de formes linéaires quelconques. C'est ce que nous cherchons à illustrer ici. Comme dans l'exemple précédent, on considère un signal f appartenant à l'espace vectoriel généré par la famille :

$$\mathcal{G} = \left\{ \frac{\sin(\omega t - \pi\beta_k)}{\omega t - \pi\beta_k} \right\}_{1 \leq k \leq 50},$$

les quantités ω et (β_k) étant choisies dans les mêmes conditions que précédemment. On génère alors aléatoirement une suite (a_i), $i = 1, \ldots, 50$ avec $-10 \leq a_i \leq 10$ et on vérifie que les formes linéaires :

$$L_i \,:\, f \mapsto \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$$

forment un repère de $\operatorname{vect}\mathcal{G}$. Pour la suite (a_i) considérée ci-dessous, une estimation des bornes du repère donne :

$$A\,\|f\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{50} \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt \right|^2} \leq B\,\|f\| \qquad \forall f \in \operatorname{vect}\mathcal{G}$$

avec $A \approx 4.10^{-6}$ et $B \approx 0.24$. La figure ci-dessous (figure 6.5) montre le résultat de cet échantillonnage, le signal inital et le signal reconstruit sont confondus aux erreurs numériques près ($< 10^{-8}\%$).

De la même façon qu'au paragraphe précédent, on teste la stabilité de l'échantillonnage vis à vis du bruitage des mesures. On ajoute un bruit ϵ_i aux échantillons $L_i(f)$, les échantillons utilisés sont alors :

$$\tilde{L_i}(f) = (1 + \epsilon_i) * \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$$

où ϵ_i est une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[-0.1, 0.1]$, on obtient les résultats suivants (figures 6.6 et 6.7).

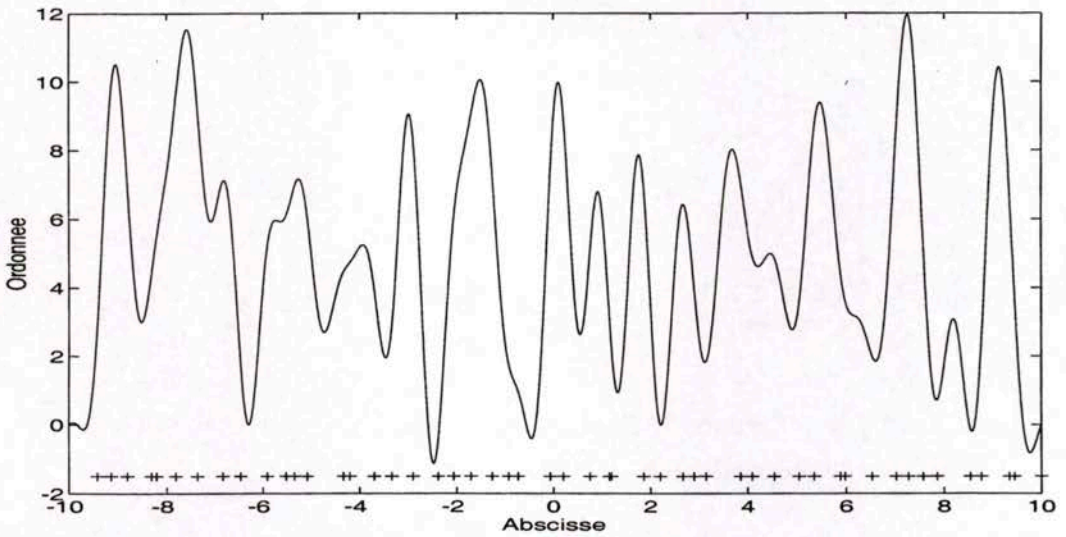


Figure 6.5 : Exemple d'une reconstruction menée avec 50 échantillons de la forme $L_i(f) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$, les '+' représentent la position des a_i. Le signal initial et sa reconstruction sont quasiment confondus.

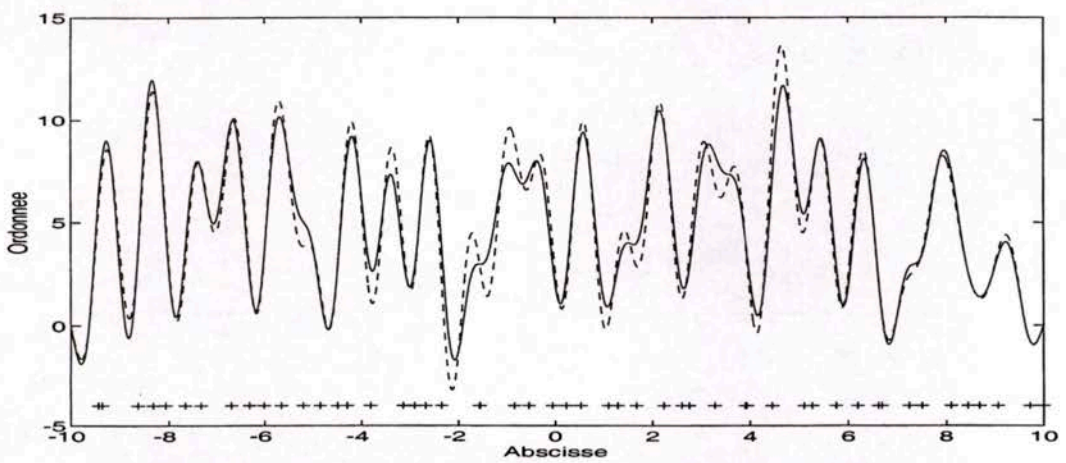
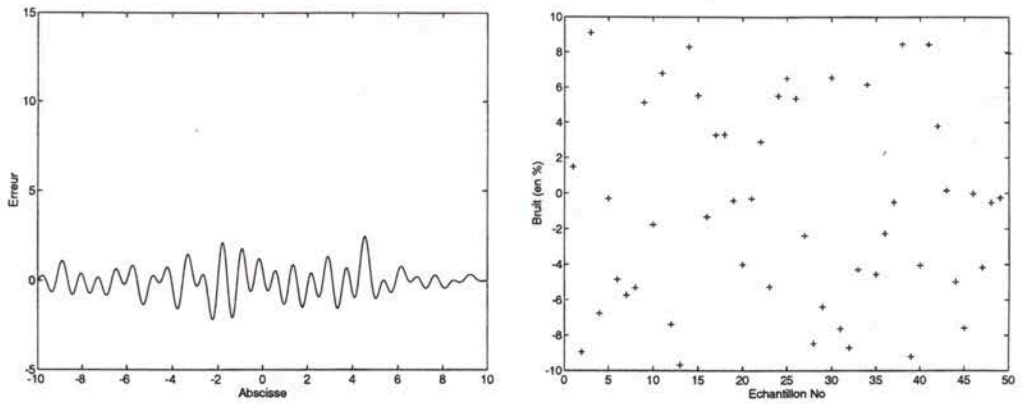


Figure 6.6 : Échantillonnage mené avec 50 échantillons bruités de la forme $\tilde{L}_i(f) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt + \epsilon_i$, '+' position des a_i - '—' signal initial, '- -' signal reconstruit.

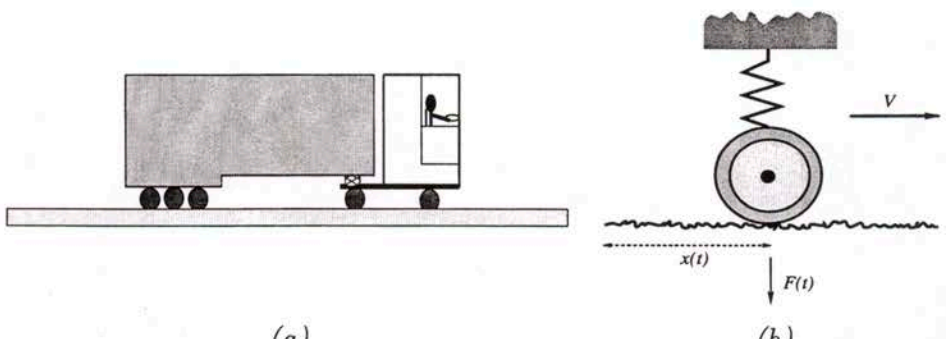


(a) *(b)*

Figure 6.7 : *(a)* différence entre le signal initial et le signal estimé $f - f_{ec}$ - *(b)* bruits ϵ_i (en %) ajoutés aux échantillons $\{L_i(f)\}$.

6.1.2 Signaux expérimentaux

On traite maintenant le cas de signaux non plus générés numériquement mais mesurés expérimentalement. On considère le cas d'un poids lourd circulant sur une chaussée. Plus précisement, on s'intéresse aux variations du poids dynamique d'un essieu de véhicule lorsque celui-ci circule à vitesse normale sur un uni donné, voir figure 6.8. $F(t)$ représente la force d'impact de l'essieu à l'instant t et donc l'effort appliqué à la chaussée au point d'absisse $x(t)$. Nous reviendrons plus en détail dans la seconde partie de cette thèse sur le dispositif de mesures de $F(t)$ (son principe et ses limites).



(a) *(b)*

Figure 6.8 : *(a)* Un poids lourd circulant sur une chaussée et *(b)* une suspension exitée par les irrégularités de l'uni d'une chaussée.

Dans cette situation, on ne connaît pas a priori de famille de fonctions $\{g_i\}$ telle que le signal $t \mapsto F(t)$ puisse être échantillonné grâce aux éléments de cette famille. On choisit donc a priori des familles $\{g_i\}_{i=1}^N$ et des formes

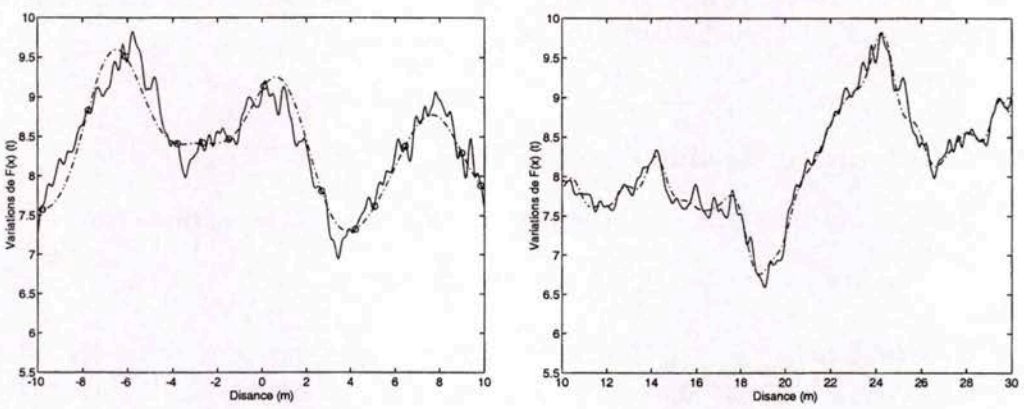
linéaires $\{L_i\}$ formant un repère de vect $\{g_i\}_{i=1}^N$ et l'on cherche à approximer le signal $t \mapsto F(t)$ à l'aide des échantillons $\{L_i(F)\}$.

Remarque : Le poids lourd instrumenté en question est composé d'un tracteur et d'une remorque appartenant à l'université d'Hanovre (Allemagne), seuls les essieux de la remorque sont instrumentés (voir page 247).

Échantillonnage avec des polynômes trigonométriques

Les deux figures ci-dessous (figures 6.9-a et 6.9-b) présentent deux exemples de reconstruction menées à l'aide des polynômes trigonométriques :

$$\left\{g_k \,:\, t \mapsto e^{2\pi jk(t-a)/(b-a)}\right\}_{|k|\leq M}.$$



(a) *(b)*

Figure 6.9 : '–' signal expérimental, '-.-' signal reconstruit. Reconstruction menée *(a)* avec 11 échantillons, $M = 11$ et *(b)* avec 25 échantillons, $M = 21$.

Échantillonnage avec des sinus cardinaux

On cherche à échantillonner (figure 6.10) le signal représentant les variations de la force d'impact d'un essieu de poids lourd à l'aide de fonctions sinus cardinal :

$$\{h_k \,:\, t \mapsto \operatorname{sinc}(\omega t - \pi\beta_k)\}_{1\leq k\leq m}.$$

On prend $\omega = 0.9\pi$ et $\beta_k = 9(k-8)/7$, pour $k = 1, \ldots, 15$.

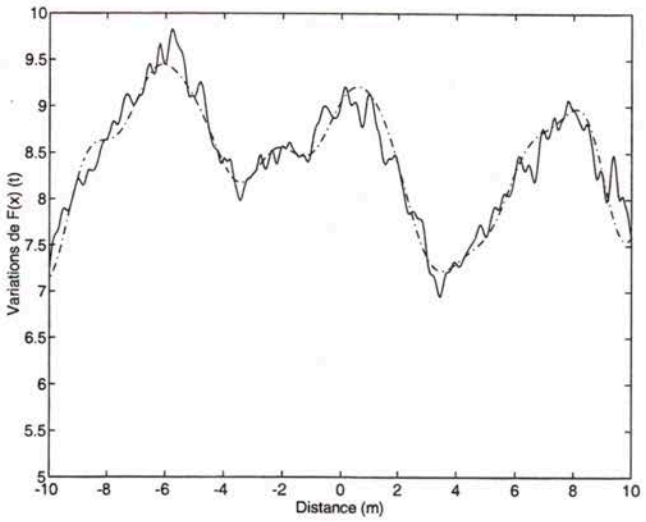


Figure 6.10 : Reconstruction menée avec 15 échantillons - '–' signal expérimental, '-.-' signal reconstruit.

Échantillonnage à l'aide des fonctions $\{e^{-t^2/2\sigma^2}e^{2\pi jkt},\ |k| \leq M\}$

On a aussi tenté de faire l'approximation avec des fonctions de la forme :

$$d_k\ :\ t \mapsto e^{-t^2/2\sigma^2}e^{2\pi jkt}.$$

Ce type de fonctions est notamment utilisé pour l'approximation des solutions des équations aux dérivées partielles de type Korteweg-de Vries :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \alpha u^n(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x,t) = 0.$$

Ces équations régissent un grand nombre de phénomènes physiques, chimiques et biologiques. Les résultats obtenus sont semblables à ceux présentés avec les familles de fonctions utilisées précédemment.

6.1.3 Reconstruction de signaux non périodiques à l'aide de fonctions périodiques

Lorsque sur un intervalle $[a, b]$, on cherche à reconstruire une fonction f à partir de ses échantillons $\{L_i(f)\}$ et que l'on n'a pas a priori d'informations sur le "spectre " de f, il est souvent intéressant d'entreprendre la reconstruction avec des fonctions simples.

Ainsi, si l'on considére l'intervalle $[0,1]$ et si on cherche à analyser f grâce à sa transformation de Fourier discrète, cela revient à tenter de reconstruire f grâce aux polynômes trigonométriques $\{e^{2j\pi k(t-a)/(b-a)}\}_{k=-M}^{M}$, voir ([Str95]). Mais puisque f n'est pas sensée être périodique sur $[0,1]$, cela revient à chercher à reconstruire une fonction non périodique à l'aide de fonctions périodiques. Ainsi, si l'on trouve des coefficients $\{\alpha_i\}_{i=-M}^{M}$ tels que :

$$f(t) \approx \sum_{k=-M}^{M} \alpha_k e^{2j\pi kt}$$

l'approximation aux bornes de l'intervalle sera nécessairement médiocre puisque l'on a :

$$\lim_{t\to 0^+} \sum_{k=-M}^{M} \alpha_k e^{2j\pi kt} = \lim_{t\to 1^-} \sum_{k=-M}^{M} \alpha_k e^{2j\pi kt} = \sum_{k=-M}^{M} \alpha_k$$

mais

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) \neq \lim_{t\to 1^-} f(t).$$

D'un point de vue numérique, cette reconstruction risque donc d'être fortement instable et nécessiter de choisir un grand nombre d'harmoniques, c'est-à-dire M grand. En effet, si les échantillons de f sont donnés par $\{f(t_1),\ldots,f(t_r)\}$ pour $0 < t_1,\ldots,t_r < 1$ et si $|t_1 - t_r - 1| \approx 0$, cela revient à considérer que la fonction f varie très rapidement aux voisinages de $t = 0$ et $t = 1$. D'où la nécessité de faire intervenir des hautes fréquences dans la reconstruction. La figure 6.11 ci-dessous illustre ce phénomène.

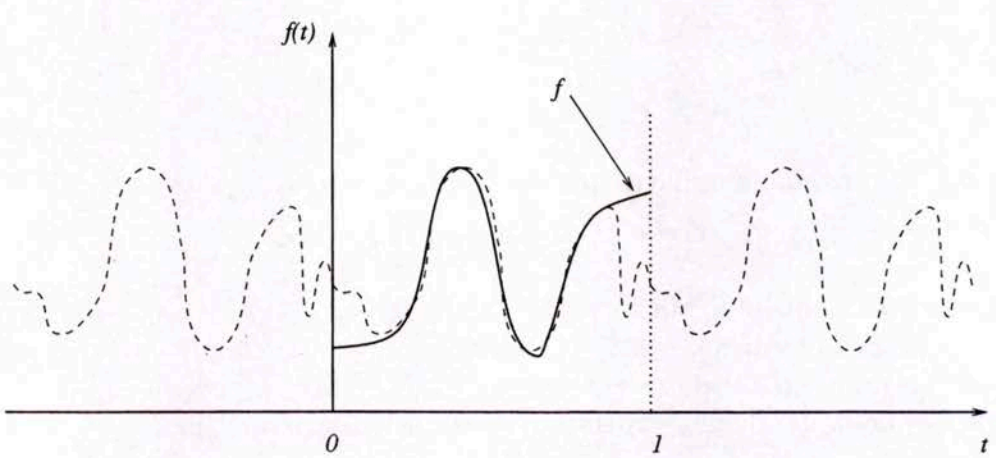


Figure 6.11 : Un signal f (—) et f_{ec} (- -) une reconstruction périodique de f.

Afin de surmonter cet obstacle, on peut chercher un opérateur linéaire $P_{[0,1]}$ inversible tel que $P_{[0,1]}f$ soit défini sur $[0,1]$ avec :

$$\begin{cases} \lim_{t\to 0^+} P_{[0,1]}f(t) = \lim_{t\to 1^-} P_{[0,1]}f(t) \\ \exists\, \alpha > 0, \ \ \alpha \text{ suffisamment petit tel que : } \quad P_{[0,1]}f(t) = f(t) \quad \forall t \in [\alpha, 1-\alpha]. \end{cases}$$

Si les échantillons dont on dispose sont de la forme $f(t_i)$ et tels que pour tout i, $t_i \in [\alpha, 1-\alpha]$, on échantillonne $P_{[0,1]}f = \sum_i f(t_i)g_i$ et à l'aide de $P^{-1}_{[0,1]}$, il vient :

$$f(t) = \sum_i f(t_i) P^{-1}_{[0,1]} g_i(t).$$

Le théorème présenté ci-dessous et du à Wickerhauser ([Wic93]) permet de construire un tel opérateur. Soit $r = r(t)$, une fonction de classe $C^d(\mathbb{R})$, $0 \le d \le \infty$ satisfaisant la propriété suivante :

$$|r(t)|^2 + |r(-t)|^2 = 1 \ \text{ pour tout } \ t \in \mathbb{R}, \quad r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le -1 \\ 1 & \text{si } t \ge 1, \end{cases} \tag{6.1}$$

on pourra se reporter à [Aus92] pour la méthode générale de construction de telles fonctions. On définit maintenant l'opérateur $U = U(r)$ ainsi que son adjoint $U^* = U^*(r)$ par :

$$\begin{aligned} Uf(t) &= \begin{cases} r(t)f(t) + r(-t)f(-t) & \text{si } t > 0 \\ \overline{r(-t)}f(t) - \overline{r(-t)}f(-t) & \text{si } t < 0 \end{cases} \\ U^*f(t) &= \begin{cases} \overline{r(t)}f(t) - r(-t)f(-t) & \text{si } t > 0 \\ r(-t)f(t) + \overline{r(t)}f(-t) & \text{si } t < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Pour tout réel α et tout $\epsilon > 0$, on introduit les opérateurs :

$$\tau_\alpha f(t) = f(t+\alpha), \qquad \tau^*_\alpha f(t) = f(t-\alpha),$$

$$\delta_\epsilon f(t) = \sqrt{\epsilon} f(\epsilon t), \qquad \delta^*_\epsilon f(t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} f(t/\epsilon),$$

on définit ainsi une famille d'opérateurs indexée par (r, α, ϵ) :

$$U(r,\alpha,\epsilon) = \tau^*_\alpha \delta^*_\epsilon U(r) \delta_\epsilon \tau_\alpha \qquad U^*(r,\alpha,\epsilon) = \tau^*_\alpha \delta^*_\epsilon U^*(r) \delta_\epsilon \tau_\alpha.$$

Étant donnés un intervalle $I = [\alpha_0, \alpha_1]$, deux réels ϵ_0, ϵ_1 et deux fonctions r_0 et r_1 satisfaisant la condition (6.1), on dira que les couples $(r_0, \alpha_0, \epsilon_0)$ et $(r_1, \alpha_1, \epsilon_1)$ sont cohérents si les intervalles $[\alpha_0 - \epsilon_0, \alpha_0 + \epsilon_0]$ et $[\alpha_1 - \epsilon_1, \alpha_1 + \epsilon_1]$ sont disjoints. On définit l'opérateur de λ-périodisation Ω_λ par :

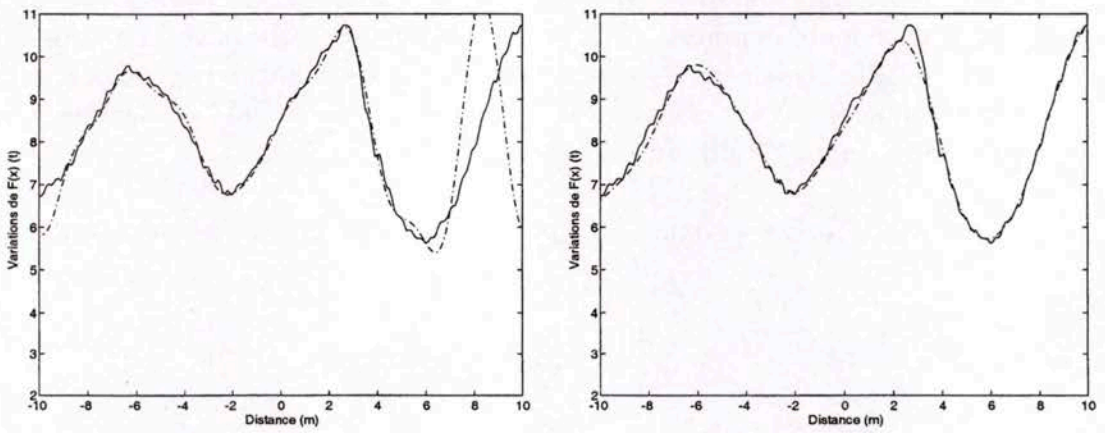
$$\Omega_\lambda f(t) \stackrel{def}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_{k\lambda} f(t),$$

et on vérifie que si $f \in L^2(\mathbb{R})$ est à support compact, alors $\Omega_\lambda f \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ et est périodique de période λ, soit χ_I la fonction indicatrice de l'intervalle I. On a alors le théorème suivant :

Théorème 23 *On suppose que les triplets $(r_0, \alpha_0, \epsilon_0)$ et $(r_1, \alpha_1, \epsilon_1)$ d'une part et (r, α_0, ϵ) et (r, α_1, ϵ) d'autre part sont cohérents. Si $I = [\alpha_0, \alpha_1]$, $U_0 = U(r_0, \alpha_0, \epsilon_0)$, $U_1 = U(r_1, \alpha_1, \epsilon_1)$ et $W_I^* = U^*(r, \alpha_0, \epsilon)U^*(r, \alpha_1, \epsilon)\Omega_{|I|}\chi_I$ et si $f \in C^d(\mathbb{R})$ alors $T_I f = W_I^* \chi_I U_0 U_1 f$ admet une extension I-périodique appartenant à $C^d(\mathbb{R})$. T_I est un isomorphisme unitaire de $P_I L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(I)$ avec $P_I = U_0^* U_1^* \chi_I U_1 U_0$.*

PREUVE : Pour la démonstration de ce théorème voir [Wic93]. ◊

La figure ci-dessous présente une illustration des résultats pouvant être obtenus à l'aide de cet opérateur. Il faut noter que l'utilisation de l'opérateur P_I n'est pas sans contrepartie puisque si le signal f est à bande limitée ou plus généralement possède des propriétés spectrales particulières, il n'en est pas nécessairement de même de $P_I f$. Ainsi, suivant les circonstances et pour éviter les problèmes aux bords de l'intervalle de reconstruction, on peut avoir intérêt à élargir celui-ci plutôt que d'utiliser l'opérateur P_I. Il ne semble pas exister de méthode générale permettant de construire une fonction r vérifiant (6.1) et telle que $P_I f$ ait la même largeur de bande que f.



(a) *(b)*

Figure 6.12 : *(a)* Reconstruction des variations de la force d'impact d'un essieu. (a) sans l'opérateur de périodisation - (b) avec l'opérateur de périodisation.

6.2 Reconstruction d'images

6.2.1 Reconstruction avec des images simulées

On considère le système mécanique formé d'un oscillateur à deux degrés de liberté schématisé par la figure 6.13. L'oscillateur se déplace à la vitesse $V(t)$ sur une surface possédant des irrégularités, à l'instant t la hauteur de l'irrégularité est $r(t)$.

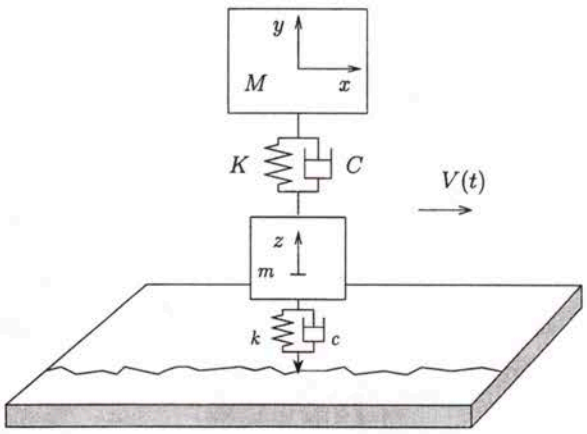


Figure 6.13 : Oscillateur à 2 degrés de liberté.

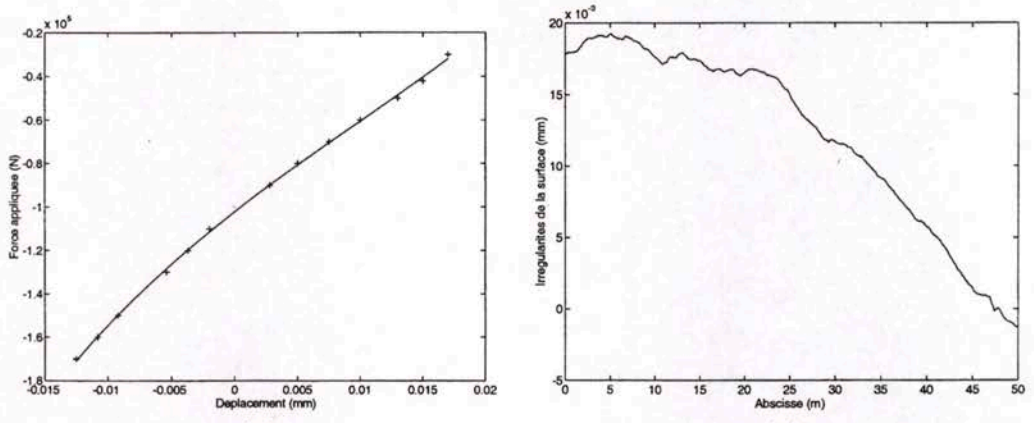
Les paramètres C et c sont des coefficients d'amortissement visqueux alors que K représente la raideur de la première suspension (linéaire). k représente quant à lui la raideur de la seconde suspension (non-linéaire) dont la courbe effort-déplacement est donnée par la figure 6.14 ci-dessous, un déplacement nul correspond à l'équilibre statique du système.

Le système représenté figure 6.13 peut être modélisé de la façon suivante :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \\ y \\ z \end{pmatrix} = h(y, z, \dot{y}, \dot{z}, r, \dot{r}) \tag{6.2}$$

avec :

$$h(y, z, \dot{y}, \dot{z}, r, \dot{r}) = \begin{pmatrix} -\frac{C}{M}(\dot{y} - \dot{z}) - \frac{K}{M}(y - z) - Mg \\ -\frac{c}{m}(\dot{z} - \dot{r}(t)) - \frac{k}{m}(z - r(t)) + \frac{C}{M}(\dot{y} - \dot{z}) + \frac{K}{M}(y - z) - mg \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}.$$



(a) *(b)*

Figure 6.14 : (a) courbe effort-déplacement de la suspension k, les déplacements positifs correspondent à une compression - (b) irrégularités de la chaussée.

On résout ce système différentiel par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4-5 pour $t \in [0, T]$ ($T = D/V$, $D = 50\,m$ et $V = 20\,ms^{-1}$) et pour diverses valeurs de la masse M. Pour chaque valeur de M sélectionnée, on dispose ainsi des variations de $z(t)$ et $y(t)$ qui permettent de calculer la force appliquée à la surface par l'oscillateur soit :

$$F(t) = (M + m)g + M\frac{d^2y}{dt^2} + m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Ainsi pour $M = 5000\,kg$, $m = 500\,kg$, $K = 1500000\,Nm^{-1}$,$C = 12000\,Nm^{-1}s$ et $c = 11000\,Nm^{-1}s$, on obtient le tracé suivant (figure 6.15) pour $F(t)$.

En gardant les autres paramètres tels qu'ils sont définis ci-dessus, on fait varier M dans l'intervalle $[M_0, M_1]$ avec $M_0 = 3000\,kg$ et $M_1 = 12000\,kg$, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{I} : & [M_0, M_1] \times [0, T] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (M, t) & \mapsto & F(t, M) \end{array}$$

constitue une image. Afin de tester les algorithmes d'échantillonnage sur des signaux 2D, on résout le système (6.2) pour plusieurs valeurs $\{M_j\}_{j \in J}$ de M et on sélectionne les points $\{F(t_i, M_j)\}_{(i,j) \in I \times J}$, on cherche ensuite à reconstruire l'image $\mathcal{I}$ à l'aide des échantillons $\{F(t_i, M_j)\}_{(i,j) \in I \times J}$.

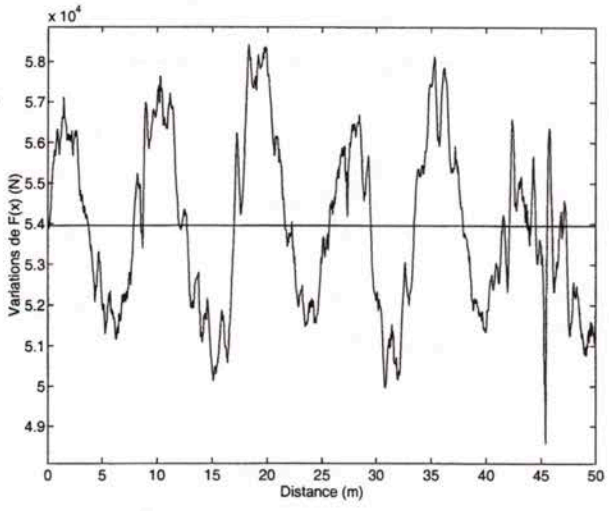


Figure 6.15 : Exemple de variations de $F(t)$ dans les conditions énoncées ci-dessus.

La figure 6.16 ci-dessous présente l'image $\mathcal{I}$ obtenue par résolution du problème (6.2) pour les valeurs $\{M_j = M_0 + 40 * (j-1)\}_{j=1}^{226}$ de M. On sélectionne des échantillons tels que le taux d'échantillonnage soit de $1/9$ (1 pixel sélectionné sur 9), les échantillons ne sont pas choisis régulièrement espacés mais uniformément répartis sur $[M_0, M_1] \times [0, T]$. La figure 6.17 montre le résultat de la reconstruction menée avec les fonctions :

$$\left\{ g_{i,k} \, : \, t \mapsto e^{2j\pi(it/T + k(M-M_0)/(M_1-M_0))} \right\}_{(i,k)\in I\times J}.$$

L'intérêt des techniques d'échantillonnage dans ce type de circonstances est de permettre une réduction de nombre de résolution d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles (qui sont très consommatrices en temps de calcul) tout en conservant une bonne précision sur le résultat final.

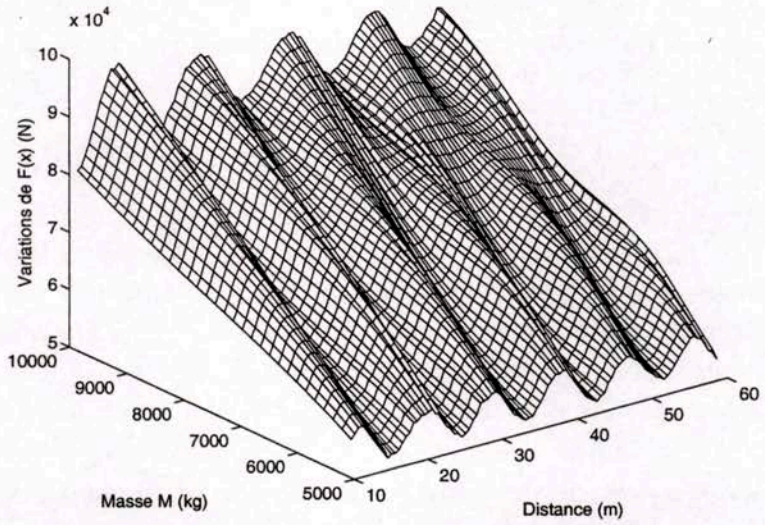


Figure 6.16 : Image $\mathcal{I}$ obtenue grâce à la résolution par la méthode de Runge-Kutta.

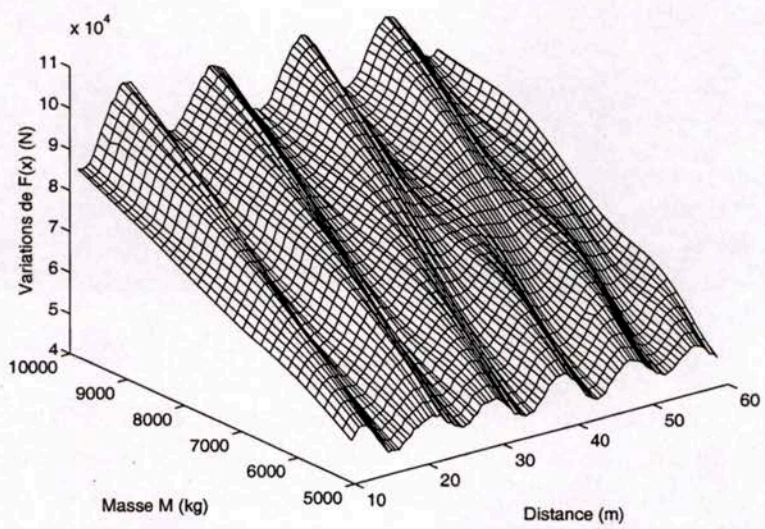


Figure 6.17 : Reconstruction de l'image $\mathcal{I}$ avec un taux d'échantillonnage de 1/9.

6.2.2 Reconstruction avec des images expérimentales

On considère l'image $\mathcal{I}_e$ de taille 768×512 (soit 393216 pixels) suivante représentant le résultat de l'évaporation d'une suspension de bentonite dans un dièdre[1]. Et on définit les deux familles de fonctions $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ ci-dessous :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{I,J} = \left\{ g_{i,k}(t,u) \ : \ t \mapsto e^{2j\pi(it/T_1 + ku/T_2)} \right\}_{(i,k)\in I\times J} \\ \mathcal{H}_{I,J} = \left\{ h_{i,k}(t,u) \ : \ t \mapsto \operatorname{sinc}\left(\omega_1 t - \pi\beta_k^1\right) \operatorname{sinc}\left(\omega_2 u - \pi\beta_k^2\right) \right\}_{(i,k)\in I\times J}, \end{cases}$$

les constantes T_1, T_2, ω_1 et ω_2 ainsi que les suites (β_k^1) et (β_k^2) sont choisies en fonction des tailles caractéristiques de l'image $\mathcal{I}_e$. Ces deux familles étant indexées par les mêmes ensembles, elles ont le même cardinal.
On tente alors de reconstruire l'image $\mathcal{I}_e$ à partir de pixels choisis non régulièrement espacés sur $\mathcal{I}_e$ ainsi que d'éléments de $\mathcal{G}_{I,J}$ et $\mathcal{H}_{I,J}$. On présente divers résultats obtenus avec des taux d'échantillonnage différents.

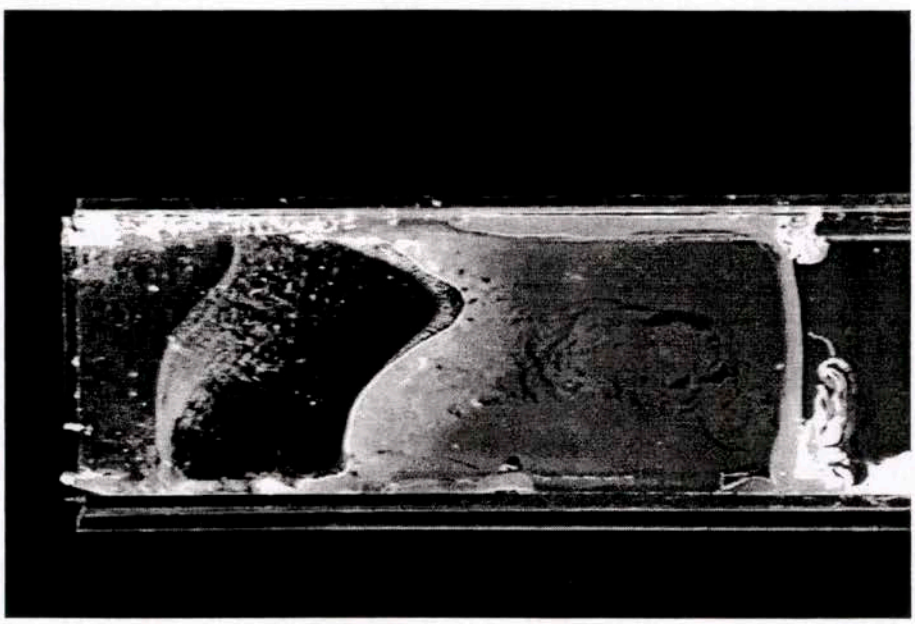


Figure 6.18 : Image intiale $\mathcal{I}_e$ de taille 768×512.

Ainsi, si l'on cherche à représenter l'image obtenue en sélectionnant 40×23 échantillons de l'image originale, on obtient l'image 6.19, sa reconstruction (image 6.20) sur la famille $\mathcal{H}_{I,J}$ à l'aide des 920 pixels choisis arbitrairement est également présentée ci-après.

[1] Cette image a été fournie par C. Gauthier et a été obtenue à la suite d'expérimentations menées au LMSGC et concernant le séchage de la bentonite.

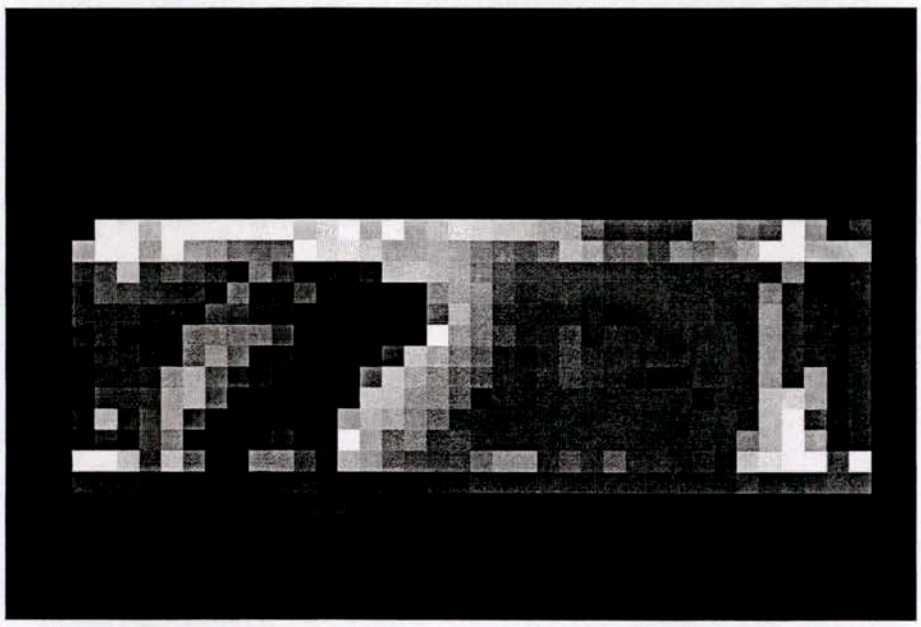


Figure 6.19 : Image constituée des 920 pixels sélectionnés.

Figure 6.20 : Reconstruction avec les 40×23 échantillons sélectionnés. La proportion d'échantillons sélectionnés pour la reconstruction est donc 1 pixel sur 425.

Si l'on cherche maintenant à reconstruire $\mathcal{I}_e$ sur la famille $\mathcal{G}_{I,J}$ à partir de l'image obtenue (figure 6.21) en sélectionnant 48×40 échantillons de l'image originale, on obtient l'image 6.22.

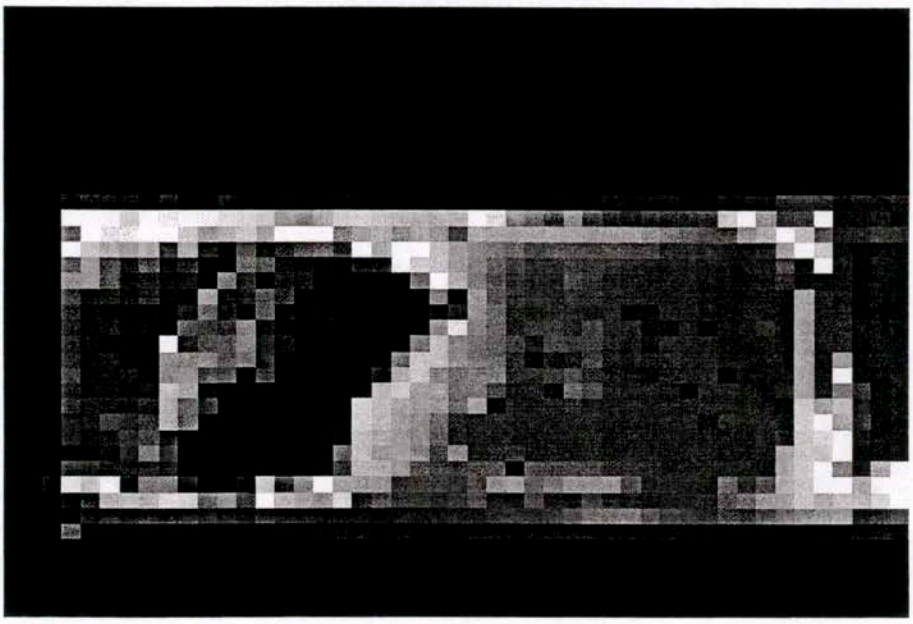


Figure 6.21 : Image constituée des 1920 pixels sélectionnés.

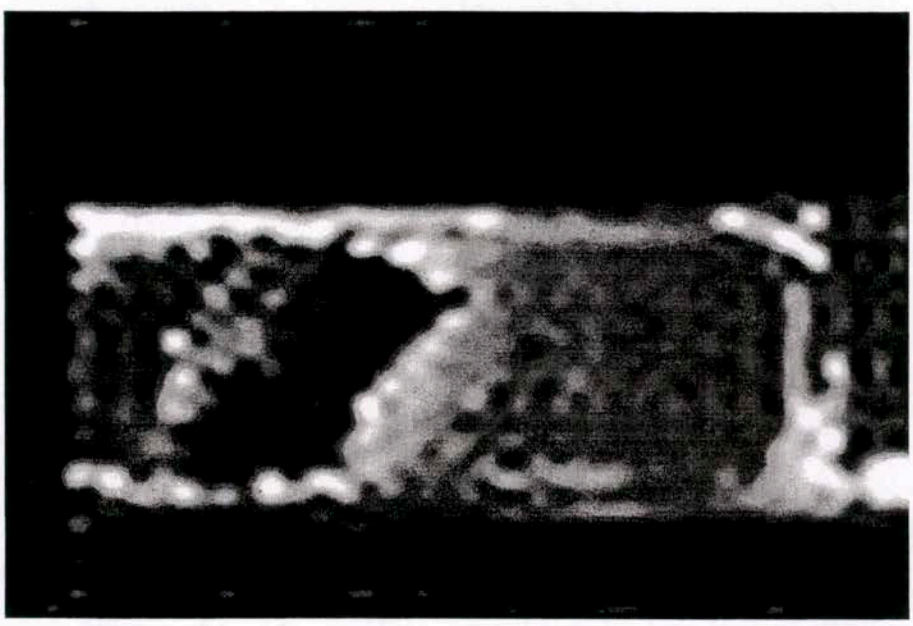


Figure 6.22 : Reconstruction les 48×40 sélectionnés. Taux d'échantillonnage 1/200.

On présente maintenant divers exemples de reconstruction à l'aide de la famille $\mathcal{G}$ pour des taux d'échantillonnage plus élevés.

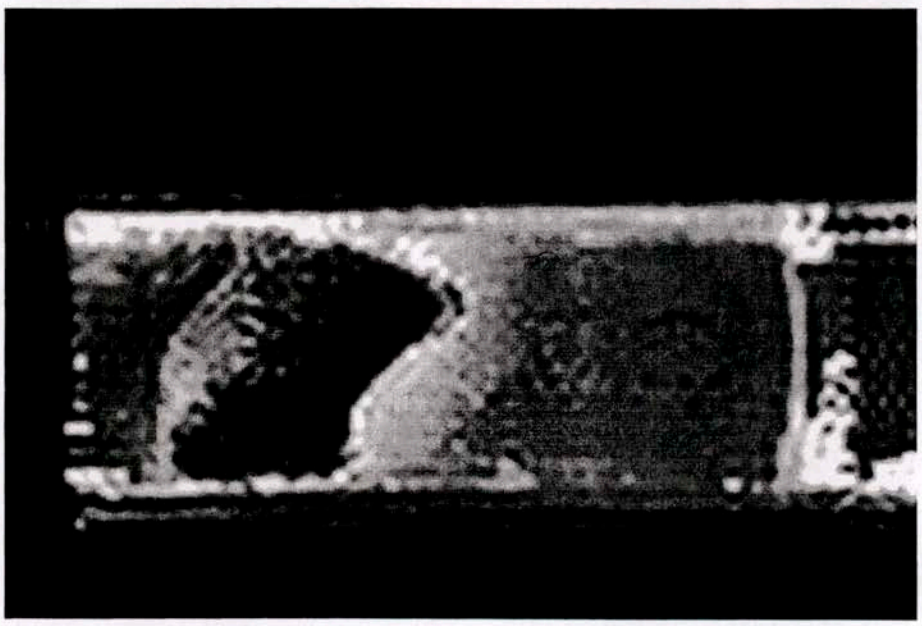


Figure 6.23 : Reconstruction avec 96×64 échantillons (soit 6144 pixels) choisis arbitrairement. Taux d'échantillonnage 1/64.

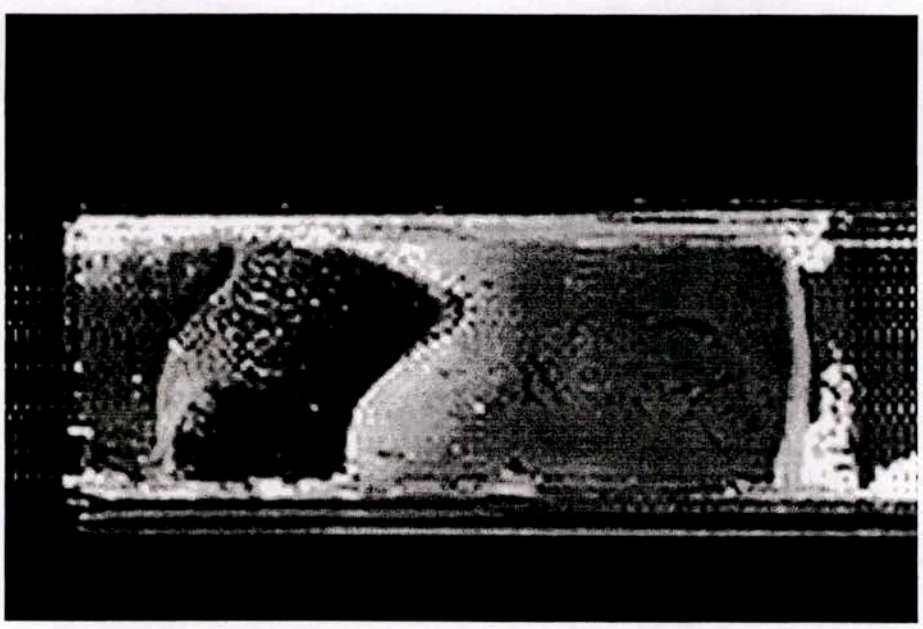


Figure 6.24 : Reconstruction avec 152×102 échantillons (soit 15504 pixels) choisis arbitrairement. Taux d'échantillonnage 1/25.

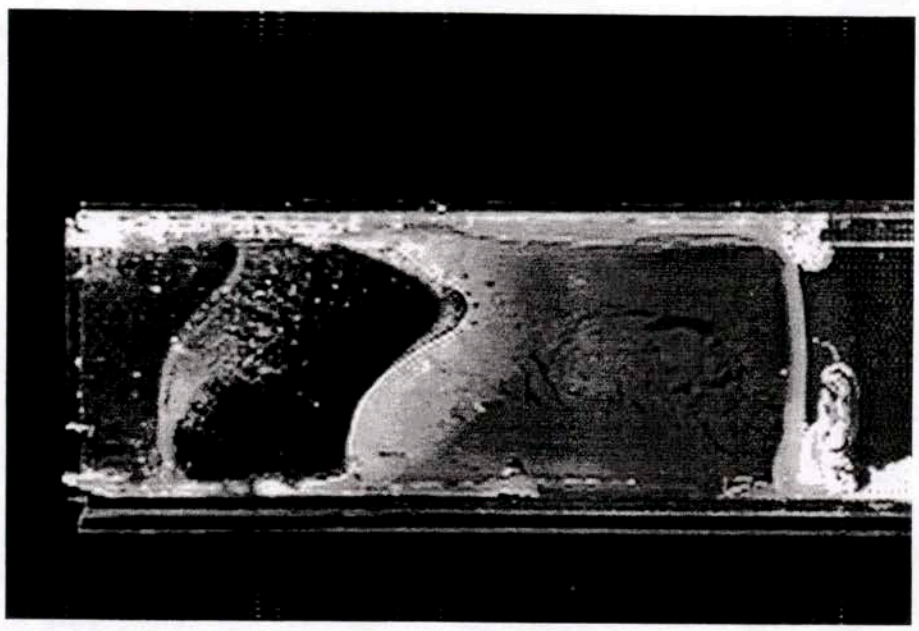


Figure 6.25 : Reconstruction avec 255×169 échantillons (soit 43095 pixels) choisis arbitrairement. Taux d'échantillonnage 1/10.

6.3 Conclusion du chapitre

Ce chapitre permet d'illustrer les techniques présentées dans les deux chapitres précédents. On teste les algorithmes proposés dans des situations faisant intervenir des signaux simulés numériquement mais aussi des signaux expérimentaux.
Les exemples présentés font volontairement références à des contextes variés. Dans chacun d'eux, une étude plus fine du problème à résoudre aurait sans doute pu conduire à un algorithme plus adpaté au particularités du problème mais on a préféré privilégier une démarche visant à montrer que les techniques proposées sont simples d'utilisation et donnent, (à faible coût de programmation et de mise au point), des résultats intéressants.

Plusieures situations abordées font référence au problème des vibrations d'un essieu circulant sur une chaussée. Cette étude fait l'objet de la partie suivante et où elle sera largement approfondie. Notons toutefois deux remarques importantes qui sont à la base de l'organisation de la partie suivante :

- pour les signaux représentatant les vibrations d'essieux, avec seulement quelques modes on peut avoir une approximation correcte des principales composantes du signal. La figure 6.9 (p. 149) montre qu'avec 25

échantillons la reconstruction du signal est très bonne et qu'avec 11 échantillons, elle est satisfaisante au regard du bruit inhérent à chaque mesure (voir page 247).

- Même si nous n'avons pas présenté de résultat traduisant directement ce comportement, on remarque que la précision des reconstructions au sens du critère :

$$E_r = \left| \frac{1}{T} \int_T (F(t) - F_{rec}(t)) dt \right|$$

où $t \mapsto F(t)$ est le signal intial et $t \mapsto F_{rec}(t)$ sa reconstruction est très bonne. Ainsi avec 11 échantillons, les erreurs E_r restent toujours inférieures à 1%.

Partie II

Application au pesage en marche et à l'étude de l'interaction véhicule-chaussée

Chapitre 7

Position du problème

Après avoir mis au point des méthodes et algorithmes d'échantillonnage et approximation, nous nous proposons dans la seconde partie de ce mémoire, d'appliquer les techniques développées précédemment à des problèmes de mécanique des vibrations et d'estimation de paramètres rencontrés en génie civil. Il s'agit dans un premier temps d'appréhender le comportement vibratoire d'un poids lourd circulant à vitesse normale sur une chaussée et ensuite d'estimer le poids statique de chacun de ses essieux à partir de mesures de la force d'impact de ceux-ci.

On commence par présenter les enjeux des travaux liés à la détermination des sollicitations réellement appliquées par les véhicules lourds aux chaussées. On s'attarde aussi sur les problèmatiques inhérentes à l'étude du comportement dynamique du système véhicule-chaussée. Un bref résumé des recherches menées ces dernières années est donné ainsi qu'une présentation des objectifs poursuivis et de la démarche adoptée. L'exposé fait ci-dessous, des enjeux liés à la compréhension de l'interaction véhicule-chaussée, à l'endommagement des chaussées et au pesage en marche est volontairement concis. Il a pour but de présenter l'environnement dans lequel se positionnent les travaux exposés. Pour des informations plus complètes, le lecteur pourra se reporter aux diverses références mentionnées.

7.1 Interaction véhicule-chaussée et pesage en marche

Lorsqu'il est en mouvement, un véhicule est le siège de mouvements vibratoires et si on considère qu'un poids lourd peut être assimilé à un ou plusieurs corps rigides (tracteur + remorque(s) + essieux, cf. figure 7.1), les vibrations du chassis et de ses essieux peuvent être classées en :

- mouvements de pompage (vertical)
- mouvements de tangage (avant-arrière)
- mouvements de roulis (latéral).

Ainsi à l'arrêt sur une surface horizontale, la force appliquée sur la chaussée par un essieu correspond au poids statique de celui-ci, mais lorsque le véhicule se déplace la force appliquée $F_i(t)$ à l'instant t par l'essieu i est augmentée d'une composante dynamique :

$$F_i(t) = P_i^{stat} + f_i^{dyn}(t).$$

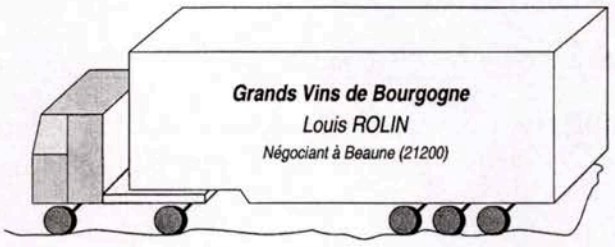


Figure 7.1 : Poids lourd circulant sur une chaussée.

La figure 7.2 ci-dessous montre l'importance de cette composante dynamique, il s'agit de la force d'impact appliquée par le second essieu du tracteur d'un poids lourd à cinq essieux (du même type que celui de la figure 7.1). Cet enregistrement a été réalisé dans des conditions normales de circulation sur la RN10 près de Trappes (78), l'uni de la chaussée est de bonne qualité[1] pour une route nationale française et la vitesse du poids lourd était de 80 km/h.

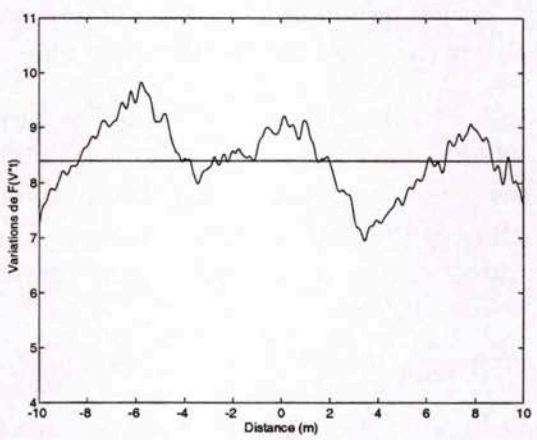


Figure 7.2 : Variations de la force d'impact $F_i(t)$ autour du poids statique.

Remarque : Le signal représenté sur la figure ci-dessus est obtenu grâce à des enregistrements fournis par des accéléromètres placés au niveau des suspensions de chaque demi-essieu. Il ne s'agit donc pas exactement des variations de la force appliquée sur la chaussée puisque le pneumatique joue un rôle de filtre. Nous reviendrons par la suite sur cette disctinction importante qui limite l'utilisation des mesures fournies par des véhicules instrumentés. Nous verrons également que ce signal n'est cependant que peu sensiblement différent de celui de la force d'impact.

[1] Sur une échelle de 1 à 10 et selon le principe de la notation par bande d'onde, on a : petites ondes = 8, moyennes ondes = 7, grandes ondes = 6.

7.1.1 Origines des vibrations

Il est aisé d'envisager d'où proviennent les vibrations du chassis et des essieux.

1. Les variations de l'uni de la chaussée tendent à comprimer les pneumatiques et les suspensions. Elles communiquent ainsi de l'énergie au véhicule.

2. Les effets aérodynamiques (vent latéral, pénétration dans l'air, phénomènes d'aspiration, ...) jouent sur le tangage et le roulis.

3. Les forces de frottement au sein des articulations du véhicule et au contact entre le pneumatique et la chaussée ralentissent la progression du véhicule.

4. Les variations de vitesse du véhicule (accélération et freinage) influencent les mouvements de tangage (et de roulis dans les virages).

5. Dans certains cas, on doit aussi tenir compte de mouvements engendrés par le véhicule lui-même tels les mouvements de son chargement, par exemple une citerne de lait à moitié pleine ou un transport de bétail.

Parmi ces phénomènes, certains ont une contribution plus grande aux variations des forces d'impact. Ainsi, nous retiendrons plus particulièrement les trois premières causes citées ci-dessus. Si l'on étudie le comportement vibratoire d'un poids lourd dans des conditions normales de circulation, ce qui est notre cas, les deux autres causes sont relativement marginales.

7.1.2 Les dommages causés aux chaussées

Des variations de la force $F_i(t)$ telles celles représentées par la figure 7.2 impliquent que la quantité $f_i^{dyn}(t)$ représentant la surcharge dynamique peut prendre des valeurs importantes (30% du poids statique) dans des conditions normales de circulation sur un uni de bonne qualité.
Afin de quantifier ces effets, on définit généralement le coefficient de surcharge dynamique $\overline{s}$ (DLC - Dynamic Load Coefficient, [Ano92], [Ceb93]) comme étant la covariance de la quantité :

$$\frac{F_i(t)}{P_i^{stat}}.$$

Dans le but d'estimer les dommages causés aux chaussées par ces surcharges dynamiques, Eisenman proposa l'introduction d'un coefficient d'agression de la chaussée Φ (road stress factor - [Eis75]). Son approche fait l'hypothèse

que les dommages dépendent de la puissance 4^e de $F_i(t)$. En faisant des hypothèses suffisantes de normalité et de stationnarité sur $F_i(t)$, il vient que :

$$\Phi = E[F_i(t)^4] = (1 + 6\overline{s}^2 + 3\overline{s}^4) \left(P_i^{stat}\right)^4 \tag{7.1}$$

où $E[\alpha]$ représente l'espérance conditionnelle de la quantité α. De nombreuses études expérimentales ont été menées visant à mesurer ce coefficient, citons notamment les travaux de Sweatman ([Swe83], [Swe88]) ainsi que ceux de Mitchell et Gyenes ([Mit88]). Sous cette forme ou sous une forme un peu différente, ce coefficient d'agression permet d'estimer la durée de vie d'une chaussée ([Ber90]).
Le principe de la puissance 4^e a fait et fait encore l'objet de nombreuses critiques. Ainsi Magnusson et al. ([Mag84]), Kinder et al. ([Kin88]) et Cebon ([Ceb93]) ont montré que les caractéristiques telles taille et sculpture des pneumatiques, conditions de trafic, climat, structure de la chaussée utilisées par Eisenman dans ses travaux et conformes à la classification AASHO n'étaient pas forcément représentatives et que cette loi devait donc être adaptée aux circonstances et au site étudié. Ainsi selon Cebon, l'exposant 4 de $F_i(t)^4$ dans (7.1) peut varier de 2 à 6 suivant la structure de chaussée. Pour une étude précise de l'influence des caractéristiques des véhicules et des chaussées sur la durée de vie de celles-ci, voir [Ceb96a], [Ceb96b], [Ceb97].

Notre objectif n'étant pas l'étude des modèles d'endommagement de chaussées, nous arrêtons ici cette brève présentation pour en tirer la conclusion suivante : les surcharges dynamiques des essieux de poids lourds sont responsables d'une partie significative des dommages causés aux chaussées par le trafic routier - voir à ce sujet l'étude faite au LCPC par J.F. Corte sur les dégradations des chaussées et leurs origines ([Cor98]).

7.1.3 Des enjeux économiques

Ainsi, afin de lutter contre des dégradations trop importantes des assises ainsi que des couches de roulement de chaussées - tels les phénomènes d'orniérage, affaissement, fissuration, faiençage, tôle ondulée, tête de chat, glaçage ressuage, pelade, bourrelet - des limitations du poids total et du poids par essieu des véhicules ont été mises en place. Mais cette législation n'a pas pour seul objectif la préservation des chaussées, elle vise aussi au respect de règles de sécurité. En effet, la crise que traverse actuellement le secteur du transport routier a érodé les bénéfices des entreprises et les pousse à chercher des gains de productivité afin d'augmenter leurs marges. Cette concurrence donne naissance à trois types d'infractions :

- le temps de travail
- la vitesse
- le chargement des véhicules.

En plus des problèmes de sécurité routière qu'engendrent ces trois points, le non respect de la règlementation est à l'origine, au niveau économique, d'une distorsion de la concurrence. Celle-ci se manifeste tant entre les diverses entreprises de transports routiers qu'entre les différents modes de transport qui à cause de cette concurrence déloyale, ne luttent pas à armes égales (voir [Mar95]).
Ajoutons à cela qu'une bonne connaissance des surcharges dynamiques réellement supportées par les chaussées permettrait un meilleur dimensionnement de celles-ci. De plus, des données statistiques précises sur les flux de marchandises permettraient aux constructeurs et gestionnaires d'infrastructures routières de prévoir les évolutions du trafic et d'adapter l'offre de trafic en conséquence.

Ces arguments montrent les besoins importants tant au niveau scientifique qu'économique en matière de connaissances des charges de trafic réellement supportées par les chaussées.

7.1.4 La législation actuelle

En matière de chargement des véhicules, la législation actuelle poursuit deux objectifs qui reprennent les idées présentées dans les deux paragraphes ci-dessus 7.1.2 et 7.1.3. Concernant les charges limites, la législation dans les pays européens impose aux véhicules :

- un poids total maximum
- un poids maximum par type d' essieu (moteur - porteur)
- un poids maximum par groupe d'essieu
- des espacements entre essieux.

Ces dispositions ne sont pas uniformisées au niveau enropéen, le tableau 7.1 ci-dessous illustre ces disparités.

Tableau 7.1: Charges limites à l'essieu autorisées dans différents pays européens - Θ essieux moteurs et O essieux porteurs.

Type d'essieu	France (tonnes)	Belgique (tonnes)	Suisse (tonnes)	Pays-Bas (tonnes)	U.E. (autres) (tonnes)
Θ	13	12	11	11.5	11.5
O	13	10	10	10	10
Θ Θ	14 à 27*	12 à 24*	11 à 20*	11.5 à 20*	-
O O	21 à 26	10 à 20	11 à 20	11 à 20	11 à 20
O O O	21 à 24	10 à 30	21 à 24	24 à 30	21 à 24

* selon la distance entre essieux

Ces règlements ont généralement pour référence le poids statique des essieux considérés. Notons pourtant des tentatives visant à y inclure des considérations dynamiques telles le type de suspension (mécanique ou air), l'espacement entre essieux ou le type d'essieux (moteur ou porteur), le principal obstacle à cette évolution nécessaire étant la relative méconnaissance du comportement dynamique des véhicules.

7.1.5 Son application

Nous venons de voir que l'application de la règlementation en vigueur passe par un contrôle des poids statiques des essieux de poids lourds. Ces poids peuvent être controlés à l'aide de balances de pesée statique installées à proximité d'axes de circulation (aires de repos) et qui fournissent, avec une précision suffisante pour permettre la verbalisation, les valeurs du poids statique des essieux du vehicule contrôlé.

Pourtant la mise en place de ces dispositifs est très lourde et nécessite le choix d'un site répondant à des caractéristiques précises : taille, emplacement. Leurs fonctionnements sont aussi coûteux en termes de personnels puisqu'ils nécessitent la présence de personnes habilitées à arrêter les poids lourds, à procéder aux pesées et à verbaliser.
On comprend alors que de telles contraintes limitent le nombre des contrôles, leurs portées et donc leurs efficacités. On estime ainsi qu'en France, un véhicule fait l'objet d'un contrôle avec vérification de son poids total et par essieu en moyenne une fois tous les quatre ans ([Mar95]).

Ces constatations rendent nécessaire la mise au point de systèmes dissuasifs permettant de mettre en œuvre efficacement les dispositions légales. Et puisqu'il existe deux grands types d'infrastructures routières, on peut a priori envisager le développement de tels systèmes sur chaussées ou sur ponts, dans chacun des cas la problèmatique scientifique étant différente.

Le pesage en marche sur chaussée par système multicapteur

Afin de répondre aux exigences formulées ci-dessus, on cherche à mettre au point une technique donnant une estimation du poids statique recherché sans avoir recours à une balance de pesée statique et sans avoir à immobiliser le véhicule. Si le véhicule reste en mouvement, la quantité mesurable pour le i^{e} essieu est $F_i(t)$ et non plus P_i^{stat}. La question est donc de développer une méthode capable à partir d'informations issues de $F_i(t)$ de retrouver P_i^{stat}.

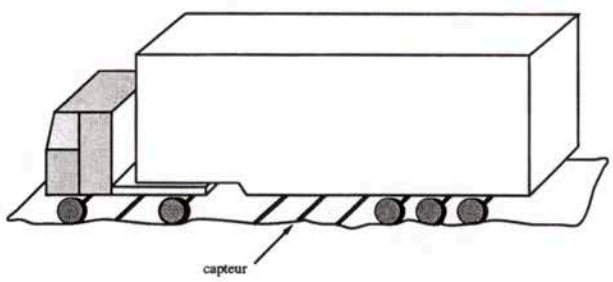


Figure 7.3 : Poids lourd circulant sur une grille de capteurs.

Pratiquement, la problèmatique est la suivante. Un poids lourd circule sur une portion de chaussée dans laquelle sont insérés des capteurs (voir figure 7.3). Chaque capteur mesure au passage de l'essieu i à l'instant t_j, la quantité $F_i(t_j)$. Si la portion instrumentée possède r capteurs, on dispose après le passage d'un véhicule à p essieux, des mesures $\{F_i(t_j)\}_{j=1}^{r}$ pour chacun des essieux $i = 1, \ldots, p$ (voir figure 7.4). Il s'agit alors d'estimer $\{P_i^{stat}\}_{i=1}^{p}$ à partir de $\{\{F_i(t_j)\}_{j=1}^{r}\}_{i=1}^{p}$.

Le pesage à basse vitesse est une solution intermédiaire entre le pesage statique et le pesage en marche décrit ci-dessus. Il consiste à faire circuler les véhicules que l'on souhaite contrôler à une vitesse faible (10 - 15 km/h) sur une bande de roulement mesurant les forces d'impacts $\{F_i(t)\}_{i=1}^{p}$. Dans ces conditions, les effets dynamiques sont éliminés et l'on a : $F_i(t) \approx P_i^{stat}$. Pour une présentation complète de ces systèmes et des résultats qu'ils fournissent voir [Jac96], [Jac97].

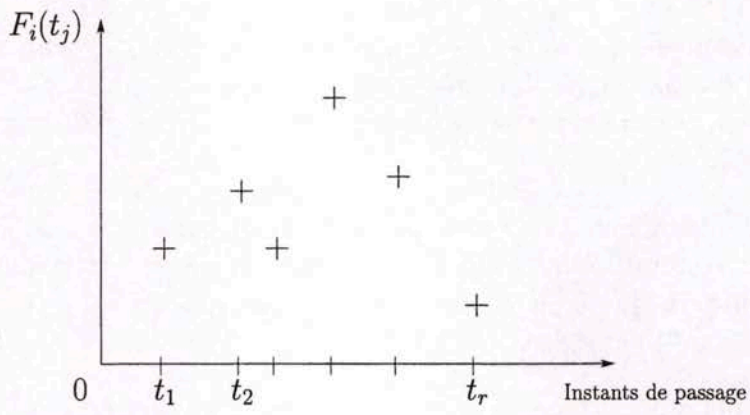


Figure 7.4 : Mesures de la force d'impact de l'essieu i enregistrées par les r capteurs.

Le pesage en marche par pont instrumenté

Une autre façon d'aborder le problème est d'utiliser la réponse d'un pont au passage d'un poids lourds pour remonter aux poids de ses essieux. Il s'agit dans ce cas d'instrumenter la structure (accéléromètres, jauges de déformation) afin d'obtenir les déformations ou les efforts mesurés en un ou plusieurs points de l'ouvrage lors du passage de la charge (voir figure 7.5).

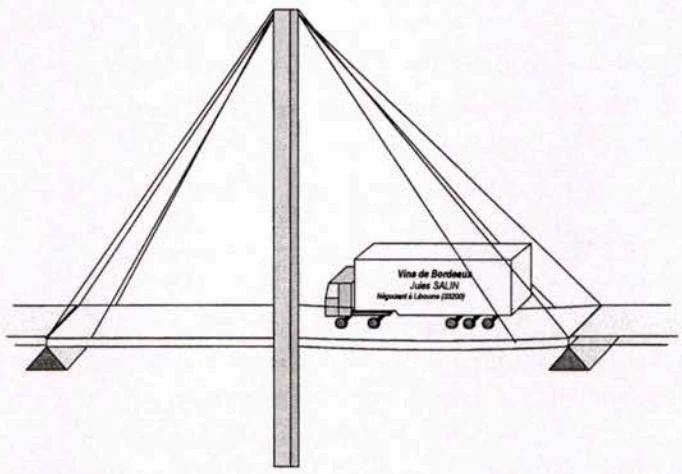


Figure 7.5 : Poids lourd circulant sur un pont instrumenté.

Nous n'aborderons pas directement les problèmes liés au pesage par pont instrumenté mais signalons tout de même ces principales différences vis à vis du système multicapteur.

1. Les mesures fournies par l'instrumentation de l'ouvrage sont nombreuses, quasi continues (à une fréquence d'acquisition près) par rapport à l'unique mesure enregistrée par un capteur inséré dans la chaussée (voir figure 7.6).

2. L'exploitation des mesures nécessite l'utilisation d'un modèle mécanique rendant compte des vibrations couplées de la structure et du véhicule. Il faut tenir compte de la dynamique du véhicule mais aussi de celle de l'ouvrage.

3. Des phénomènes "parasites" tel le vent ou la présence d'autres véhicules doivent être pris en compte.

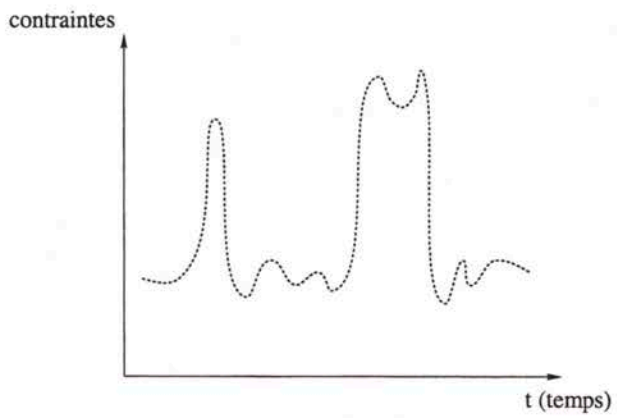


Figure 7.6 : Allure des contraintes enregistrées par une jauge au passage d'un véhicule à trois essieux (1 essieu moteur + 1 tandem).

7.2 Objectifs

La courte présentation ci-dessus fait apparaître deux préoccupations importantes pour les constructeurs et gestionnaires d'infrastructures routières. Il s'agit tout d'abord du développement de systèmes dissuasifs et répressifs efficaces (fiables, précis, simples d'utilisation) permettant l'application effective de la législation en matière de chargement limite des véhicules. Il paraît aussi important de faire évoluer les dispositions légales afin de mieux prendre en compte et de limiter les effets des surcharges dynamiques. Ceci passe par une meilleure connaissance de l'interaction véhicule-chaussée et de l'influence des caractéristiques mécaniques des poids lourds et de la chaussée sur leurs comportements vibratoires.

7.2.1 Analyse des effets dynamiques

La connaissance des sollicitations effectivement supportées par les chaussées au passage d'un poids lourd c'est-à-dire des variations des forces d'impact de ses essieux est à la fois importante et délicate.
Elle est importante puisqu'elle permet d'appréhender les origines des dégradations causées aux chaussées par le trafic. Elle est aussi très délicate puisque cela nécessiterait ou bien la mise en place sur une longueur significative (quelques dizaines de mètres) d'un grand nombre de capteurs et cela sans modifier les vibrations du véhicule ou bien cela obligerait à posséder un grand nombre de véhicules instrumentés, de toutes configurations, qui sont très couteux à mettre au point.

Dans un premier temps (chapitre 8), on va chercher à développer une technique permettant d'appréhender les variations de la force d'impact F_i appliquée par l'essieu d'un poids lourd sur une portion de chaussée à partir de la connaissance de quelques valeurs ponctuelles $\{F_i(t_j)\}_{j=1}^r$, de l'uni et de certaines caractéristiques du véhicule considéré (vitesse, nombre et espacement des essieux).
La méthode proposée consiste en la reconstruction du signal $t \mapsto F_i(t)$ à partir des mesures discrètes $\{F_i(t_j)\}_{j=1}^r$ ainsi que d'une famille de fonctions associée à une modélisation simplifiée du véhicule considéré. Les algorithmes mis au point sont validés grâce à des signaux enregistrés expérimentalement.

7.2.2 Estimation du poids statique des essieux

Le second point abordé est l'estimation du poids statique des essieux à partir des mesures $\{F_i(t_j)\}_{j=1}^r$. En première approximation, il paraît naturel de dire que le poids statique d'un essieu est égal à la moyenne temporelle de la force $F_i(t)$. Ce qui s'écrit :

$$P_i^{stat} \approx \frac{1}{T} \int_T F_i(t) dt \tag{7.2}$$

où la période T est prise suffisamment grande. En s'appuyant sur les techniques de traitement de signal évoquées ci-dessus qui permettent de reconstruire les variations de $F_i(t)$, on a donc déjà une première procédure d'estimation du poids statique.
Grâce à l'étude de certains phénomènes mécaniques et aérodynamiques ainsi que des transferts de charges permanents entre essieux, on va aussi chercher à améliorer l'estimation fournie par (7.2).

Après avoir établi certains résultats quant à la dynamique des véhicules et mis au point des algorithmes d'estimation, des validations à l'aide de mesures expérimentales sont proposées. Volontairement, cette étape de validation n'a pas été approfondie et on a simplement cherché à montrer que les résultats et méthodes obtenus correspondent effectivement à la réalité de l'interaction entre le poids lourd et la chaussée.
Comme on le verra par la suite (voir page 247), des problèmes de métrologie et de calibration liés principalement aux capteurs insérés dans la chaussée ainsi qu'aux instrumentations de certains véhicules tests ne permettent pas d'obtenir avec une précision suffisante, les données expérimentales nécessaires à une validation complète. Il nous a donc paru peu rigoureux de présenter un grand nombre de résultats dont l'analyse est subordonnée à la précision incertaine des données expérimentales. Et on a préféré se contenter de quelques validations montrant que les arguments sont pertinents même si l'on ne peut pas conclure complètement quant à la qualité des algorithmes présentés.

7.3 État de l'art

7.3.1 Interaction dynamique

Le comportement dynamique d'un véhicule routier peut être appréhendé sous plusieurs angles différents principalement celui du confort des passagers et celui des vibrations du chassis et des essieux. Les problèmes de confort et de sécurité ont été largement investigués ces dernières années notamment au LCPC ([Par95], [Del96]) mais aussi chez les constructeurs automobiles et des innovations importantes ont été apportées. Mais conformément aux objectifs annoncés, nous limitons notre étude aux travaux réalisés dans le domaine des vibrations des essieux et du chassis d'un véhicule lourd.

Il est important de noter que dans ce domaine et jusqu'à ces dernières années, les recherches étaient menées principalement par des organismes publics (au sens large), les industriels n'étant pas directement préoccupés par les questions de préservation des infrastructures routières. Actuellement deux pistes principales sont explorées, l'amélioration de la résistance des chaussées vis à vis des déformations permanentes ([Woo92], [Lin96], voir également les travaux réalisés sur le manège de fatigue du LCPC, [Cor96]) et la limitation des surcharges dynamiques supportées par les chaussées ([And92]).
Sur ce dernier point et en liaison avec la remarque faite au paragraphe 7.1.4 sur l'introduction de considérations mécaniques dans la législation en matière de charge limite à l'essieu ([Ber90]), on peut citer les expérimentations vi-

sant à caractériser les différents types de dommages causés aux chaussées par les pneumatiques simples ou doubles ou bien par les suspensions mécaniques et les suspensions à air ([Gye92b]) ou encore les études sur la répétabilité spatiale des forces d'impact ([Gye92a]). Plus généralement en matière de dynamique d'un véhicule lourd, mentionnons les recherches menées dans le cadre du projet DIVINE (Dynamic INteraction between Vehicle and Infrastructure Experiment) financé par l'OCDE. Dans ce projet plusieurs points ont été abordés, outre les études sur les suspensions pneumatiques et mécaniques qui ont montré qu'à long terme ces dernières étaient plus agressives pour la chaussée, les problèmes liés à la modélisation des forces d'impact ont été investigués. Ce projet a également permis l'installation d'une grille de capteurs sur la RN10 à Trappes (78), voir [Sif95]. Concernant la modélisation des forces d'impact, les études ont montré que les performances des logiciels existants étaient peu satisfaisantes, voir le rapport final du projet DIVINE (à paraître).

7.3.2 Pesage en marche

Le développement des recherches en matière de pesage en marche dépend fortement, dans les pays concernés, des législations et de la volonté politique des états de faire respecter les dispositions légales. Ainsi depuis quinze ans, des recherches sur le pesage en marche ont été engagées en Europe, Amérique du nord et Australie.

Concernant le pesage par ponts instrumentés, citons les travaux de Moses ([Mos83]) dans les années 80 sur les ponts poutres visant à approximer la réponse de la structure au passage d'un véhicule grâce aux lignes d'influence et à en déduire une estimation du poids statique. Ces travaux ont été poursuivis récemment par O'Brien et Dempsey ([Gon98], [Dem95]) ainsi que Baumgärtner en Allemagne et Znidaric en Slovénie ([Zni98]).
Au delà de la mise au point délicate des algorithmes d'estimation, la principale difficulté que rencontrent les systèmes de pesage sur pont, réside dans le couplage des dynamiques provenant du véhicule et de la structure. Leur portabilité est donc faible puisque à chaque type de pont correspond un comportement dynamique et donc un modèle différent. Pour ces raisons, le pesage en marche par ponts instrumentés semble techniquement très complexe et les objectifs de précision requis pour pouvoir envisager la verbalisation des véhicules en surcharges pondérales sont à ce jour inaccessibles.

Les préoccupations associées au pesage en marche sur chaussées sont également apparues il y a quinze ans. Les premiers systèmes opérationnels ont

été mis en place dans plusieurs états des États-Unis ([Bla92]) avec pour objectif principal la connaissance des flux de trafic. Des dispositifs équivalents (SIREDO, voir [Ram98]) ont été développés en France pour le recueil d'informations et de données de trafic.
Au sein, des pays européens, il existe depuis quelques années une nécessité et une volonté de coopération en matière de politique du transport et d'harmonisation des dispositions légales. Cette coopération au niveau européen s'est concrétisée d'une part avec les activités du groupe COST323 sur le pesage dynamique et d'autre part avec le projet WAVE (Weighing in motion of Axles and Vehicles for Europe).

Ce projet traite d'un grand nombre de problèmes engendrés par le pesage dynamique des véhicules : aspects métrologiques, techniques d'estimation, constitution de base de données de trafic, spécifications et recommandations pour les systèmes de pesage en marche.
Ce projet n'étant pas terminé, nous ne pouvons pas encore tirer les conclusions des travaux effectués, deux remarques peuvent toutefois être formulées. Tout d'abord au niveau scientifique, les importants problèmes rencontrés en matière d'instrumentation des chaussées et des ouvrages d'art sont le principal frein à l'avancement des recherches. Nous reviendrons sur ce point plus longuement au paragraphe 9.3.1 (page 247).
À noter aussi que ces difficultés techniques ont ouvert le débat sur la faisabilité du pesage en marche par ponts instrumentés ou bien par systèmes multicapteurs. Si la nécessité de mieux appréhender et de limiter les surcharges dynamiques supportées par une chaussée fait l'unanimité, la volonté de bâtir des dispositifs (ponts instrumentés ou multicapteurs) ayant pour objet la répression des surcharges n'est pas présente dans la dizaine de pays participant au projet WAVE. Ainsi pour le contrôle des charges limites à l'essieu, des solutions telles l'implantation directement sur la suspension des essieux, de systèmes simples (par exemple jauges de déformation) et pouvant communiquer l'information relative au chargement avec des bornes (de type transpondeurs) implantées sur la chaussée paraît envisageable.

Chapitre 8

Reconstruction des variations de la force d'impact d'un essieu

Nous avons vu au paragraphe 7.3 qu'il existait une littérature traitant de la modélisation et du comportement vibratoire d'un poids lourd, mais signalons que les références concernant la simulation de forces d'impact sont peu nombreuses. Conformément aux objectifs de cette étude, nous allons chercher à développer des modèles de véhicules à la fois simples et représentatifs des mouvements de vibrations rencontrés dans les essieux de poids lourds.

8.1 Hypothèses

Dans la modélisation envisagée, de très nombreux facteurs et paramètres peuvent intervenir, on fait ici les hypothèses suivantes :

- la chaussée est non déformable. On s'appuie sur des conclusions obtenues par Pintado lors de travaux sur les déformations permanentes des chaussées et leur endommagement, pour affirmer que l'hypothèse d'un modèle de chaussée non déformable ne modifie pas significativement les simulations des forces d'impact des essieux (à paraître).

- On prend en compte de l'uni de la chaussée ainsi que certains effets aérodynamiques.

- On considère que les essieux sont isolés. Par exemple, un tandem est modélisé comme deux essieux isolés.

- Dans des conditions normales de circulation (vitesse, revêtement de la chaussée, ...), les essieux sont toujours en contact avec le sol. On ne tient donc pas compte de la condition de contact unilatéral entre chaque essieu et la chaussée.

Nous avons déjà signalé que nous n'avions pas pour objectif une modélisation sophistiquée de divers types de véhicules lourds mais uniquement l'élaboration de modèles représentatifs des variations des forces d'impact des essieux.

8.2 Étude de quelques modèles

Conformément aux objectifs et à la démarche annoncés, les modèles étudiés sont bi-dimensionnels, simples et ne possèdent pas plus de quelques degrés de liberté. On étudie tout d'abord deux modèles d'essieux avant de s'intéresser à des modèles de véhicules. Dans chaque cas, on calcule les variations de la force d'impact des essieux, obtenues par la résolution des équations du

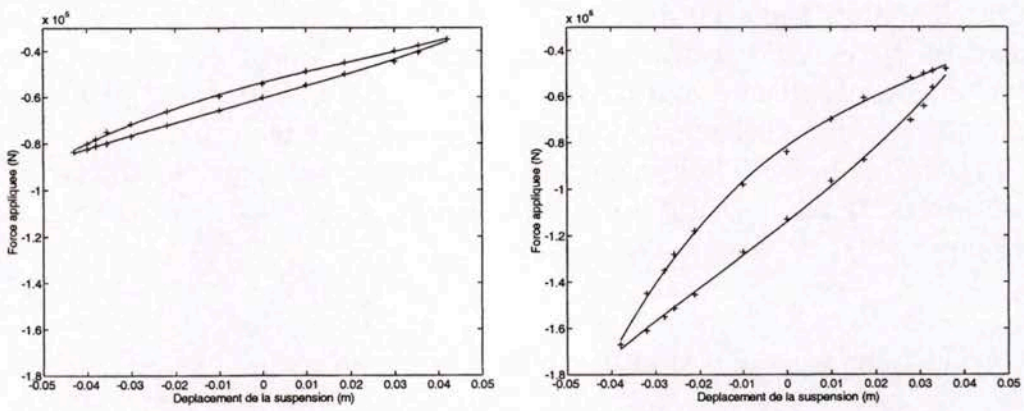
modèle non-linéaire puis on les compare avec celles obtenues grâce à différentes linéarisations des équations. Les résolutions numériques sont effectuées par une méthode d'intégration de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 4-5 ([Sha75], [Hai91]) disponible sur le logiciel Matlab.

8.2.1 Modèles d'essieux

On présente les résultats obtenus pour deux types d'essieux à un ou deux degrés de liberté, linéaires ou non linéaires. Les caractéristiques mécaniques des essieux considérés correspondent à des valeurs expérimentales mesurées par le TRRL (Laboratoire de recherche sur les routes et transports - Royaume-Uni) pour un véhicule lourd dont les caractéristiques mécaniques sont détaillées ci-dessous.

Suspensions à hystérésis

Le véhicule considéré est un poids lourd à deux essieux. Les caractéristiques des suspensions des essieux sont données par les graphes ci-dessous (figure 8.1).



(a) *(b)*

Figure 8.1 : Caractéristiques des suspensions à hystérésis, (a) essieu avant et (b) essieu arrière - les déplacements sont comptés à partir de l'équilibre statique.

Les courbes ci-dessus font apparaître des cycles d'hystérésis. Bouc a montré ([Bou68], [Bou71]) que pour un oscillateur de la forme :

$$\ddot{y} + K(y,t) = p(t)$$

où p est une excitation éventuellement stochastique, la quantité $Z(y,t)$ telle que :

$$K(y,t) = \int_{t_0}^{t} A\, e^{-\alpha \int_s^t |\frac{dy}{dv}| dv} ds \tag{8.1}$$

représente correctement la forme des cycles d'hystérésis.

Suivant le système mécanique modélisé, diverses approximations de l'expression (8.1) peuvent être envisagées. Ainsi, pour les modèles développés ci-après, la programmation numérique des hystérésis a été réalisée en suivant la méthode de Fancher et al. ([Fan80]), celle-ci a été spécialement développée pour les problèmes de modélisation des suspensions de véhicules et plus particulièrement pour les suspensions à ressorts (c'est le cas de notre véhicule test). Mais elle s'applique aussi à d'autres types de suspension. Cette méthode revient à considérer que la force $K(u,t_i)$ exercée par la suspension compressée de $u(t_i)$ à l'instant t_i est telle que :

$$K(u,t_i) = F_{env,i} + (K(u,t_{i-1}) - F_{env,i})\, e^{\frac{-|\delta_i - \delta_{i-1}|}{\beta}}$$

où δ_i est la déflection de la suspension à l'instant t_i. $F_{env,i}$ représente la force correspondant à une déflection δ_i lorsque l'on se situe sur l'enveloppe. Si $\delta_i - \delta_{i-1} > 0$, on considère l'enveloppe supérieure et si $\delta_i - \delta_{i-1} < 0$, on considère l'enveloppe inférieure. Dans le cas où $\delta_i = \delta_{i-1}$, on conserve l'enveloppe utilisée à l'instant t_{i-1}. β est un paramètre qui décrit la façon dont les cycles d'hystérésis approchent l'enveloppe. Plus β est petit, plus les cycles se rapprochent de la courbe enveloppe, plus β est grand plus on se rapproche d'une suspension à force de rappel constante. Typiquement β est de l'ordre de la déflection maximale de la suspension. Dans les simulations présentées, le paramètre β a été choisi petit pour que l'on soit éloigné des réponses obtenues dans le cas linéaire.

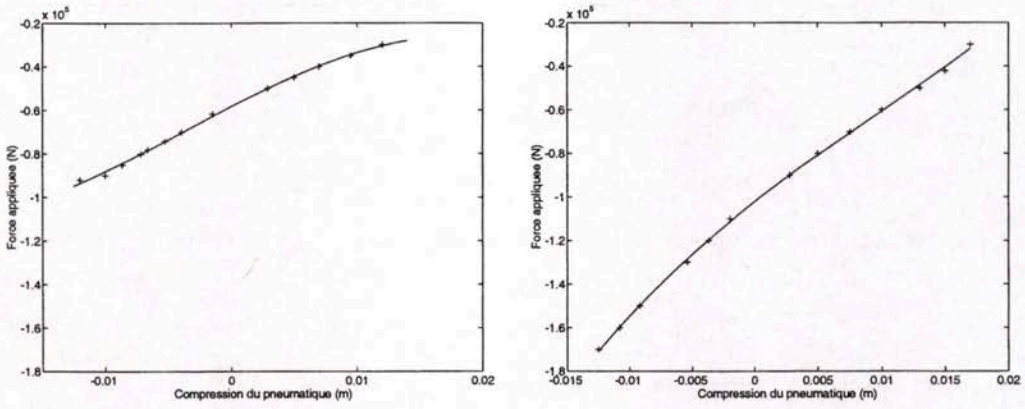
Caractéristiques mécaniques

Pour chaque modèle, on fait l'hypothèse que l'amortissement visqueux des pneumatiques c est constant. Les caractéristiques des pneumatiques des essieux sont données par le graphe ci-dessous (figure 8.2). En plus des pertes dues à la présence de l'hystérésis, on ajoute un amortissement visqueux C dans les suspensions. Ainsi chaque suspension est modélisée par un oscillateur à un degré de liberté de type Wen-Bouc ([Fol97]) i.e. de la forme :

$$\ddot{y} + C\dot{y} + Z(y,t) = p(t).$$

La vitesse du véhicule est supposée quasiment constante sur la portion de chaussée considérée, de la forme $V(t) = V_0 + v(t)$ avec $v(t) \ll V_0$. On prend $V_0 = 20\, ms^{-1}$, $C = 12000\, Nm^{-1}s^{-1}$ et $c = 11000\, Nm^{-1}s^{-1}$. Les caractéristiques (pneumatiques et suspensions) de ce véhicule ont été utilisées pour des

simulations à de nombreuses reprises. Citons particulièrement les travaux du Pr. P. Pintado et de M.A. Castell, université de Séville (à paraître).



(a) *(b)*

Figure 8.2 : Réponse des pneumatiques, (a) essieu avant et (b) essieu arrière - les déplacements sont comptés à partir de l'équilibre statique.

Pour chaque voie, l'uni de la portion de chaussée considérée a été enregistré par le LROP (Laboratoire régional de l'ouest parisien) grâce à un analyseur de profil en long sur la RN10 (Trappes - 78). La figure 8.3 présente le profil droit et le profil gauche de la chaussée.

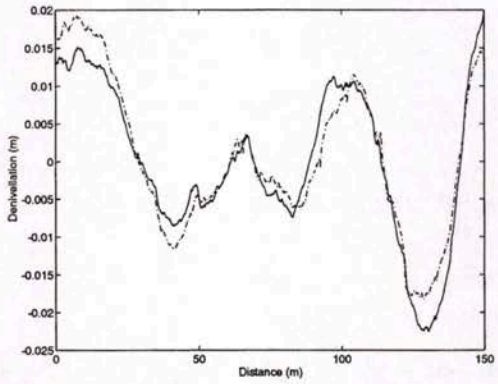


Figure 8.3 : Uni de la chaussée, (–) profil gauche et (-.) profil droit.

Un oscillateur à un degré de liberté

On considère le modèle suivant (figure 8.4) avec une masse $\tilde{M} = 5500\,kg$ et une suspension à hystérésis K dont la caractéristique est donnée par la figure 8.1-(b). La valeur K_e correspond à la raideur de la suspension linéaire équivalente à celle représentée figure 8.1-(b) soit $K_e = 1500000\,Nm^{-1}$.

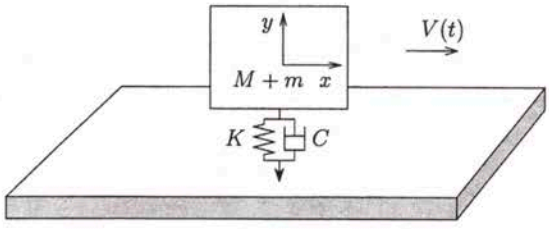


Figure 8.4 : Modèle à un degré de liberté.

Le mouvement de la masse $\tilde{M} = M + m$ est donné par la relation :

$$\tilde{M}\frac{d^2y}{dt^2} + C * \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dr}{dt}\right) + K\left(y(t) - r(t)\right) = -\tilde{M}g, \tag{8.2}$$

M représente la masse du chassis et m celle de l'essieu. La force d'impact est donnée par :

$$F(t) = \tilde{M}\left(g + \frac{d^2y}{dt^2}\right).$$

Si on linéarise l'équation (8.2) en remplaçant l'hystérésis par la raideur équivalente K_e, on peut écrire (8.2) sous forme matricielle :

$$\frac{dY}{dt} + A_{osc_1}Y(t) = B_{osc_1}(t) \tag{8.3}$$

avec :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}, \quad A_{osc_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{K_e}{\tilde{M}} & \frac{C}{\tilde{M}} \end{pmatrix}, \quad B_{osc_1}(t) = -\begin{pmatrix} 0 \\ g + \frac{C}{\tilde{M}}\dot{r} + \frac{K_e}{\tilde{M}}r \end{pmatrix}.$$

La position d'équilibre statique de l'oscillateur est prise pour conditions initiales i.e. $\dot{y}(0) = 0$ et $y(0) = -\tilde{M}g/K_e + r(0)$. Dans ce cas simple, la résolution de (8.3) donne directement :

$$\begin{aligned} y(t) = {} & \frac{e^{\lambda t}}{\sqrt{C^2 - 4\tilde{M}K_e}} \int_0^t \left(\tilde{M}g - K_e r(u) - C\frac{dr}{dt}(u)\right) e^{-\lambda u}du - \\ & \frac{e^{\bar{\lambda} t}}{\sqrt{C^2 - 4\tilde{M}K_e}} \int_0^t \left(\tilde{M}g - K_e r(u) - C\frac{dr}{dt}(u)\right) e^{-\bar{\lambda} u}du + \\ & -y(0)\frac{\bar{\lambda}}{\lambda - \bar{\lambda}}e^{\lambda t} + y(0)\frac{\lambda}{\lambda - \bar{\lambda}}e^{\bar{\lambda} t} \end{aligned}$$

où λ est une racine de l'équation caractéristique $\tilde{M}x^2 + Cx + K_e = 0$ associée à (8.3), ce qui permet de calculer aisément $F(t)$. Pour ce modèle, comme pour les modèles que nous envisagerons par la suite, le calcul de la raideur

équivalente K_e a été réalisé de la façon suivante. On résout numériquement les équations du modèle considéré et on représente la quantité $f \mapsto K(f)$ où $t \mapsto f(t)$ symbolise les variations de la compression de la suspension au cours de la simulation. Elles sont obtenues en interpolant les valeurs $\{t_i, f(t_i)\}_{i \in I}$ provenant de la résolution numérique. À l'aide de ce graphe, on déduit par moindres carrés une droite de la forme $f \mapsto K_e * (f - f_e)$ approchant la courbe $f \mapsto K(f)$. Dans le modèle linéarisé ainsi obtenu, la quantité f_e n'apparaît pas car toutes les déflections sont comptées à partir de l'équilibre statique. La procédure de linéarisation employée ici est relativement simple, pour des oscillateurs non linéaires et particulièrement dans le cas d'excitations stochastiques, on peut envisager des procédures plus sophistiquées et performantes, voir par exemple [Fol97].

Pour le modèle précédent, étant donné les valeurs de la raideur K_e et de la masse $\tilde{M}$, la fréquence propre de l'oscillateur linéaire est de 2.63 Hz. La figure 8.5 ci-dessous présente les résultats des résolutions numériques de (8.2) et (8.3) sur une portion de chaussée de longueur 70 m en fonction de $x = V * t$.

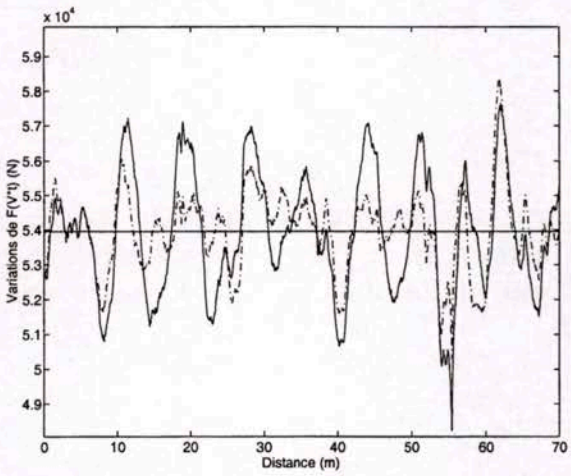


Figure 8.5 : Variations de la force d'impact $F(V*t)$, (-.) suspension à hystérésis et (–) modèle linéaire.

La figure 8.6 ci-dessous présente une comparaison des résultats des simulations menées avec (8.3) pour l'uni du profil droit et gauche de la chaussée. On observe que les deux signaux obtenus ont des variations semblables ce qui est normal puisque les valeurs propres λ_k de la matrice A_{osc_1} qui déterminent le contenu fréquentiel des signaux ne dépendent que des caractéristiques mécaniques du modèle et non de l'uni de la portion de chaussée. Les harmoniques contenus dans chaque signal sont donc identiques mais d'amplitudes différentes.

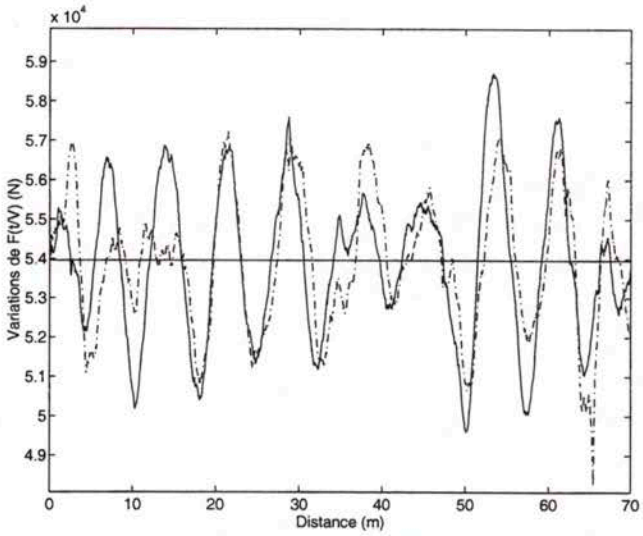


Figure 8.6 : Variations de la force d'impact $F(x/V)$ dans le cas de la suspension linéaire, (-.) profil droit et (–) profil gauche.

Un double oscillateur

On modélise maintenant la suspension d'un essieu par un oscillateur à deux degrés de liberté (figure 8.7). K (resp. k) représente la raideur non linéaire de la suspension (resp. du pneumatique), les linéarisations équivalentes sont notées K_e (resp. k_e).

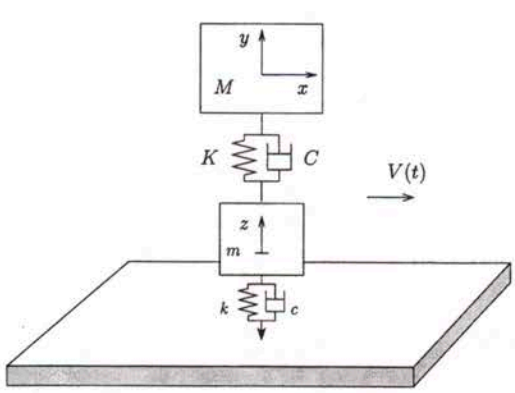


Figure 8.7 : Modèle à deux degrés de liberté.

En considérant les caractéristiques non linéaires, les mouvements des masses M et m sont donnés par les relations :

$$\begin{aligned} m\frac{d^2z}{dt^2} + M\frac{d^2y}{dt^2} + c*\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dr}{dt}\right) + k\left(z(t) - r(t)\right) &= -(M+m)g \\ M\frac{d^2y}{dt^2} + C*\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt}\right) + K\left(y(t) - z(t)\right) &= -Mg, \end{aligned} \tag{8.4}$$

la force d'impact étant donnée par :

$$F(t) = (M+m)g + M\frac{d^2y}{dt^2} + m\frac{d^2z}{dt^2} = -c\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dr}{dt}\right) - k\left(z(t) - r(t)\right).$$

En linéarisant la réponse des deux suspensions, le système (8.4) peut s'écrire matriciellement :

$$\frac{dY}{dt} + A_{osc_2}Y(t) = B_{osc_2}(t) \tag{8.5}$$

avec

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}, \qquad A_{osc_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{K_e}{M} & -\frac{K_e}{M} & \frac{C}{M} & -\frac{C}{M} \\ -\frac{K_e}{m} & \frac{K_e}{m} + \frac{k_e}{m} & -\frac{C}{m} & \frac{C}{m} + \frac{c}{m} \end{pmatrix},$$

$$B_{osc_2}(t) = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \\ -g + \frac{c}{m}\dot{r} + \frac{k_e}{m}r \end{pmatrix}.$$

Le calcul des valeurs propres de A_{osc_2} n'est pas possible de façon générale, il le devient si l'on fait $C = 0$ et $c = 0$, on obtient alors que les quatre valeurs propres sont solutions de :

$$(\lambda^2 - \mu_1)(\lambda^2 - \mu_2) = 0$$

avec :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \tfrac{1}{2Mm}\left(-M(K_e + k_e) - K_e m + \sqrt{M^2(K_e + k_e)^2 + mK_e(2MK_e - 2Mk_e + K_e m)}\right) \\ \mu_2 &= \tfrac{1}{2Mm}\left(-M(K_e + k_e) - K_e m - \sqrt{M^2(K_e + k_e)^2 + mK_e(2MK_e - 2Mk_e + K_e m)}\right). \end{aligned}$$

En prenant les valeurs numériques utilisées pour les simulations, on trouve que les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = j\,14.71, \quad \lambda_3 = \bar{\lambda}_4 = j\,105.27$$

soit des fréquences de respectivement 2.34 Hz et 16.75 Hz. Si on considère maintenant les amortissements C et c, le spectre de A_{osc_2} est constitué de :

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = 0.71 + j\,14.71, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 23.50 + j\,102.56$$

et donc des pseudo-fréquences de $0.11 + j\,2.34$ et $3.74 + j\,16.32$. La figure 8.8 ci-dessous montre les résultats de simulations menées avec le modèle à suspension linéaire K_e, tout d'abord lorsque la réponse du pneumatique est donnée par la caractéristique donnée figure 8.2-(b) et ensuite en utilisant la raideur équivalente k_e du pneumatique. Dans ce cas, le modèle est complètement linéaire et correspond à (8.5). Cette comparaison montre la faible importance sur les variations de la force d'impact de la non linéarité du pneumatique.

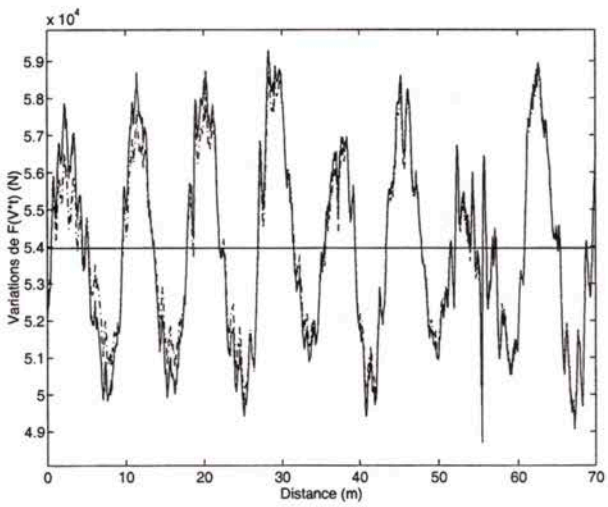


Figure 8.8 : Variations de la force d'impact $F(V * t)$, résolution numérique. (–) avec la caractéristique du pneumatique et (-.) avec la raideur équivalente.

La figure 8.9 ci-dessous montre les résultats des simulations menées avec le modèle non linéaire (8.4) ainsi que le modèle linéaire (8.5). On compare ensuite (figure 8.10) la réponse des modèles à un et deux degrés de liberté lorsque les caractéristiques de leurs suspensions respectives sont non linéaires.

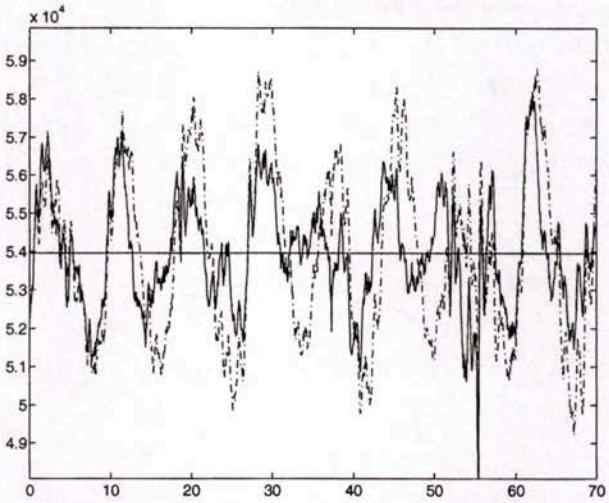


Figure 8.9 : Variations de la force d'impact $F(V * t)$, résolution numérique. (–) suspension à hystérésis et caractéristique non linéaire du pneumatique, (-.) modèle linéarisé.

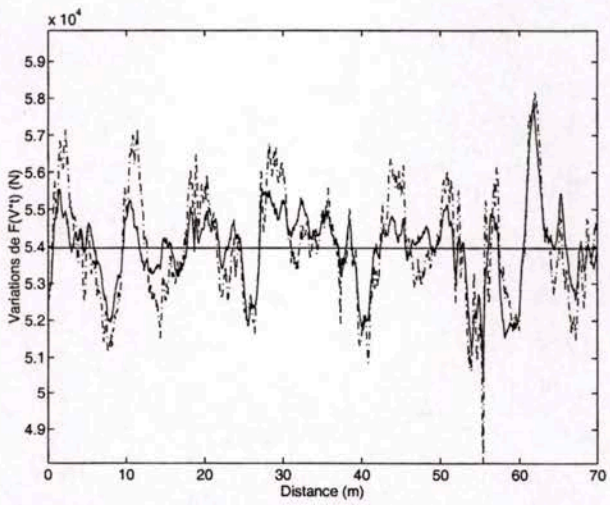


Figure 8.10 : Variations de la force d'impact $F(V * t)$, résolution numérique. (–) modèle non linéaire à un degré de liberté et (-.) modèle non linéaire à deux degrés de liberté.

Il peut paraître a priori étonnant que l'on observe des composantes dynamiques plus importantes pour le modèle à deux degrés de liberté incluant une modélisation du pneumatique que pour le modèle à un degré de liberté n'en possédant pas (figure 8.10). En effet, le pneumatique est sensé atténuer les vibrations au niveau du chassis du véhicule. Mais pour comparer les vibrations ressenties par le chassis du véhicule pour les deux modélisations, il ne faut pas comparer les forces d'impacts données par les deux modèles mais la quantité :

$$-C * \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dr}{dt}\right) - K\left(y(t) - r(t)\right) \tag{8.6}$$

pour l'oscillateur à un degré de liberté (cette quantité correspond à la force d'impact) à la quantité :

$$-C * \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt}\right) - K\left(y(t) - z(t)\right) \tag{8.7}$$

pour l'oscillateur à deux degrés de liberté. Et on remarque que cette seconde expression n'est pas celle de la force d'impact. La figure ci-dessous représente les variations de ces deux quantités au cours des simulations présentées précédemment. Pour le modèle à un degré de liberté, la masse est en fait celle du chassis et de l'essieu ce qui explique le décalage des courbes ci-dessous (figure 8.11).

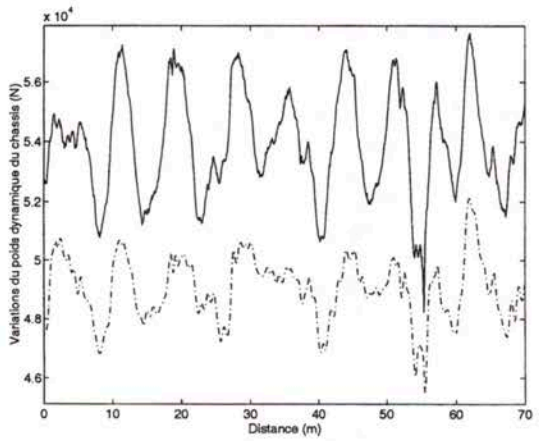


Figure 8.11 : Variations du poids dynamique du chassis, résolution numérique. (–) modèle à un degré de liberté et (-.) modèle à deux degrés de liberté.

En complément de la figure précédente, on étudie le contenu fréquentiel au sens de la transformée de Fourier discrète des deux signaux (8.6) et (8.7), chacun des signaux contenant 1600 points. La figure 8.12 ci-dessous représente

l'énergie contenue dans chacun des harmoniques. Et conformément aux attentes, on remarque que l'énergie contenue dans les principaux harmoniques est sensiblement plus faible pour le modèle incluant la modélisation du pneumatique.

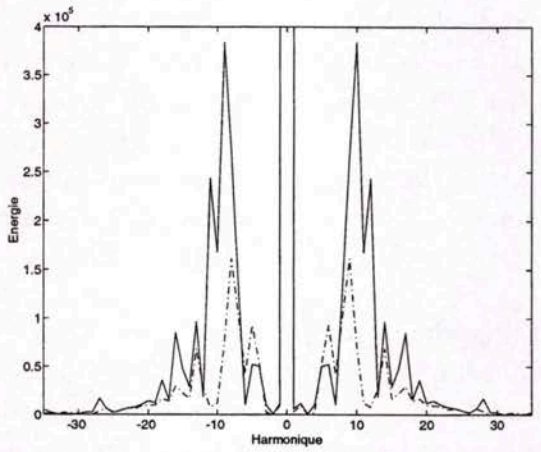


Figure 8.12 : Énergie contenue dans chacun des harmoniques. (–) force d'impact, oscillateur à un degré de liberté et (-.) force d'impact, oscillateur à deux degrés de liberté.

Finalement, on s'intéresse (figure 8.13) aux réponses des modèles linéaires à un et deux degrés de liberté.

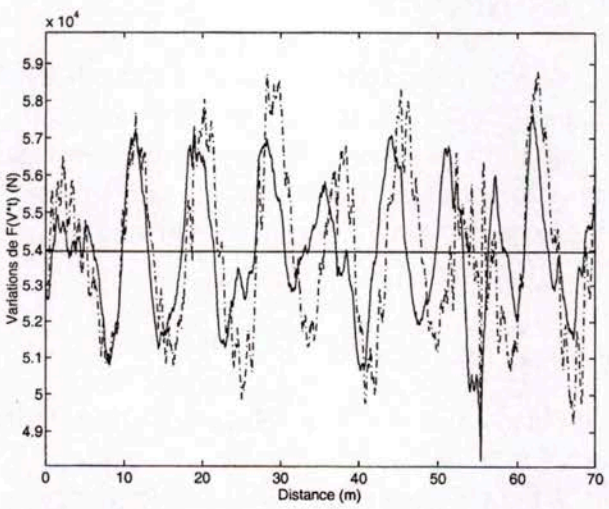


Figure 8.13 : Variations de la force d'impact $F(V * t)$, résolution numérique. Modèles linéarisés (–) à un degré de liberté et (-.) à deux degrés de liberté.

8.2.2 Conclusion

À ce stade, on ne peut pas tirer de conclusion quant à la valeur des modèles présentés et particulièrement à leur adéquation avec les forces d'impact réellement enregistrées. Une telle validation sera effectuée à la fin de ce paragraphe. Il faut aussi ajouter que ces résultats et les comparaisons effectuées ne concernent que les caractéristiques d'un véhicule précis mais celui-ci est représentatif d'une large proportion des véhicules existants et de caractéristiques mécaniques rencontrées. De plus, un grand nombre de simulations non présentées ici ont été menées en faisant varier les paramètres intervenant dans la modélisation. Dans chaque cas, les résultats obtenus sont similaires et amènent les mêmes commentaires. Ainsi, on peut donner aux remarques suivantes une valeur un peu plus générale que celles du cas étudié.

Les simulations précédentes nous incitent à formuler deux commentaires, tout d'abord la faible importance de la prise en compte des non linéarités provenant du pneumatique. On a aussi remarqué que la prise en compte de la non linéarité de la suspension par le biais d'une hystérésis ne modifiait pas sensiblement la forme des variations de la force d'impact même si les amplitudes en étaient réduites.
Ces deux remarques sont complémentaires puisqu'elles indiquent que sous réserve de moduler les amplitudes des variations des forces d'impact, un modèle d'essieu linéarisé reste une bonne approximation du modèle non linéaire correspondant.

8.3 Modèles de véhicules

On cherche maintenant à construire non plus des modèles d'essieu mais des modèles de véhicules. Il s'agit donc de prendre en compte non seulement les mouvements de pompage mais aussi de tangage des véhicules lourds. On conserve les mêmes hypothèses quant aux caractéristiques mécaniques des essieux (hystérésis, amortissement, raideur équivalente) que celles figurant page 183.

8.3.1 Charges constantes

C'est le modèle le plus simple que l'on puisse imaginer (figure 8.14). Chaque essieu est représenté par une force constante se déplaçant sur la chaussée. Dans ce cas il n'y a aucun phénomène dynamique, à chaque instant la force appliquée par l'essieu à la chaussée est égale au poids statique de celui-ci.

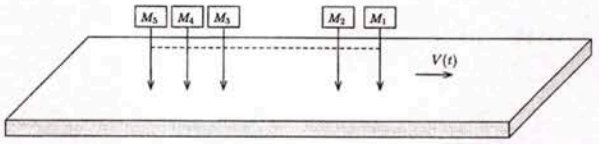


Figure 8.14 : Modèle des charges constantes.

8.3.2 Véhicule à deux degrés de liberté

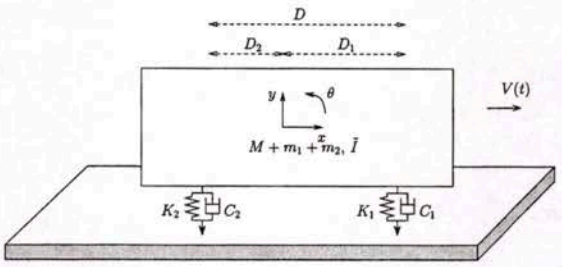


Figure 8.15 : Modèle de véhicule à deux degrés de liberté.

Ce modèle possède deux degrés de liberté. En rotation sous l'hypothèse de petites rotations i.e. $\tan\theta \approx \theta$, le mouvement est régi par :

$$\tilde{I}\frac{d^2\theta}{dt} - D_1\left[K_1\left(y(t) - D_1\theta(t) - r(t)\right) + C_1\left(\frac{dy}{dt} - D_1\frac{d\theta}{dt} - \frac{dr}{dt}\right)\right] +$$
$$D_2\left[K_2\left(y(t) + D_2\theta(t) - r(t - \frac{\tilde{D}_2}{V})\right) + C_2\left(\frac{dy}{dt} + D_2\frac{d\theta}{dt} - \frac{dr}{dt}(t - \frac{\tilde{D}_2}{V})\right)\right] = 0,$$

et le mouvement de translation verticale donné par :

$$\tilde{M}\frac{d^2y}{dt^2} + K_1\left(y(t) - D_1\theta(t) - r(t)\right) + C_1\left(\frac{dy}{dt} - D_1\frac{d\theta}{dt} - \frac{dr}{dt}\right) +$$
$$K_2\left(y(t) + D_2\theta(t) - r(t - \frac{\tilde{D}_2}{V})\right) + C_2\left(\frac{dy}{dt} + D_2\frac{d\theta}{dt} - \frac{dr}{dt}(t - \frac{\tilde{D}_2}{V})\right) = -\tilde{M}g$$

où $\tilde{M} = M + m_1 + m_2$ représente la masse du chassis et de ses deux essieux. La force d'impact F_i appliquée par l'essieu i à la chaussée est donnée par :

$$F_i(t) = K_i\left(y(t) + \epsilon_i D_i\theta(t) - r(t - \frac{\tilde{D}_i}{V})\right) + C_i\left(\frac{dy}{dt} + \epsilon_i D_i\frac{d\theta}{dt} - \frac{dr}{dt}(t - \frac{\tilde{D}_i}{V})\right)$$

avec $\tilde{D}_1 = 0$, $\tilde{D}_2 = D_1 + D_2$, $\epsilon_1 = -1$ et $\epsilon_2 = 1$. Si l'on cherche à linéariser les caractéristiques des suspensions et des pneumatiques, le système différentiel régissant les mouvements du véhicule s'écrit matriciellement :

$$\frac{dY}{dt} + A_{veh_2}Y(t) = B_{veh_2}(t) \tag{8.8}$$

avec $Y(t) = (y, \theta, \dot{y}, \dot{\theta})^T$ et :

$$A_{veh_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{K_{e1}+K_{e2}}{\tilde{M}} & \frac{K_{e2}D_2-K_{e1}D_1}{\tilde{M}} & \frac{C_1+C_2}{\tilde{M}} & \frac{C_2D_2-C_1D_1}{\tilde{M}} \\ \frac{D_1K_{e1}-D_2K_{e2}}{\tilde{I}} & \frac{K_{e1}D_1^2+K_{e2}D_2^2}{\tilde{I}} & \frac{D_1C_1-D_2C_2}{\tilde{I}} & \frac{C_1D_1^2+C_2D_2^2}{\tilde{I}} \end{pmatrix},$$

$$B_{veh_2}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g + \frac{K_{e1}}{\tilde{M}} r(t) + \frac{K_{e2}}{\tilde{M}} r(t - \frac{\tilde{D}_2}{V}) + \frac{C_1}{\tilde{M}} \dot{r}(t) + \frac{C_2}{\tilde{M}} \dot{r}(t + \frac{\tilde{D}_2}{V}) \\ -\frac{D_1K_{e1}}{\tilde{I}} r(t) + \frac{D_2K_{e2}}{\tilde{I}} r(t - \frac{\tilde{D}_2}{V}) - \frac{D_1C_1}{\tilde{I}} r(t) + \frac{D_2C_2}{\tilde{I}} r(t + \frac{\tilde{D}_2}{V}) \end{pmatrix}.$$

Lorsque l'on fait $C_1 = C_2 = 0$, les valeurs propres de A_{veh_2} sont solutions de l'équation bi-carrée :

$$\tilde{M}\tilde{I}x^4 + \left(\tilde{M}(K_{e1}D_1 + K_{e2}D_2) + \tilde{I}(K_{e1} + K_{e2})\right) x^2 + K_{e1}K_{e2}(D_1 - D_2)^2 + 2K_{e1}^2D_1^2 + 2K_{e2}^2D_2^2 = 0,$$

ce qui donne deux fréquences propres de respectivement 2.67 Hz et 4.31 Hz. En tenant compte des amortissements C_1 et C_2, les deux pseudo-fréquences propres sont $-0.21 + j\,2.66$ et $-0.54 + j\,4.27$. La figure 8.16 ci-dessous présente les résultats des simulations menées pour le modèle représenté figure 8.3.2 dans le cas non linéaire et linéarisé.

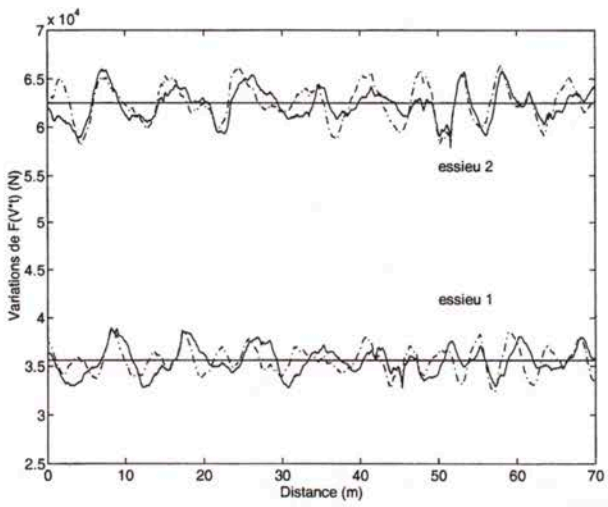


Figure 8.16 : Variations de la force d'impact $F(V * t)$, résolution numérique. Véhicule à deux essieux, (–) suspensions à hystérésis et (-.) suspensions viscoélastiques équivalentes.

On cherche maintenant à prendre en compte l'influence des pneumatiques. Chaque essieu est donc constitué de deux suspensions. On a alors le modèle représenté figure 8.17.

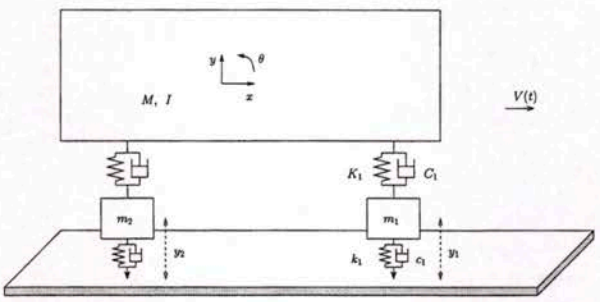


Figure 8.17 : Modèle de véhicule à quatre degrés de liberté.

Les équations du mouvement deviennent :

$$I\frac{d^2\theta}{dt} - D_1\left[K_1\left(y(t) - D_1\theta(t) - y_1(t)\right) + C_1\left(\frac{dy}{dt} - D_1\frac{d\theta}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)\right] +$$
$$D_2\left[K_2\left(y(t) + D_2\theta(t) - y_2(t)\right) + C_2\left(\frac{dy}{dt} + D_2\frac{d\theta}{dt} - \frac{dy_2}{dt}\right)\right] = 0$$

et

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + K_1\left(y(t) - D_1\theta(t) - y_1(t)\right) + C_1\left(\frac{dy}{dt} - D_1\frac{d\theta}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right) +$$
$$K_2\left(y(t) + D_2\theta(t) - y_2(t)\right) + C_2\left(\frac{dy}{dt} + D_2\frac{d\theta}{dt} - \frac{dy_2}{dt}\right) = -Mg.$$

Pour chacun des essieux, le mouvement de translation verticale est régi par :

$$m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} + c_i\left(\frac{dy_i}{dt} - \frac{dr}{dt}(t - \frac{\tilde{D}_i}{V})\right) + k_i\left(y_i(t) - r(t - \frac{\tilde{D}_i}{V})\right)$$
$$-C_i\left(\frac{dy}{dt} + \epsilon_i D_i\frac{d\theta}{dt} - \frac{dy_i}{dt}\right) - K_i\left(y(t) + \epsilon_i D_i\theta(t) - y_i(t)\right) = -m_i g.$$

On peut condenser ces équations sous la forme :

$$\frac{dY}{dt} + A(Y,t) = B(t) \tag{8.9}$$

avec $Y(t) = (y,\ \theta,\ y_1,\ y_2,\ \dot{y},\ \dot{\theta},\ \dot{y}_1,\ \dot{y}_2)^T$. La force d'impact F_i appliquée par l'essieu i à la chaussée est donnée par :

$$F_i(t) = -c_i\left(\frac{dy_i}{dt} - \frac{dr}{dt}(t - \frac{\tilde{D}_i}{V})\right) - k_i\left(y_i(t) - r(t - \frac{\tilde{D}_i}{V})\right) \quad i = 1, \ldots, 2$$

avec $\tilde{D}_1 = 0$, $\tilde{D}_2 = D_1 + D_2$, $\epsilon_1 = -1$ et $\epsilon_2 = 1$. Après linéarisation, on peut à nouveau écrire matriciellement les équations du mouvement sous la forme :

$$\frac{dY}{dt} + A_{veh_2^p} Y(t) = B_{veh_2^p}(t) \tag{8.10}$$

avec :

$$B^p_{veh_2}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g + \frac{K_{e1}}{M} r(t) + \frac{K_{e2}}{M} r(t - \frac{\tilde{D}_2}{V}) + \frac{C_1}{M} \dot{r}(t) + \frac{C_2}{M} \dot{r}(t + \frac{\tilde{D}_2}{V}) \\ -\frac{D_1 K_{e1}}{I} r(t) + \frac{D_2 K_{e2}}{I} r(t - \frac{\tilde{D}_2}{V}) - \frac{D_1 C_1}{I} r(t) + \frac{D_2 C_2}{I} r(t + \frac{\tilde{D}_2}{V}) \\ -g + \frac{k_{e1}}{m_1} r(t) + \frac{c_1}{m_1} r(t) \\ -g + \frac{k_{e2}}{m_2} r(t - \frac{\tilde{D}_2}{V}) + \frac{c_2}{m_2} r(t - \frac{\tilde{D}_2}{V}) \end{pmatrix},$$

$$A^p_{veh_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{K_{e1}+K_{e2}}{M} & \frac{K_{e2}D_2 - K_{e1}D_1}{M} & 0 & 0 & \frac{C_1+C_2}{M} & \frac{C_2D_2 - C_1D_1}{M} & 0 & 0 \\ \frac{D_1K_{e1} - D_2K_{e2}}{I} & \frac{K_{e1}D_1^2 + K_{e2}D_2^2}{I} & 0 & 0 & \frac{D_1C_1 - D_2C_2}{I} & \frac{C_1D_1^2 + C_2D_2^2}{I} & 0 & 0 \\ -\frac{K_{e1}}{m_1} & -\frac{K_{e1}D_1}{m_1} & \frac{k_{e1}}{m_1} & 0 & -\frac{C_1}{m_1} & -\frac{C_1D_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & 0 \\ -\frac{K_{e2}}{m_2} & -\frac{K_{e2}D_2}{m_2} & 0 & \frac{k_{e2}}{m_2} & -\frac{C_2}{m_2} & -\frac{C_2D_2}{m_2} & 0 & \frac{c_2}{m_2} \end{pmatrix}.$$

Avec les caractéristiques mécaniques du problème, le calcul des valeurs propres de la matrice $A^p_{veh_2}$ fournit les pseudo-fréquences suivantes :

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = -0.20 + j\,2.81, \quad \lambda_3 = \bar{\lambda}_4 = -0.63 + j\,4.50,$$
$$\lambda_5 = \bar{\lambda}_6 = -1.75 + j\,10.41, \quad \lambda_7 = \bar{\lambda}_8 = -1.75 + j\,14.13.$$

La fréquence la plus basse i.e. $\mathrm{Im}\,\lambda_1 = 2.81$ Hz correspond au mouvement de pompage du chassis et étant donné la similitude des caractéristiques mécaniques utilisées, il est normal qu'elle ne soit pas très éloignée de celle obtenue pour l'oscillateur à deux degrés de liberté i.e. 2.34 Hz. La seconde fréquence i.e. $\mathrm{Im}\,\lambda_2 = 4.50$ Hz correspond au mouvement de tangage du chassis, il est normal qu'elle ne se retrouve pas dans le spectre de l'oscillateur à deux degrés de liberté. Les deux dernières fréquences correspondent aux mouvements de pompage des essieux, pour la plus élevée i.e. $\mathrm{Im}\,\lambda_4 = 14.13$ Hz, il est rassurant de voir qu'elle est voisine de celle observée pour l'oscillateur à deux degrés de liberté i.e. 16.32 Hz.

La figure 8.18 ci-dessous présente les résultats des simulations menées pour le modèle représenté figure 8.17 dans le cas non linéaire puis avec les caractéristiques linéaires équivalentes.

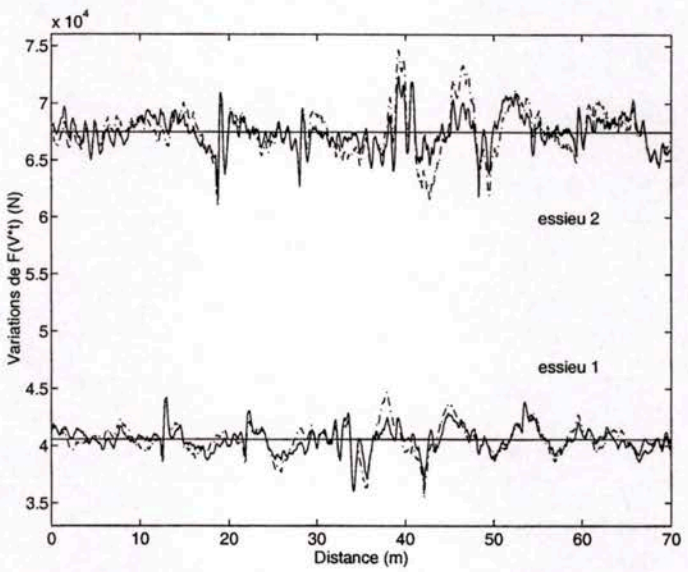


Figure 8.18 : Variations de la force d'impact $F(V * t)$ des essieux, résolution numérique. Véhicule à quatre degrés de liberté (–) caractéristiques non linéaires et (-.) linéarisation équivalente.

La figure 8.19 ci-dessous permet de comparer les simulations obtenues avec le modèle représenté figure 8.17 avec les caractéristiques linéaires et non linéaires des pneumatiques. On considère dans chaque cas la linéarisation équivalente des suspensions K_{e1} et K_{e2}.

On compare également le spectre (figure 8.20), selon la transformation de Fourier discrète, des signaux représentant les variations de la force d'impact du second essieu dans le cas du modèle non linéaire (8.9) et du modèle linéarisé (8.10), on a retiré à chaque signal sa composante statique afin de faire apparaître les autres contributions.

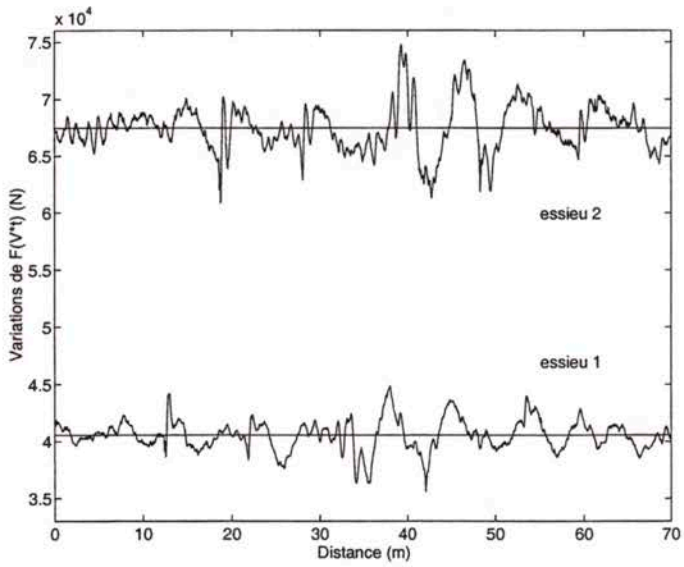


Figure 8.19 : Variations de la force d'impact $F(x/V)$ des essieux, résolution numérique. Véhicule à quatre degrés de liberté et suspension linéaire (–) pneumatiques non-linéaires et (-.) pneumatiques linéaires.

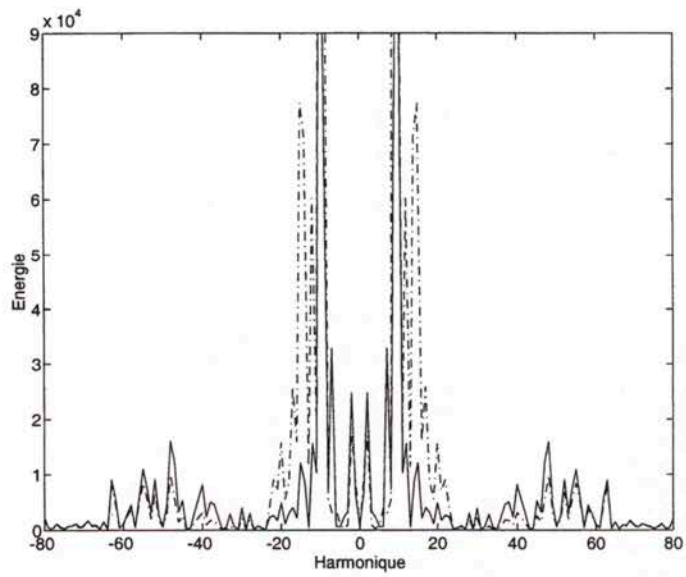


Figure 8.20 : Spectre selon la TFD (2000 points) des forces d'impact du second essieu du modèle non-linéaire (–) et du modèle linéarisé (-.).

8.3.3 Véhicule rigide avec trois essieux

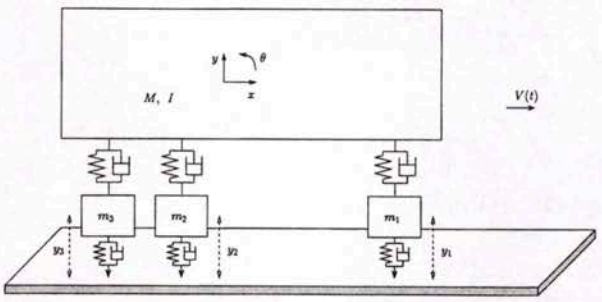


Figure 8.21 : Modèle de véhicule à trois essieux.

Ce modèle (figure 8.21) possède cinq degrés de liberté et on fait l'hypothèse que les caractéristiques des essieux 2 et 3 sont identiques et qu'elles coïncident avec celles du second essieu du modèle précédent. Cette hypothèse sera également reprise pour le modèle de véhicule à cinq essieux. En rotation, on conserve l'hypothèse des petites rotations i.e. $\tan\theta \approx \theta$. En ce qui concerne le chassis, les équations du mouvement sont données par :

$$
\begin{aligned}
I\frac{d^2\theta}{dt} - D_1\left[K_1\left(y(t) - D_1\theta(t) - y_1(t)\right) + C_1\left(\frac{dy}{dt} - D_1\frac{d\theta}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)\right] + \\
D_2\left[K_2\left(y(t) + D_2\theta(t) - y_2(t)\right) + C_2\left(\frac{dy}{dt} + D_2\frac{d\theta}{dt} - \frac{dy_2}{dt}\right)\right] + \\
D_3\left[K_3\left(y(t) + D_3\theta(t) - y_3(t)\right) + C_3\left(\frac{dy}{dt} + D_3\frac{d\theta}{dt} - \frac{dy_3}{dt}\right)\right] = 0
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
M\frac{d^2y}{dt^2} + K_1\left(y(t) - D_1\theta(t) - y_1(t)\right) + C_1\left(\frac{dy}{dt} - D_1\frac{d\theta}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right) + \\
K_2\left(y(t) + D_2\theta(t) - y_2(t)\right) + C_2\left(\frac{dy}{dt} + D_2\frac{d\theta}{dt} - \frac{dy_2}{dt}\right) + \\
K_3\left(y(t) + D_3\theta(t) - y_3(t)\right) + C_3\left(\frac{dy}{dt} + D_3\frac{d\theta}{dt} - \frac{dy_3}{dt}\right) = -Mg.
\end{aligned}
$$

Pour chacun des essieux, le mouvement de translation verticale est régi par :

$$
\begin{aligned}
m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} + c_i\left(\frac{dy_i}{dt} - \frac{dr}{dt}(t - \frac{\tilde{D}_i}{V})\right) + k_i\left(y_i(t) - r(t - \frac{\tilde{D}_i}{V})\right) \\
-C_i\left(\frac{dy}{dt} + \epsilon_i D_i\frac{d\theta}{dt} - \frac{dy_i}{dt}\right) - K_i\left(y(t) + \epsilon_i D_i\theta(t) - y_i(t)\right) = -m_i g.
\end{aligned}
$$

La force d'impact F_i appliquée par l'essieu i à la chaussée est donnée par :

$$F_i(t) = -c_i \left(\frac{dy_i}{dt} - \frac{dr}{dt}(t - \frac{\tilde{D}_i}{V}) \right) - k_i \left(y_i(t) - r(t - \frac{\tilde{D}_i}{V}) \right) \quad i = 1, \ldots, 3$$

avec $\tilde{D}_1 = 0$, $\tilde{D}_2 = D_1 + D_2$, $\tilde{D}_3 = D_1 + D_3$, $\epsilon_1 = -1$ et $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$.
De la même façon que précédemment en linéarisant les équations du modèle, on obtient la représentation matricielle :

$$\frac{dY}{dt} + A_{veh_3^p} Y(t) = B_{veh_3^p}(t) \tag{8.11}$$

Avec les caractéristiques mécaniques utilisées, le calcul des valeurs propres de $A_{veh_3^p}$ fournit les pseudo-fréquences :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 &= -0.160 + j\,2.45 \\
\lambda_3 = \bar{\lambda}_4 &= -0.24 + j\,2.84 \\
\lambda_5 = \bar{\lambda}_6 &= -1.75 + j\,10.41 \\
\lambda_7 = \bar{\lambda}_8 = \lambda_9 = \bar{\lambda}_{10} &= -1.75 + j\,14.13.
\end{aligned}$$

Le second et le troisième essieux ayant des caractéristiques mécaniques identiques, ceci explique que deux pseudo-fréquences soient confondues. On présente figure 8.22 les réponses du modèle non linéaire et de la linéarisation équivalente.

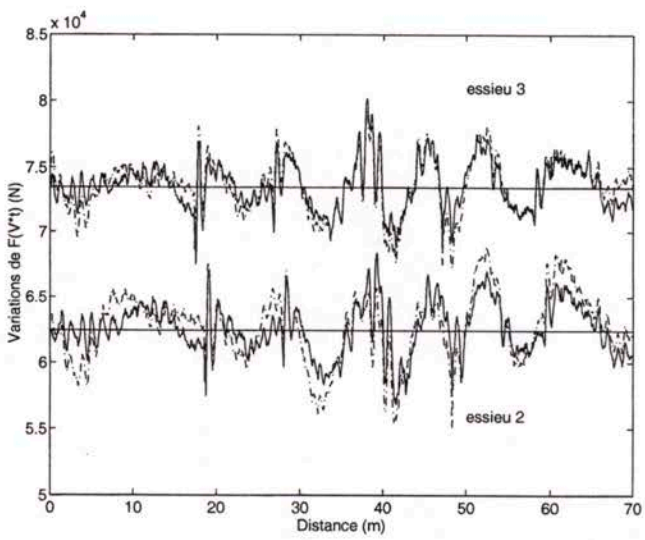


Figure 8.22 : Variations de la force d'impact $F(V * t)$ des essieux 2 et 3, résolution numérique. Véhicule à cinq degrés de liberté (–) caractéristiques non-linéaires et (-.) linéarisation équivalente.

On étudie maintenant l'influence du poids du chassis sur les variations des forces d'impact. Pour cela, on résout les équations du modèle 8.11 pour diverses valeurs de M et l'on compare (figure 8.23) les réponses obtenues rapportées au même poids statique.

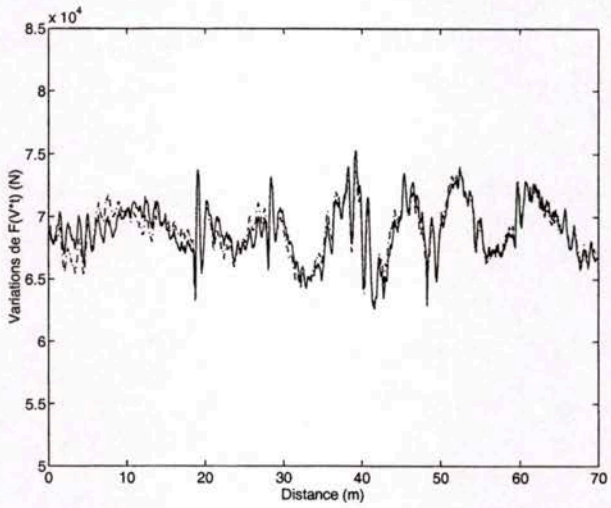


Figure 8.23 : Variations de la force d'impact de l'essieu 3. Véhicule à cinq degrés de liberté (–) masse du chassis $M = 18000\,\text{kg}$ et (-.) masse du chassis $1.1 * M$, les variations sont centrées autour de M.

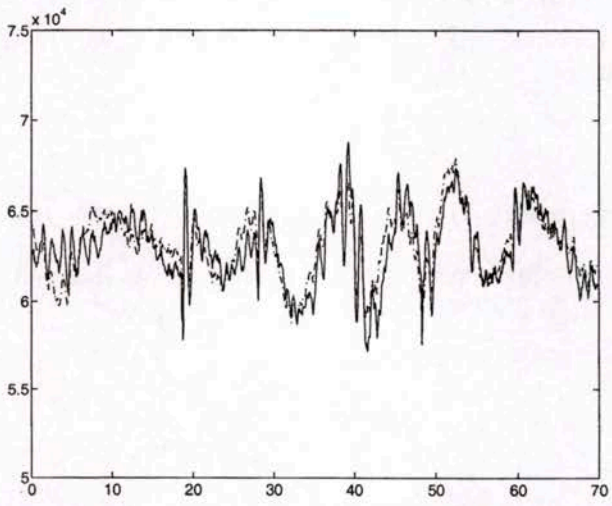


Figure 8.24 : Variations de la force d'impact de l'essieu 3. Véhicule à cinq degrés de liberté (–) masse du chassis $M = 18000\,\text{kg}$ et (-.) masse du chassis $1.4 * M$, les variations sont centrées autour de M.

Lorsque le poids du chargement du véhicule varie de façon significative en restant dans des limites acceptables, les variations des forces d'impact gardent la même forme. Parallèlement, on a remarqué que pour des chargements très faibles (par exemple $0.3 * M$), l'effet des non linéarités devient important et la linéarisation équivalente très imprécise. Dans ce cas, la composante dynamique est plus faible pour le modèle non linéaire que le modèle linéaire (figure 8.25). Notre objectif étant plus particulièrement lié aux sollicitations importantes, l'étude de ce phénomène ne sera pas approfondie dans la suite.

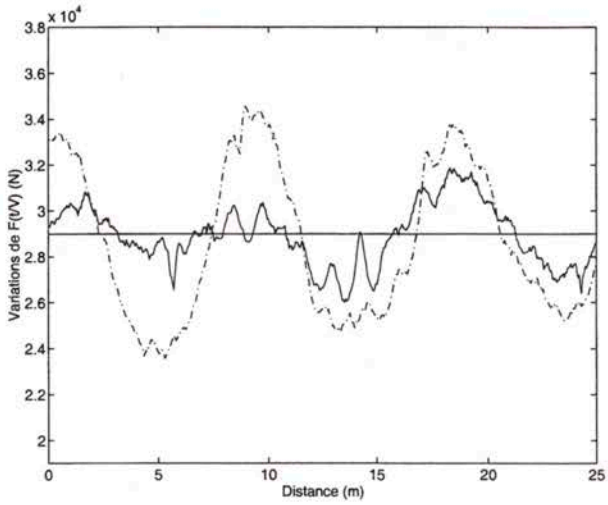


Figure 8.25 : Variations de la force d'impact de l'essieu 3. Véhicule à trois essieux, masse du chassis $M = 6000\,\text{kg}$. (–) modèle non linéaire et (-.) linéarisation équivalente.

8.3.4 Un véhicule à cinq essieux - tracteur + remorque

On considère le modèle de véhicule schématisé par la figure 8.26 ci-dessous. Il s'agit d'un modèle de poids lourd à cinq essieux isolés. Le chassis du véhicule est composé d'un tracteur et de sa remorque articulés par une liaison pivot.

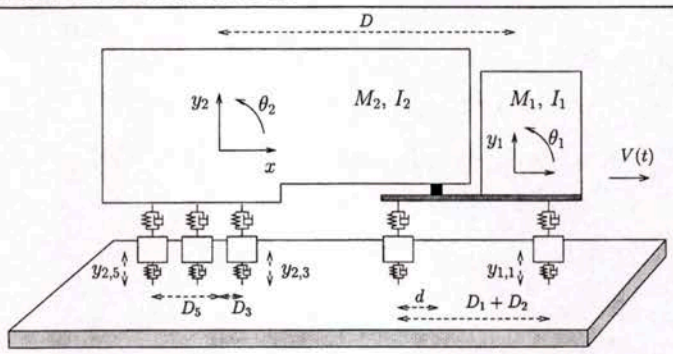


Figure 8.26 : Modèle de véhicule à cinq essieux - tracteur + remorque.

Ce modèle possède huit degrés de liberté. En rotation, on conserve l'hypothèse des petites rotations i.e. $\tan\theta \approx \theta$. En ce qui concerne le tracteur, les équations du mouvement sont données par :

$$I_1\frac{d^2\theta_1}{dt} - D_1\left[K_1\left(y_1(t) - D_1\theta_1(t) - y_1(t)\right) + C_1\left(\frac{dy_1}{dt} - D_1\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{dy_{1,1}}{dt}\right)\right] +$$
$$D_2\left[K_2\left(y_1(t) + D_2\theta_1(t) - y_{1,2}(t)\right) + C_2\left(\frac{dy}{dt} + D_2\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{dy_{1,2}}{dt}\right)\right] +$$
$$+(\tilde{D}_2 - d)F_{2,1} = 0$$

et

$$M\frac{d^2y_1}{dt^2} + K_1\left(y_1(t) - D_1\theta_1(t) - y_{1,1}(t)\right) + C_1\left(\frac{dy_1}{dt} + D_1\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{dy_{1,1}}{dt}\right) +$$
$$K_2\left(y_1(t) - D_2\theta_1(t) - y_{1,2}(t)\right) + C_2\left(\frac{dy_1}{dt} - D_2\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{dy_{1,2}}{dt}\right) + F_{2,1} = -M_1g.$$

En ce qui concerne la remorque, les équations du mouvement sont données par :

$$I_2\frac{d^2\theta_2}{dt} + D_3\left[K_3\left(y_2(t) + D_3\theta_2(t) - y_3(t)\right) + C_3\left(\frac{dy_2}{dt} + D_3\frac{d\theta_2}{dt} - \frac{dy_{2,3}}{dt}\right)\right] +$$
$$D_4\left[K_4\left(y_2(t) + D_4\theta_2(t) - y_{2,4}(t)\right) + C_4\left(\frac{dy_2}{dt} + D_4\frac{d\theta_2}{dt} - \frac{dy_{2,4}}{dt}\right)\right] +$$
$$D_5\left[K_5\left(y_2(t) + D_5\theta_2(t) - y_{2,5}(t)\right) + C_5\left(\frac{dy_2}{dt} + D_5\frac{d\theta_2}{dt} - \frac{dy_{2,5}}{dt}\right)\right] +$$
$$(D - \tilde{D}_2 + d)F_{1,2} = 0$$

et

$$M_2\frac{d^2y_2}{dt^2} + K_3\left(y_2(t) - D_3\theta_2(t) - y_{2,3}(t)\right) + C_3\left(\frac{dy_2}{dt} + D_2\frac{d\theta_2}{dt} - \frac{dy_{2,3}}{dt}\right) +$$
$$K_4\left(y_2(t) - D_4\theta_2(t) - y_{2,4}(t)\right) + C_4\left(\frac{dy_2}{dt} - D_4\frac{d\theta_2}{dt} - \frac{dy_{2,4}}{dt}\right) +$$
$$K_5\left(y_2(t) - D_5\theta_2(t) - y_{2,5}(t)\right) + C_5\left(\frac{dy_2}{dt} - D_5\frac{d\theta_2}{dt} - \frac{dy_{2,5}}{dt}\right) + F_{1,2} = -M_2g.$$

où $\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$ est la force exercée par le corps 2 sur le corps 1. Si d est la distance algébrique entre le second essieu et l'attache de la remorque, on a :

$$F_{1,2} = \frac{d}{\tilde{D}_2}\left[K_1\left(y_1(t) - D_1\theta_1(t) - y_{1,1}(t)\right) + C_1\left(\frac{dy_1}{dt} + D_1\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{dy_{1,1}}{dt}\right)\right] +$$
$$(1 - \frac{d}{\tilde{D}_2})\left[K_2\left(y_1(t) - D_2\theta_1(t) - y_{1,2}(t)\right) + C_2\left(\frac{dy_1}{dt} - D_2\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{dy_{1,2}}{dt}\right)\right].$$

Pour chacun des essieux du tracteur ($i \in \{1, 2\}$), le mouvement de translation verticale est régi par :

$$m_i\frac{d^2y_{1,i}}{dt^2} + c_i\left(\frac{dy_{1,i}}{dt} - \frac{dr}{dt}(t - \frac{\tilde{D}_i}{V})\right) + k_i\left(y_{1,i}(t) - r(t - \frac{\tilde{D}_i}{V})\right)$$
$$-C_i\left(\frac{dy_1}{dt} + \epsilon_i D_i\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{dy_{1,i}}{dt}\right) - K_i\left(y_1(t) + \epsilon_i D_i\theta_1(t) - y_{1,i}(t)\right) = -m_ig.$$

et la force d'impact F_i appliquée par l'essieu i à la chaussée est donnée par :

$$F_i(t) = -c_i\left(\frac{dy_{1,i}}{dt} - \frac{dr}{dt}(t - \frac{\tilde{D}_i}{V})\right) - k_i\left(y_{1,i}(t) - r(t - \frac{\tilde{D}_i}{V})\right) \quad i = 1, \ldots, 2$$

avec $\tilde{D}_1 = 0$, $\tilde{D}_2 = D_1 + D_2$, $\epsilon_1 = -1$ et $\epsilon_2 = 1$. En ce qui concerne la remorque ($i \in \{3, 4, 5\}$), on a de la même façon :

$$m_i\frac{d^2y_{2,i}}{dt^2} + c_i\left(\frac{dy_{2,i}}{dt} - \frac{dr}{dt}(t - \frac{\tilde{D}_i}{V})\right) + k_i\left(y_{2,i}(t) - r(t - \frac{\tilde{D}_i}{V})\right)$$
$$-C_i\left(\frac{dy_2}{dt} + D_i\frac{d\theta_2}{dt} - \frac{dy_{2,i}}{dt}\right) - K_i\left(y_2(t) + D_i\theta_2(t) - y_{2,i}(t)\right) = -m_ig.$$

et la force d'impact F_i appliquée par l'essieu i à la chaussée est donnée par :

$$F_i(t) = -c_i\left(\frac{dy_{2,i}}{dt} - \frac{dr}{dt}(t - \frac{\tilde{D}_i}{V})\right) - k_i\left(y_{2,i}(t) - r(t - \frac{\tilde{D}_i}{V})\right) \quad i = 3, \ldots, 5$$

avec $\tilde{D}_3 = D_3$, $\tilde{D}_4 = D_4$ et $\tilde{D}_5 = D_5$. Puisqu'on ne connaît pas a priori la position du centre d'inertie de la remorque (entre les essieux 2 et 3 ou entre les essieux 3 et 5), les quantités D_3, D_4 et D_5 sont comptées en mesure algébrique.

Comme pour les autres modèles, on résout numériquement les équations du mouvement et on calcule la force d'impact des différents essieux (figure 8.27). Comme pour le modèle précédent, les forces d'impact d'un même essieu obtenues pour des caractéristiques non linéaires et une linéarisation équivalente sont très proches, on n'a donc représenté que les premières. On note les fortes amplitudes de variations des forces d'impact des essieux 3 et 5, ce phénomène est observé dans la pratique mais il doit être pondéré par le fait que les essieux de la remorque sont ici considérés comme indépendants ce qui n'est pas le cas dans la pratique.

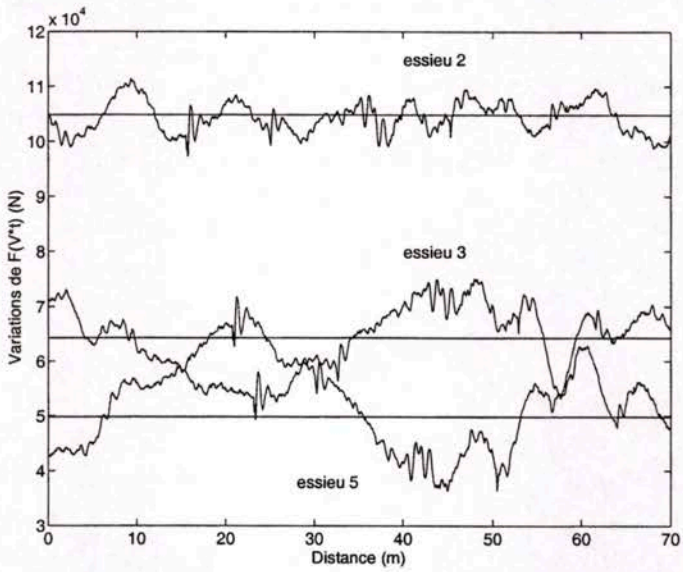
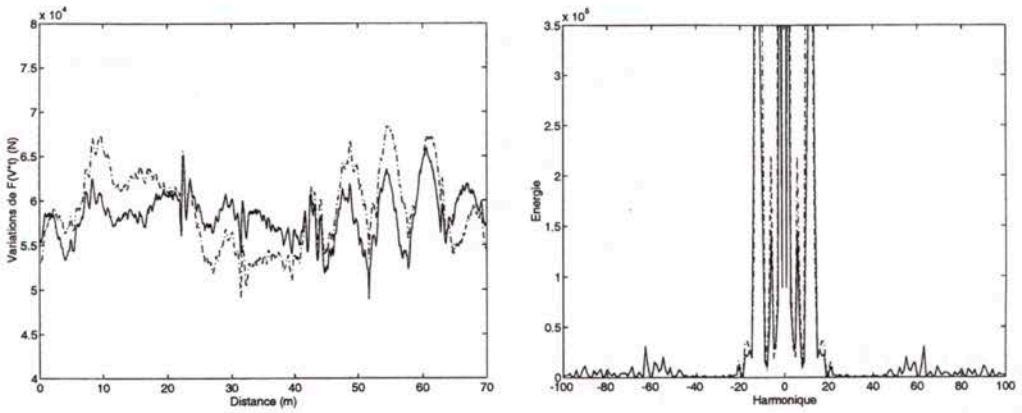


Figure 8.27 : Variations de la force d'impact $F(V * t)$ des essieux 2, 3 et 5, résolution numérique. Véhicule à neuf degrés de liberté, linéarisation équivalente.

On montre également qu'à chargement constant, la position du chargement dans la remorque entraîne de fortes variations de la force d'impact d'un essieu. Pour cela, on résout (figure 8.28-a) les équations du modèle dans deux situations identiques sauf quant à la position du centre d'inertie de la remorque. On montre également (figure 8.28-b) que si les forces d'impact diffèrent nettement, leur contenu spectral respectif est très proche.



(a) *(b)*

Figure 8.28 : Véhicule à neuf degrés de liberté. (a) variations de la force d'impact $F(V * t)$ de l'essieu 4, (–) et (-.) le centre d'inertie de la remorque est déplacé de 0.3 m. (b) spectre selon le TFD de $F(x/V)$, centre d'inertie (–) position initiale et (-.) position décalée.

On compare maintenant (figure 8.29) les signaux de forces d'impact enregistrés à l'aide d'un poids lourd à cinq essieux instrumenté du NRC (voir page 247) à la résolution numérique des équations du modèle ci-dessus.

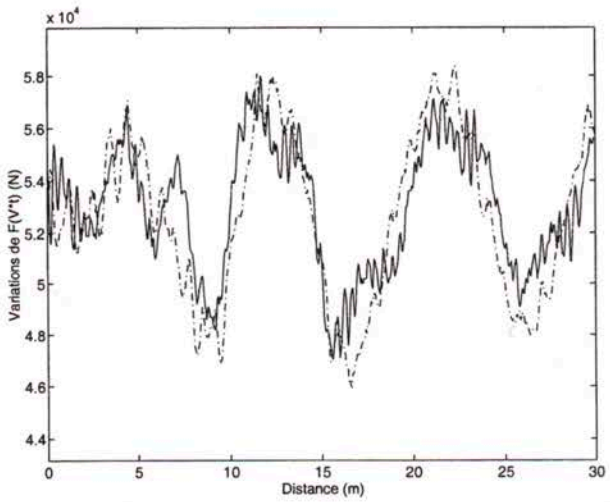


Figure 8.29 : Variations de la force d'impact $F(V * t)$ du premier essieu d'un véhicule instrumenté à cinq essieux, (–) mesure expérimentale, (-.) simulation numérique.

8.3.5 Conclusion

Ce travail de comparaison n'est pas exhaustif mais notre objectif n'est pas de faire une analyse complète des forces et faiblesses des modèles étudiés. On cherche simplement à dégager des idées fortes qui seront utilisées par la suite pour la reconstruction des forces d'impact ainsi que les problèmes de pesage en marche.
Il faut aussi signaler que si les modèles présentés restent relativement simples, leur résolution, particulièrement celles des modèles non linéaires est très consommatrice de temps de calcul. Par exemple pour le modèle à cinq essieux, la simulation de la force d'impact des essieux sur une longueur de 100 m nécessite deux heures de temps CPU pour un serveur "SUN Enterprise" (350 MHz) avec un minimum de 256 Mo de RAM). De tels calculs ne pouvaient donc être envisagés il y a quelques années.

On cherche à présent à tirer des conclusions intéressantes quant aux paramètres ayant un rôle significatif dans la modélisation des vibrations d'essieux. Ces conclusions sont inspirées non seulement par les quelques résultats présentés ci-dessus mais aussi par d'autres simulations menées dans d'autres circonstances avec d'autres paramètres et donnant des résultats équivalents.

Pour chacunes des simulations effectuées, le spectre des signaux représentant les variations de la force d'impact semblent contenir principalement deux fréquences correspondant aux mouvements de tangage et de pompage du chassis. Lorsque pour des caractéristiques mécaniques données, on fait varier la masse du véhicule, le signal représentant les variations de la force d'impact garde le même contenu spectral.

La conclusion générale de ce paragraphe est que la linéarisation équivalente des modèles présentés permet d'obtenir une bonne approximation des variations de forces d'impact. Cette conclusion n'a de valeur, pour l'instant, que pour des simulations numériques sur des modèles simples. Mais nous allons maintenant nous intéresser à des modèles plus complexes et montrer comment obtenir, dans certains cas, l'expression algébrique des forces d'impact. On pourra alors envisager une validation des conclusions avancées ci-dessus à l'aide de signaux expérimentaux.

8.4 Modélisation multi-corps d'un poids lourds

En se référant aux travaux réalisés par Cebon ([Ceb92]) et Lieh ([Lie91], [Lie95]), nous avons choisi de considérer qu'un poids lourd pouvait être assimiler à un assemblage de corps rigides. Ainsi, sous une telle hypothèse, la figure ci-dessous représente un véhicule à dix corps rigides : la cabine, le tracteur, la remorque et sept essieux.

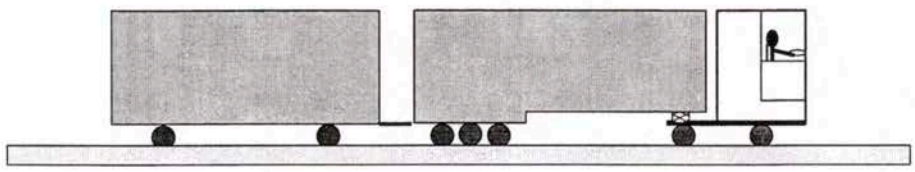


Figure 8.30 : Poids lourd composé de 10 corps rigides.

Parmi les outils permettant d'obtenir les équations du mouvement d'un système mécanique, le principe des puissances virtuelles présente de nombreux avantages parmi lesquels la simplicité et la forme des équations obtenues. À l'aide de ce principe, nous donnons la forme générale des équations du mouvement d'un système formé de plusieurs corps rigides.
On considère un système multi-corps formé de n_r corps rigides, le théorème des travaux virtuels s'écrit alors :

$$\sum_{i=1}^{n_r} \left\{ \delta r_i^T (m_i a_i - F_i) + \delta \pi_i^T (\dot{H}_i - T_i) - \delta W_i \right\} = 0 \qquad (8.12)$$

avec les notations suivantes :

m_i,a_i :	accélération du centre de gravité du corps i
F_i,T_i :	résultante des forces et des moments sur le corps i
δr_i,$\delta \pi_i$:	déplacement virtuel linéaire et angulaire du corps i
H_i,ω_i :	moment cinétique et vitesse angulaire du corps i
ω_{fi} :	vitesse angulaire du repère lié au corps i
$\tilde{\omega}_{fi}$:	matrice antisymétrique telle que $\omega_{fi} \wedge x = \tilde{\omega}_{fi} x$
δW_i :	travail virtuel ne provenant ni de F_i ni de T_i
I_i :	matrice principale d'inertie du corps i
q :	vecteur de coordonnées arbitraires
J_{vi} :	matrice jacobienne de la vitesse du corps i dans le système de coordonnées relatifs à q

$J_{\omega i}$: matrice jacobienne de la vitesse angulaire du corps i dans le système de coordonnées relatifs à q

F_{qi} : résultante des forces agissant sur le corps i dans le système de coordonnées relatifs à q.

Les quantités définies ci-dessus permettent de réécrire chaque terme de l'équation (8.12) en faisant intervenir les matrices jacobiennes et le vecteur q de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \delta r_i &= J_{vi}\delta q \\ \delta \pi_i &= J_{\omega i}\delta q \\ \delta W_i &= F_{qi}\delta q. \end{aligned}$$

En choisissant pour chaque corps un système de coordonnées lié à ce corps, il vient :

$$\dot{H}_i = I_i\dot{\omega}_i + \tilde{\omega}_{fi}I_i\omega_i, \tag{8.13}$$

la relation (8.12) s'écrit alors :

$$\delta q^T \sum_{i=1}^{n_r} \left\{ J_{vi}^T(m_i a_i - F_i) + J_{\omega i}^T(\dot{H}_i - T_i) - Fqi \right\} = 0. \tag{8.14}$$

Puisqu'il existe des liaisons entre les n_r corps composant le système étudié, les composantes du vecteur q ne sont pas toutes indépendantes. On choisit d'écrire q sous la forme :

$$q = [x^T, q_d^T]^T,$$

le vecteur x représentant les composantes indépendantes et q_d les composantes redondantes. On introduit alors les quantités $C = C(q,t)$ et $D = D(q,t)$ telles que :

$$\dot{q}_d = C(q,t)\dot{x} + D(q,t)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= C_v(q,t)\dot{x} + D_v(q,t) \\ \delta q &= C_v(q,t)\delta x \end{aligned} \tag{8.15}$$

avec $C_v = [I,\ C]^T$ et $D_v = [0,\ D]^T$. L'expression de la vitesse V_i du corps i dans son repère principal est donnée par :

$$\begin{aligned} V_i &= \left(\frac{dr_i}{dt}\right)_q + \tilde{\omega}_{fi} r_i \\ &= \frac{\partial r_i}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial r_i}{\partial t} + \tilde{\omega}_{fi} r_i \\ &= \frac{\partial r_i}{\partial q}(C_v \dot{x} + D_v) + \frac{\partial r_i}{\partial t} + \tilde{\omega}_{fi} r_i \\ &= J_{vci}\dot{x} + J_{vdi} + V_{ti}, \end{aligned} \tag{8.16}$$

d'une façon analogue, on obtient pour ω_i et ω_{fi} :

$$\omega_i = J_{\omega ci}\dot{x} + J_{\omega di} + \omega_{ti} \tag{8.17}$$

$$\omega_{fi} = J_{fci}\dot{x} + J_{fdi} + \omega_{fti}. \tag{8.18}$$

L'accélération a_i est obtenue en différenciant la relation (8.16) ce qui fournit :

$$a_i = J_{vci}\ddot{x} + \dot{J}_{vci}\dot{x} + \tilde{\omega}_{fi}(J_{vci}\dot{x} + J_{vdi} + V_{ti}) + \dot{J}_{vdi} + \dot{V}_{ti},$$

de la même manière, en remplaçant (8.17) et (8.18) dans (8.13), on obtient :

$$\dot{H}_i = I_i J_{\omega ci}\ddot{x} + I_i \dot{J}_{\omega ci}\dot{x} + \tilde{\omega}_{fi} I_i \left(J_{\omega ci}\dot{x} + J_{\omega di} + \omega_{ti}\right) + I_i \left(\dot{J}_{\omega di} + \dot{\omega}_{ti}\right).$$

En injectant alors les expressions de a_i et $\dot{H}_i$ dans (8.14), on obtient :

$$\begin{aligned} \delta x^T \sum_{i=1}^{n_r} \Big\{ & m_i J_{vci}^T \left[J_{vci}\ddot{x} + \dot{J}_{vci}\dot{x} + \tilde{\omega}_{fi}(J_{vci}\dot{x} + J_{vdi} + V_{ti}) + \dot{J}_{vdi} + \dot{V}_{ti}\right] + \\ & J_{\omega ci}^T \left[I_i J_{\omega ci}\ddot{x} + I_i \dot{J}_{\omega ci}\dot{x} + \tilde{\omega}_{ti} I_i (J_{\omega ci}\dot{x} + J_{\omega di} + \omega_{ti}) + I_i(\dot{J}_{\omega di} + \dot{\omega}_{ti})\right] \\ & - J_{vci}^T F_i - J_{\omega ci}^T T_i - F_{xi} \Big\} = 0, \end{aligned}$$

cette dernière équation étant vérifiée pour tout déplacement virtuel δx où les composantes de x sont indépendantes les unes des autres, on obtient les équations dynamiques du mouvement :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_r} \Big\{ & m_i J_{vci}^T \left[J_{vci}\ddot{x} + \dot{J}_{vci}\dot{x} + \tilde{\omega}_{fi}(J_{vci}\dot{x} + J_{vdi} + V_{ti}) + \dot{J}_{vdi} + \dot{V}_{ti}\right] + \\ & J_{\omega ci}^T \left[I_i J_{\omega ci}\ddot{x} + I_i \dot{J}_{\omega ci}\dot{x} + \tilde{\omega}_{ti} I_i (J_{\omega ci}\dot{x} + J_{\omega di} + \omega_{ti}) + I_i(\dot{J}_{\omega di} + \dot{\omega}_{ti})\right] \\ & - J_{vci}^T F_i - J_{\omega ci}^T T_i - F_{xi} \Big\} = 0. \end{aligned} \tag{8.19}$$

Les quantités J_{vci}, $J_{\omega ci}$, J_{vdi}, $J_{\omega di}$, V_{ti}, ω_{ti} sont fonctions de q et t, leur dérivation par rapport t s'écrit donc :

$$\dot{f}(q,t) = \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t},$$

ainsi en tenant compte de la relation (8.15) on a :

$$\begin{aligned}
\dot{J}_{vci} &= \frac{\partial J_{vci}}{\partial q}C_v\dot{x} + \frac{\partial J_{vci}}{\partial q}D_v + \frac{\partial J_{vci}}{\partial t} \\
\dot{J}_{\omega ci} &= \frac{\partial J_{\omega ci}}{\partial q}C_v\dot{x} + \frac{\partial J_{\omega ci}}{\partial q}D_v + \frac{\partial J_{\omega ci}}{\partial t} \\
\dot{J}_{vdi} + \dot{V}_{ti} &= \frac{\partial (J_{vdi} + V_{ti})}{\partial q}C_v\dot{x} + \frac{\partial (J_{vdi} + V_{ti})}{\partial q}D_v + \frac{\partial (J_{vdi} + V_{ti})}{\partial t} \\
\dot{J}_{\omega di} + \dot{V}_{ti} &= \frac{\partial (J_{\omega di} + V_{ti})}{\partial q}C_v\dot{x} + \frac{\partial (J_{\omega di} + V_{ti})}{\partial q}D_v + \frac{\partial (J_{\omega di} + V_{ti})}{\partial t}.
\end{aligned}$$

En remplaçant ces quatre dernières relations dans (8.19), on obtient les équations du mouvement sous la forme :

$$M(q,t)\ddot{x} + A_1(\dot{x}_k\dot{x}_n, t) + A_2(q,t)\dot{x} + A_3(q,t) - f_e = 0$$

où le premier terme traduit l'inertie, le second les accélérations centrifuges et de Coriolis, le troisième terme représente l'influence des mouvements relatifs des divers corps, le quatrième les effets d'accélération du repère de référence et le dernier les efforts généralisés.

En posant $u = [\dot{x}^T \quad x^T]^T$, on se ramène à un système différentiel du premier ordre :

$$\tilde{M}(q,t)\dot{u} + \tilde{A}_1(z_k z_n, t) + \tilde{A}_3(q,t) - \tilde{f}_e = 0, \tag{8.20}$$

cette dernière équation peut être linéarisée autour de la position d'équilibre statique du véhicule, le système devient alors :

$$\mathbf{M}\dot{u} + \mathbf{A}u = \mathbf{f}. \tag{8.21}$$

où $\mathbf{A}$ est un opérateur dépendant du temps et de la position du véhicule. Ainsi, la simulation du comportement vibratoire d'un véhicule lourd revient à la résolution de l'équation (8.20) que l'on peut écrire sous la forme :

$$\tilde{M}(q,t)\dot{u} = \tilde{A}(u,t) + f_e.$$

Numériquement, ce type d'équation se prête bien à une résolution par une méthode type Runge-Kutta, c'est ce que nous avons fait pour les modèles simplifiés précédents.

8.5 Résolution d'un problème d'évolution par la méthode de diagonalisation

Dès lors que l'on linéarise l'équation (8.20) pour qu'elle devienne (8.21), on peut envisager la résolution de cette dernière en utilisant les propriétés du semi-groupe de générateur infinitésimal **A**. La méthode de diagonalisation aussi appelée méthode de Fourier est couramment utilisée pour la résolution des problèmes d'évolution ou de diffusion. La présentation faite ci-dessous dans le cas général s'inspire de [Dau85c] (pp. 89-126), on a ajouté le cas où les valeurs propres de l'opérateur **A** dépendaient du temps.

8.5.1 Cas général

Dans le paragraphe précédent, nous venons de voir que la modélisation d'un système multi-corps pouvait se ramener à la résolution d'un problème d'évolution de la forme :

$$\frac{du}{dt} + Au = f. \tag{8.22}$$

où seul intervient le temps t. On cherche ici à résoudre (8.22) dans un contexte un peu plus général. Ainsi on considère que chacun des corps composant le système peut se déformer, ce qui signifie qu'une variable d'espace x, indépendante de t doit intervenir dans les équations. Il s'agit donc de résoudre un système du type de (8.22) mais avec les notations et les hypothèses suivantes :

1. $f(x,t)$ est une fonction donnée. Pour tout t fixé dans $\Gamma = [0,T[$, $f(x,t)$ appartient à $\mathcal{H}$. $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert séparé de fonctions définies sur Ω (par exemple $L^2(\Omega)$) dont le produit scalaire est noté $\langle .,. \rangle$.

2. On cherche une solution $u(x,t)$ suffisamment régulière pour $(x,t) \in \Omega \times \Gamma$.

3. Pour tout $t \in \Gamma = [0,T[$, $A(t)$ est un opérateur diagonalisable de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, $A(t)$ possède un spectre discret.

4. On suppose de plus que $t \mapsto A(t) \in C^0(\Gamma)$ et que pour tout $t \in \Gamma$, les modes propres de $A(t)$ vérifient :

$$A(t)\, g_k = \lambda(t) g_k \tag{8.23}$$

les g_k étant indépendants du temps t.

Le problème (8.22) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f(x,t) \\ u(x,t)|_\Gamma = u_\Gamma(x) \in \mathcal{H} \\ u(x,t)|_\Omega = u_\Omega(t) = 0. \end{cases} \tag{8.24}$$

où $u_\Gamma(x)$ (resp. $u_\Omega(t)$) représente la valeur de $u(x,t)$ sur la frontière Γ (resp. Ω). Soient $\{g_k\}_{k\in I}$ les modes propres de l'opérateur $A(t)$, ils sont définis par :

$$A(t)\, g_k = \lambda_k(t) g_k \qquad k \in I,$$

on choisit les g_k normés i.e. $\|g_k\|_{\mathcal{H}} = 1$. À titre d'exemple, si l'opérateur $A(t)$ est le laplacien $A(t) = -\frac{1}{t^2}\frac{d^2}{dx^2}$ pour $x \in]0,1[$ avec des conditions d'annulation en $x = 0$ et $x = 1$, on aura :

$$-t^2 \frac{d^2 g_k}{dx^2} = \lambda_k g_k \qquad \text{et} \quad g_k(0) = g_k(1) = 0 \quad k \in I,$$

soit $\lambda_k(t) = t^2 k^2 \pi^2$ et $g_k(x) = \sqrt{2} \sin k\pi t x$. On suppose en outre que pour tout t fixé, $x \mapsto f(x,t) \in \text{vect}\,\{g_k\}_{k\in I}$ ce qui permet d'écrire :

$$f(x,t) = \sum_{k\in I} \gamma_k(t) g_k(x) \quad \text{avec} \quad \gamma_k(t) = \langle f(x,t), g_k(x) \rangle, \tag{8.25}$$

cette dernière condition est automatiquement réalisée dès que $A(t)$ est à inverse compact puisque dans ces conditions, les $\{g_k\}$ forment une base orthonormale de $\mathcal{H}$. On cherche alors une solution de (8.24) sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_{k\in I} \mu_k(t) g_k(x), \tag{8.26}$$

si l'on remplace formellement dans (8.24), il vient :

$$\sum_{k\in I} \left(\frac{d\mu_k}{dt} + \lambda_k(t)\mu_k \right) g_k(x) = \sum_{k\in I} \gamma_k(t) g_k(x), \tag{8.27}$$

par unicité des développements (8.25) et (8.26), on obtient la relation :

$$\frac{d\mu_k}{dt} + \lambda_k(t)\mu_k = \gamma_k(t) \qquad k \in I. \tag{8.28}$$

Si on fait l'hypothèse $u_\Gamma(x) \in \text{vect}\,\{g_k\}$ i.e. $u_\Gamma(x) = \sum_{k\in I} \mu_k^0 g_k(x)$, on a d'après (8.26) :

$$u_\Gamma(x) = \sum_{k\in I} \mu_k|_\Gamma \, g_k(x).$$

Ainsi, on déduit l'expression de μ_k de l'équation différentielle (8.28), soit :

$$\mu_k(t) = \mu_k|_\Gamma \, e^{-\int_0^t \lambda_k(u)du} + e^{-\int_0^t \lambda_k(u)du} \int_0^t e^{\int_0^s \lambda_k(v)dv} \gamma_k(s)ds \tag{8.29}$$

et donc finalement :

$$u(x,t) = \sum_{k\in I} \left(\mu_k|_\Gamma + \int_0^t e^{\int_0^s \lambda_k(v)dv} \gamma_k(s)ds \right) e^{-\int_0^t \lambda_k(u)du} g_k(x). \tag{8.30}$$

Même si nous ne traiterons par la suite que des situations où le nombre de modes propres g_k est fini c'est-à-dire $\operatorname{card} I < +\infty$ et afin d'assurer la stabilité numérique de la solution proposée, il faut vérifier la convergence de la série (8.30) ainsi que des conditions sous lesquelles (8.30) est solution de (8.24). Ceci est fait par le biais du résultat suivant.

Théorème 24 *Si $f \in L^2(\Gamma\,;\mathcal{H})$ et si pour tout $t \in \Gamma = [0,T[$, $A(t)$ est un opérateur diagonalisable de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, $A(t)$ possèdant un spectre discret vérifiant (8.23). On suppose de plus que pour toute valeur propre $\lambda(t)$ de $A(t)$, on a $Re\,\lambda(t) \geq 0$ p. p. sur Γ. Alors le problème :*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + A(t)u = f(x,t) \\ u(x,t)|_\Gamma = u_\Gamma(x) \ \ dans \ \ \mathcal{H} \\ u(x,t)|_\Omega = u_\Omega(t) = 0, \end{cases}$$

admet une solution $u \in L^2(\Gamma\,;\mathcal{H}) \cap C^0(\Gamma\,;\mathcal{H})$ qui est donnée par (8.30).

PREUVE : On rappelle que $L^2(\Gamma\,;\mathcal{H})$ désigne l'espace des fonctions $h : t \mapsto h(x,t)$ mesurables sur Γ, à valeurs dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et telles que $\int_\Gamma \|h(x,t)\|^2_{\mathcal{H}} dt$ existe. On montre tout d'abord que pour tout $x \in \Omega$, l'expression (8.30) a bien un sens. Puisque $f \in L^2(\Gamma\,;\mathcal{H})$, pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$\sum_{k\in I} \int_\Gamma |\gamma_k(t)|^2 dt = \int_\Gamma |f(x,t)|^2 dt < +\infty,$$

de (8.29), il vient l'encadrement :

$$\sum_{k=1}^m |\mu_k(t)|^2 \leq C \left[\sum_{k\in I} |\mu_k^0|^2 + \sum_{k\in I} \int_\Gamma |\gamma_k(t)|^2 dt \right] = C \left[|u_\Gamma(x)|^2 + \int_\Gamma |f(t)|^2 dt \right],$$

avec $|f(t)| = \left(\int_\Omega |f(x,t)|^2 dx\right)^{1/2}$, ce qui assure grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la convergence pour tout x de $\sum \mu_k(t) g_k(x)$. Montrer que $u \in L^2(\Gamma\,;\mathcal{H})$ revient à montrer que :

$$\int_\Gamma \left(\sum_{k\in I} |\mu_k(t)|^2 \right) dt < +\infty,$$

or de (8.29), il vient :

$$\begin{aligned}
|\mu_k(t)|^2 &\leq \left|e^{-\int_0^t \lambda_k(u)du}\right|^2 \left(|\mu_k^0| + \left|\int_0^t |e^{\int_0^s \lambda_k(v)dv}\gamma_k(s)ds\right|\right)^2 \\
&\leq 2\,e^{-2\int_0^t \lambda_k^r(u)du}\left(|\mu_k^0|^2 + \int_0^t e^{2\int_0^s \lambda_k^r(v)dv}|\gamma_k(s)|^2 ds\right) \\
&\leq 2\left(|\mu_k^0|^2 e^{-2\int_0^t \lambda_k^r(u)du} + e^{-2\int_0^t \lambda_k^r(u)du}\int_0^t e^{2\int_0^s \lambda_k^r(v)dv}|\gamma_k(s)|^2 ds\right)
\end{aligned}$$

où $\lambda_k^r(t) = \operatorname{Re}\lambda_k(t)$. En intégrant sur Γ la relation précédente, on obtient :

$$\int_\Gamma |\mu_k(t)|^2 dt \leq 2\left(|\mu_k^0|^2 + \int_0^T |\gamma_k(t)|^2 dt\right),$$

d'où pour tout $n \geq 1$ et $p \geq 0$:

$$\int_\Gamma \left(\sum_{k=n}^{n+p} |\mu_k(t)|^2\right) dt \leq \sum_{k=n}^{n+p} 2\left(|\mu_k^0|^2 + T\int_0^T |\gamma_k(t)|^2 dt\right),$$

ce qui assure que la suite $\sum_{k\leq n}\int_\Gamma |\mu_k(t)|^2 dt$ est de Cauchy donc convergente. Un calcul semblable au précédent assure également que l'on a :

$$\sup_{t\in\Gamma}\left[\sum_n^{n+p} |\mu_k(t)|^2\right]^{1/2} \leq \sqrt{2}\left[\sum_n^{n+p} |\mu_k^0|^2 + D\sum_n^{n+p}\int_\Gamma |\gamma_k(s)|^2 ds\right]^{1/2}.$$

Ainsi en prenant $u_n = \sum_{k\leq n}\mu_k(t)g_k(x)$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N_0$ et $p \geq 0$, on ait :

$$|u_{n+p} - u_n|_\infty = \sup_{t\in\Gamma}\left[\sum_n^{n+p} |\mu_k(t)|^2\right]^{1/2} \leq \epsilon,$$

la suite u_n est donc de Cauchy dans l'espace $C^0(\Gamma\,;\mathcal{H})$. $\Diamond$

Afin d'obtenir des conditions de régularité maximum sur u, on peut chercher à montrer que $u \in L^2(\Gamma\,; H_0^1(\Omega))$, ceci est réalisé par le biais du corollaire suivant :

Corollaire 8 *Sous les même hypothèses que pour le théorème 24, si l'on suppose de plus que pour tout $k \in I$, on a :*

$$\exists\alpha \text{ tel que } \forall t\in\Gamma,\ \alpha|\lambda_k(t)| \leq \lambda_k^r(t) \leq \alpha\lambda_k^r(s) \text{ p.p. pour } s\in[0,t] \tag{8.31}$$

alors le problème :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + A(t)u = f(x,t) \\ u(x,t)|_\Gamma = u_\Gamma(x) \ \ dans \ \ H_0^1(\Omega) \\ u(x,t)|_\Omega = u_\Omega(t) \ \ dans \ \ L^2(0,T), \end{cases}$$

admet une solution $u \in L^2(\Gamma\ ; H_0^1(\Omega)) \cap C^0(\Gamma\ ; H_0^1(\Omega))$ *qui est donnée par (8.30).*

PREUVE : Montrer que $u \in L^2(\Gamma\ ; H_0^1(\Omega))$ revient à montrer que :

$$\int_\Gamma \left(\sum_{k\in I} |\lambda_k(t)|\, |\mu_k(t)|^2 \right) dt < +\infty.$$

Or en reprenant la relation (8.29), il vient :

$$\begin{aligned} |\mu_k(t)|^2 &\leq 2\left(|\mu_k^0|^2 e^{-2\int_0^t \lambda_k^r(u)du} + e^{-2\int_0^t \lambda_k^r(u)du} \left(\int_0^t e^{\int_0^s \lambda_k^r(v)dv} |\gamma_k(s)| ds \right)^2 \right) \\ &\leq 2\left(|\mu_k^0|^2 e^{-2\int_0^t \lambda_k^r(u)du} + e^{-2\int_0^t \lambda_k^r(u)du} \int_0^t e^{2\int_0^s \lambda_k^r(v)dv} ds \int_0^t |\gamma_k(s)|^2 ds \right). \end{aligned}$$

Mais on a :

$$\begin{aligned} 2\lambda_k^r(t) \int_0^t e^{2\int_0^s \lambda_k^r(v)dv} ds &\leq \alpha \int_0^t 2\lambda_k^r(s) e^{2\int_0^s \lambda_k^r(v)dv} ds \\ &= \alpha\, e^{2\int_0^t \lambda_k^r(v)dv} \end{aligned}$$

ce qui fournit l'inégalité :

$$\int_0^t e^{2\int_0^s \lambda_k^r(v)dv} ds \leq \frac{\alpha}{2\lambda_k^r(t)} e^{2\int_0^t \lambda_k^r(v)dv} \leq \frac{1}{2|\lambda_k(t)|} e^{2\int_0^t \lambda_k^r(v)dv}.$$

Ainsi, on obtient l'encadrement :

$$|\mu_k(t)|^2 \leq 2\left(|\mu_k^0|^2 e^{-2\int_0^t \lambda_k^r(u)du} + \frac{1}{2|\lambda_k(t)|} \int_0^t |\gamma_k(s)|^2 ds \right) \tag{8.32}$$

et en intégrant la relation précédente sur Γ, il vient :

$$\int_\Gamma |\mu_k(t)|^2 \leq \frac{1}{\lambda_k^r(t)} |\mu_k^0|^2 + \frac{T}{|\lambda_k(t)|} \int_0^T |\gamma_k(s)|^2 ds$$

soit :

$$\int_\Gamma \left(\sum_{k=n}^{n+p} |\lambda_k(t)|\, |\mu_k(t)|^2 \right) dt \leq \sum_{k=m}^{m+p} \left(|\mu_k^0|^2 + T \int_0^T |\gamma_k(s)|^2 ds \right).$$

Et en utilisant les même arguments que pour la démonstration du théorème 24, il vient que la suite $(\tilde{u}_n)$ définie par :

$$\tilde{u}_n = \sum_{k=n}^{n+p} |\lambda_k(t)|\,|\mu_k(t)|^2$$

est de Cauchy donc convergente. Pour montrer la continuité, on s'appuie sur la relation (8.32) qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} |\mu_k(t)|^2 &\leq 2\left(|\mu_k^0|^2 e^{-2\int_0^t \lambda_k^r(u)du} + \frac{1}{2|\lambda_k(t)|}\int_0^T |\gamma_k(s)|^2 ds\right) \\ &\leq 2\left(|\mu_k^0|^2 + \frac{1}{2|\lambda_k(t)|}\int_0^T |\gamma_k(s)|^2 ds\right) \end{aligned}$$

soit :

$$\int_\Gamma \left(\sum_{k=n}^{n+p} |\lambda_k(t)|\,|\mu_k(t)|^2\right) dt \leq \sum_{k=m}^{m+p}\left(|\lambda_k(t)|\,|\mu_k^0|^2 + T\int_0^T |\gamma_k(s)|^2 ds\right)$$

et donc finalement :

$$\sup_{t\in\Gamma}\left[\sum_n^{n+p} |\lambda_k(t)|\,|\mu_k(t)|^2\right]^{1/2} \leq \sqrt{2}\sup_{t\in\Gamma}\left[\sum_n^{n+p} |\lambda_k(t)|\,|\mu_k^0|^2 + \frac{T}{2}\sum_n^{n+p}\int_\Gamma |\gamma_k(s)|^2 ds\right]^{1/2}.$$

Et puisque u_0 est dans $H_0^1(\Omega)$, la série $\sum_k |\lambda_k(t)|\,|\mu_k^0|^2$ est convergente, cela assure que la suite $(\tilde{u}_n)$ est de Cauchy donc convergente. $\Diamond$

Ainsi, si (I_n) est une suite d'indice vérifiant :

$$\begin{cases} \text{card}\, I_n < +\infty \\ I_n \subset I \\ \lim_{n\to+\infty} I_n = I \end{cases}$$

alors la suite :

$$u_n(x,t) = \sum_{k\in I_n}\left(\mu_k|_\Gamma + \int_0^t e^{\int_0^s \lambda_k(v)dv}\gamma_k(s)ds\right) e^{-\int_0^t \lambda_k(u)du} g_k(x)$$

converge vers u dans $L^2(\Gamma\,;H_0^1(\Omega)) \cap C^0(\Gamma\,;H_0^1(\Omega))$.

Remarque : La condition (8.31) est automatiquement réalisée dès que pour toute valeur propre λ_k, il existe $C > 0$ telle que l'on ait $|\lambda_k(t)| \leq C$ et $0 < \text{Re}\,\lambda_k(t) < C$ p.p. sur Γ. Et cette dernière condition est trivialement réalisée dès l'on parle d'un modèle de véhicule.

8.5.2 Approximation

On a vu que la modélisation multi-corps d'un véhicule lourd pouvait s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{M}\dot{u} + \mathbf{A}u = \mathbf{f}$$

où $\mathbf{M} = \mathbf{M}(q,t)$ et $\mathbf{A} = \mathbf{A}(q,t)$ sont des opérateurs dépendant du temps t mais aussi de la position q du véhicule. Le modèle de véhicule ayant un nombre fini de degrés de liberté, l'opérateurs $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ et le vecteur $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}$ remplissent les hypothèses du théorème 24.

Dans le cas où l'on considère que les opérateurs $\mathbf{M} = \mathbf{M}(t)$ et $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ ne dépendent que du temps t, la matrice $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}(t)$ ne répond alors pas aux critéres retenus pour l'opérateur $A(t)$ dans le théorème 24. Mais si on suppose que la matrice $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}(t)$ est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, on peut s'affranchir de cette contrainte en introduisant pour tout $x \in \Omega$ la matrice $\tilde{A}$ définie par :

$$\tilde{A} = P(x) \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(t) \end{pmatrix} P^T(x) \quad \text{avec} \quad \tilde{A}(x_0,t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}(t)$$

où $x_0 \in \overset{o}{\Omega}$, intérieur de Ω et $P(x)$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (n étant la dimension de $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$) composée de fonctions $L^2(\Omega)$. On retrouve alors pour $\tilde{A}$, les hypothèses du théorème 24.

Dans la méthode exposée ci-dessus, on a de plus été amené à faire l'hypothèse que les modes propres de l'opérateur A étaient tels que $x \mapsto f(x,t) \in$ vect $\{g_k\}_{k\in I}$. Cette hypothèse n'étant pas nécessairement vérifiée étant donné le choix de $\tilde{A}$, on est amené à modifier la relation (8.27) qui devient :

$$\sum_{k\in I}\left(\frac{d\mu_k}{dt} + \lambda_k\mu_k\right) g_k(x) = \sum_{k\in I}\gamma_k(t)g_k(x) + Pf(x,t) - f(x,t)$$

où Pf est la projection orthogonale de f sur les $\{g_k\}_{k\in I}$. L'équation différentielle définissant les fonctions μ_k devient alors :

$$\frac{d\mu_k}{dt} + \lambda_k\mu_k = \tilde{\gamma}_k(t) \qquad k \in I$$

avec $\tilde{\gamma}_k = \gamma_k + \langle f - Pf, g_k\rangle$. La forme générale de la solution $u(x,t)$ est donc finalement :

$$u(x,t) = \sum_{k\in I}\left(\mu_k|_\Gamma + \int_0^t e^{\int_0^s \lambda_k(v)dv}\tilde{\gamma}_k(s)ds\right) e^{-\int_0^t \lambda_k(u)du} g_k(x), \tag{8.33}$$

ce qui fournit un développement de la solution du problème :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\dot{u} + \mathbf{A}u = \mathbf{f} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

suivant une famille de fonctions adaptée au spectre de l'opérateur $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}(q,t)$.

8.5.3 Solution du problème $\mathbf{M}(t)\dot{u} + \mathbf{A}(t)u = \mathbf{f}$

De même que si l'on considère que la matrice $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ intervenant dans l'équation :

$$\dot{u} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}u = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f} \tag{8.34}$$

ne dépend que du temps t et pas de la position q, on peut faire l'hypothèse que le second membre $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}$ ne dépend en fait que du temps t. Dans ce cas, l'expression de $u(x,t)$ donnée par (8.33) devient :

$$u(t) = \sum_{k\in I} \alpha_k \left(\int_0^t e^{\lambda_k(s)} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(s) ds \right) e^{-\lambda_k(t)}. \tag{8.35}$$

Puisque le nombre de valeurs propres de l'opérateur $\tilde{A}$ est fini, pour $n = \dim \tilde{A}(x_0,t)$, u donnée par :

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\int_0^t e^{\lambda_k(s)} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(s) ds \right) e^{-\lambda_k(t)} \tag{8.36}$$

est la solution du problème :

$$\begin{cases} \dot{u} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}u = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f} \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

La condition $u(0) = 0$ indique qu'à $t = 0$, on considère que le vehicule est en position d'équilibre statique.

8.5.4 Interprétation

La solution u de $\dot{u} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\,u = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}$ donnée par (8.36) montre que la réponse peut s'écrire comme combinaison linéaire de fonctions f_k avec :

$$f_k(t) = e^{-\lambda_k(t)} \int_0^t e^{\lambda_k(u)} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(u) du$$

qui dépendent des caractéristiques mécaniques du modèle et de l'uni de la chaussée. L'expression de u ainsi donnée correspond donc à la réponse fournie

par le modèle linéarisé dont on a vu qu'il était une bonne approximation des réponses simulées avec des caractéristiques non linéaires.

La réponse donnée par (8.36) est même un peu plus générale que celles fournies par une linéarisation telle celles effectuées pour les modèles de véhicules dans le paragraphe (8.3) puisque ici, les valeurs propres λ_i dépendent du temps.

8.6 Validation

À l'aide de signaux enregistrés avec des véhicules instrumentés, on cherche à valider l'étude mécanique faite dans ce chapitre et plus particulièrement à montrer que la force d'impact d'un essieu peut être correctement approximée avec seulement quelques modes du modèle associé au véhicule considéré.

8.6.1 Groupements d'essieux

L'hypothèse a été faite au début de ce chapitre de ne pas envisager le cas des groupements d'essieux. Pour un tandem ou un tridem les modélisations sont plus complexes, voir par exemple les travaux de Pintado ([Pin94a], [Pin94b]) ainsi que Cebon ([Ceb88]).
Mais on peut dire que si le couplage entre plusieurs essieux peut être modélisé par un couplage "linéaire" ou faiblement non linéaire alors l'analyse que nous avons effectuée reste utilisable. Et dans ce cas, la prise en compte des groupements d'essieux tend simplement à modifier les valeurs propres $\lambda_i(t)$.

8.6.2 Reconstruction à l'aide de modes propres

Lorsque l'on part d'un modèle mécanique de véhicule dont une linéarisation équivalente peut s'écrire sous la forme $\dot{u}+\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\,u = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}$ alors l'expression donnée par la relation (8.35) i.e. :

$$u(t) = \sum_{k\in I} \alpha_k \left(\int_0^t e^{\lambda_k(s)} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(s) ds \right) e^{-\lambda_k(t)}$$

est une approximation de la réponse du modèle initial. Et dans la première partie de ce chapitre, on a montré que la réponse du modèle linéaire équivalent était une bonne approximation de la réponse du modèle linéaire initial.

On cherche maintenant à montrer que la force d'impact d'un essieu peut être correctement approximée avec des sous familles de fonctions $\{f_k\}_{k\in I_n}$ ou

$\{\tilde{f}_k\}_{k\in I_n}$ de la famille $\{f_k\}_{k\in I}$ où les $\tilde{f}_k$ sont des approximations des f_k et les (I_n) des ensembles d'indices avec $I_n \subset I$. On utilise tout d'abord des forces d'impact obtenues par résolution numérique de modèles non linéaires puis des forces d'impact enregistrées par des véhicules instrumentés.

Signaux simulés

On part de la résolution numérique des équations du modèle de véhicule non linéaire à trois essieux et on calcule pour chaque essieu, la force d'impact correspondante $F(t)$. Connaissant les valeurs propres λ_k ainsi que l'uni de la chaussée, on calcule les fonctions f_k et on cherche à échantillonner le signal $F(t)$ à l'aide des fonctions f_k ainsi que des mesures $\{F(t_i)\}$.
Ainsi les deux figures ci-dessous représentent le résultat de l'échantillonnage avec les $\{f_k\}_{k\in I}$ ainsi qu'avec les $\{f_k\}_{k\in I_4}$ c'est-à-dire lorsqu'on ne considère que les vibrations liées au pompage et au tangage. Pour chacune des simulations ci-dessous, on a ajouté aux f_k, l'uni de la chaussée r.

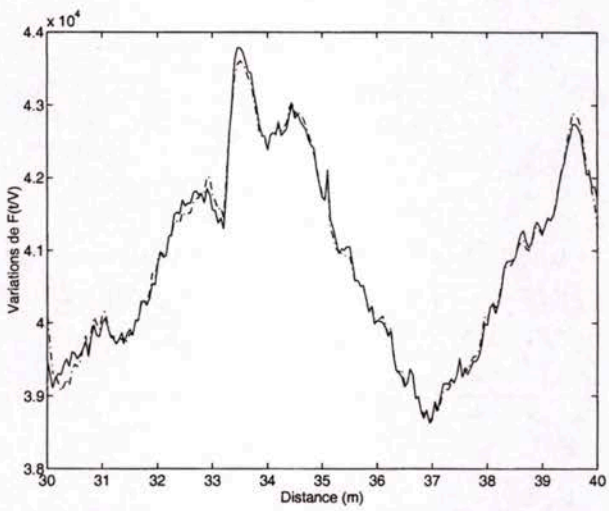


Figure 8.31 : Variations de la force d'impact $F(x/V)$ du 1^e essieu du modèle linéaire à 3 essieux. (–) résolution numérique et (-.) échantillonnage avec les $\{f_k\}$.

Dans le cas de la figure 8.31, le modèle considéré étant complètement linéaire, le signal en pointillé sur la figure ci-dessus correspond à la force d'impact exacte et on peut donc conclure que l'erreur provenant de la résolution numérique est faible.
Si on ne considère plus que les composantes liées aux mouvements de tangage et de pompage i.e. les deux pseudo-fréquences les plus basses, on obtient les signaux suivants (figure 8.32).

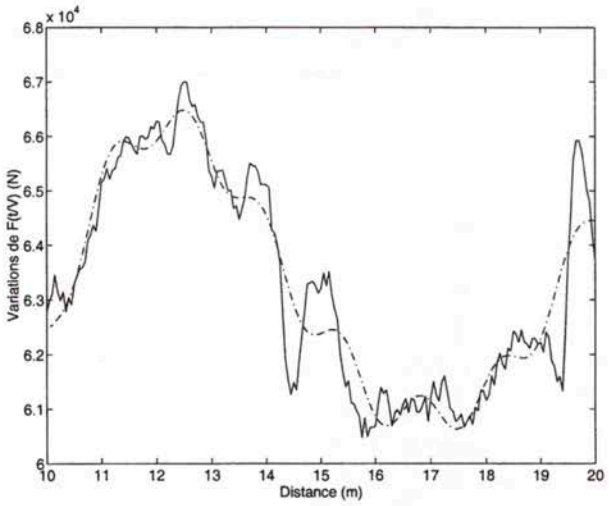


Figure 8.32 : Variations de la force d'impact $F(x/V)$ du 1^{e} essieu du modèle linéaire à 3 essieux. (–) résolution numérique et (-.) échantillonnage avec les $\{f_k\}_{k\in I_4}$.

On effectue maintenant (figure 8.33) l'échantillonnage à l'aide des fonctions $\{\tilde{f}_k\}_{k=1}^4$ telles que :

$$\tilde{f}_k \; : \; t \mapsto f_k(\operatorname{Im} \lambda_k, t)$$

ce qui revient à négliger les coefficients d'amortissement dans les équations du mouvement et donc à considérer que les vibrations des suspensions sont non amorties.

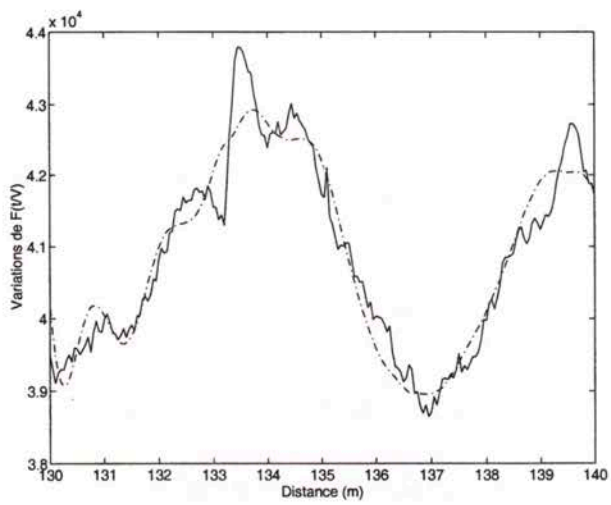


Figure 8.33 : Variations de la force d'impact $F(x/V)$ du 1^{e} essieu du modèle non-linéaire à 3 essieux. (–) résolution numérique et (-.) échantillonnage avec $\{\tilde{f}_k\}_{k=1}^4$.

Signaux expérimentaux

On utilise maintenant des variations de forces d'impact fournies par un véhicule instrumenté canadien (voir page 247) dont on connaît les caractéristiques mécaniques. Ceci permet de calculer les fonctions de base f_k et $\tilde{f}_k$ et on obtient les graphes suivants.

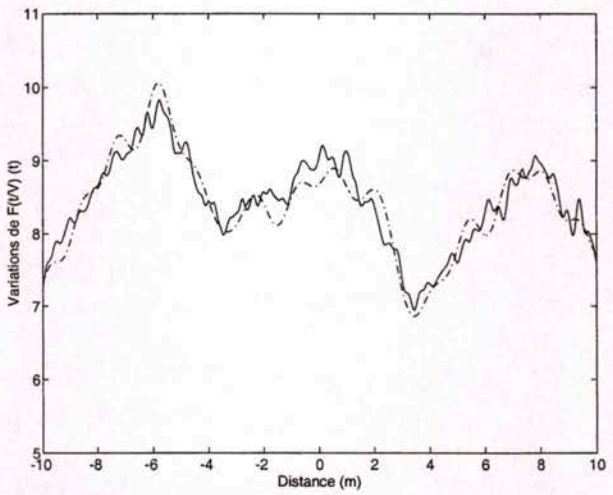


Figure 8.34 : Variations de la force d'impact $F(x/V)$ du 2e essieu du tracteur. (–) résolution numérique et (-.) échantillonnage avec $\{\tilde{f}_k\}_{k\in I}$.

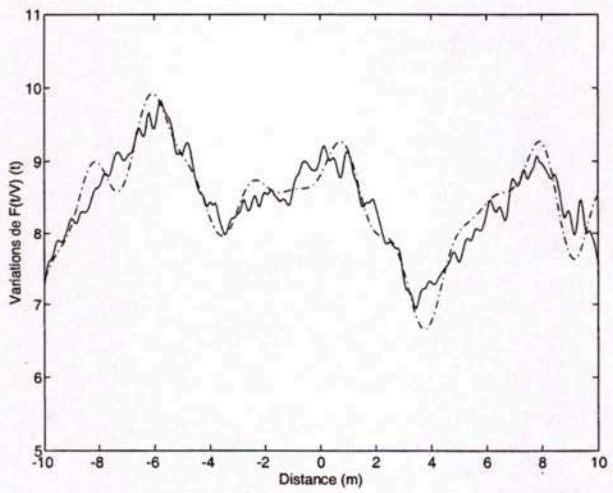


Figure 8.35 : Variations de la force d'impact $F(x/V)$ du 2e essieu du tracteur. (–) résolution numérique et (-.) échantillonnage avec $\{\tilde{f}_k\}_{k=1}^{4}$.

Influence de l'uni

L'étude des modèles simplifiés ainsi que l'exposé du paragraphe 8.5 ont montré que l'uni de la chaussée et ses dérivées intervenaient explicitement dans l'expression des forces d'impact des essieux. Pourtant dans les deux paragraphes précédents, on a obtenu de bonnes approximations des forces d'impact sans faire intervenir les dérivées de l'uni de la chaussée. On cherche ici à expliquer cette apparente contradiction.

Si par exemple on reprend les équations du modèle linéaire de véhicule à trois essieux (page 201) en négligeant l'amortissement du pneumatique, la force d'impact de chacun des essieux est donnée par :

$$F_i(t) = -k_{ei}\left(y_i(t) - r(t - \frac{\tilde{D}_i}{V})\right)$$

et l'équation du mouvement de l'essieu i est :

$$m_i\ddot{y}_i + k_{e,i}\left(y_i(t) - r(t - \tilde{D}_i/V)\right) - C_i\left(\dot{y} + \epsilon_i D_i\dot{\theta} - \dot{y}_i\right) \\ -K_{ei}\ \left(y(t) + \epsilon_i D_i\theta(t) - y_i(t)\right) = -m_i g.$$

En introduisant F_i comme fonction inconnue, l'équation précédente devient :

$$m_i\ddot{F}_i + C_i\dot{F} + (k_{e,i} + K_{e,i})F = k_{e,i}\left(m_i g + m_i\ddot{r} + C_1\dot{r} + K_{e,i}r\right) + h(y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}), \tag{8.37}$$

ce qui montre que l'uni intervient dans l'expression de F_i par le biais de r, $\dot{r}$ et $\ddot{r}$. Sur une portion plane de chaussée, si on considère que la force d'impact oscille autour du poids statique de l'essieu, la moyenne temporelle de la quantité $t \mapsto h(y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})$ est P_i^{stat}, le poids statique de l'essieu i. L'équation (8.37) devient alors :

$$m_i\ddot{F}_i + C_i\dot{F} + (k_{e,i} + K_{e,i})F = (k_{e,i} + K_{e,i})P_i^{stat} \quad + \\ k_{e,i}\left(m_i\ddot{r} + C_1\dot{r} + K_{e,i}r\right) \quad + \quad \tilde{h}(y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})$$

où la quantité $t \mapsto \tilde{h}(y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})$ est de moyenne nulle. Si on considère des valeurs réalistes de m_i, C_1, $K_{e,i}$ et r, il est immédiat que la contribution du terme $C_1\dot{r}$ est très faible par rapport à $K_{e,i}r$, de même le graphe 8.36 ci-dessous (obtenu pour les caractéristiques retenues dans le modèle présenté page 201) montre que $\ddot{r}$ est négligeable par rapport g. Les seules contributions significatives sont donc celles du profil en long r et de la pesanteur g dont nous avons tenu compte dans les validations précédentes.

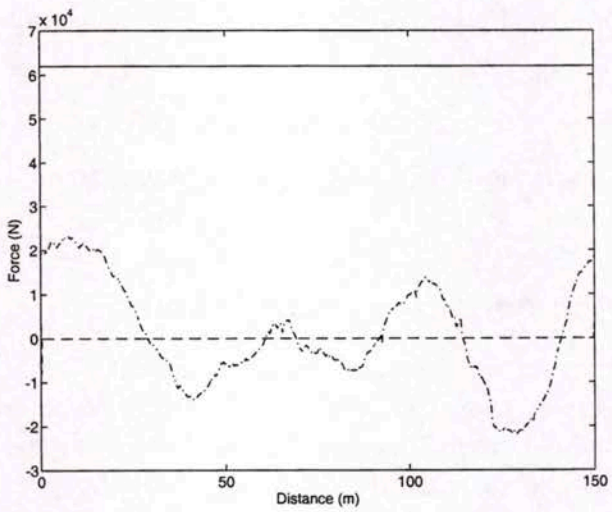


Figure 8.36 : Variations des quantités $t \mapsto m_i \ddot{r}(t)$ (- -) et $t \mapsto K_{e,i} r(t)$ (-.) par rapport à la masse $m_i g$ (–) pour une portion de la RN10 (Trappes - 78).

8.7 Transferts de charges permanents

Jusqu'à présent, on a toujours considéré que les véhicules simulés étaient isolés c'est-à-dire qu'aucune force extérieure autre que les effets de pesanteur ne leur était appliquée. Dans ce paragraphe, on va cherché à étudier les effets sur les variations des forces d'impact des essieux, des efforts s'opposant à la progression du véhicule. On fait l'hypothèse que les deux principales causes de résistance à l'avancement du véhicule sont :

- les effets aérodynamiques
- les frottements au contact pneumatique-chaussée.

On va être ainsi amené à s'intéresser aux transferts de charges permanents entre essieux. En effet dès lors que le véhicule n'est plus un système isolé, on perd la relation :

$$P_{stat} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T F(u)du$$

reliant le poids statique d'un essieu à la moyenne temporelle de sa force d'impact.

8.7.1 Mise en équation du problème

La démarche est présentée dans un cadre relativement général a priori indépendant du modèle étudié mais chaque étape de la mise en équation est illustrée dans le cas d'un poids lourds rigide à deux essieux (figure 8.37). Ce poids lourd est modélisé par un système à deux degrés de liberté.

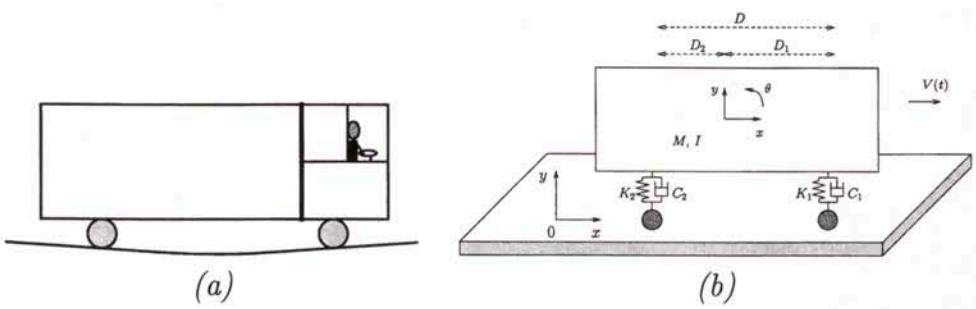


Figure 8.37 : Un poids lourd rigide à deux essieux (a) et sa modélisation (b).

On désigne par forces de freinage tous les phénomènes qui ont tendance à ralentir la progression du véhicule le long de la chaussée. Les origines de ces phénomènes peuvent être diverses mais en première approximation on peut

considérer que la résultante de ces efforts est une force dans le sens et la direction de $(O, -\vec{x})$. Ainsi, si le poids lourd veut garder une vitesse constante, il doit, pour compenser ces forces de freinage, à chaque instant posséder un couple moteur $C_m > 0$.

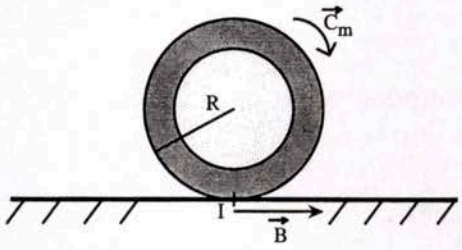


Figure 8.38 : Contact pneumatique-chaussée.

Sachant qu'il y a roulement sans glissement au point I de contact entre le pneumatique et la chaussée (cf. figure 8.38), on a la relation:

$$\|\vec{C}_m\| = R * \|\vec{B}\| \tag{8.38}$$

où $\vec{B}$ est la force de réaction horizontale exercée par le sol sur la roue. Ainsi pour l'exemple choisi, en tenant compte de ces forces de freinage et du couple moteur, les équations du mouvement en translation sont en projection sur $(O, \vec{x})$:

$$M\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B - \sum F_{freinage} \\ -mg + F_1(y,\theta,t) + F_2(y,\theta,t) \end{pmatrix} \tag{8.39}$$

et pour le tangage :

$$I\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\sum_{i=1}^{2}(-1)^i D_i F_i(y,\theta,t) + \mathcal{Q}(t) \tag{8.40}$$

avec $\mathcal{Q}(t) = \mathcal{M}_{\vec{T}/H} + \mathcal{M}_{\sum \vec{F}_{freinage}/H}$ où H est le centre d'inertie du chassis considéré. F_1 (resp. F_2) représente la force exercée par l'essieu 1 (resp. 2) sur le chassis. Plus généralement, le système différentiel obtenu est alors de la forme :

$$\begin{cases} \dot{Y} + \mathbf{A}Y = \mathbf{f}_m \\ Y(t_0) = 0 \end{cases} \tag{8.41}$$

avec $\mathbf{f}_m = \mathbf{f} + \mathbf{f}^-$ où $\mathbf{f}^-$ est la contribution des forces de freinage. On vérifie qu'étant donné les origines du problème, les hypothèses du théorème de

Hille-Yosida ([Dau85c], p.385) sont vérifiées et que donc l'opérateur $\mathbf{A}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe noté $G(t)$ (on peut également vérifié que ce semi-groupe est prolongeable en un groupe). Ainsi, si on note formellement $G(t) = e^{At}$, on peut écrire la solution de (8.41) sous la forme :

$$Y(t) = e^{-At} \int_{t_0}^{t} e^{Au} \mathbf{f}_m(u) du.$$

Par exemple pour le modèle simple à deux degrés de liberté, le système différentiel s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_1 \begin{pmatrix} y \\ \theta \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_1(t) + (T + \sum F_{freinage})/M \\ R_2(t) + \frac{\mathcal{Q}(t)}{I} \end{pmatrix} \tag{8.42}$$

avec :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{k_1+k_2}{m} & -\frac{k_1 D_1 - k_2 D_2}{m} & \frac{\beta_1+\beta_2}{m} & -\frac{\beta_1 D_1 - \beta_2 D_2}{m} \\ -\frac{k_1 D_1 - k_2 D_2}{I} & \frac{k_2 D_2^2 + k_1 D_1^2}{I} & -\frac{\beta_1 D_1 - \beta_2 D_2}{I} & \frac{\beta_2 D_2^2 + \beta_1 D_1^2}{I} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_1(t) \\ R_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{T + \sum F_{freinage}}{m} \\ \frac{\mathcal{Q}(t)}{I} \end{pmatrix}.$$

où R_1 et R_2 dépendent des efforts de pesanteurs ainsi que de l'uni de la chaussée. La solution de (8.41) peut ainsi s'écrire :

$$Y(t) = e^{-At} \int_{t_0}^{t} e^{Au} \mathbf{f}(u) du + \int_{t_0}^{t} e^{Au} \mathbf{f}^-(u) du$$

et puisque $e^{-At} \int_{t_0}^{t} e^{Au} \mathbf{f}(u) du$ représente la solution de (8.41) lorsque l'on néglige les effets des forces de freinage, le transfert de charge entre essieux est donné par :

$$\Delta(t) = \int_{t_0}^{t} e^{Au} \mathbf{f}^-(u) du.$$

Si l'on suppose que l'on peut écrire $\mathbf{f}^-(t) = \mathbf{f}_0^- + b(t)$ avec $\|b\|_\infty = o(\mathbf{f}_0^-)$ alors on a :

$$\int_{t_0}^{t} e^{Au} b(u) du = O(\|b\|_\infty) = o(\mathbf{f}_0^-),$$

soit :

$$\Delta(t) = \int_{t_0}^{t} e^{Au}\, \mathbf{f}_0^- du + o(\mathbf{f}_0^-).$$

Ainsi pour le modèle associé à l'opérateur $\mathbf{A}_1$ puisque l'on a $\det \mathbf{A}_1 = \frac{k_1 k_2 (D_1+D_2)^2}{mI} \neq 0$, on a :

$$\Delta(t) = e^{\mathbf{A}_1 t}\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{f}_0^- - \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{f}_0^- + e^{\mathbf{A}_1 t}\int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}_1 u} b(u) du$$

et puisque les vibrations du véhicule sont amorties on a $e^{\mathbf{A}_1 t}\mathbf{A}_1^{-1} f_0^- \to 0$ quand t devient grand. Une fois le régime transitoire terminé, on a donc :

$$\Delta(t) \approx -\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{f}_0^-,$$

soit si l'on considère que la vitesse du véhicule est constante i.e. $\vec{T} + \sum \vec{F}_{freinage} = \vec{0}$:

$$\Delta(t) \approx \frac{\mathcal{Q}_0}{k_1 k_2 D^2} \begin{pmatrix} k_1 D_1 - k_2 D_2 \\ k_1 + k_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En faisant l'hypothèse que la force d'impact $F_i(t)$ pour l'essieu i est telle que :

$$F_i(t) = k_{ei} * \Big(y(t) - (-1)^i D_i \theta_i(t) - r(t)\Big) + C_i * \left(\frac{dy}{dt} - (-1)^i D_i \frac{d\theta_i}{dt} - \frac{dr}{dt}\right),$$

il vient que les valeurs moyennes des reports de charge pour le véhicule rigide à deux essieux sont alors données par :

$$F_{a,r} = \Delta F_1 = -\Delta F_2 = \frac{2\mathcal{Q}_0 D_1 k_1}{D k_2}.$$

Remarque : Les calculs ci-dessus sont réalisés dans le cas où le moment d'inertie en tangage du véhicule est donné par :

$$I = \frac{M}{12} * (\tilde{l}^2 + h^2),$$

$\tilde{l}$ et h étant respectivement la longueur et la hauteur modifiée du véhicule, la masse étant supposée répartie de façon homogène à l'intérieur du véhicule. On considère la hauteur modifiée $\tilde{l} = \alpha l$, $\alpha \in [0, 1]$ afin de prendre en compte le fait que le chargement est plutôt situé dans la partie basse du véhicule.

8.7.2 Interprétation physique

L'étude précédente montre donc clairement que la prise en compte des forces de freinage entraîne des modifications au niveau de la distribution des forces d'impact des essieux. Nous avons montré que, pour conserver une vitesse constante, un poids lourds doit posséder un couple moteur $\vec{C}_m$ tel que: $\sum \vec{F}_{freinage} + \vec{F}_{\vec{C}_m} = \vec{0}$. Mais compte tenu de considérations géométriques, il advient alors que:

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{freinage}} + \vec{C}_m \neq \vec{0},$$

ce qui fait apparaître un effet de tangage sur le chassis du poids lourd.

Nous tentons maintenant de quantifier ce phénomène en recensant et en évaluant les forces et frottements auxquels est soumis un poids lourd circulant à vitesse constante sur une chaussée. On peut mentionner trois phénomènes majeurs ([Deu70]) tendant à freiner la progression d'un véhicule le long d'une chaussée:

(*) F_a la force aérodynamique de pénétration dans l'air,

(**) F_r la résistance à l'avancement des roues au contact de la chaussée,

(***) la perte d'énergie lors de la transmission du mouvement du moteur jusqu'aux roues.

Le phénomène (***) se fait principalement par effet Joule et met en jeu des forces intérieures au système dont nous ne tenons pas compte. Notons toutefois que cette dissipation concerne approximativement 10% de la puissance émise par le moteur. L'origine (**) réside dans le fait que le pneumatique et la chaussée sont deux surfaces déformables, rugueuses possédant des aspérités. Quantitativement, à 80 km/h, on peut estimer que cette force, opposée au déplacement, est de 6 kg/tonne/essieu. De façon plus précise, on peut modéliser cette force de la façon suivante:

$$F_r = a + bV^n$$

où a varie de 5 à 10 kg/tonne/essieu. Étant donné les vitesses d'un poids lourd, la contribution du terme bV^n est relativement faible. Pour une description plus complète de ce phénomène voir [Deu70], page 84.

À haute vitesse, il apparaît clairement que la force aérodynamique prend une importance prépondérante. Son expression est donnée par:

$$F_a = \frac{1}{2}\rho_a V^2 S C_x$$

où C_x est le coefficient de pénétration dans l'air dans la direction $(O, \vec{x})$ (≈ 0.6 pour un poids lourd). Le bilan des forces en translation nous donne :

$$\vec{T} - \vec{F_a} - \vec{F_r} = \vec{0}$$

soit $T - F_r = F_a$. Pour la rotation du chassis, on obtient le bilan suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0(t) &= (T - F_r)h_0 + h_1 F_a \\ &= \frac{1}{2}\rho_a V^2 S C_x (h_0 + h_1) \end{aligned}$$

où S est la surface frontale de la cabine du poids lourd et h_1 est la distance verticale entre le centre d'intertie du chassis et le point d'application de la résultante de F_a et h_0 la hauteur par rapport au sol du centre d'inertie du chassis.

8.7.3 Application numérique

Un poids lourd à deux essieux roule à $110\,km/h$, il possède une surface S de $6\,m^2$ et une distance entre les deux essieux de tête de $3\,m$, en prenant $h_0 + h_1 = 1.5\,m$, il vient :

$$\mathcal{Q}(t) \approx 3340\,N.$$

Soit $\Delta(t) = \pm 170\,kg$. Ce qui représente pour le premier essieu d'un poids lourds dont le poids statique est de $3.5\,t$ une différence de 5%.

8.7.4 Extension au cas d'autres modèles de poids lourds

Le raisonnement effectué dans le cas d'un poids lourd à deux essieux se généralise clairement à tout autre type de véhicule lourd, ainsi pour un tracteur et une remorque (cf. figure 8.39), le calcul est toujours valable en prenant pour D la distance entre les deux essieux du tracteur.

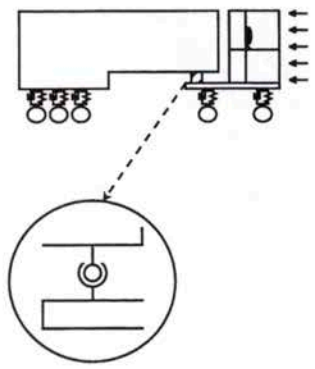


Figure 8.39 : Poids lourd à cinq essieux, liaison entre le tracteur et la remorque.

8.8 Validation des reports de charge entre essieux

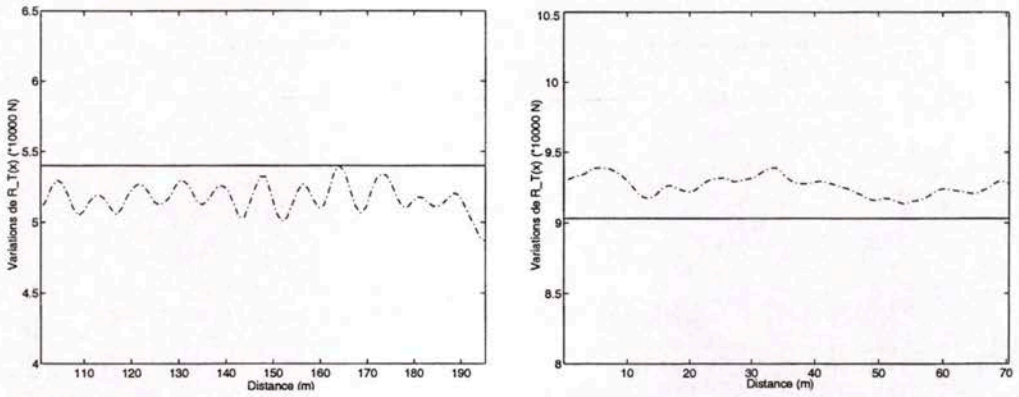
Les divers dispositifs actuels de pesage en marche par système multicapteur montrent un biais systématique sur la mesure de la force d'impact de certains essieux de poids lourds. Ainsi, on a pu observer que l'essieu de tête d'un poids lourd est généralement sous-pesé alors que le second essieu d'un tracteur se trouve au contraire sur-pesé. Ce biais systématique, même s'il ne représente que quelques pourcents de la mesure, est très préjudiciable à la précision des divers systèmes et méthodes de pesage en marche des véhicules lourds.

La procédure d'estimation du poids statique que nous proposerons tentera de tenir compte de ces reports par le biais de la quantité notée $F_{a,r}$. En utilisant les signaux de force d'impact donnés par un poids lourd instrumenté, on montre que l'explication et la quantification des reports données au paragraphe 8.7 semblent correspondre à une partie des biais effectivement enregistrés.

Partant du signal $t \mapsto F(t)$ enregistré par le poids lourd, on définit la fonction R_T par :

$$R_T \, : \, x \mapsto \frac{1}{T} \int_x^{x+T} F(t)dt.$$

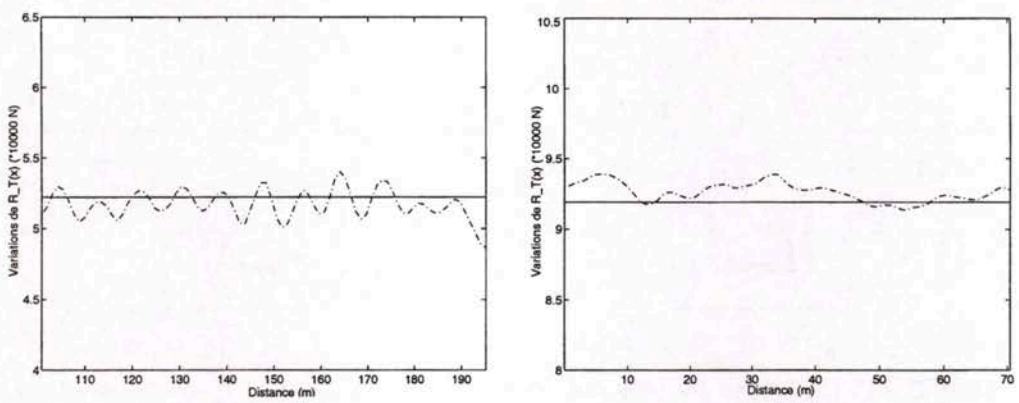
Par exemple pour un $T = L/V$ avec $L = 20\,m$ et $V = 20\,m.s^{-1}$, on obtient pour le premier et le second essieu du tracteur d'un poids lourd à cinq essieux (type 5) la figure 8.40 suivante.



(a) *(b)*

Figure 8.40 : Différence entre le poids statique (–) et la quantité R_T (-.) pour (a) le premier et (b) le second essieu du tracteur.

Si l'on prend en compte les effets de la force $F_{a,r}(t)$, on obtient alors les deux figures 8.41-(a) et 8.41-(b) ci-dessous qui montrent que les variations de $F(t) - F_{a,r}(t)$ sont quasiment centrées autour du poids statique de l'essieu.



(a) *(b)*

Figure 8.41 : Différence entre le poids statique (–) et la quantité R_T (-.) en tenant compte de $F_{a,r}$. *(a)* premier essieu du tracteur et *(b)* second essieu du tracteur.

Nous verrons pourtant dans le chapitre suivant que cette explication n'est pas tout à fait suffisante et on peut envisager une seconde origine à ces biais. Sans entrer dans le détail de sa description ([Sif82a], [Sif82b]), on peut retenir qu'un capteur est constitué d'un barreau piezo-électrique enrobé dans une couche de résine et entouré de mousse, voir figure 8.42.

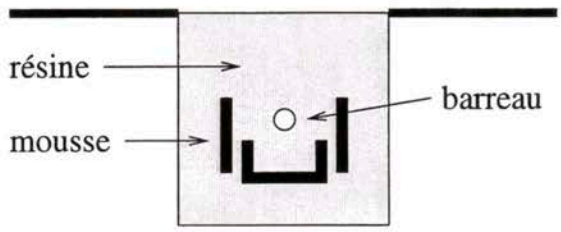


Figure 8.42 : Schéma simplifié d'un capteur piézo-électrique.

Les bandes de mousse permettent, en théorie, au capteur de n'être sensible qu'aux efforts verticaux. Ceci n'est bien entendu qu'approximatif et particulièrement lorsque les efforts appliqués par le pneumatique à la chaussée ont une composante parallèle à la chaussée (figure 8.43). Ce phénomène vient des frottements au contact pneumatique-chaussée et est particulièrement sensible lorsqu'il s'agit d'essieux moteurs. Les efforts enregistrés par le capteur ne sont donc pas directement ceux recherchés et ceci peut expliquer les biais de mesures observés pour les essieux d'un tracteur.

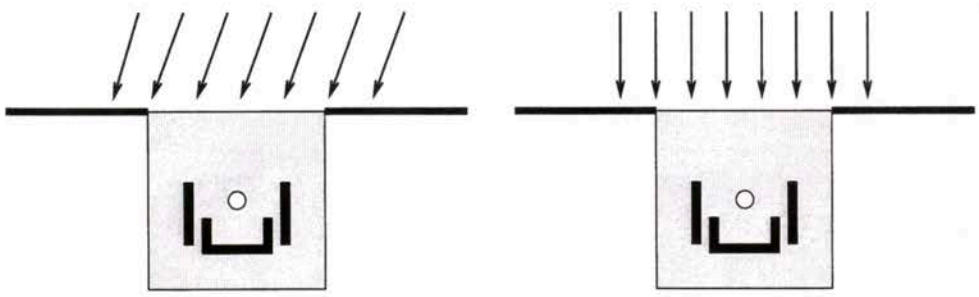


Figure 8.43 : Efforts appliqués à la chaussée au passage d'un essieu, celui-ci se déplaçant de gauche à droite sur la figure, *(a)* avec un frottement au contact pneumatique-chaussée et (b) sans forttement.

Chapitre 9

Pesage en marche par système multi-capteurs

Ce chapitre permet de faire la liaison entre les outils d'échantillonnage développés dans la première partie de ce mémoire et les modèles mécaniques développés dans le chapitre précédent. On cherche un estimateur permettant d'approcher le poids statique d'un essieu à partir de mesures ponctuelles de sa force d'impact $\{F(t_i)\}_{i=1}^{r}$.
La procédure d'estimation proposée utilise les résultats du chapitre précédent afin d'exhiber une famille de fonctions permettant d'approximer les variations de la force d'impact. Ensuite, on utilise les résultats de la première partie afin de reconstruire les fluctuations de la force d'impact sur un intervalle de temps associé aux fréquences de vibration des suspensions.

9.1 Estimateur du poids statique

Avant de détailler la procédure d'estimation du poids statique mise au point, on détermine les conditions à remplir afin de pouvoir obtenir une estimation non biaisée du poids statique d'un essieu.

Si l'on considère que la force d'impact $F(t)$ d'un essieu est constituée du poids statique de celui-ci augmenté d'une composante dynamique :

$$F(t) = P^{stat} + f^{dyn}(t)$$

et en prenant les notations de la figure 9.1, la réponse du j^{e} capteur est donnée par :

$$R_j = F(t_j) + e_j = P^{stat} + f^{dyn}(t_j) + e_j$$

où e_j est le bruit sur la mesure provenant du capteur j. On peut supposer que dans une large mesure, le bruit e_j est indépendant de $f^{dyn}(t_j)$. Et le problème est de trouver un estimateur E_{stat} tel que :

$$E_{stat}\left[\{R_j\}_{j=1}^{r}\right] = P^{stat}. \tag{9.1}$$

9.1.1 Impossibilité du pesage en marche mono-capteur

D'après la relation (9.1), pour que l'estimation soit non biaisée il faut donc que pour tout véhicule circulant sur les capteurs, on ait :

$$E_{stat}\left[\{f^{dyn}(t_j)\}_{j=1}^{r}\right] + E_{stat}\left[\{e_j\}_{j=1}^{r}\right] = 0$$

et puisque $\{f^{dyn}(t_j)\}$ et $\{e_j\}$ sont indépendants, on doit avoir :

$$E_{stat}\left[\{f^{dyn}(t_j)\}_{j=1}^{n}\right] = E_{stat}\left[\{e_j\}_{j=1}^{n}\right] = 0.$$

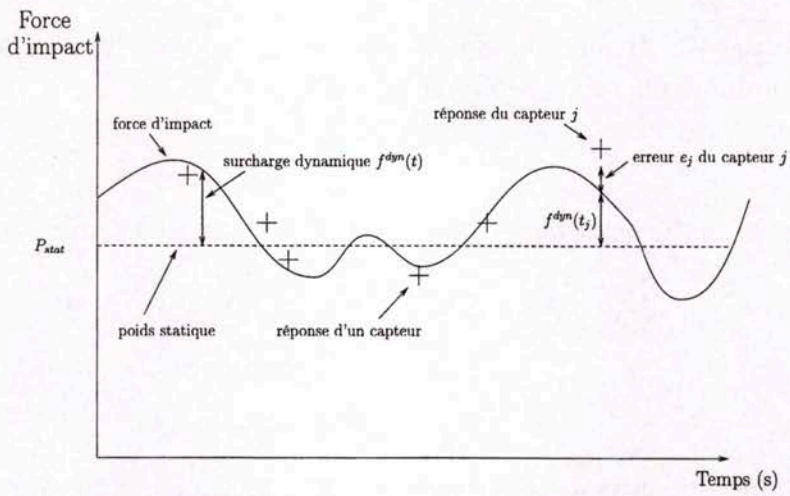


Figure 9.1 : Ce que mesurent les capteurs.

Dès lors que l'on dispose d'un seul capteur, la condition $E_{stat}\left[\{f^{dyn}(t_{j_0})\}\right] = 0$ signifie qu'il n'y a pas de corrélation entre les variations de la force d'impact et l'uni de la chaussée. Ceci est bien entendu contraire à la décomposition spectrale des forces d'impact obtenue au chapitre précédent. Avec un seul capteur on a donc :

$$E_{stat}\left[\{f^{dyn}(t_{j_0})\}\right] \neq 0$$

ce qui assure que l'estimation du poids statique est biaisée.

9.1.2 Pesage en marche multicapteur

Si l'on considère maintenant que l'on dispose d'une famille de r capteurs. Il s'agit donc de trouver un estimateur tel que l'on ait à la fois :

$$E_{stat}\left[\{f^{dyn}(t_j)\}_{j=1}^{r}\right] = 0 \quad \text{et} \quad E_{stat}\left[\{e_j\}_{j=1}^{r}\right] = 0.$$

On considère l'essieu d'un poids lourd dont la valeur de la force d'impact à l'instant t est notée $F(t)$. On note $F_{a,r}(t)$ les transferts de charges entre l'essieu considéré et les autres essieux, ces reports étant dus aux efforts extérieurs s'appliquant au véhicule, par exemple les frottements et les effets aérodynamiques. Soit T un intervalle de temps tel que $t_j \in T$ pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, on définit alors la quantité :

$$[F(t)] = \frac{1}{T}\int_T (F(t) - F_{a,r}(t))\, dt.$$

On peut écrire :

$$[F(t)] = P^{stat} + \frac{1}{T}\int_T f^{dyn}(t)dt - \frac{1}{T}\int_T F_{a,r}(t)dt.$$

$F_{a,r}(t)$ (voir page 232) représentant l'influence des reports de charges entre essieux, on a donc que la moyenne de la résultante :

$$F(t) - F_{a,r}(t)$$

sur une longue période est nulle. Ainsi pour T suffisamment grand, on a :

$$\frac{1}{T}\int_T f^{dyn}(t)dt - \frac{1}{T}\int_T F_{a,r}(t)dt \approx 0.$$

Soit finallement :

$$[F(t)] = P^{stat},$$

$[F(t)]$ est donc un estimateur remplissant les conditions annoncées afin de fournir une estimation non biaisée du poids statique de l'essieu considéré. Il nous faut maintenant montrer comment calculer effectivement $[F(t)]$ à partir simplement des mesures de force d'impact $\{F(t_j)\}_{i=1}^r$ ou plus généralement à partir des $\{R_j\}_{i=1}^r$.

9.2 Estimation du poids statique

Cette partie a pour objet de détailler les diverses étapes de la procédure d'estimation présentée ci-dessus et aboutissant au calcul de $[F(t)]$ à partir des $\{R_j\}_{i=1}^r$. On s'intéresse principalement à la façon dont sont obtenus le signal $F(t)$ et la période d'intégration T.

9.2.1 Reconstruction de $F(t)$

On dispose des mesures $\{R_j\}_{j=1}^r$ ainsi que d'informations sur la silhouette du véhicule :

- nombre d'essieux,
- espacements des essieux,
- vitesse du véhicule,
- uni de la chaussée.

On sait en s'appuyant sur des modélisations analogues à celles du chapitre précédent, qu'il existe un système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\dot{u} + \mathbf{A}u = \mathbf{f} \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{9.2}$$

modélisant le comportement vibratoire du véhicule considéré. La condition $u(0) = 0$ indique qu'à l'instant initial, le véhicule est supposé en équilibre statique. Les éléments propres de $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ sont a priori inconnus puisqu'ils font intervenir raideur et amortissement des suspensions, inertie du chassis, masse des essieux,... Mais on a vu que la solution de (9.2) pouvait s'écrire sous la forme :

$$u(t) = \sum_{k \in I} \alpha_k \, e^{-\int_0^t \lambda_k(v)dv} \int_0^t e^{\int_0^s \lambda_k(v)dv} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(s)ds$$

les coefficients α_k étant calculés à partir des conditions initiales et les λ_k correspondant aux valeurs propres de $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$. Ainsi, si la réponse du pneumatique d'un essieu est donnée par la fonction k à laquelle on ajoute un coefficient d'amortissement visqueux C, il vient que la force d'impact appliquée par l'essieu sur la chaussée est de la forme :

$$F(t) = k\left(\mathbf{H}^T u(t) - r(t)\right) + C * \left(\mathbf{H}^T \frac{du}{dt}(t) - \frac{dr}{dt}(t)\right)$$

où le vecteur $\mathbf{H}$ est tel que $\mathbf{H}^T u$ corresponde à la composante du vecteur u représentant la compression du pneumatique de l'essieu considéré.

L'étude des quelques modèles de véhicules effectuée précédemment nous a montré que l'erreur faite en remplaçant la réponse du pneumatique par une raideur équivalente était faible, ceci justifie que l'on puisse linéariser la relation précédente autour de la raideur équivalente k_e du pneumatique, soit :

$$F(t) = k_e * \left(\mathbf{H}^T u(t) - r(t)\right) + C * \left(\mathbf{H}^T \frac{du}{dt}(t) - \frac{dr}{dt}(t)\right).$$

En injectant l'expression de $u(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} F(t) = &-k_e * r(t) + C * \left(\sum_{k \in I} \alpha_k \, f(t) - \frac{dr}{dt}(t)\right) \\ &+ \sum_{k \in I} \alpha_k \left(k_e - C\lambda_k(t)\right) e^{-\int_0^t \lambda_k(v)dv} \int_0^t e^{\int_0^s \lambda_k(v)dv} f(s)ds, \end{aligned}$$

avec $f(t) = \mathbf{H}^T \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t)$. Cette dernière expression montre que la force d'impact $F(t)$ est engendrée par card $I + 3$ fonctions :

$$\begin{cases} h_1(t) = f(t) \\ h_2(t) = r(t) \\ h_3(t) = \frac{dr}{dt}(t) \\ h_k(\lambda_{k-3}, t) = e^{-\int_0^t \lambda_k(v)dv} \int_{t_0}^t e^{\int_0^s \lambda_k(v)dv} f(s)ds \quad k \in \{4, \ldots, n+3\}. \end{cases}$$

Lors de la construction des divers modèles simplifiés de véhicules, on a vu que le vecteur $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}$ contenait les contributions des efforts de pesanteur ainsi que l'influence de l'uni de la chaussée et de ses dérivées. On décompose alors $\mathbf{f}$ sous la forme :

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_u(t) + \mathbf{f}_p$$

où le vecteur $\mathbf{f}_p$ représente la contribution des efforts de pesanteur. On définit alors $f_u(t) = \mathbf{H}^T\mathbf{f}_u(t)$ et $f_p = \mathbf{H}^T\mathbf{f}_p(t)$ (f_p est donc une constante généralement la constante de pesanteur g) et la famille de fonctions :

$$\begin{cases} g_1(t) = 1 \\ g_2(t) = r(t) \\ g_3(t) = \frac{dr}{dt}(t) \\ g_k(\lambda_{k-3}, t) = e^{-\int_0^t \lambda_k(v)dv} \int_0^t e^{\int_0^s \lambda_k(v)dv} ds \quad k \in \{4, \dots, n+3\} \\ g_{k+n}(\lambda_{k-3}, t) = e^{-\int_0^t \lambda_k(v)dv} \int_0^t e^{\int_0^s \lambda_k(v)dv} f_u(s)ds \quad k \in \{4, \dots, n+3\} \end{cases}$$

où $n = \text{card}\, I$, engendre la fonction $F(t)$. Le problème de la reconstruction des variations de la force d'impact se ramène ainsi au problème de l'estimation des coefficients $\{\beta_i\}_{i\in\{1,\dots,2n+3\}}$ ainsi que des valeurs propres $\{\lambda_i(t)\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ tels que :

$$F(t) = \sum_{i=1}^{3} \beta_i g_i(t) + \sum_{i=4}^{n+3} \beta_i g_i(\lambda_{i-3}, t) + \sum_{i=n+4}^{2n+3} \beta_i g_i(\lambda_{i-n-3}, t).$$

L'estimation des $\{\beta_i\}_{i=1}^{2n+3}$ est linéaire et celle des $\{\lambda_i(t)\}_{i=1}^{n}$ non linéaire. On remarque alors que $F(t) - \sum_{i=1}^{3} \beta_i g_i(t) - \sum_{i=4}^{n+3} \beta_i g_i(\lambda_{i-3}, t)$ est la solution du problème :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{u}} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\tilde{u} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_u \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}_0 \end{cases}$$

où cette fois $\mathbf{f}_u$ ne dépend plus que des caractéristiques de l'uni de la chaussée qui sont connues. À ce stade, on peut envisager une première procédure d'estimation récursive qui consiste en une estimation des coefficients $\{\beta_i\}$ par une technique de reconstruction couplée avec une estimation des valeurs propres $\{\lambda_i(t)\}$ par une méthode de filtrage de Kalman.

En effet, dès lors que l'on connaît les coefficients $\{\beta_i\}_{i=1}^{n+3}$ ainsi que les valeurs propres $\{\lambda_i(t)\}_{i=1}^{n}$, on peut calculer les quantités :

$$\{\tilde{R}_j\}_{j=1}^{r} = \left\{ F(t_j) - \sum_{i=1}^{3} \beta_i g_i(t_j) - \sum_{i=4}^{n+3} \beta_i g_i(\lambda_{i-3}(t_j), t_j) \right\}_{j=1}^{r}$$

et puisque l'on a $\tilde{R}_j = \mathbf{H}^T \tilde{u}(t_j)$, les $\{\tilde{R}_j\}_{j=1}^r$ constituent des mesures d'observation du système :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{u}} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\tilde{u} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_u \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}_0. \end{cases}$$

Le filtre de Kalman permet alors d'estimer les coefficients de $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ qui correspondent aux valeurs propres $\{\lambda_i(t)\}_{i=1}^n$. Schématiquement, la procédure se présente de la façon suivante :

Choix de $\{\beta_i^0\}_{i=1}^{n+3}$ et $\{\lambda_i^0(t)\}_{i=1}^n$.

POUR i DE 1 À p,
$\rightarrow$ Estimation des $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ par filtrage de Kalman

$\rightarrow$ Estimation des $\{\beta_i\}_{i=1}^{2n+3}$ par reconstruction

$\rightarrow$ $\beta_1^0 = \beta_1$, $\beta_2^0 = \beta_2$, ..., $\beta_{n+3}^0 = \beta_{n+3}$

$\rightarrow$ $\lambda_1^0(t) = \lambda_1(t)$, $\lambda_2^0(t) = \lambda_2(t)$, ..., $\lambda_n^0(t) = \lambda_n(t)$
FIN POUR i.

L'algorithme ci-dessus permet d'obtenir les variations de la force d'impact à partir des mesures ponctuelles de celle-ci donnée par les capteurs. Si on suppose que les bruits sur les mesures e_j, $j = 1, \ldots, r$ ne possèdent pas de biais systèmatiques i.e. $1/r \sum_j e_j \approx 0$, alors on a vu que les algorithmes de reconstruction étaient tels que la différence $\Delta(t)$ entre le signal initial et sa reconstruction vérifiait (voir conlusion page 162) :

$$\frac{1}{T}\int_T \Delta(t)dt \approx 0.$$

Ceci permet donc de faire le calcul de $[F(t)]$ non seulement à partir des $\{F(t_j)\}_{i=1}^r$ mais aussi des $\{R_j\}_{i=1}^r$.

9.2.2 Première procédure d'estimation du poids statique

On connaît maintenant les variations du signal $t \mapsto F(t)$, on a vu au paragraphe 8.7 comment calculer la moyenne de la quantité $F_{a,r}(t)$. Il reste à définir la période d'intégration T afin que l'on puisse calculer effectivement $[F(t)]$.

Dès lors que les variations des fonctions $t \mapsto \lambda_i(t)$ restent modérées par rapport aux variations de $F(t)$ (ce que nous avons partiellement vérifié au chapitre précédent), les fonctions $\{g_i(\lambda_{i-3}, t)\}_{i=4}^{n+3}$ ont l'allure de fonctions harmoniques. Il s'agit donc lors du calcul de :

$$\frac{1}{T}\int_T F(t)dt$$

d'intégrer la fonction $t \mapsto F(t)$ sur un nombre entier de fois les pseudo-périodes $\lambda_i(t)/2\pi$. On peut ainsi définir T comme le P.G.C.D. des quantités $\{\lambda_i(t)/2\pi\}_{i=1}^{n}$. Dans la pratique cette formule n'est bien entendu pas aisément applicable, on se contente donc de tenir compte des fréquences propres les plus basses c'est-à-dire celles pour lesquelles l'intégration sur un nombre non entier de périodes est significative. On impose de plus à la période d'intégration T d'être compatible avec la position de la grille de capteurs sur la chaussée. Typiquement, on cherche un T qui soit supérieur de quelques mètres à la quantité L/V, L étant la longueur totale de la grille et V la vitesse de référence des poids lourds sur le tronçon considéré.

On a achevé ainsi le calcul de $[F(t)]$. Même si la procédure proposée est facilement implémentable, nous verrons qu'elle peut être sensiblement allégée puisqu'elle ne tient pas vraiment compte des résultats concernant les approximations des forces d'impact obtenus au chapitre précédent. Avant cela, on présente brièvement la technique d'identification par filtrage de Kalman évoquée ci-dessus.

9.2.3 Le filtrage de Kalman

Pour une description plus complète de la technique et de ses variantes utilisées ainsi que des exemples d'application, le lecteur pourra se reporter à [Naj88], [Hos84] et [Sai97d].

Étant donnée une représentation de la forme :

$$\begin{cases} \dot{X}_s(t) = A(X_s, t) \\ X_s(t_0) = X_{s,0} \end{cases} \tag{9.3}$$

où X_s est le vecteur d'état du système étudié. Le filtrage de Kalman permet d'obtenir une estimation conjointe de l'état et des paramètres du modèle (9.3) dès lors que l'on dispose de mesures d'obervation de $X_s(t)$.

Pour cela, on construit tout d'abord une représentation $\dot{X}(t) = \tilde{A}(X,t)$ associée à (9.3) en introduisant le vecteur :

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_s(t) \\ X_p(t) \end{pmatrix}$$

où X_p est le vecteur des paramètres que l'on cherche à estimer. On suppose que les mesures d'observation $\{Y_i\}_{i=1}^n$ peuvent s'écrire :

$$Y_i = HX(t_i) + V_i$$

H étant une matrice et V_i un bruit blanc gaussien. On définit alors la quantité :

$$X(t_k/t_n) = E[X(t_k)/Y_1, \ldots, Y_n]$$

comme l'espérance conditionnelle du vecteur X à l'instant t_k connaissant les mesures d'observations $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$. De même on définit la matrice $P(t_k/t_n)$ par :

$$P(t_k/t_n) = E[(X(t_k) - X(t_k/t_n))\,(X(t_k) - X(t_k/t_n))^T], \qquad (9.4)$$

elle représente donc la covariance de $X(t_k/t_n)$. On vérifie alors que $X(t_{k+1}/t_k)$ et $P(t_{k+1}/t_k)$ sont respectivement solutions pour $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, des équations différentielles :

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A(X(t_k/t_k), t) \\ \dot{P}(t) &= G(X(t_k/t_k), t)P(t) + P(t)G^T(X(t_k/t_k), t) \end{aligned}$$

où $G(X(t_k/t_k), t)$ est le gradient de $\tilde{A}(X,t)$ au point $X = X(t_k/t_k)$. À l'instant t_{k+1}, la prise en compte de la mesure d'observation Y_{k+1} est réalisée grâce à :

$$\begin{aligned} X(t_{k+1}/t_{k+1}) &= X(t_{k+1}/t_k) + K_{k+1}\,(Y_{k+1} - HX(t_{k+1}/t_k)) \qquad (9.5) \\ P(t_{k+1}/t_{k+1}) &= (I - K_{k+1}H)\,P(t_{k+1}/t_k), \end{aligned}$$

le filtre de Kalman tient compte "linéairement" de la mesure Y_{k+1} ce qui impose la forme de (9.5). Le gain K_{k+1} est tel que :

$$\frac{\partial P(t_k/t_k)}{\partial K_{k+1}} = 0$$

et donc défini par :

$$K_{k+1} = P(t_{k+1}/t_k)H^T \left(HP(t_{k+1}/t_k)H^T + R_k\right)^{-1},$$

R_k étant la matrice de covariance du bruit de mesure V_k. En résumé, partant de $X(t_k/t_k)$ et $P(t_k/t_k)$, on calcule les quantités :

$$\begin{cases} X(t_{k+1}/t_k) = X(t_k/t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \tilde{A}(X(t,t_k),t)dt \\ P(t_{k+1}/t_k) = G(X(t_k/t_k),t_{k+1})P(t_k/t_k)G^T(X(t_k/t_k),t_{k+1}) \end{cases}$$

qui tiennent compte de l'intégration des quantités $X(t_k/t_k)$ et $P(t_k/t_k)$ sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$. Dans la phase suivante, on prend en compte les informations apportées par la mesure Y_{k+1} et on calcule :

$$\begin{cases} K_{k+1} = P(t_{k+1}/t_k)H^T \left(HP(t_{k+1}/t_k)H^T + R_k\right)^{-1} \\ X(t_{k+1}/t_{k+1}) = X(t_{k+1}/t_k) + K_{k+1}\left(Y_{k+1} - HX(t_{k+1}/t_k)\right) \\ P(t_{k+1}/t_{k+1}) = \left(I - K_{k+1}H\right)P(t_{k+1}/t_k). \end{cases}$$

On peut vérifier que l'itération $(X(t/t_k))_{k\in I}$ ainsi définie converge vers $X(t)$ dès que le bruit sur la mesure V_i est tel que $E[V_i] = 0$ c'est-à-dire :

$$E[X(t/t_n) - X(t)] = 0$$

et on a ainsi une estimation non biaisée.

L'observabilité pour un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{9.6}$$

caractérise la possibilité de retrouver l'état du système à partir de l'observation de sa sortie i.e. des $Y_i = HX(t_i) + V_i$. Il existe plusieurs définition de l'observabilité, nous retiendrons la suivante (voir [Naj88] p. 16).

Définition 21 *Un système est observable si la mesure de la sortie permet de remonter à l'état initial.*

Dans le cas linéaire correspondant au modèle (9.6), si l'on note $Y(t) = HX(t)$, la dynamique du vecteur d'état étant régie par :

$$\begin{aligned} X(t_{k+1}) &= (I_d + (t_{k+1} - t_k)A(t_k))X(t_k) \\ &= \phi(k)X(t_k), \end{aligned}$$

il vient que pour tout k, on a :

$$Y_k = H\phi^k X(t_0).$$

Soit sous forme matricielle :

$$Y = \begin{pmatrix} Y_0 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix} = \psi^T X(t_0)$$

où $\psi = \left[H^T, \phi^T H^T, \dots, (\phi^T)^n H^T\right]$. Et pour déterminer $X(t_0)$ à partir de l'observation Y, il faut que la matrice ψ soit non singulière.
L'application du filtre de Kalman dans la procédure d'estimation précédente requiert donc que les mesures $\{R_j\}_{j=1}^r$ vérifie la condition d'observabilité.

Afin de ne pas surcharger la présentation, on ne s'attarde pas sur les questions liées au comportement numérique du filtre. Pour des informations à ce sujet ainsi que des exemples d'utilisation du filtre de Kalman pour l'identification de paramètres d'une structure, on pourra se reporter aux deux dernières références données au début de ce paragraphe.

9.3 Validation de la procédure d'estimation du poids statique

9.3.1 Remarques quant à la validation de la procédure d'estimation

Nous avons signalé qu'il existait en France mais aussi dans d'autres pays européens des sites expérimentaux pour le pesage en marche multicapteur. Pour un certains nombre de poids lourds (de l'ordre d'une centaine en France), on dispose à la fois de mesures enregistrées des forces d'impact de leurs essieux $\{F(t_i)\}_{i=1}^r$ lors de leur passage sur une grille multicapteur mais aussi du poids statique de leurs essieux (mesurés par une balance statique). On peut donc chercher à valider à l'aide de ces données, la procédure de reconstruction et d'estimation proposée ci-dessus.
Dans ce mémoire ne figurent pas toutes les simulations menées, seuls certains résultats significatifs sont présentés. Les données que l'on a utilisées pour la validation sont les suivantes :

- les mesures de forces d'impact fournies par les 24 capteurs de la grille de Trappes pour chacun des essieux de 34 poids lourds à cinq essieux pré-pesés (+ un véhicule test : un déflectographe à deux essieux),
- les variations de la force d'impact d'une remorque instrumentée (université de Hanovre - Allemagne) circulant sur la RN10 près de Trappes,

- les variations de la force d'impact d'un poids lourd (Conseil National de Recherche - Canada) à cinq essieux circulant sur la RN10 près de Trappes et dont le second essieu du tracteur est instrumenté,
- les variations de la force d'impact d'une remorque instrumentée (Centre de Recherche Technique - Finlande) circulant sur la A31 près de Metz.

L'évaluation de la précision des instrumentations des véhicules est délicate puisqu'il n'existe pas de système simple de mesure permettant d'apprécier la précision des forces d'impact fournies par l'instrumentation du véhicule. Pour le véhicule du NRC, ses propriétaires annoncent une précision sur les forces d'impact de l'ordre de 3-4%, [Leb92]. Pour les autres véhicules instrumentés, les propriétaires ne s'engagent sur aucune précision tout en assurant la qualité des mesures fournies.

L'évaluation de la précision des capteurs insérés dans la chaussée est elle aussi très approximative. Le seul étalonnage possible consiste à comparer la force d'impact d'un essieu instrumenté lors de son passage sur le capteur à la réponse de ce même capteur. Mais le crédit à apporter à la mesure fournie par l'essieu instrumenté étant mal connu, le nombre de véhicule instrumenté existant fort réduit et leur location très onéreuse, cette procédure n'est que très peu utilisée.

La procédure d'étalonnage utilisée dans la pratique, dite "procédure d'étalonnage automatique" (voir [Sta91], [Sta98]) est dubitable, elle consiste à calibrer les capteurs en service. On définit tout d'abord un poids statique moyen pour certains essieux de véhicules appartenant à une classe donnée, par exemple le second essieu du tracteur d'un véhicule à cinq essieux. Pour un jeu de véhicules à cinq essieux du trafic courant et de poids statique statique inconnu, le coefficient d'étalonnage d'un capteur est alors déterminé de telle sorte que sa réponse soit centrée autour du poids statique moyen retenu. Même si on a signalé que la mise au point d'une méthode de calibration est très délicate, il faut souligner les carences de celle-ci. Elle a pour conséquence de biaiser et de niveler les effets dynamiques et constitue en soi une méthode d'estimation du poids statique incompatible avec une analyse mécanique postérieure des données mécaniques.

Ainsi, des problèmes importants de métrologie liés à la mesure des forces d'impact rendent cette validation très délicate. Concernant les capteurs, il en existe à ce jour de plusieurs technologies (capacitifs, piézo-électriques et fibres optiques). Les capteurs à fibres optiques sont en cours d'étude et de développement notamment au LCPC (voir les travaux de J.M. Caussignac

[Tar89], [Ter94] ainsi que [Bar95]). En ce qui concerne les capteurs capacitifs, beaucoup utilisés au Royaume-Uni, ils ne sont que peu utilisés en France où on leur préfère les capteurs piézo-électriques. Pour une description du fonctionnement des capteurs piézo-électriques et une évaluation *in situ* de leur précision, on pourra se reporter aux diverses études faites par le LROP et en particuliers aux travaux réalisés par M. Siffert et V. Dolcemascolo ([Sif82a], [Sif82b] et [Dol98]).

Malgré ces remarques qui limitent très sensiblement la valeur des conclusions que l'on pourra attendre de cette étape de validation, nous allons montrer que les procédures d'estimation proposées sont sensiblement plus précises que les méthodes utilisées jusqu'alors.

Remarque : Une grille de capteurs a également été installée récemment sur l'A31 près de Metz. Les premières études sur la précision des mesures fournies par les capteurs montrent que ceux-ci sont sensiblement moins précis que ceux installés sur le site de Trappes. Les données fournies par ces capteurs ne seront donc pas utilisées ici.

9.3.2 Estimation par reconstruction sur une famille quelconque

On a vu que pour diverses raisons, la première procédure d'estimation du poids statique n'était pas adaptée à la réalité du problème. Tout en conservant son principe, on peut envisager de la modifier sensiblement et d'effectuer la reconstruction non plus sur les modes associés au problème de Cauchy mais sur des fonctions simples telles les polynômes, les polynômes trigonométriques, les sinus cardinaux, etc... Il s'agit donc étant donnée une famille $\{g_i\}_{i=1}^N$ de trouver les $\{\beta_i\}_{i=1}^N$ tels que :

$$F(t) = \sum_i \beta_i g_i(t).$$

Dans ce cas, l'estimation de chacun des paramètres β_i est linéaire et la phase d'identification par filtrage de Kalman est inutile. On se contente de l'étape de reconstruction ainsi que de l'estimation de la période T ([Sai97c]).

Parmi toutes les familles de fonctions $\{g_i\}_{i=1}^N$ testées, on a retenu deux familles donnant de bons résultats tant au niveau de la reconstruction des variations de la force d'impact (résultats présentés aux paragraphes 6.1.2 et 8.6) que de l'estimation du poids statique. Il s'agit des polynômes trigonométriques et des sinus cardinaux. Ces deux familles ne sont pas tout à fait

quelconques puisque les utiliser pour l'échantillonnage des variations de la force d'impact d'un essieu revient à considérer :

- pour les polynômes trigonométriques, que le spectre de $t \mapsto F(t)$ selon la transformée de Fourier discrète est constitué des harmoniques $-M, -M+1, \ldots, M$.
- Pour les sinus cardinaux, cela revient à faire l'hypothèse que le spectre du signal $t \mapsto F(t)$ selon la transformée de Fourier continue peut être approchée par des fonctions en escaliers.

On présente les résultats obtenus avec ces deux familles. Parmi les 24 capteurs capteurs composant la grille de Trappes, nous avons choisi deux sous-grilles de 6 et 12 capteurs composées des barreaux 1, 5, 7, 11 et 13 pour la première et 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 et 14. Ces deux sous-grilles sont utilisées pour tous les résultats présentés dans ce chapitre.

Sinus cardinaux

On considère la famille :

$$\mathcal{H}_N = \left\{ t \mapsto \frac{\sin(\omega t - \pi\beta_k)}{\omega t - \pi\beta_k} \right\}_{1 \leq k \leq N}$$

de signaux à largeur de bande $\Omega = 2\omega$. L'intervalle $[-\omega, \omega]$ est choisi de telle sorte que si f_1 et f_2 sont les fréquences des mouvements de pompage et de tangage, on ait :

$$f_1 \in [-\frac{\omega}{2\pi}, \frac{\omega}{2\pi}] \qquad f_2 \in [-\frac{\omega}{2\pi}, \frac{\omega}{2\pi}]$$

typiquement $\omega = 15 * 2\pi$, les β_k sont choisis uniformément répartis mais non nécessairement régulièrement espacés dans l'intervalle :

$$\frac{\omega}{\pi} V * I$$

où V est la vitesse moyenne du véhicule sur la grille et I la portion de chaussée contenant les capteurs.
On utilise alors les mesures de forces d'impact fournies par les capteurs du site de Trappes au passage du déflectographe à deux essieux. Dans les mêmes conditions de chargement et de vitesse, on dispose de dix passages du véhicule sur le site. Pour chaque passage, on estime le poids statique de chacun de ses essieux à l'aide de notre procédure.

Par exemple, la reconstruction de $F(t)$ sur $\mathcal{H}_{12}$ à l'aide des mesures fournies par 12 capteurs donne le résultat suivant (figure 9.2). Dans cette situation, le déflectographe n'étant pas instrumenté, on n'a pas de comparaison possible avec la signal enregistré par le véhicule.

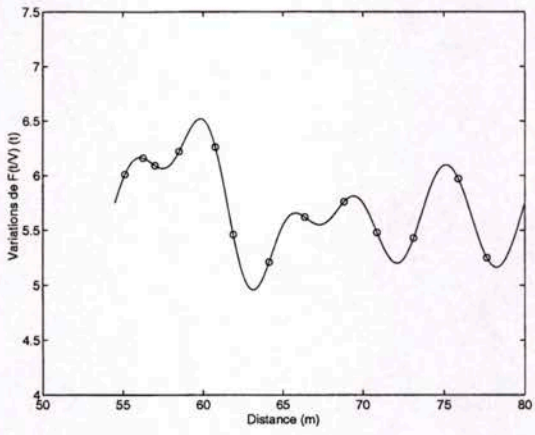
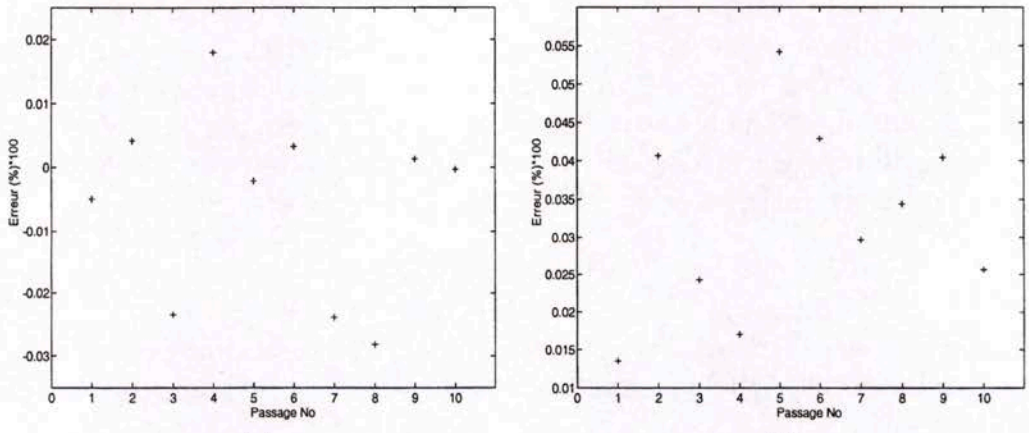


Figure 9.2 : Reconstruction de $F(t)$ pour le premier essieu du déflectographe, 'o' mesures fournies par les capteurs. Poids statique de l'essieu 5.75 t.

La figure 9.3 ci-après présente les résultats de l'estimation du poids statique par essieu effectuée pour chacun des dix passages du déflectographe, on y représente l'erreur relative sur l'estimation i.e. la quantité :

$$\frac{P_{est}^{stat} - P^{stat}}{P^{stat}} * 100.$$



(a) *(b)*

Figure 9.3 : Précision de l'estimation du poids statique des essieux du déflectographe pour chacun des dix passages, (a) essieu 1 et (b) essieu 2.

La figure 9.4 représente la précision de l'estimation du poids statique total du déflectographe pour chacun des dix passages.

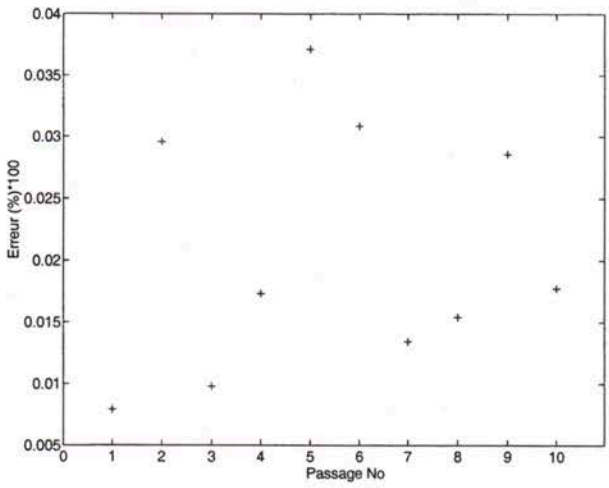


Figure 9.4 : Précision de l'estimation du poids statique total du déflectographe pour chacun des dix passages.

Polynômes trigonométriques

On considère maintenant la famille :

$$\mathcal{G}_N = \left\{ t \mapsto e^{2j\pi kt} \right\}_{-M \leq k \leq M}.$$

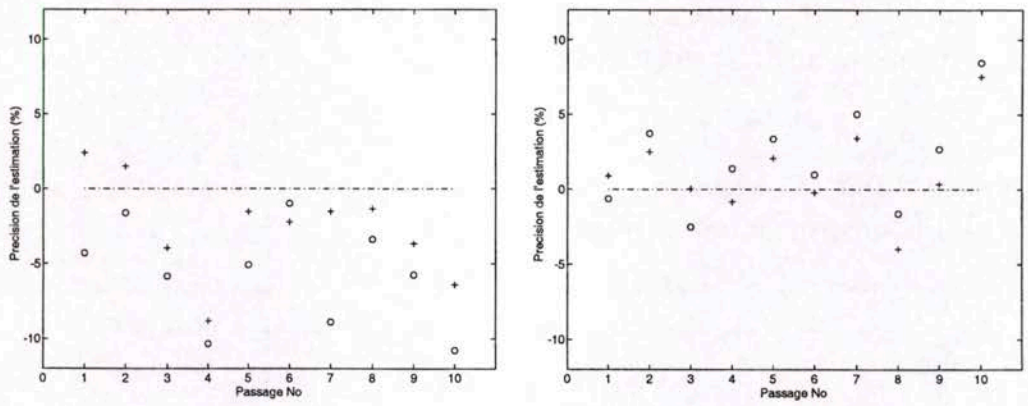
Dans cette situation, le calcul de la période d'intégration T est très important. Pour cela, à l'aide des mesures fournies par les capteurs et du filtre de Kalman, on estime les deux fréquences f_1 et f_2 correspondant aux mouvements de tangage et de pompage du véhicule. Ensuite, on calcule T en cherchant deux entiers p et q tels que :

$$T = \frac{p}{f_1} \approx \frac{q}{f_2}$$

et pour lesquels $V * T$ est de l'ordre de grandeur de l'espacement entre le premier et le dernier capteur considéré, V étant la vitesse moyenne du véhicule sur la grille.

Les figures suivantes montrent les résultats des estimations pour dix passages sur la grille de Trappes du poids lourd canadien. La procédure, comme

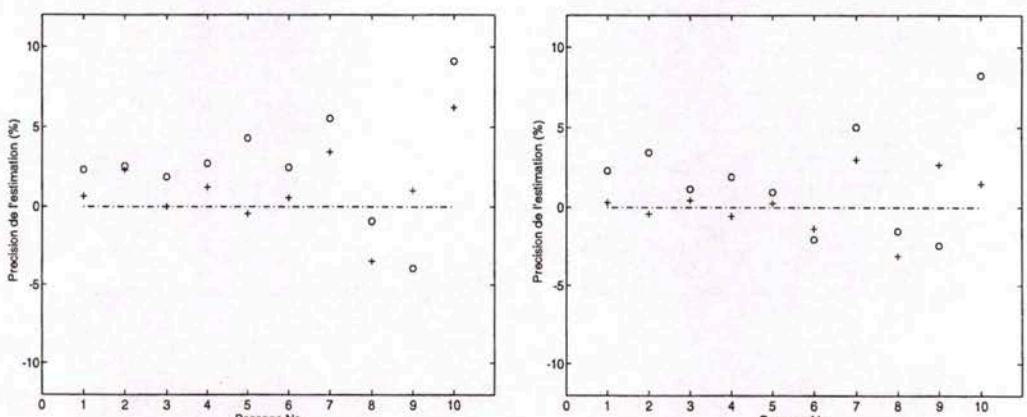
celle utilisée précédemment, prend en compte les éventuels reports de charges entre les essieux du tracteur.



(a) *(b)*

Figure 9.5 : Précision de la procédure d'estimation avec 6 capteurs pour un poids lourd à 5 essieu, (a) 1er essieu et (b) 2nd essieu - 'o' estimation par moyenne simple, '+' la technique développée.

La figure 9.6 présente les résultats des mêmes expérimentations que celles menées figure 9.5 mais obtenues pour un nombre de capteurs plus important. Quand le nombre de capteurs s'accroît de six à douze, les gains de précision sont faibles mais on peut observer que la stabilité des estimations de f_1 et f_2 augmente avec le nombre de capteurs.



(a) *(b)*

Figure 9.6 : Précision de la procédure d'estimation avec 12 capteurs, (a) 1er essieu et (b) 2nd essieu du véhicule à 5 essieux - 'o' estimation par moyenne simple, '+' la technique développée.

Les tableaux 9.1 et 9.2 résument la précision des différentes estimations menées pour le déflectographe et le véhicule à cinq essieux. Il donne aussi la classe de précision atteinte d'après les spécifications européennes sur le pesage en marche des véhicules lourds (voir [Com97], δ_m représente l'intervalle de confiance minimum tenant compte des conditions de test considérées).

Tableau 9.1: Précision de la procédure d'estimation (essieux isolés, poids totaux) pour le déflectographe.

	Déflectographe		
	12 capteurs		
	essieu 1	essieu 2	Poids total
Nombre de véhicules	10	10	10
Erreur moyenne (%)	-0.53	3.07	2.1
Erreur maximum (%)	2	5	3.5
Écart type	1.51	3.29	2.31
Spécifications COST323	B+(7) δ_m=9.6		B+(7) δ_m=6.5

Tableau 9.2: Précision de la procédure d'estimation (essieux isolés), poids lourd canadien.

	Véhicule à 5 essieux			
	6 capteurs		12 capteurs	
	essieu 1	essieu 2	essieu 1	essieu 2
Nombre de véhicules	10	10	10	10
Erreur moyenne (%)	-2.58	1.17	1.14	0.27
Erreur maximum (%)	-8.4	7.3	6.1	-4.3
Écart type	4.11	3.11	2.68	1.75
Spécifications COST323	B+(7) δ_m=9.3		A(5) δ_m=5.9	

La procédure d'estimation utilisée ci-dessus a été aussi appliquée ([Sai98]) à l'échantillon de 34 poids lourds (à 5 essieux) pré-pesés du trafic courant (figure 9.7). Dans ce cas pour chaque véhicule, on dispose d'une part du poids statique de chaque essieu mesuré à l'aide d'une balance de pesée statique et d'autre part des mesures fournies par la grille de capteurs.

Pour ces tests, le poids statique des essieux a été obtenu avec des balances de pesée statique homologuées pour les opérations de repression des surcharges. Ainsi, les erreurs maximums sur les mesures statiques sont inférieures à 3%.

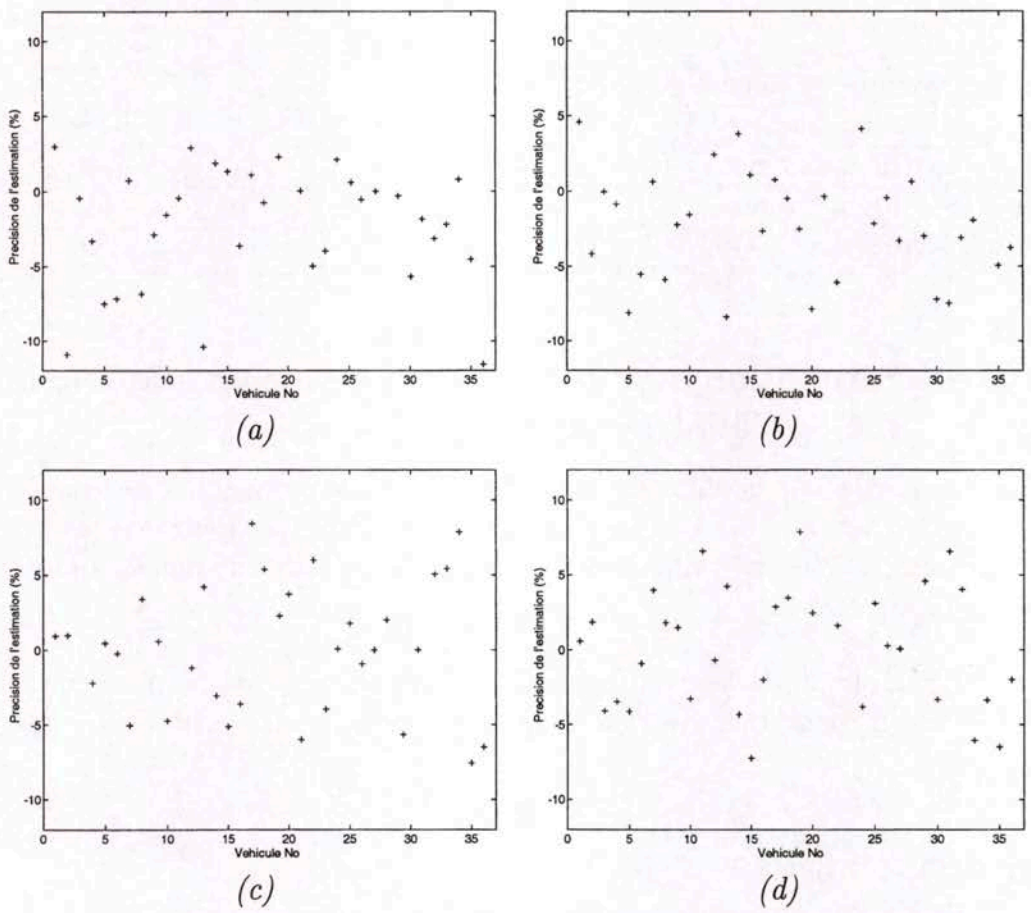


Figure 9.7 : Précision (en %) de l'estimation pour l'échantillon de poids lourds à 5 essieux. Premier essieu (a) avec 6 capteurs, (b) avec 12 capteurs, second essieux (c) avec 6 capteurs, (d) avec 12 capteurs.

La précision, d'après les spécifications européennes précédemment mentionnées, des estimations menées pour l'échantillon de véhicules à cinq essieux est donnée dans le tableau 9.3 suivant. Il est important de noter que dans les cas où l'on atteint seulement les classes de précision B+(7), δ_m est proche de la classe A+(5) (spécialement pour l'estimation avec 12 capteurs).
Pour le même ensemble de poids lourds, l'estimation du poids statique par moyenne simple mène à la classe de précision B(10) avec cinq capteurs et B+(7) avec 13 capteurs, voir [Jac97].

Tableau 9.3: Précision de la procédure d'estimation pour les essieux isolés.

	Véhicules du trafic courant			
	6 capteurs		12 capteurs	
	essieu 1	essieu 2	essieu 1	essieu 2
Nombre de véhicules	34	34	34	34
Erreur moyenne (%)	-2.29	0.07	-2.17	-0.06
Erreur maximum (%)	-11.1	8.1	-9.4	7.4
Écart type	4.56	4.20	4.19	3.99
Spécifications COST323	B+(7) $\delta_m = 9.2$		B+(7) $\delta_m = 8.6$	

9.3.3 Estimation avec reconstruction sur une famille issue de l'analyse mécanique

Dans la partie 8.6, on a montré que l'on pouvait correctement approximer la force d'impact d'un essieu à l'aide de quelques modes propres du modèle de véhicule considéré, on utilise cette propriété pour bâtir une nouvelle procédure d'estimation.

Si parmi les vibrations d'un poids lourd on ne retient que les mouvements de pompage et de tangage, cela revient à considérer que la force d'impact s'écrit :

$$F(t) = k_e * (u(t) - r(t)) + C * (\frac{du}{dt} - \frac{dr}{dt})$$

où u est de la forme :

$$u(t) = a_0 + a_1 \sin(\lambda_1 t + \tau_1) + a_2 \sin(\lambda_2 t + \tau_2)$$

les constantes τ_1 et τ_2 dépendant des conditions intiales. Et en reprenant une démarche analogue à celle du paragraphe 9.2.1, si de plus on néglige l'influence de l'amortissement C, on obtient que $F(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^4F}{dt^4} + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\frac{d^2F}{dt^2} + \lambda_1^2\lambda_2^2 F = \lambda_1^2\lambda_2^2 k_e(a_0 - r) + f(\frac{d^4r}{dt^4}, \frac{d^2r}{dt^2}) \tag{9.7}$$

On a vu que dans une large mesure (voir page 226), les variations des dérivées de r sont négligeables par rapport à celles de F et de r. L'équation (9.7) se ramène donc en première approximation à :

$$\frac{d^4F}{dt^4} + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\frac{d^2F}{dt^2} + \lambda_1^2\lambda_2^2 F = \lambda_1^2\lambda_2^2 k_e(a_0 - r)$$

et le problème est l'estimation des fréquences propres λ_1 et λ_2, de la constante k_e ainsi que des coefficients a_0, a_1 et a_2.
Pour cela, on peut mettre en oeuvre l'algorithme présenté page 240. Pour plus de simplicité, on renomme $a_3 = \lambda_1$, $a_4 = \lambda_2$ et $a_5 = k_e$, l'algorithme s'écrit alors :

choix de $\{a_i^0\}_{i=0}^5$.

POUR i DE 1 À p,

→ Estimation de a_0 et des $\{a_i\}_{i=3}^5$ par filtrage de Kalman

→ Estimation des $\{a_i\}_{i=0}^2$ et de $\{\tau\}_{i=1}^2$ par reconstruction

→ $a_1^0 = a_1$, $a_2^0 = a_2$, ..., $a_5^0 = a_5$

FIN POUR i.

Dans cette situation, le modèle sur lequel est appliqué le filtre de Kalman est :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} F \\ \dot{F} \\ \ddot{F} \\ \dddot{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_1^2\lambda_2^2 & 0 & \lambda_1^2+\lambda_2^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F \\ \dot{F} \\ \ddot{F} \\ \dddot{F} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_1^2\lambda_2^2\, k_e(a_0 - r) \end{pmatrix}$$

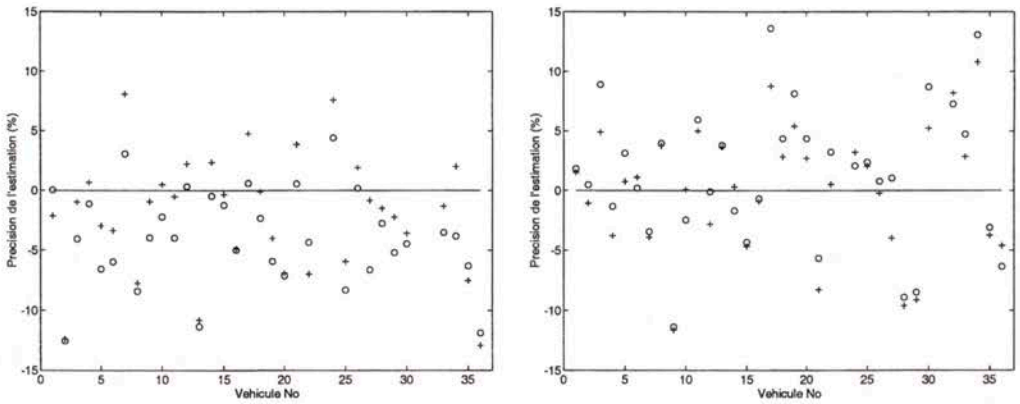
et le vecteur d'état augmenté des paramètres à estimer est :

$$(F, \dot{F}, \ddot{F}, \dddot{F}, \lambda_1, \lambda_2, a_0, k_e)^T.$$

On vérifie aisément que dans ce cas, la condition d'observabilité implique uniquement que l'on dispose d'au moins quatre mesures de forces d'impact. Dans la pratique puisque l'on ne connaît pas a priori les conditions initiales, il est nécessaire de disposer d'au moins cinq mesures.
On peut aussi remarquer que l'étape de reconstruction n'est pas forcément nécessaire puisque le filtre de Kalman fournit une estimation conjointe de l'état (donc de $F(t)$) et des paramètres. Et on peut utiliser pour reconstruction de $t \mapsto F(t)$ l'estimation fournie par l'algorithme de Kalman. Celle-ci n'étant généralement pas tout à fait aussi bonne que la reconstruction sur la famille de fonctions définie a priori.

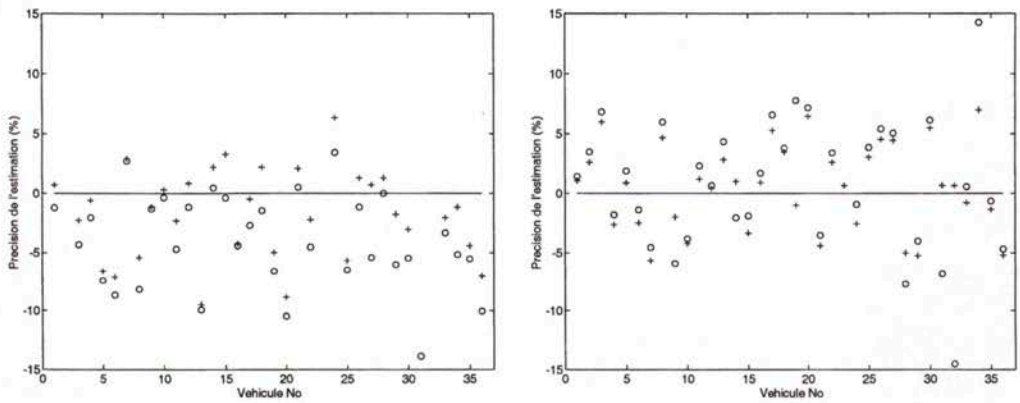
On présente maintenant (figures 9.8 et 9.9) les résultats des estimations obtenues avec cette procédure. Ajoutons simplement que contrairement aux

modélisations effectuées dans le chapitre 8, l'identification par filtrage de Kalman des valeurs propres du modèle permet de prendre en compte d'éventuelles dépendances du temps de λ_1 et λ_2. En effet par construction, le filtre fait l'hypothèse que les paramètres à estimer sont fonctions du temps et donc $\lambda_1 = \lambda_1(t)$, $\lambda_2 = \lambda_2(t)$.



(a) *(b)*

Figure 9.8 : Précision de la procédure d'estimation avec 6 capteurs, (a) 1$^{\text{er}}$ essieu et (b) 2$^{\text{nd}}$ essieu des 34 véhicules du trafic courant - 'o' estimation par moyenne simple, '+' la technique développée.



(a) *(b)*

Figure 9.9 : Précision de la procédure d'estimation avec 12 capteurs, (a) 1$^{\text{er}}$ essieu et (b) 2$^{\text{nd}}$ essieu des 34 véhicules du trafic courant - 'o' estimation par moyenne simple, '+' la technique développée.

Le tableau 9.4 ci-dessous résume la précision des estimations obtenues en tenant compte des spécifications sur le pesage en marche des véhicules.

Tableau 9.4: Précision de la procédure d'estimation pour les essieux isolés.

	Véhicules du trafic courant			
	6 capteurs		12 capteurs	
	essieu 1	essieu 2	essieu 1	essieu 2
Nombre de véhicules	34	34	34	34
Erreur moyenne (%)	-1.8	0.14	-2.25	0.66
Erreur maximum (%)	-12.9	10.8	-9.4	7.1
Écart type	4.9	5.21	3.55	3.72
Spécifications COST323	B+(7) $\delta_m = 8.9$		A(5) $\delta_m = 6.3$	

L'algorithme présenté dans cette partie repose sur l'hypothèse que le signal représentant les variations de la force d'impact d'un essieu contient principalement les contributions de deux mouvements propres du chassis et des essieux. Ceux-ci étant symbolisés par les valeurs propres $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$. Nous avons vu que ces deux mouvements correspondent généralement aux mouvements de pompage et de tangage. Mais, de façon plus générale, ce sont les deux contributions qui satisfont le mieux les équations du modèle (9.7) au sens du critère associé au filtre de Kalman :

$$\sum_{i=1}^{r} E[(F(t_i) - X(t_i/t_i))^2],$$

qui correspond à la trace de la matrice de covariance P (voir relation (9.4)). Cela permet donc éventuellement de prendre en compte deux mouvements autres que ceux généralement rencontrés ou de fréquences différentes. Ainsi, pour les groupements d'essieux où l'on voit apparaître des reports de charges afin de répartir équitablement la charge sur chacun des essieux du groupement, les deux fréquences propres estimées λ_1 et λ_2 seront souvent éloignées de celles relatives aux mouvements de pompage et de tangage du chassis.

Bien entendu, le modèle (9.7) proposé peut s'étendre au cas où l'on considère non plus deux mais p mouvements propres de fréquences respectives $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$; le nombre p n'étant limité que par la condition d'observabilité du système et donc par le nombre de capteurs insérés dans la chaussée. Dans la pratique, les résultats obtenus en considérant $p = 3$ ou $p = 4$ ne sont pas meilleurs que ceux correspondant à $p = 2$, le comportement numérique de

l'algorithme d'estimation étant même, dans ces cas, plus instable. Il semble que les contributions des mouvements propres autres que ceux de pompage et de tangage soit du même ordre que le bruit sur les mesures des capteurs et donc difficiles à estimer.

Remarque : Il est important de souligner que dans le tableau précédent, la classe de précision atteinte pour l'estimation du poids statique des essieux à l'aide de 12 capteurs est la classe A(5). C'est la classe la plus précise définie par les spécifications COST 323 (voir [Com97]). Atteindre cette classe de précision pour les systèmes de pesage en marche était l'objectif initial du projet WAVE. Notons toutefois que la précision de la classe A(5) est encore nettement inférieure aux précisions requises par l'OIML (Organisation internationale de la métrologie légale) pour l'homologation d'un tel système de pesage en marche pour la verbalisation des poids lourds en surcharge.

9.4 Recommandations pour les systèmes de pesage en marche

Les diverses procédures que l'on a présentées et testées sont essentiellement basées sur des méthodes de reconstruction, qu'il s'agisse de reconstruction sur une famille de fonction donnée ou d'identification de la réponse d'un modèle. Afin de pouvoir les mettre en oeuvre, on doit s'assurer que cette étape de reconstruction est possible et que le signal ainsi obtenu contient les informations recherchées.

9.4.1 Position des capteurs

L'application des algorithmes d'échantillonnage implique uniquement que la position des capteurs vérifie :

$$\text{rang}\,\{L_1, \ldots, L_r\} = N \quad \text{avec} \quad L_i \,:\, f \mapsto f(x_i).$$

Si l'on se contente de faire la reconstruction sur une famille $\{g_i\}_{i=1}^N$, il est donc suffisant de choisir les positions des capteurs telles que :

$$\det\{g_i(x_j)\} \neq 0.$$

Cette dernière condition laisse une marge de manœuvre importante pour le choix des x_j mais afin de limiter les instabilités numériques, on a intérêt à choisir les x_j tels que le conditionnement de la matrice $\{g_i(x_j)\}$ soit compatible avec la méthode d'inversion matricielle retenue. On cherche aussi à

minimiser l'erreur induite par le bruitage des mesures $P_{dyn}(x_j) + \epsilon_j$ et donc la relation (4.21) donnée page 88. Ainsi, pour chaque famille de fonctions $\{g_i\}_{i=1}^N$ et suivant les propriétés des erreurs $\{\epsilon_i\}_{i=1}^r$, on est amené à privilégier une position différente des capteurs. Mais dans la pratique, étant donné la régularité des fonctions $\{g_i\}_{i=1}^N$ choisies, il paraît naturel de répartir les capteurs de façon uniforme sur la longueur de la grille.

9.4.2 Longueur de la grille

La longueur de la grille dépend essentiellement des longueurs d'onde des principales composantes de la force d'impact. En se référant à la littérature dans ce domaine et plus particulièrement à Cebon ([Ceb92]) et Leblanc ([Leb92]), on peut retenir que les deux fréquences propres principales correspondant au pompage et au tangage se situent respectivement dans les intervalles 1.5-3 Hz et 8-15 Hz. Ainsi, la longueur minimale de la grille afin de permettre la reconstruction est :

$$\frac{V}{1.5}$$

où V est la vitesse de référence (en $m.s^{-1}$) des poids lourds sur le site envisagé. Afin de conserver une certaine sécurité, une longueur de 20 à 25 mètres semble un bon compromis. À nombre de capteur constant, si l'on augmente trop la longueur de la grille, la reconstruction devient nécessairement imprécise.

9.4.3 Nombre de capteurs

Le nombre de capteurs est le résultat d'un compromis entre les critères techniques, les objectifs de précision d'estimation et les contraintes économiques liées au coût de la grille.

Au niveau technique, le nombre de capteurs doit permettre la reconstruction de la force d'impact. Ainsi, pour la procédure d'estimation utilisant uniquement le filtre de Kalman, le nombre de capteur minimum dépend de la complexité du modèle retenu. Le modèle testé faisant intervenir deux fréquences propres nécessite la présence d'au moins 5 capteurs.
Pour les procédures d'estimation utilisant effectivement la reconstruction sur une famille $\{g_i\}_{i=1}^N$ donnée a priori, le nombre minimum de capteurs est N. Dans la pratique, des tests ont été menés pour des valeurs de N comprises entre 6 et 15. Lorsque l'on accroît le nombre de capteurs, la précision de l'estimation augmente mais de façon peu sensible au delà d'une dizaine de capteurs, par contre l'estimation est plus robuste vis à vis d'éventuelles

mesures très erronées fournies par certains capteurs. Ce comportement est illustré par les figures 9.8 et 9.9.

9.5 Critique des résultats

Pour chacune des procédures d'estimation de poids statique, les résultats des validations montrent deux points importants. Tout d'abord, les méthodes proposées dans la seconde partie de cette thèse semblent sensiblement plus précises que les méthodes utilisées jusqu'à maintenant dans la pratique.

Mais on remarque aussi que partant des données d'une grille multicapteur au passage de véhicules pré-pesés, les erreurs sur les estimations - par moyenne simple ou par les algorithmes développés - des poids statiques d'essieux sont de l'ordre des bruits provenant des capteurs. Il est donc difficile de porter un jugement définitif sur la justesse des arguments que nous avons cherché à mettre en œuvre dans les techniques d'estimation que nous proposons.

On peut toutefois tirer des enseignements sur les validations des reconstructions de variations de forces d'impact menées à l'aide de signaux provenant de véhicules instrumentés. En effet, les reconstructions présentées au chapitre 6 mais aussi celles vues à la fin du chapitre précédent ont montré que les signaux de force d'impact étaient principalement constitués des contributions des mouvements de pompage et de tangage. Elles ont également permis de montrer que les algorithmes d'échantillonnage appliqués avec des fonctions issues de l'analyse mécanique de modèles simplifiés donnaient de bons résultats.

On retrouve les avertissements donnés au début de ce chapitre à propos de la qualité des données disponibles pour la validation. Les problèmes de métrologie sont les facteurs limitant aux progrès des techniques de pesage en marche par système multicapteur.

Chapitre 10

Conclusions et perspectives

10.1 Conclusion

Le moment est venu de faire le bilan des travaux et résultats présentés dans ce mémoire. Nous nous proposons de rappeler les principaux points abordés et de répondre aux questions suivantes.

- Les objectifs annoncés au début de la thèse ont-ils été tenus, la démarche a-t-elle été respectée?
- Quels résultats importants ont été obtenus?
- Quelle(s) prespective(s) peut-on donner à ce travail?

Ce mémoire se compose de deux parties, on étudie tout d'abord certains problèmes d'échantillonnage de signaux en cherchant à mettre au point des algorithmes facilement implémentables. Puis on s'intéresse à l'étude de l'interaction dynamique entre un véhicule et la chaussée en cherchant à appliquer les techniques de traitement de signal mises au point dans la première partie.

10.1.1 Échantillonnage de signaux

L'objet principal de la première partie est l'étude de résultats récemment proposés pour l'échantillonnage des signaux à bande limitée selon la transformation de Fourier discrète ou continue et leurs extensions au cas de signaux à bande limitée selon une transformation quelconque, discrète ou continue.

On a d'abord cherché à étendre à un grand nombre de signaux, une technique d'échantillonnage irrégulier proposée récemment par Feichtinger et al. ([Str95]) pour les polynômes trigonométriques. Pour une famille quelconque de signaux à étudier, on définit une transformation associée à cette famille ainsi que la notion de signal à bande limitée. On propose alors une méthode de reconstruction. La méthode est facilement applicable et implémentable, elle fonctionne pour les signaux de dimension multiple et reste stable vis à vis du bruitage des échantillons. Suivant la taille des problèmes étudiés, des variantes directes, itératives ou pondérées sont développées. Les algorithmes utilisent les propriétés des repères dans un espace de Hilbert dont on montre qu'ils sont bien adaptés à la résolution des problèmes d'échantillonnage.
Les échantillons permettant la reconstruction ne sont pas seulement les valeurs ponctuelles du signal étudié mais plus généralement l'image de celui-ci par une famille de formes linéaires. Des estimations d'erreurs assurant la stabilité des algorithmes proposés sont également données.

On a ensuite cherché à développer dans un cadre et un formalisme plus complexe des méthodes dérivant des techniques évoquées ci-dessus. Il s'agit de mettre au point des techniques d'échantillonnage pour des signaux non plus à bande limitée selon une transformation discrète finie ou infinie mais à bande limitée selon une transformation associée à une représentation de groupe.
En utilisant les propriétés des noyaux reproducteurs et en s'appuyant sur des travaux de Feichtinger, Gröchenig et Christensen ([Fei89a], [Fei89b], [Chr93]) on montre que des repères associés à ces transformations peuvent être construits et que des résultats analogues au théorème de Shannon peuvent être obtenus. Le résultat principal obtenu ici est l'extension d'un théorème du à Xiao et Zou ([Xia97]) et obtenu initialement dans le cadre de l'analyse de Fourier.

Dans chaque situation, on a montré que les algorithmes développés peuvent servir pour l'échantillonnage mais aussi l'approximation de signaux. Pour chaque algorithme, des illustrations de leur fonctionnement ainsi que des exemples de résultats pouvant être obtenus sont donnés.

Si la première partie de ce mémoire est essentiellement consacrée à l'étude et au développement d'outils mathématiques, nous avons cherché à privilégier une présentation simple de techniques facilement applicables. Ainsi, nous avons souvent cherché au travers des applications ou exemples mentionnés à aborder des problèmes de mécanique et plus particulièrement des problèmes de vibrations d'essieux de véhicules.

10.1.2 Interaction véhicule-chaussée

Tout au long de la seconde partie, on a tenté de mettre en oeuvre les techniques évoquées ci-avant. On étudie un système mécanique, un véhicule circulant sur une chaussée, dont la modélisation est délicate mais pour lequel on montre que l'on peut approximer le comportement vibratoire à l'aide de quelques fonctions de base. Ces fonctions étant obtenues grâce à l'analyse de modèles simplifiés.

On commence par construire quelques modèles simples d'essieux et de véhicules afin de simuler leur réponse vis à vis d'une portion d'uni de chaussée. Ces réponses sont comparées à des enregistrements expérimentaux provenant de véhicules instumentés et montrent qu'avec seulement quelques degrés de liberté, des modèles simples linéaires ou non, peuvent donner une bonne approximation des variations de la force d'impact d'un essieu. Par le biais

d'une analyse modale de chaque modèle étudié, on montre comment obtenir les quelques fonctions de base représentant les mouvements de vibrations principaux de chaque modèle de véhicule considéré.

Ces fonctions caractéristiques ainsi définies permettent ensuite de reconstruire les variations de la force d'impact d'un essieu à l'aide de mesures ponctuelles de celle-ci. On met ainsi en pratique les algorithmes d'échantillonnage évoqués dans la première partie. Pourtant dans le contexte du problème étudié, comme dans de nombreuses autres situations, il apparaît qu'une simple technique de reconstruction de signal ne suffit pas à estimer tous les paramètres intervenant dans la réponse d'un système mécanique. Ainsi, l'étape de reconstruction est couplée à une technique d'estimation non linéaire par filtrage de Kalman qui permet d'identifier les fréquences propres significatives des vibrations de l'essieu.

À l'aide de mesures ponctuelles de la force d'impact d'un essieu et de la reconstruction de ses variations, on met alors au point une procédure d'estimation du poids statique de l'essieu considéré. Celle-ci est testée à l'aide de mesures expérimentales fournies par des grilles de capteurs. La procédure proposée est sensiblement plus précise que les techniques utilisées jusqu'à présent.
Il faut pourtant noter qu'une connaissance insuffisante de l'erreur sur les mesures de forces d'impact provenant des capteurs ainsi que des problèmes métrologiques rendent cette validation très partielle.

10.2 Perspectives

Naturellement, les travaux effectués dans le cadre de cette thèse ne sont pas exhaustifs. De nombreuses pistes possibles n'ont été qu'évoquées et nous avons signalé plusieurs points qui mériteraient d'être approfondis.
Mais, il ne faut pas se méprendre sur la portée et le contenu de ce mémoire, il ne s'agit que du travail d'un étudiant dont l'objectif, tout au long de ces trois années, a été d'apporter une modeste contribution au sujet traité et surtout d'acquérir des connaissances et quelques compétences dans un domaine touchant aux mathématiques appliquées et à la mécanique.

Au travers de ce mémoire, on peut toutefois relever deux thèmes qui font déjà l'objet de nombreux travaux et qui seront sans doute développés abondamment dans les années à venir.

10.2.1 Échantillonnage et analyse de signaux

Concernant le traitement des signaux, on a vu récemment le développement d'outils très sophistiqués d'analyse fonctionnelle, citons plus particulièrement les techniques d'analyse en ondelettes. Ces outils ont permis d'obtenir des résultats très intéressants de décomposition ou de reconstruction de signaux, certains de ces travaux ont d'ailleurs été évoqués dans ce mémoire. Schématiquement, on peut dire que pour une large panoplie de fonctions, on a développé des techniques d'analyse qui, il y a peu d'années, étaient réservées à des fonctions possédant des propriétés très caractéristiques telles les polynômes, les polynômes trigonométriques, les sinus cardinaux, etc...

La question qui se pose maintenant est celle de l'utilisation de ces techniques pour la résolution effective de problèmes faisant par exemple intervenir des équations différentielles ou aux dérivées partielles.
En effet, lorsque l'on cherche à résoudre une équation aux dérivées partielles non triviale, il n'existe souvent aucune méthode permettant de construire la famille de fonctions ou l'ondelette *mère* qui permettra d'approcher la solution cherchée avec seulement quelques modes. On est alors généralement contraint pour approcher la réponse cherchée d'avoir recours à une famille de fonctions simples dont on sait qu'elle engendre l'espace des solutions du problème. Et on est obligé, pour reconstruire la réponse de faire intervenir un grand nombre de fonctions ce qui engendre des problèmes numériques. De plus, ce nombre élevé de fonctions empêche généralement l'analyse physique ou mécanique du système étudié.

Ainsi, pour le problème que nous avons abordé, il existe un grand nombre de familles de fonctions pouvant a priori permettre d'approcher les variations de la force d'impact d'un essieu. Mais si l'on ne dispose que de quelques échantillons pour effectuer la reconstruction, on a tout intérêt à bien choisir les fonctions de base afin de pouvoir rendre compte d'un maximum de phénomènes.

Dans ce domaine, l'enjeu semble donc être l'applicabilité des techniques d'analyse fonctionnelle sophistiquées récemment apparues. Il est important et noble de savoir développer des outils sophistiqués dans un cadre théorique mais il est très utile et pas nécessairement plus aisé de mettre au point ces même outils dans un contexte plus concret. Tel semble être un défi important pour la recherche appliquée dans ce domaine.

10.2.2 Coopération véhicule-infrastructure-conducteur

Depuis plusieurs mois, l'actualité incite à penser que les modes de transport et principalement le transport routier sont à l'aube d'une révolution importante. On voit apparaître de nombreuses technologies permettant d'améliorer la coopération entre le conducteur, le véhicule et l'infrastructure. Ainsi, apparaissent sur le marché des systèmes d'aide à la conduite et de diagnostics. Aujourd'hui, ces systèmes ont pour objet principal d'améliorer la coopération entre le conducteur et le véhicule mais il existe une demande de la part des industriels de développer, en partenariat avec les pouvoirs publics, des systèmes coopérant avec l'infrastructure.

Si l'on compare les progrès enregistrés depuis quelques décennies dans divers domaines tels l'automatique ou les télécommunications, on est frappé de voir que comparativement les progrès réalisés en matière de technologies et de performances des véhicules routiers ainsi qu'en matière d'ergonomie de l'infrastructure sont faibles. Certes, les conditions et le confort du transport routier ont été améliorés mais dans une moindre mesure que bien d'autres domaines de l'industrie et des services. L'endommagement des chaussées, la sécurité mais aussi les caractéristiques mécaniques des véhicules telles les capacités de freinage ou les types de suspension sont autant de points qui devront faire l'objet d'importants travaux afin que le transport par poids lourds deviennent plus sur et moins agressif.

Bibliographie

[Amm88] Ammar G. et Gragg W. Super fast solution of real positive definite toeplitz systems. *SIAM J. Math. Anal. Appl.*, 9: 61–76, 1988.

[And92] Anderson J.M. et Rhodes A.H. The prediction of traffic loading at specific sites. In Cebon D. et Mitchell C.G.B., editor, *Third international symposium on heavy vehicle weights and dimensions*, pages 299–304. Telford T. - Londres, 1992.

[Ano92] Anon C. Dynamic loading of pavements. Technical report, Road transport research - OCDE, Paris, 1992.

[Aus92] Ausher P., Weiss G. et Wickerhauser M.V. Local sine and cosine bases of coifman and meyer and the reconstruction os smooth wavelets. In C.K. Chui, editor, *Wavelets : A tutorial in theory and applications*, pages 237–256. Academic Press, Boston, 1992.

[Bar95] Barbachi M. *Comportement de capteurs à fibres optiques noyés dans un matériau diversement sollicité - Applications en génie civil.* PhD thesis, École nationale des ponts et chaussées - Paris, 1995.

[Ber53] Bergman S. et Schiffer M. *Kernel functions and differential equations in mathematical physics.* Academic Press, New-York, 1953.

[Ber90] Berry J. Proposal for a council directive. Technical Report COM(90)-486, Commission des Communautés Européennes, 1990.

[Ber97] Berndtsson B. An inequality for fourier-laplace transform of entire functions, and the existence of exponential frames in fock space. *J.Funct. Anal.*, 149: 83–101, 1997.

[Beu64] Beurling A. Local harmonic analysis with some applications to differential operators. In A. Gelbart, editor, *Some Recent Advances in the Basic Sciences, Proc. Annual Science Conference*, volume 1, pages 109–125. Belfer Grad. School of Science, 1964.

[Beu67] Beurling A. et Maillavin P. On the closure of characters and the zeros of entire functions. *Acta Math.*, 118: 79–95, 1967.

[Bla92] Black T.F. Arkansas' experience piezo-electric cable weigh in motion systems in asphaltic concrete pavements. In *National traffic data acquisition conference*, pages 155–166, 1992.

[Bou68] Bouc R. Forced vibrations of a mechanical system with hysteresis. In *Fourth conference in nonlinear oscillations - Prague*, pages 315–327. Académie des Sciences de Techékoslovaquie, 1968.

[Bou71] Bouc R. Modèle mathématique d'hysteresis. *Acustica*, 24: 16–25, 1971.

[Bur07] Burkhardt H. *Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées*, 5: 94–95, 1907.

[But71] Butzer J.L. et Nessel R.J. *Fourier analysis and approximation, one dimensional theory*, volume 1. Academic Press, New York, 1971.

[But83] Butzer J.L. A survey of the Whittaker-Shannon sampling theorem ans some of its extensions. *J. Math. Res. Expos.*, 3: 185–212, 1983.

[But91] Butzer J.L., Hauss M. et Stens R.L. The sampling theorem and its unique role in various branches of mathematics. *Mit. Math. Ges. Hamburg*, 12: 523–547, 1991.

[But92] Butzer P.L. et Stens R.L. Sampling theory for not necessarily band-limited functions; a historical overview. *SIAM Review*, 34: 40–53, 1992.

[But97] Butzer J.L. et Stens R.L. De la vallée poussin's paper of 1908 on interpolation and sampling theory and its influence. In J. Mawhin et P.L. Butzer, editor, *Charles Baron de la Vallée Poussin Collected words*, 1997.

[Ceb88] Cebon D. Theoretical road damage due to dynamic tyre forces of heavy vehicles. *Inst. Mech. Eng.*, 202: 109–117, 1988.

[Ceb92] Cebon D. Validation of an articulated vehicle simulation. *Vehicles system dynamics*, 21: 197–223, 1992.

[Ceb93] Cebon D. Response of continuous pavements to moving dynamic loads. *Journal of engineering mechanics - ASCE*, 119: 1762–1780, 1993.

[Ceb96a] Cebon D. Effects of spatial repeatability on long-term pavement performance. *Journal of mechanical engineering science*, 210: 97–110, 1996.

[Ceb96b] Cebon D. Truck suspension design to minimize road damage. *Journal of automobile engineering*, 210: 95–107, 1996.

[Ceb97] Cebon D. Effects of road friendly suspensions on long-term flexible pavement performance. *Journal of mechanical engineering science*, 211: 411–424, 1997.

[Chr93] Christensen O. *Frame decomposition in Hilbert spaces.* PhD thesis, Département d'Analyse Harmonique - Autriche, 1993.

[Chr95] Christensen O. Moment problems and stability results for frames with applications to irregular sampling and gabor frames. *Appl. Comp. Harm. Anal.*, 95, 1995.

[Chr96] Christensen O. Atomic decomposition via projective group representations. *Rocky Mountain J. Math.*, 26: 1289–1312, 1996.

[Cla85] Clark J.J. et Palmer M.R. A transformation method for reconstruction of functions from nonuniformly spaced samples. *IEEE Trans. ASSP*, 33: 1151–1165, 1985.

[Com97] Communauté Européenne. Spécifications européennes sur le pesage en marche des véhicules routiers - spécifications détaillées. Technical Report EUCO-COST/323/5/97, 1997.

[Cor88] Cordoba A. La formule sommatoire de Poisson. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 306: 373–376, 1988.

[Cor96] Corte J.F. Quelques exemples d'essai sur le manège de fatigue depuis dix ans. *Revue générale des routes et aérodromes*, 746, 1996.

[Cor98] Corte J.F. Catalogue des dégradations de surface des chaussées - méthode d'essai n°52. Technical report, 1998.

[Dau85a] Dautray R. et Lions J.L. *Analyse mathématique et calcul scientifique pour les sciences et les techniques*, volume 2. Masson, 1985.

[Dau85b] Dautray R. et Lions J.L. *Analyse mathématique et calcul scientifique pour les sciences et les techniques*, volume 6. Masson, 1985.

[Dau85c] Dautray R. et Lions J.L. *Analyse mathématique et calcul scientifique pour les sciences et les techniques*, volume 7. Masson, 1985.

[Dau86] Daubechies I., Grossman A. et Meyer Y. Painless non-orthogonal expansions. *J. Math. Phys.*, 27: 1271–1283, 1986.

[Dav63] Davis P.J. *Interpolation and approximation.* Blaisdell Publishing Company, 1963.

[Del96] Delanne Y. Effect of road unevenness on road users confort. In *Third international symposium on pavement surface characteristics, Christchurch*, 1996.

[Dem95] Dempsey A.T. et O'Brien E.J. The accuracy of bridge weigh-in-motion systems for the determination of truck weights. In B. Jacob, editor, *First european conference on weigh-in-motion of road vehicles, Zürich*, pages 315–322, 1995.

[Deu70] Deutsch C. *Dynamique des véhicules routiers.* Organisme national de la sécurité routière, Arcueil, 1970.

[Dol98] Dolcemascolo V. et Jacob B. Multiple sensor weigh in motion : optimal design and experimental study. In E.J. O'Brien et B. Jacob, editor, *International conference of COST323 - Lisbonne*, pages 129–138. Communautés européennes, 1998.

[Duf52] Duffin R.J. et Schaeffer A.C. A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72: 341–366, 1952.

[Duf76] Duflo M. et Moore C.C. On the regular representation of a nonunimodular locally compact group. *J. Funct. Anal.*, 21: 209–243, 1976.

[Eis75] Eisenman J. Dynamic wheel load fluctuations - roads stress. *Strasse und Autobahn*, 4: 127–128, 1975.

[Fan80] Fancher P.S., Ervin R.D., MacAdam C.C. et Winkler C.B. Measurement and representation of the mechanical properties of truck leaf springs. Technical report, Highway Safety Research Institute, 1980.

[Fei89a] Feichtinger H.G. et Gröchenig K.H. Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decomposition, I. *J. Funct. Anal.*, 86: 307–340, 1989.

[Fei89b] Feichtinger H.G. et Gröchenig K.H. Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decomposition, II. *Monatsh. f. Math.*, 108: 129–148, 1989.

[Fei91] Feichtinger H.G. Discretization of convolution and reconstruction of band-limited functions from irregular samples. *J. Approx. Theory*, 51: 333–345, 1991.

[Fei92a] Feichtinger H.G. et Gröchenig K.H. Gabor wavelets and the Heisenberg group. In C.K. Chui, editor, *Wavelets : A tutorial in theory and applications*, pages 359–397. Academic Press, Boston, 1992.

[Fei92b] Feichtinger H.G. et Gröchenig K.H. Iterative reconstruction of multivariate band-limited functions from irregular sampling values. *SIAM J. Math. Anal.*, 23: 244–261, 1992.

[Fei92c] Feichtinger H.G. et Gröchenig K.H. Non orthogonal wavelet and gabor expansions, and group representations. In I. Daubechies G. Beylkin, R. Coifman, editor, *Wavelets and their applications*, pages 353–376. Jones and Bartlett, Boston, 1992.

[Fei93a] Feichtinger H.G. et Gröchenig K.H. Error analysis in regular and irregular sampling theory. *J. of Appl. Anal.*, 50: 603–625, 1993.

[Fei93b] Feichtinger H.G. et Gröchenig K.H. Theory and practice of irregular sampling. In J. Benedetto et M. Frazier, editor, *Wavelets : Mathematics and applications*, pages 305–363. CRC Press, 1993.

[Fei95] Feichtinger H.G., Kozek W. et Strohmer T. Reconstruction of signals from irregular samples of its short-time Fourier transform. *In Proc. SPIE95, San Diego*, 1995.

[Fei97] Feichtinger H.G. Gabor frames and time-frequency analysis of distributions. *J. Funct. Anal.*, 146: 464–495, 1997.

[Fol97] Foliente G.C. Stochastic linearization coefficients of the bouc-wen oscillator, 1997.

[Gon98] Gonzalez A. et O'Brien E.J. The development of a dynamic bridge weigh-in-motion algorithm. In E.J. O'Brien et B. Jacob, editor, *International conference of COST323 - Lisbonne*, pages 445–452. Communautés européennes, 1998.

[Grö91] Gröchenig K.H. Describing functions : Atomic decompositions versus frames. *Monatshefte für Mathematik*, 112: 1–41, 1991.

[Grö93a] Gröchenig K.H. A discrete theory of irregular sampling. *Linear Algebra and its Applications*, 193: 129–150, 1993.

[Grö93b] Gröchenig K.H. Irregular sampling of wavelet and short time fourier transforms. *Constr. Approx.*, 9: 283–297, 1993.

[Gro85] Grossmann A., Morlet J. et Paul T. Transforms associated to square integrable group representations. General results. *J. Math. Phys.*, 26: 2473–2479, 1985.

[Gro97] Grossmann A., Flornes K., Holschneider B. et Torrésani B. Wavelets on discrete fields. *À paraître*, 1997.

[Gye92a] Gyenes L. et Mitchell G.B. The spatial repeatability of dynamic pavement loads caused by heavy goods vehicles. In Cebon D. et Mitchell C.G.B., editor, *Third international symposium on heavy vehicle weights and dimensions*, pages 95–101. Telford T. - Londres, 1992.

[Gye92b] Gyenes L., Mitchell C.G.B. et Phillips S.D. Dynamic pavement loads and tests of roadfriendliness for heavy vehicle suspensions. In Cebon D. et Mitchell C.G.B., editor, *Third international symposium on heavy vehicle weights and dimensions*, pages 243–251. Telford T. - Londres, 1992.

[Hai91] Hairer E. et Wanner G. *Solving ordinary differential equations, stiff and differential algebraic problems.* Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[Har34] Hardy G.H., Littlewood J.E. et Polya G. *Inequalities.* University Press, Cambridge, 1934.

[Har41] Hardy G.H. Notes on special systems of orthogonal functions : The orthogonal functions of whittaker's cardinal series. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 37: 331–348, 1941.

[Hei89] Heil C. et Walnut D.F. Continuous and discrete wavelet transforms. *SIAM Review*, 31: 628–666, 1989.

[Hig96] Higgins J.R. *Sampling theory in Fourier and signal analysis.* Clarendon Press, Oxford, 1996.

[Hos84] Hoshiya M. et Saito E. Structural identification by extended kalman filter. *J. of Eng. mech.*, 12: 810–824, 1984.

[Hut80] Hutson V. et Pym J.S. *Applications of functionnal analysis and operator theory.* Academic Press, 1980.

[Jac96] Jacob B. et Dolcemascolo V. Pesage en marche à basse vitesse et pesage multicapteur. Technical Report Phase 1, Contrat DTT/UMR113, 1996.

[Jac97] Jacob B. et Dolcemascolo V. Pesage en marche à basse vitesse et pesage multicapteur. Technical Report Phase 2-I, Contrat DTT/UMR113, 1997.

[Jer65] Jerri A.J. The shannon sampling therorem - its various extensions and applications. a tutorial review. *Proc. IEEE*, 77: 1565–1596, 1965.

[Kin88] Kinder D.F. et Lay M.G. Review of the fourth power law. Technical Report AIR000-248, ARRB Transport Research Ltd., 1988.

[Kot33] Kotel'nikov V.A. *On the carrying capacity of the "ether" and wire in telecommunications. Material for the first all-union conference on questions of communication (en russe).* Izd. Red. Upr. Svyazi RKKA, Moscow, 1933.

[Lan67] Landau H. Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions. *Acta Math.*, 17: 37–52, 1967.

[Leb92] Leblanc P.A., Woodrooffe J.H. et Papagiannakis T. A comparison of the accuracy of two types of instrumentation for measuring vertical wheel load. In Cebon D. et Mitchell C.G.B., editor, *Third international symposium on pavement surface characteristics, Christchurch*, pages 86–101, 1992.

[Lie91] Lieh J. et Haque I. Symbolic closed-form modeling and linearization of multibody systems subject to control. *Transactions of the ASME*, 113: 124–132, 1991.

[Lie95] Lieh J. et Qi W. Simulation of dynamic truck loading on pavements using measured road roughness. In *74th annual meeting of the Transportation research board*, number 950747, 1995.

[Lin96] Linder R. Une loi de comportement pour la modélisation de l'orniérage des enrobés bitumineux. *Seconde réunion annuelle des laboratoires GEO*, 1996.

[Mag84] Magnusson G., Carlsson H.E. et Ohlsson E. The influence of heavy vehicles'springing characteristics and tyre equipment on the deterioration of the road. Technical Report 270, Sweedish Road and Transport Institute - VTI, (traduit par le TRRL sous la référence WP/V&ED/86/16, 1986), 1984.

[Mar69] Marti J.T. *Introduction to the theory of bases.* Springer-Verlag, New-York, 1969.

[Mar86] Marvasti F.A. Spectral analysis of random sampling and error free recovery by an iterative method. *IECE*, 69, 1986.

[Mar89] Marvasti F.A. An iterative method to compensation for interpolation distortion. *IEEE Trans. ASSP*, 37: 1617–1621, 1989.

[Mar95] Marchadour Y. et Duquesne F. Le pesage en marche des poids lourds un système dissuasif. In B. Jacob, editor, *First european conference on weigh-in-motion of road vehicles, Zürich*, pages 57–62, 1995.

[Mit88] Mitchell C. et Gyenes L. Dynamic loading on road pavements. In *Int. symposium on heavy vehicle weights and dimensions*, pages 55–68. Roads and transportation association of Canada, 1988.

[Mit91] Mitrinovic D.S., Pecaric J.E. et Fink A.M. *Inequalities involving functions and their integrals and derivatives.* Kluwer, 1991.

[Mos83] Moses F. Instrumentation for weighing trucks in motion for highway bridge loads. Technical Report OH-83/001, Federal Highway Administration, 1983.

[Naj88] Najim M. *Modélisation et identification en traitement du signal.* Masson, 1988.

[Nyq28] Nyquist H. Certain topic in telegraph transmission theory. *AIEE Trans.*, 47: 617–644, 1928.

[Pal34] Paley C. et Wiener N. Fourier transforms in the complex domain. *Am. Math. Soc. Coll. Publ.*, 19, 1934.

[Pap77] Papoulis A. *Signal analysis.* McGraw-Hill, New-York, 1977.

[Par95] Pariat J.C. et Peybernard J. Évaluation de la relation entre le confort ressenti sur les chaussées et les indicateurs d'uni fourni par l'analyseur de profil en long. *Bullentin de liaison des Laboratoires des ponts et chaussées*, 200, 1995.

[Pin94a] Pintado Sanjuan P. et Gutierrez Rumbao J. Influencia de las caracteristicas de diseno de vehiculos pesados en el deterioro por fatiga de pavimentos. Parte I : Influencia en las cargas. *Ingenieria civil*, 97: 99–107, 1994.

[Pin94b] Pintado Sanjuan P. et Gutierrez Rumbao J. Influencia de las caracteristicas de diseno de vehiculos pesados en el deterioro por fatiga de pavimentos. Parte I : Influencia en el dano. *Ingenieria civil*, 98: 95–101, 1994.

[Ram98] Rambeau S., Follin C. et Stanczyk D. The french national WIM network "SIREDO". In E.J. O'Brien et B. Jacob, editor, *International conference of COST323 - Lisbonne*, pages 47–54. Communautés européennes, 1998.

[Sai97a] Sainte-Marie J. Interpolation et approximation des signaux à bande limitée. *29e Congrès d'Analyse Numérique - Imbours*, 1, 1997.

[Sai97b] Sainte-Marie J. Interpolation et approximation des signaux à bande limitée. application à la reconstruction des variations du poids dynamique d'un essieu et à l'estimation de son poids statique. *3e colloque national en calcul des structures - Giens*, 1: 95–105, 1997.

[Sai97c] Sainte-Marie J. Pesage en marche à basse vitesse et pesage multicapteurs. Technical Report Phase 2-I, 1997.

[Sai97d] Sainte-Marie J., Argoul P. et Baumgärtner W. Estimation of the traffic load on bridges by the extended kalman filter procedure. In L. Jezequel, editor, *New advances in modal synthesis of large structures*, pages 169–180. Balkema, Rotterdam, 1997.

[Sai98] Sainte-Marie J., Argoul P., Jacob B. et Dolcemascolo V. Multiple sensors wim using reconstruction algorithms of the dynamic axles loads. In E.J. O'Brien et B. Jacob, editor, *International conference of COST323 - Lisbonne*, pages 109–118. Communautés européennes, 1998.

[Sau87] Sauer K.D. et Allebach J.P. Iterative reconstruction of band-limited images from non-uniformly spaced samples. *IEEE Trans. CAS*, 34, 1987.

[Sch70] Schwartz L. *Analyse - Topologie générale et analyse fonctionnelle.* Hermann, 1970.

[Sch73] Schwartz L. *Théorie des distributions.* Hermann, Paris, 1973.

[Sha49] Shannon C.E. Communication in the presence of noise. *Proc. IRE*, 37: 10–20, 1949.

[Sha75] Shamppine L.F. et Gordon M.K. *Computer solution of ordinary differential equations.* W.H. Freeman & Co., 1975.

[Sif82a] Siffert M. et Goacolou H. Cable piézo-électrique - expérimentation en laboratoire de deux capteurs sélectifs. Technical Report 12.510, Étude SETRA-LCPC, 1982.

[Sif82b] Siffert M. et Goacolou H. Pesage dynamique par cable piezo-électrique- étude théorique de l'environnement du cable. Technical Report 12.513, Étude SETRA-LCPC, 1982.

[Sif95] Siffert M., Dolcemascolo V. et Eloi J.P. étude expérimentale sur site rn10 - compte rendu de synthèse. Technical Report 25883 CRS 4, Laboratoire régional de l'ouest parisien, 1995.

[Sta91] Stanczyk D. étalonnage automatique des stations de pesage. In Laboratoire central des ponts et chaussées Paris, editor, *Journée nationale pesage en marche*, pages 37–40, 1991.

[Sta98] Stanczyk D. et Jacob B. European test of weigh-in-motion systems: continental motorway test (cmt) on the a31 motorway. In E.J. O'Brien et B. Jacob, editor, *International conference of COST323 - Lisbonne*, pages 389–397. Communautés européennes, 1998.

[Str95] Strohmer T.,Feichtinger H.G. et Gröchenig K.H. Efficient numerical methods in non-uniform sampling theory. *Numerische Mathematik*, 69: 423–440, 1995.

[Str97] Strohmer T. Computationally attractive reconstruction of band-limited images from irregular samples of its fourier transform. *I.E.E.E. Trans. Image Processing*, 6: 540–548, 1997.

[Swe83] Sweatman P.F. A study of dynamic wheel forces in axle group suspensions of heavy vehicles. Technical Report SR-27, Australian Road research board, 1983.

[Swe88] Sweatman P.F. Dynamic suspension characteristics : Is there research beyond the fourth power law ? In *Int. symposium on heavy vehicle weights and dimensions*, pages 69–80. Roads and transportation association of Canada, 1988.

[Tar89] Tardy A., Jurczyszyn M., Caussignac J.M., Moral G. et Briant G. High sensitivity tranducer for fibre optic pressure sensing appling to dynamic mechanical testing and vehicle detection on roads. *Springers Proceedings in Physics - Optical fiber sensors*, 44: 215–221, 1989.

[Ter94] Teral S., Boby J., Caussignac J.M. et Siffert M. Weighing of vehicles in motion using fiber optic sensors. Technical Report 74-77, Electrical communications - Alcatel Alsthom publications, 1994.

[Val85] Valeer J.D. Some extremal functions in fourier analysis. *Bull. Am. Math. Soc.*, 12: 183–216, 1985.

[Wal97a] Waldron S. L^p-error bounds for hermite interpolation and the associated wirtinger inequalities. *Constr. Approx.*, 13: 461–479, 1997.

[Wal97b] Waldron S. Schmidt's inequality. *East Journal on Approximations*, 3: 11–29, 1997.

[War79] Waring E. Problems concerning interpolations. *Phil. Trans. R. Soc.*, 69: 59–67, 1779.

[Wes49] Weston J.D. The cardinal series in Hilbert spaces. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 45: 449–453, 1949.

[Whi15] Whittaker E.T. On the functions which are presented by the expansions of the interpolation theory. *Proc. Roy. Soc. Edinb.*, 35: 181–194, 1915.

[Whi35] Whittaker J.M. *Interpolatory function theory.* Cambridge University Press, 1935.

[Whi61] Whiteside D.T. Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 1: 178–388, 1961.

[Wic93] Wickerhauser M.V. Smooth localized orthonormal bases. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 316: 423–427, 1993.

[Woo92] Woodside A.R. et Liu G.X. The assessment of the interfacial stresses in a composite highway surfacing under heavy goods vehicle loading. In Cebon D. et Mitchell C.G.B., editor, *Third international symposium on heavy vehicle weights and dimensions*, pages 51–58. Telford T. - Londres, 1992.

[Xia97] Xiao C. et Zou L. Reconstruction of band-limited functions from values on real sequences with an accumulation point. *J. Approx. Theory*, 90: 23–29, 1997.

[You80] Young R.M. *An introduction to nonharmonic Fourier series.* Academic Press, New York, 1980.

[Zni98] Znidaric A. et Baumgärtner W. Bridge weigh-in-motion systems - an overview. In E.J. O'Brien et B. Jacob, editor, *International conference of COST323 - Lisbonne*, pages 139–151. Communautés européennes, 1998.

Annexe A

Inégalité de Wirtinger

Nous présentons une démonstration de l'inégalité de Wirtinger (cf. chapître?) ainsi que quelques éléments concernant les constantes isopérimétriques de Wirtinger-Sobolev. Ces inégalités et ces constantes jouent un rôle considérable dans le domaine de l'interpolation et plus particulièrement dans l'obtention d'estimateurs d'erreurs pour l'interpolation polynômiale, ([Wal97b], [Wal97a]).

La littérature consacrée aux inégalités de Wirtinger-Sobolev est très importante, citons par exemple :

$$\left[\int_\Omega |f|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \leq \gamma \left[\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

où f est une fonction suffisamment régulière définie sur un domaine Ω dans un espace de dimension N et satisfaisant certaines conditions ax limites, [Mit91].

Le résultat que nous avons utilisé au chapître? correspond au cas précédent quand on considére $p = q = 2$ e $N = 1$. Pour f suffisament régulière et $f(0) = 0$ ou $f(L) = 0$, on a alors :

$$\int_L f^2(x)dx \leq \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \int_L \left(f'(x)\right)^2 dx$$

si de plus $f(0) = f(L) = 0$, on peut montrer que la constante $1/\pi^2$ est optimale ([Har34], p.182).
Il est intéressant de remarquer que d'un point de vue mécanique, on peut rapprocher ce résultat, via la théorie du calcul des variations, du fait que la

plus petite des valeurs propre de l'ODE :

$$\frac{d^2g}{dx^2} + \lambda g(x) = 0, \qquad g(0) = g(\pi) = 0$$

est $\lambda = 1$. Cette équation différentielle ordinaire est elle d'une corde vibrante homogène fixée à ses extrémités. La valeur $\lambda = 1$ peut être alors interprétée comme la fréquence principale que l'on entend lorsque la corde est pincée.

Preuve : Soit f une fonction suffisamment régulière vérifiant $f(0) = 0$ et qui ne soit pas multiple de $sin(x)$, considérons alors la fonction

$$J(f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(f^2(x) - f'^2(x)\right) dx$$

. On cherche une fonction ψ telle que :

$$J(f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f' - f\psi)^2 \, dx$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(f^2\left(1 + \psi^2\right) - 2ff'\psi f\right) dx = 0$$

Cette condition sera vérifiée dès que la forme différentielle :

$$dz = f^2\left(1 + \psi^2\right) dx - 2f\psi dy$$

sera exacte et s'annulant aux points $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$. Ce qui nous donne :

$$-\psi' = 1 + \psi^2 \quad \text{soit} \quad \psi = -tan(x + k) = cotan(x)$$

quand la constante d'intégration k est prise égale à $\frac{\pi}{2}$. On a donc $z = -cotan(x)f$ qui s'annule en $x = \frac{\pi}{2}$ et si

$$f' \in L^2[0, \frac{\pi}{2}]$$

on a alors :

$$\begin{aligned} f^2(x) = \left(\int_0^x f'(t)dt\right)^2 &\leq \int_0^x dt \int_0^x f'^2(t)dt && \text{(A.1)} \\ &= x\int_0^x f'^2(t)dt && \text{(A.2)} \\ &= o(x) && \text{(A.3)} \end{aligned}$$

ce qui assure que z s'annule en $x = 0$. On en déduit que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(f^2(x) - f'^2(x)\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f' - f\psi)^2 \, dx > 0$$

En effectuant le changement de variable $x = \frac{\pi}{2}\frac{u-a}{b-a}$ dans $J(f)$, on retrouve l'inégalité annoncée. Le même raisonement s'applique lorsque $f(L) = 0$. $\diamond$

Notations

$\mathcal{H}$ *(resp.* $\mathcal{H}^*$*)* :	espace de Hilbert séparé (resp. dual de $\mathcal{H}$)
$\langle .,. \rangle$:	produit scalaire sur $\mathcal{H}$
I *(resp.* $\|I\|$:	ensemble dénombrable d'indice (resp. cardinal de I)
δ_i^j :	symbole de Kronecker, δ_i^j vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon
$k \mod N$:	reste de la division euclidienne de k par N
$l^2(I)$:	espace des suites indexées par I et de carré intégrable
$\mathcal{L}(\mathcal{H})$:	espace vectoriel des applications linéaires bornées sur $\mathcal{H}$
G :	groupe localement compact
$\mathcal{U}$:	représentation de carré intégrable de G dans $\mathcal{H}$
L_g (resp. R_g) :	transformation à gauche (resp. à droite) associée à la représentation $\mathcal{U}$ et de vecteur admissible $g \in \mathcal{H}$
k :	fonction noyau sur $\mathcal{H}$
p_g :	fonction noyau sur $L_g(\mathcal{H})$
$\mathcal{T}$:	transformation discrète associée à une famille $\{g_i\}_{i=1}^N$ d'éléments de $\mathcal{H}$ et à une famille $\{L_i\}_{i=1}^r$ d'éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$
$Im\ z$:	partie imaginaire du complexe z
$\overline{z}$:	conjugué du complexe z
$vect\{f_i\}$:	espace vectoriel engendré par les f_i
$\overline{vect\{f_i\}}$:	adhérence de vect $\{f_i\}$
$F^\perp$:	orthogonal de F

Liste des figures

2.1 Interpolation polynomiale 27
2.2 *(a)* cas où $x_0 \neq -x_1$ et *(b)* cas où $x_0 = -x_1$. 35
2.3 Mise au point d'une technique d'échantillonnage à partir des propriétés de la représentation fréquentielle d'un signal. 39
2.4 Deux types de fonctions dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ a des propriétés remarquables. 41
2.5 Fonction dont les singularités font apparaître des harmoniques hautes fréquences dans sa transformée de Fourier. 41

3.1 L'échantillonnage via un repère. 61

4.1 Essieu de véhicule circulant sur une chaussée. 70
4.2 Module des harmoniques de la T.F.D. de s_1 et s_2. 74
4.3 Reconstruction d'un polynôme de degré 11 avec des échantillons bruités. '–' courbe exacte, '-.' reconstruction avec les échantillons 'o'. 87
4.4 Signal à largeur de bande $2M + 1$. 90

6.1 Échantillonnage irrégulier mené avec 50 échantillons. 'o' position des échantillons choisis. 143
6.2 Échantillonnage irrégulier mené avec 50 échantillons. 'o' position des échantillons choisis. 144
6.3 Échantillonnage irrégulier mené avec 50 échantillons, 'o' position des échantillons choisis - '—' signal initial, '- -' signal estimé. 145
6.4 *(a)* différence entre le signal initial et le signal estimé $f - f_{ec}$ - *(b)* bruits ϵ_i (en %) ajoutés aux échantillons $\{f(t_i)\}$. 145
6.5 Exemple d'une reconstruction menée avec 50 échantillons de la forme $L_i(f) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$, les '+' représentent la position des a_i. Le signal initial et sa reconstruction sont quasiment confondus. 147

6.6 Échantillonnage mené avec 50 échantillons bruités de la forme $\tilde{L}_i(f) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt + \epsilon_i$, '+' position des a_i - '—' signal initial, '- -' signal reconstruit. 147
6.7 *(a)* différence entre le signal initial et le signal estimé $f - f_{ec}$ - *(b)* bruits ϵ_i (en %) ajoutés aux échantillons $\{L_i(f)\}$. 148
6.8 *(a)* Un poids lourd circulant sur une chaussée et *(b)* une suspension exitée par les irrégularités de l'uni d'une chaussée. 148
6.9 '–' signal expérimental, '-.-' signal reconstruit. Reconstruction menée *(a)* avec 11 échantillons, $M = 11$ et *(b)* avec 25 échantillons, $M = 21$. 149
6.10 Reconstruction menée avec 15 échantillons - '–' signal expérimental, '-.-' signal reconstruit. 150
6.11 Un signal f (—) et f_{ec} (- -) une reconstruction périodique de f. 151
6.12 *(a)* Reconstruction des variations de la force d'impact d'un essieu. (a) sans l'opérateur de périodisation - (b) avec l'opérateur de périodisation. 153
6.13 Oscillateur à 2 degrés de liberté. 154
6.14 (a) courbe effort-déplacement de la suspension k, les déplacements positifs correspondent à une compression - (b) irrégularités de la chaussée. 155
6.15 Exemple de variations de $F(t)$ dans les conditions énoncées ci-dessus. 156
6.16 Image $\mathcal{I}$ obtenue grâce à la résolution par la méthode de Runge-Kutta. 157
6.17 Reconstruction de l'image $\mathcal{I}$ avec un taux d'échantillonnage de 1/9. 157
6.18 Image intiale $\mathcal{I}_e$ de taille 768×512. 158
6.19 Image constituée des 920 pixels sélectionnés. 159
6.20 Reconstruction avec les 40×23 échantillons sélectionnés. La proportion d'échantillons sélectionnés pour la reconstruction est donc 1 pixel sur 425. 159
6.21 Image constituée des 1920 pixels sélectionnés. 160
6.22 Reconstruction les 48×40 sélectionnés. Taux d'échantillonnage 1/200. 160
6.23 Reconstruction avec 96×64 échantillons (soit 6144 pixels) choisis arbitrairement. Taux d'échantillonnage 1/64. 161
6.24 Reconstruction avec 152×102 échantillons (soit 15504 pixels) choisis arbitrairement. Taux d'échantillonnage 1/25. 161
6.25 Reconstruction avec 255×169 échantillons (soit 43095 pixels) choisis arbitrairement. Taux d'échantillonnage 1/10. 162

7.1 Poids lourd circulant sur une chaussée. 169
7.2 Variations de la force d'impact $F_i(t)$ autour du poids statique. 169
7.3 Poids lourd circulant sur une grille de capteurs. 174
7.4 Mesures de la force d'impact de l'essieu i enregistrées par les r capteurs. 175
7.5 Poids lourd circulant sur un pont instrumenté. 175
7.6 Allure des contraintes enregistrées par une jauge au passage d'un véhicule à trois essieux (1 essieu moteur + 1 tandem). . . 176

8.1 Caractéristiques des suspensions à hystérésis, (a) essieu avant et (b) essieu arrière - les déplacements sont comptés à partir de l'équilibre statique. 183
8.2 Réponse des pneumatiques, (a) essieu avant et (b) essieu arrière - les déplacements sont comptés à partir de l'équilibre statique. 185
8.3 Uni de la chaussée, (–) profil gauche et (-.) profil droit. 185
8.4 Modèle à un degré de liberté. 186
8.5 Variations de la force d'impact $F(V * t)$, (-.) suspension à hystérésis et (–) modèle linéaire. 187
8.6 Variations de la force d'impact $F(x/V)$ dans le cas de la suspension linéaire, (-.) profil droit et (–) profil gauche. 188
8.7 Modèle à deux degrés de liberté. 188
8.8 Variations de la force d'impact $F(V*t)$, résolution numérique. (–) avec la caractéristique du pneumatique et (-.) avec la raideur équivalente. 190
8.9 Variations de la force d'impact $F(V*t)$, résolution numérique. (–) suspension à hystérésis et caractéristique non linéaire du pneumatique, (-.) modèle linéarisé. 191
8.10 Variations de la force d'impact $F(V*t)$, résolution numérique. (–) modèle non linéaire à un degré de liberté et (-.) modèle non linéaire à deux degrés de liberté. 191
8.11 Variations du poids dynamique du chassis, résolution numérique. (–) modèle à un degré de liberté et (-.) modèle à deux degrés de liberté. 192
8.12 Énergie contenue dans chacun des harmoniques. (–) force d'impact, oscillateur à un degré de liberté et (-.) force d'impact, oscillateur à deux degrés de liberté. 193
8.13 Variations de la force d'impact $F(V*t)$, résolution numérique. Modèles linéarisés (–) à un degré de liberté et (-.) à deux degrés de liberté. 193
8.14 Modèle des charges constantes. 195

8.15 Modèle de véhicule à deux degrés de liberté. 195
8.16 Variations de la force d'impact $F(V*t)$, résolution numérique. Véhicule à deux essieux, (–) suspensions à hystérésis et (-.) suspensions viscoélastiques équivalentes. 196
8.17 Modèle de véhicule à quatre degrés de liberté. 197
8.18 Variations de la force d'impact $F(V*t)$ des essieux, résolution numérique. Véhicule à quatre degrés de liberté (–) caractéristiques non linéaires et (-.) linéarisation équivalente. 199
8.19 Variations de la force d'impact $F(x/V)$ des essieux, résolution numérique. Véhicule à quatre degrés de liberté et suspension linéaire (–) pneumatiques non-linéaires et (-.) pneumatiques linéaires. 200
8.20 Spectre selon la TFD (2000 points) des forces d'impact du second essieu du modèle non-linéaire (–) et du modèle linéarisé (-.). 200
8.21 Modèle de véhicule à trois essieux. 201
8.22 Variations de la force d'impact $F(V*t)$ des essieux 2 et 3, résolution numérique. Véhicule à cinq degrés de liberté (–) caractéristiques non-linéaires et (-.) linéarisation équivalente. . 202
8.23 Variations de la force d'impact de l'essieu 3. Véhicule à cinq degrés de liberté (–) masse du chassis $M = 18000\,\text{kg}$ et (-.) masse du chassis $1.1 * M$, les variations sont centrées autour de M. 203
8.24 Variations de la force d'impact de l'essieu 3. Véhicule à cinq degrés de liberté (–) masse du chassis $M = 18000\,\text{kg}$ et (-.) masse du chassis $1.4 * M$, les variations sont centrées autour de M. 203
8.25 Variations de la force d'impact de l'essieu 3. Véhicule à trois essieux, masse du chassis $M = 6000\,\text{kg}$. (–) modèle non linéaire et (-.) linéarisation équivalente. 204
8.26 Modèle de véhicule à cinq essieux - tracteur + remorque. . . . 205
8.27 Variations de la force d'impact $F(V*t)$ des essieux 2, 3 et 5, résolution numérique. Véhicule à neuf degrés de liberté, linéarisation équivalente. 207
8.28 Véhicule à neuf degrés de liberté. (a) variations de la force d'impact $F(V*t)$ de l'essieu 4, (–) et (-.) le centre d'inertie de la remorque est déplacé de 0.3 m. (b) spectre selon le TFD de $F(x/V)$, centre d'inertie (–) position initiale et (-.) position décalée. 208

8.29 Variations de la force d'impact $F(V*t)$ du premier essieu d'un véhicule instrumenté à cinq essieux, (–) mesure expérimentale, (-.) simulation numérique. 208
8.30 Poids lourd composé de 10 corps rigides. 210
8.31 Variations de la force d'impact $F(x/V)$ du 1e essieu du modèle linéaire à 3 essieux. (–) résolution numérique et (-.) échantillonnage avec les $\{f_k\}$. 223
8.32 Variations de la force d'impact $F(x/V)$ du 1e essieu du modèle linéaire à 3 essieux. (–) résolution numérique et (-.) échantillonnage avec les $\{f_k\}_{k\in I_4}$. 224
8.33 Variations de la force d'impact $F(x/V)$ du 1e essieu du modèle non-linéaire à 3 essieux. (–) résolution numérique et (-.) échantillonnage avec $\{\tilde{f}_k\}_{k=1}^4$. 224
8.34 Variations de la force d'impact $F(x/V)$ du 2e essieu du tracteur. (–) résolution numérique et (-.) échantillonnage avec $\{\tilde{f}_k\}_{k\in I}$. 225
8.35 Variations de la force d'impact $F(x/V)$ du 2e essieu du tracteur. (–) résolution numérique et (-.) échantillonnage avec $\{\tilde{f}_k\}_{k=1}^4$. 225
8.36 Variations des quantités $t \mapsto m_i\ddot{r}(t)$ (- -) et $t \mapsto K_{e,i}r(t)$ (-.) par rapport à la masse $m_i g$ (–) pour une portion de la RN10 (Trappes - 78). 227
8.37 Un poids lourd rigide à deux essieux (a) et sa modélisation (b). 228
8.38 Contact pneumatique-chaussée. 229
8.39 Poids lourd à cinq essieux, liaison entre le tracteur et la remorque. 234
8.40 Différence entre le poids statique (–) et la quantité R_T (-.) pour (a) le premier et (b) le second essieu du tracteur. 235
8.41 Différence entre le poids statique (–) et la quantité R_T (-.) en tenant compte de $F_{a,r}$. *(a)* premier essieu du tracteur et *(b)* second essieu du tracteur. 235
8.42 Schéma simplifié d'un capteur piézo-électrique. 236
8.43 Efforts appliqués à la chaussée au passage d'un essieu, celui-ci se déplaçant de gauche à droite sur la figure, *(a)* avec un frottement au contact pneumatique-chaussée et (b) sans forttement. 236

9.1 Ce que mesurent les capteurs. 239
9.2 Reconstruction de $F(t)$ pour le premier essieu du déflectographe, 'o' mesures fournies par les capteurs. Poids statique de l'essieu 5.75 t. 251
9.3 Précision de l'estimation du poids statique des essieux du déflectographe pour chacun des dix passages, (a) essieu 1 et (b) essieu 2. 251

9.4 Précision de l'estimation du poids statique total du déflectographe pour chacun des dix passages. 252
9.5 Précision de la procédure d'estimation avec 6 capteurs pour un poids lourd à 5 essieu, (a) 1er essieu et (b) 2nd essieu - 'o' estimation par moyenne simple, '+' la technique développée. . 253
9.6 Précision de la procédure d'estimation avec 12 capteurs, (a) 1er essieu et (b) 2nd essieu du véhicule à 5 essieux - 'o' estimation par moyenne simple, '+' la technique développée. 253
9.7 Précision (en %) de l'estimation pour l'échantillon de poids lourds à 5 essieux. Premier essieu (a) avec 6 capteurs, (b) avec 12 capteurs, second essieux (c) avec 6 capteurs, (d) avec 12 capteurs. 255
9.8 Précision de la procédure d'estimation avec 6 capteurs, (a) 1er essieu et (b) 2nd essieu des 34 véhicules du trafic courant - 'o' estimation par moyenne simple, '+' la technique développée. . 258
9.9 Précision de la procédure d'estimation avec 12 capteurs, (a) 1er essieu et (b) 2nd essieu des 34 véhicules du trafic courant - 'o' estimation par moyenne simple, '+' la technique développée. 258