



**HAL**  
open science

# Effets d'échelle dans les matériaux quasi-fragiles à microstructure aléatoire

Iyadh Laalai

► **To cite this version:**

Iyadh Laalai. Effets d'échelle dans les matériaux quasi-fragiles à microstructure aléatoire : approches locale et non locale. Physique [physics]. ENPC - École des Ponts ParisTech, 1993. Français. NNT : 1993ENPC9308 . tel-04525036

**HAL Id: tel-04525036**

**<https://enpc.hal.science/tel-04525036>**

Submitted on 28 Mar 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 17111 (3)



**DOCTORAT DE L'ECOLE NATIONALE  
DES PONTS ET CHAUSSEES**

**Spécialité: Structures et matériaux**

présentée par

**LAALAI Iyadh**

Sujet:

**Effets d'échelle dans les matériaux  
quasi-fragiles à microstructure aléatoire:  
approches locale et non-locale**

Soutenu le 18 Mars 1993

<b>Jury:</b>	<b>A. ZAOUI</b>	Président
	<b>D. AUBRY</b>	Rapporteur
	<b>D. JEULIN</b>	Rapporteur
	<b>J. MAZARS</b>	Examineur
	<b>K. SAB</b>	Examineur
	<b>H.D. BUI</b>	Directeur

**DOCTORAT DE L'ECOLE NATIONALE  
DES PONTS ET CHAUSSEES**

Spécialité: **Structures et matériaux**

présentée par

**LAALAI Iyadh**



Sujet:

**Effets d'échelle dans les matériaux  
quasi-fragiles à microstructure aléatoire:  
approches locale et non-locale**

Soutenue le 18 Mars 1993

<b>Jury:</b>	<b>A. ZAOUI</b>	Président
	<b>D. AUBRY</b>	Rapporteur
	<b>D. JEULIN</b>	Rapporteur
	<b>J. MAZARS</b>	Examineur
	<b>K. SAB</b>	Examineur
	<b>H.D. BUI</b>	Directeur



## REMERCIEMENTS

*En tout premier lieu, j'adresse toute ma reconnaissance à mon ami Karam Sab qui fut tout au long de ce travail mon principal conseiller et interlocuteur. Au cours de ces années, j'ai été maintes fois fasciné par sa rigueur et sa créativité. Je tiens à l'assurer de ma profonde gratitude.*

*Je ne saurais jamais remercier Alain Ehrlacher qui m'a accueilli dans son équipe et a suivi de près ce travail dont il est le premier initiateur. Je le remercie pour son aide inestimable.*

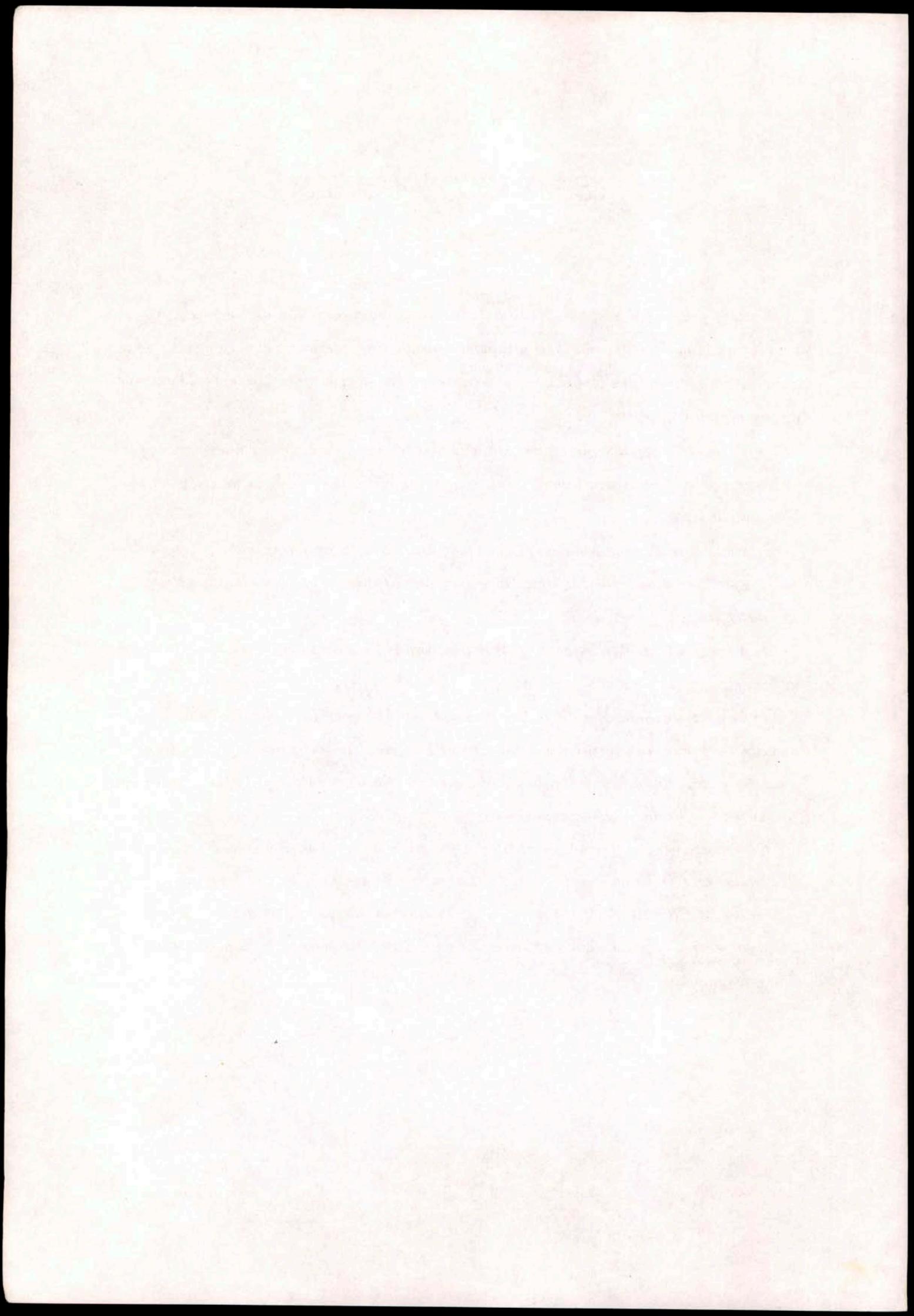
*Je tiens à remercier Monsieur Hui Dong Bui pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant la responsabilité de la direction de ma thèse malgré sa lourde charge de travail et ses responsabilités.*

*Je tiens également à remercier Monsieur André Zaoui qui a accepté de présider mon jury.*

*Je voudrais aussi remercier Messieurs Denis Aubry et Dominique Jeulin d'avoir accepté de porter un jugement sur mon travail en étant les rapporteurs de ma thèse.*

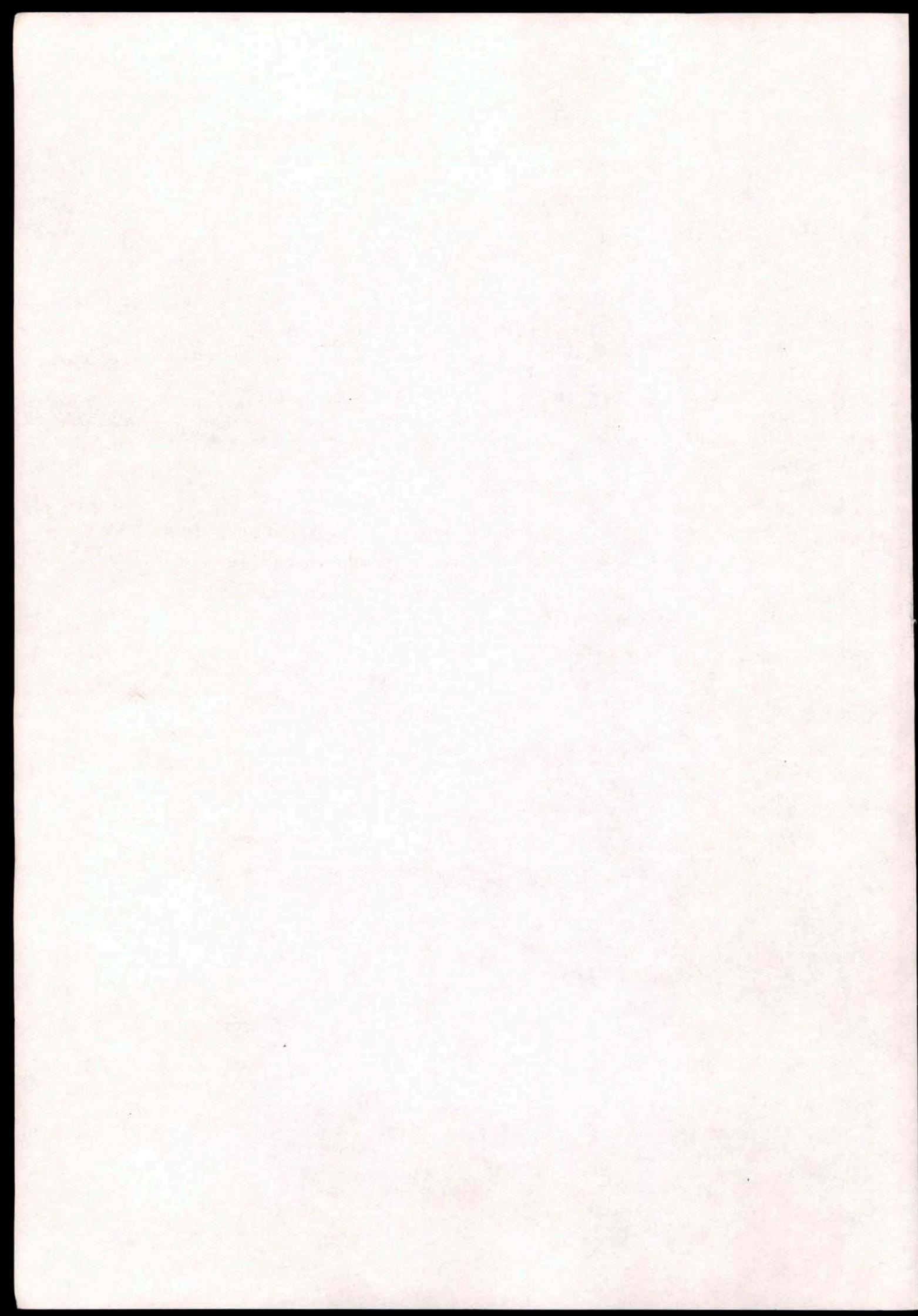
*Je remercie aussi Monsieur Jacky Mazars pour l'intérêt qu'il a manifesté pour mon travail en acceptant d'être membre du jury.*

*Ce travail a été effectué au Centre d'Enseignement et de Recherche en Analyse des Matériaux de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. Tout au long des années passées au CERAM, j'ai pu apprécier l'ambiance professionnelle et amicale qui règne dans ce centre. Que mes amis et collègues du CERAM trouvent ici l'expression de ma sincère sympathie.*



*“Voici la barque, elle conduit peut-être,  
là bas, dans le grand néant. Mais qui  
veut s'embarquer dans ce peut-être?”*

*F. Nietzsche*



# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Modélisations de la rupture des matériaux quasi-fragiles</b>	<b>6</b>
1.1 INTRODUCTION . . . . .	7
1.2 APPROCHES DÉTERMINISTES . . . . .	8
1.2.1 La mécanique de la rupture . . . . .	8
1.2.2 La mécanique de l'endommagement continu . . . . .	13
1.2.3 Limites des approches déterministes . . . . .	23
1.3 APPROCHES PROBABILISTES . . . . .	27
1.3.1 Statistique de Weibull . . . . .	27
1.3.2 Approches milieux continus . . . . .	28
1.3.3 Les réseaux . . . . .	35
1.4 CONCLUSION . . . . .	45
<b>2 Modélisation d'un matériau endommagé à l'aide d'un milieu discret équivalent</b>	<b>46</b>
2.1 INTRODUCTION . . . . .	47
2.2 POSITION DU PROBLÈME . . . . .	48
2.3 DISCRÉTISATION DU MILIEU . . . . .	51
2.4 MODÉLISATION PROPOSÉE . . . . .	53
2.5 SCHÉMA DE CALCUL . . . . .	54
2.6 CONCLUSION . . . . .	65
<b>3 Modèle local</b>	<b>66</b>
3.1 INTRODUCTION . . . . .	67
3.2 DESCRIPTION DU MODÈLE LOCAL . . . . .	70
3.2.1 Choix du critère de rupture des poutres . . . . .	70
3.2.2 Choix de la distribution statistique des limites à la rupture . . . . .	71
3.3 MODÈLE LOCAL: $0 < m < 2$ . . . . .	72
3.3.1 Structures non fissurées . . . . .	72
3.3.2 Structures fissurées . . . . .	77
3.3.3 Application du modèle local . . . . .	80
3.3.4 Conclusion . . . . .	83

3.4	ETUDE DE $m \geq 2$ . . . . .	85
3.4.1	Structures non fissurées . . . . .	85
3.4.2	Structures fissurées . . . . .	90
3.4.3	conclusion . . . . .	92
3.5	CONCLUSION GÉNÉRALE . . . . .	93
<b>4</b>	<b>Modèle non-local</b>	<b>93</b>
4.1	INTRODUCTION . . . . .	94
4.2	MODÈLE NON-LOCAL . . . . .	96
4.2.1	Critère de rupture . . . . .	96
4.2.2	Modélisation de l'hétérogénéité du matériau . . . . .	97
4.3	COHÉRENCE DU MODÈLE . . . . .	100
4.3.1	Structures non fissurées . . . . .	100
4.3.2	Structures fissurées . . . . .	103
4.4	ETUDE DES EFFETS D'ÉCHELLE . . . . .	104
4.4.1	Effet d'échelle de volume . . . . .	104
4.4.2	Etude paramétrique . . . . .	109
4.4.3	Discussion . . . . .	113
4.4.4	Effet d'échelle de structure . . . . .	117
4.4.5	Effet d'échelle de gradient . . . . .	119
4.5	CONCLUSION . . . . .	119
<b>5</b>	<b>Applications et perspectives</b>	<b>120</b>
5.1	INTRODUCTION . . . . .	121
5.2	SCHÉMAS DE FISSURATION . . . . .	122
5.2.1	Modèle local . . . . .	123
5.2.2	Interprétation des résultats . . . . .	127
5.2.3	Modèle non-local . . . . .	129
5.2.4	Interprétation des résultats . . . . .	133
5.3	APPLICATIONS À DES STRUCTURES RÉELLES . . . . .	134
5.3.1	Flexion trois points d'une poutre en béton armé . . . . .	134
5.3.2	Essai P.I.E.D . . . . .	136
5.4	PERSPECTIVES . . . . .	139
5.4.1	Modèle non-local radoucissant . . . . .	139
5.4.2	Modèle local élastoplastique fragile . . . . .	140
5.5	CONCLUSION . . . . .	147
	<b>Conclusion</b>	<b>148</b>
	<b>A Annexe: Rappel de la théorie des équivalences</b>	
	<b>B Bibliographie</b>	

# INTRODUCTION

L'utilisation du terme "effets d'échelle" dans l'étude de la rupture des matériaux hétérogènes à matrice fragile du type béton, roches, céramiques ... soumis à des chargements monotones recouvre trois sortes d'expériences dans lesquelles des éprouvettes homothétiques sont soumises à un chargement croissant jusqu'à la rupture.

Dans le premier type d'expérience, la sollicitation est homogène. On peut citer les expériences de Kadlecěk et Spetla [*Kadlecěk et Spetla, 1987*] sur plusieurs éprouvettes homothétiques en béton de forme cylindriques ainsi que les récentes expériences de traction simple réalisées par Wu et Rossi [*Wu, 1991*]. et on remarque alors que la contrainte à la rupture moyenne varie en fonction du volume de l'éprouvette. On parle d'effet d'échelle de volume.

Dans le deuxième type d'expériences, l'éprouvette est entaillée. On peut citer la rupture par flexion 3-points d'une poutre entaillée [*Hillerborg, 1983*]. On observe alors que la mécanique linéaire de la rupture n'est respectée que pour les grandes tailles d'éprouvettes et on parle d'effet d'échelle de structure.

Enfin, dans le troisième type d'expérience, un fort gradient règne dans l'éprouvette non entaillée. Ce gradient peut être généré dans une poutre par flexion 3-points ou 4-points [*L'Hermite, 1973*]. On observe alors que, pour une structure donnée, la contrainte nominale (= Force maximale à la rupture/section) dépend du mode de chargement. On parle alors d'effet d'échelle de gradient.

Afin de rendre compte des effets d'échelle de structure et de gradient, Saouridis et Mazars [*Saouridis et Mazars, 1987*] utilisent une théorie d'endommagement non-local. Dans cette théorie, l'évolution du dommage au point  $x$  est fonction de la déformation moyenne dans un volume autour de  $x$ . Le diamètre,  $d$ , de ce volume dit représentatif, supposé être une caractéristique du matériau, est lié à la taille de la plus grosse hétérogénéité. Les effets d'échelle de structure et de gradient résultent alors du rapport de la taille du volume représentatif et de la taille de la structure.

Par ailleurs, la physique des milieux aléatoires s'est récemment intéressée aux effets d'échelle de volume suivant une démarche probabiliste qui remonte à Weibull [*Weibull, 1952*] et qui s'appuie sur l'hypothèse du maillon le plus faible. Une étude

numérique a été réalisée par Hermann, Hansen et Roux [Hermann, Hansen et Roux, 1989]. sur la résistance à la traction d'un réseau carré  $L \times L$  formé de poutres horizontales et verticales encastées aux noeuds du réseau. Ces poutres sont supposées élastiques fragiles obéissant à un critère de type Von-Mises avec des seuils tirés aléatoirement selon une loi de Weibull de paramètre  $m$ . La conclusion essentielle de cette étude est que, pour  $m < 2$  la contrainte de rupture du réseau (=Force maximale/L) décroît comme une puissance  $-\frac{1}{4}$  en fonction de  $L$ :

$$(1) \quad \sigma_r \sim L^{-\frac{1}{4}}$$

Ainsi, le caractère aléatoire du matériau serait responsable de l'effet de volume.

L'objet de ce travail est de présenter un modèle unique qui rend compte des trois types d'effet d'échelle. En effet, il est bien clair que dans une structure réelle les différents types d'effet d'échelle ne sont pas indépendants. Ils se manifestent avec plus ou moins d'intensité selon la nature de la structure et du chargement.

Ce mémoire se compose de cinq chapitres.

Le premier chapitre est bibliographique. Il contient une revue non exhaustive de quelques modèles regroupés en deux catégories: modèles déterministes et modèles probabilistes. Nous examinerons alors les hypothèses sous-jacentes à ces modèles ainsi que les limitations qu'elles impliquent.

Dans le deuxième chapitre, nous proposons une classe de modèles de rupture bâtis en deux étapes:

a) le milieu continu sain (à l'état initial) est tout d'abord discrétisé soit par la méthode des éléments finis soit par la théorie des équivalences qui représente ce milieu par un réseau de poutres élastiques.

b) un critère de rupture fragile est postulé sur les différents éléments de la discrétisation.

Nous présentons alors les méthodes générales de calcul de cette classe de modèles ainsi que les critères selon lesquels se fera leur évaluation. Nous en proposons deux:

1) Indépendance des résultats vis-à-vis de la discrétisation. On parle alors de cohérence du modèle.

2) Confrontation des effets d'échelle prédits et des effets d'échelle observés expérimentalement pour des structures en chargement monotone.

L'objet du troisième et du quatrième chapitre est de proposer et d'étudier différents modèles de la classe présentée au deuxième chapitre. Plus précisément, nous étudions dans le troisième chapitre un critère de rupture local qui porte sur l'énergie élastique emmagasinée dans l'élément de discrétisation; les seuils de rupture sont tirés aléatoirement selon une loi de Weibull de paramètre  $m$  et renormalisés en fonction de la finesse de la discrétisation de façon à assurer la cohérence du modèle. Nous confirmerons alors les effets d'échelle de volume prédits en physique des milieux aléatoires pour  $0 < m < 2$ . Nous montrerons aussi que le modèle local  $0 < m < 2$  prédit des effets d'échelle de structure qui suivent la loi de puissance (1) ce qui est en contradiction avec les observations expérimentales. Ceci nous conduit à étudier le modèle local pour  $m \geq 2$  avec une finesse de discrétisation fixée. Nous mettrons alors en évidence une taille critique à partir de laquelle le milieu n'exhibe plus d'effet d'échelle de volume et nous verrons aussi qu'avec le modèle local  $m \geq 2$ , la M.L.R est applicable pour les structures fissurées de grande taille ce qui est conforme aux observations expérimentales.

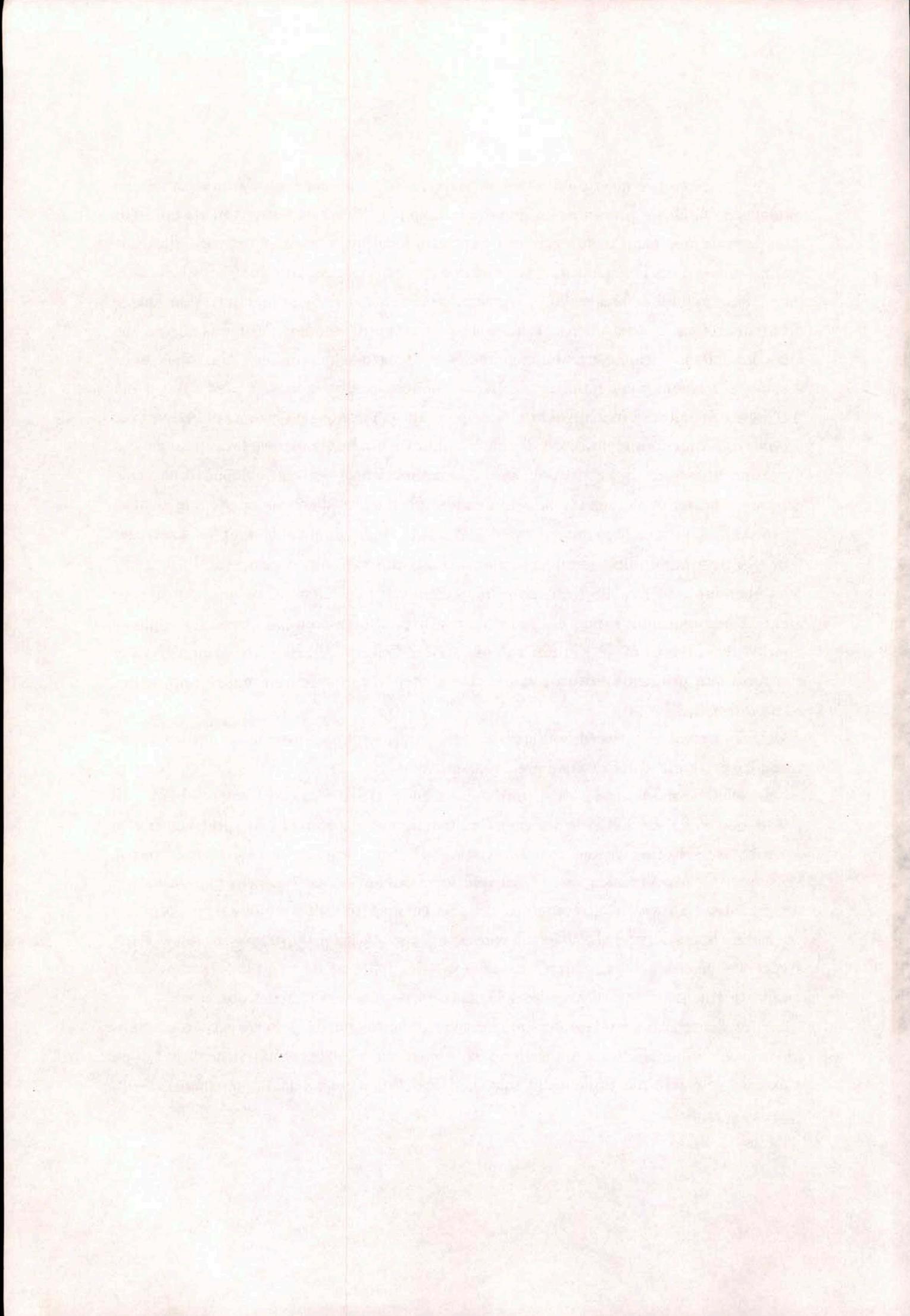
Cependant, le modèle local pour  $m \geq 2$  n'est pas cohérent. Nous montrerons alors qu'une renormalisation des seuils de rupture en fonction de la finesse du maillage aboutit dans le cas  $m \geq 2$  à une absence totale d'effet d'échelle. Nous sommes alors confrontés au problème suivant: assurer la cohérence du modèle ou rendre compte des effets d'échelle.

L'adoption d'un critère non-local dans le quatrième chapitre nous permettra de résoudre cette difficulté de manière satisfaisante.

En effet, le modèle non-local probabiliste du quatrième chapitre est cohérent et il prédit des effets d'échelle de volume, de structure et de gradient qualitativement en accord avec les observations expérimentales. De plus, les modèles développés par la physique des milieux aléatoires ainsi que les modèles d'endommagement non-locaux déterministes apparaîtront comme des cas particuliers limites du modèle proposé.

Enfin, le cinquième chapitre est consacré à l'application du modèle proposé à des structures réelles. Nous montrerons alors que les schémas de fissuration prédits sont qualitativement en accord avec les schémas de fissuration réellement observés.

Nous discuterons ensuite des perspectives ouvertes par la présente étude en commentant quelques résultats numériques dans le cas où la loi de comportement du milieu aléatoire est élasto-plastique jusqu'à un seuil de déformation au delà duquel une rupture fragile se produit.



# Chapitre 1

## Modélisations de la rupture des matériaux quasi-fragiles

### 1.1- INTRODUCTION

### 1.2- APPROCHES DÉTERMINISTES

1.2.1: La mécanique de la rupture

1.2.2: La mécanique de l'endommagement continu

1.2.3: Limites des approches déterministes

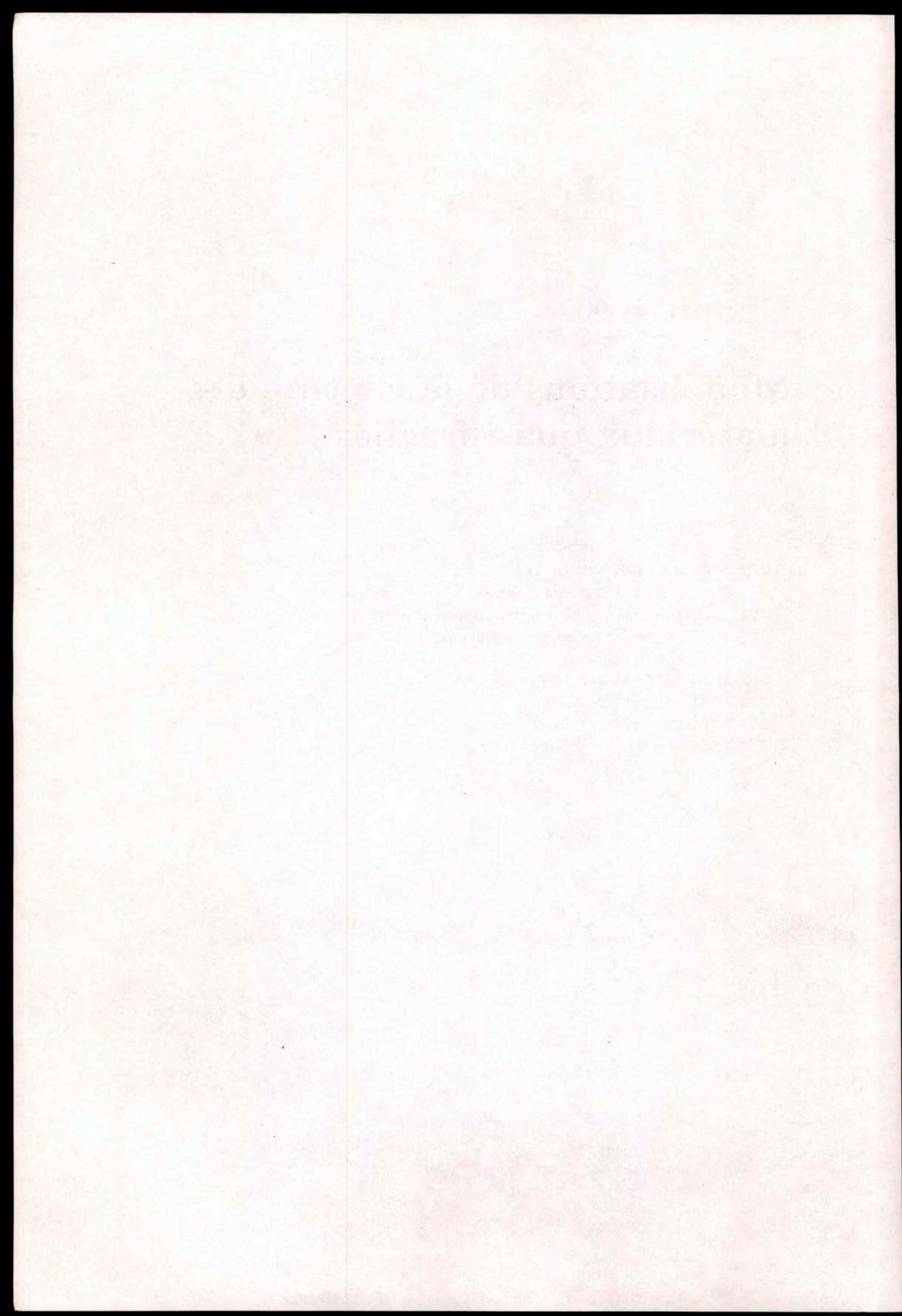
### 1.3- APPROCHES PROBABILISTES

1.2.1: Statistique de Weibull

1.2.2: Approches milieux continus

1.2.3: Les réseaux

### 1.4- CONCLUSION



## 1.1 INTRODUCTION

La rupture des matériaux quasi-fragiles du type béton, roches, céramiques, ... est un phénomène très complexe. En effet, le comportement à la rupture très contrasté de la matrice et des inclusions joue un rôle prépondérant dans la naissance, la propagation et la coalescence des microfissures qui ont lieu au sein d'un échantillon soumis à un chargement croissant. De ce fait, la modélisation de la rupture nécessite l'introduction d'hypothèses simplificatrices.

L'objet du présent chapitre est de passer en revue les différentes modélisations de la rupture des matériaux quasi-fragiles. Nous insisterons sur les limites et les hypothèses sous-jacentes à ces modèles qui sont regroupés en modèles déterministes et probabilistes.

## 1.2 APPROCHES DÉTERMINISTES

Dans toutes les approches déterministes, le matériau est considéré comme étant homogène. La présence de fissures est prise en compte explicitement quand celles-ci ont des tailles comparables à celle de l'échantillon. Par contre, les microfissures sont prises en compte à travers un comportement non linéaire.

### 1.2.1 La mécanique de la rupture

La mécanique de la rupture considère un milieu comportant des fissures, c'est à dire, des surfaces de discontinuité du déplacement.

#### • La mécanique linéaire de la rupture

Dans cette théorie, le matériau est considéré homogène et isotrope ayant un comportement élastique linéaire. La présence d'une fissure est prise en compte par des paramètres (facteurs d'intensité de contraintes  $K$ ) qui caractérisent l'intensité du champ de contrainte au voisinage de la pointe de la fissure. Ce concept de facteurs d'intensité de contraintes a été introduit par Irwin [Irwin, 1957].

Par exemple, le champ de contrainte autour d'une fissure rectiligne de longueur  $2a$  chargée en mode I à l'infini s'écrit:

$$(1.1) \quad \sigma_{ij}(r, \theta, a) = \frac{K_I(a, \sigma_{22}^{\infty})}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad \text{avec } r \ll a$$

où  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires d'un point courant  $M$  situé au voisinage de la pointe de la fissure (Figure 1.1).

En mode I, la plupart des théories de la rupture fragile conduisent à la notion d'un seuil critique, non pas pour la contrainte qui est infinie en fond de fissure, mais pour le facteur  $K_I$ . Le critère de rupture de l'éprouvette s'écrit sous la forme:

$$(1.2) \quad K_I - K_I^c \leq 0$$

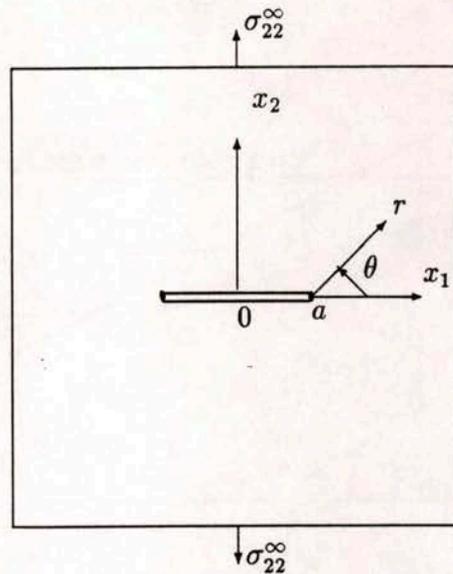


Figure 1.1: Fissure sollicitée en mode I.

où  $K_I^c$  est une caractéristique intrinsèque du matériau appelée ténacité.

L'application de la Mécanique Linéaire de la Rupture (MLR) au calcul des structures nécessite la détermination expérimentale du paramètre  $K_I^c$  qui est considéré comme une caractéristique intrinsèque du matériau.

Or, dès les premières applications de la MLR au calcul des structures en béton, il s'est avéré que les valeurs expérimentales du paramètre  $K_I^c$  considéré comme caractéristique du matériau augmentent avec la taille de la structure jusqu'à atteindre une valeur constante pour des éprouvettes de très grandes dimensions. En particulier, pour le cas de la flexion des poutres entaillées en béton [Hillerborg, 1983], une section de hauteur supérieure à deux mètres est nécessaire pour obtenir des valeurs constantes de  $K_I^c$ . On parle alors d'effet d'échelle de structure (Figure 1.2).

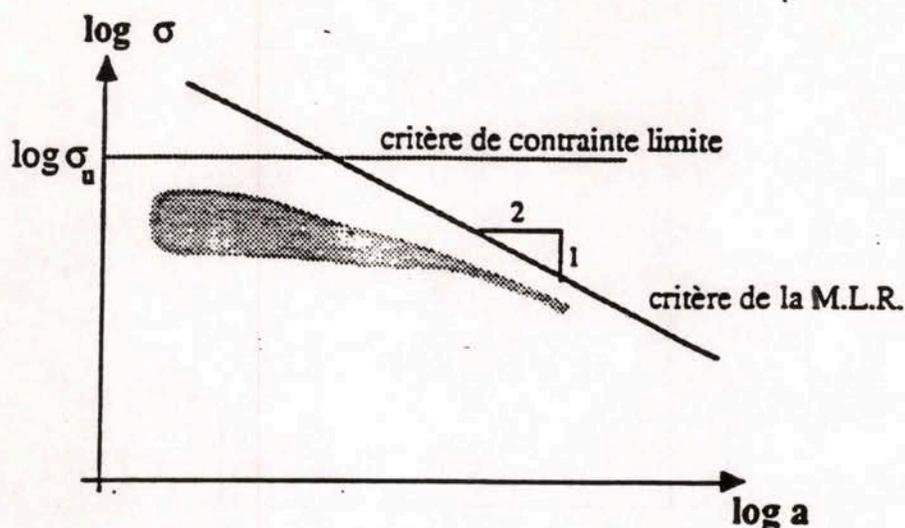


Figure 1.2: Effet d'échelle de structure: Flexion 3-points

Cet effet d'échelle de structure est attribué à (d) une description insuffisante du comportement du matériau. En effet l'hypothèse principale en mécanique linéaire de la rupture est la linéarité du comportement élastique. Or, dans le cas des matériaux quasi-fragiles, il existe une zone perturbée (zone d'élaboration), en fond de fissure, où se développe un comportement non linéaire (plasticité, microfissuration). La condition nécessaire d'application de la M.L.R est que la taille de cette zone reste petite par rapport à la taille de la structure. D'après les observations expérimentales effectuées par Pijaudier-Cabot [Pijaudier-Cabot, 1987], la taille de la zone d'élaboration semble être indépendante de la taille de la structure. Sa taille serait liée à la taille des plus grosses hétérogénéités du matériau ( $d \simeq 3d_a$  où  $d_a$  est liée à la taille du plus gros grain). Ainsi pour les structures de grandes tailles, cette zone sera de taille négligeable et la M.L.R sera applicable.

Pour rendre compte de cet effet d'échelle de structure, Bazant [Bazant, 1984] a proposé une formule approchée qui combine la M.L.R pour les structures de grandes tailles et un critère ultime pour les structures de petites tailles:

$$(1.3) \quad \sigma_r = B \cdot f_t \left[ 1 + \frac{d}{\lambda \cdot d_a} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

où  $\sigma_r$  est la contrainte à la rupture,  $d$  est l'épaisseur de l'éprouvette et  $d_a$  est la taille de la plus grosse hétérogénéité.

$B$ ,  $\lambda$  sont deux constantes adimensionnelles,  $f_t$  est la contrainte à la rupture de traction mesurée en supposant le matériau élastique fragile et en utilisant la théorie classique des poutres pour le calcul des champs de contraintes dans l'éprouvette.

### **•La mécanique non linéaire de la rupture**

Diverses approches ont été développées pour tenir compte explicitement de la zone de non linéarité en amont de la fissure en introduisant des lois de comportement non-linéaire tout en conservant le même formalisme (approche globale, facteurs d'intensité de contraintes...)

Parmi ces modèles, on cite le modèle de la fissure fictive développé par Hillerborg [Hillerborg, 1976]. Ce modèle fait l'hypothèse que la zone de microfissuration est suffisamment petite. On la représente comme le prolongement fictif de la fissure existante et on adopte pour la décrire une relation non linéaire entre les contraintes transmises par la fissure fictive et les déplacements de ces lèvres. En mode I, la contrainte principale maximale de traction  $\sigma_y$ , normale aux lèvres de la fissure fictive et l'ouverture de cette fissure fictive  $w$  sont reliées par:

$$(1.4) \quad \sigma_y = f(w)$$

Le critère d'apparition d'une zone microfissurée schématisée par une fissure fictive s'écrit sous la forme:

$$(1.5) \quad \sigma_y = f_t$$

où  $f_t$  est un paramètre du modèle.

Le paramètre  $f_t$  et la courbe  $\sigma_y = f(w)$  sont considérés comme des caractéristiques intrinsèques du matériau.

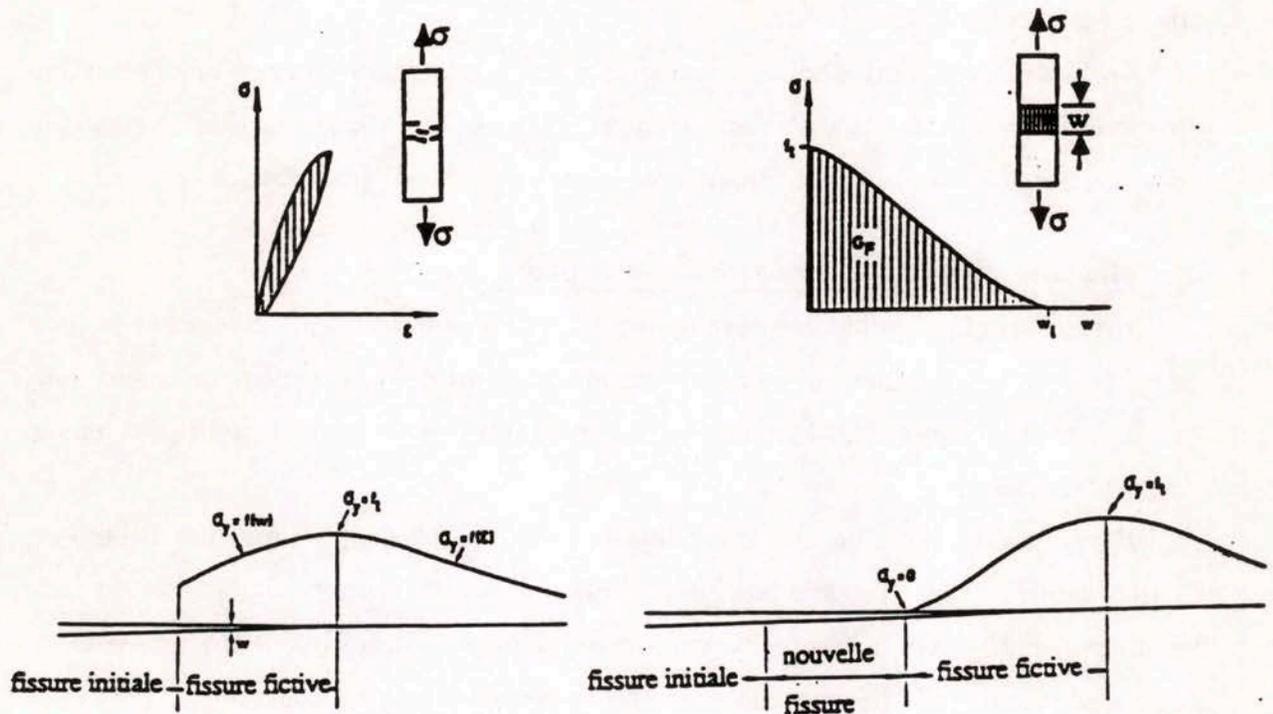


Figure 1.3: Modèle de la fissure fictive [Hillerborg, 1976]

L'énergie dissipée par la fissure fictive est liée à l'énergie de rupture  $G_f$  par:

$$(1.6) \quad A \int_0^{\omega_l} f(w)dw = AG_f$$

où  $A$  est la section et  $\omega_l$  l'ouverture critique de la fissure correspondant à  $\sigma = 0$  à l'extrémité de la fissure réelle.

Le modèle de la fissure fictive constitue un apport intéressant pour prendre en compte la zone endommagée en amont de la fissure et donne de bons résultats dans le cas où celle-ci est confinée [Hillerborg, Modeer et Petersson, 1976]. Cependant son utilisation dans un code d'éléments finis nécessite la connaissance préalable du trajet

de propagation de la fissure ainsi que le remaillage de la structure après chaque étape de propagation. Par ailleurs, les paramètres de ce modèle, considérés comme caractéristiques du matériau, semblent dépendre du chargement et de la taille de la structure. L'identification expérimentale de ces paramètres semble aussi difficile [Hillerborg, 1985].

### 1.2.2 La mécanique de l'endommagement continu

La théorie de l'endommagement permet dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles de rendre compte de la dégradation progressive des matériaux. Son domaine d'application couvre aussi bien le domaine des premières détériorations, la prise en compte des effets de cumul non-linéaire du dommage ainsi que la prévision de l'amorçage ou l'initiation d'une macrofissure.

Contrairement à la mécanique de la rupture, les défauts n'interviennent qu'au travers d'un concept d'homogénéisation et leur évolution est décrite d'une façon macroscopique à l'aide d'une variable  $D$ . La variable  $D$  représente alors la variation du tenseur d'élasticité par rapport à l'état vierge (non endommagé). Ainsi, dans une théorie isotrope,  $D$  est le scalaire défini par:  $D = 1 - \frac{E}{E_0}$  où  $E$  est le module d'Young actuel et  $E_0$  le module d'Young à l'état vierge.

La théorie de l'endommagement est basée sur les hypothèses de la mécanique des milieux continus. L'élément de volume est considéré assez grand par rapport aux hétérogénéités du milieu et assez petit pour qu'on puisse le considérer comme un point matériel. Les relations de comportement sont écrites pour cet élément volume considéré continu et homogène et dans lequel on peut définir des contraintes et des déformations.

Les modèles locaux proposent de relier le dommage au point  $\underline{x}$ ,  $D(\underline{x})$ , à l'état de déformation qui règne en ce point.

$$(1.7) \quad D(\underline{x}) = f(\epsilon(\underline{x}))$$

Cependant, l'utilisation de telles lois dans un calcul par éléments finis donne des résultats où le comportement global et le schéma de fissuration dépendent de la finesse

de maillage [Saouridis et Mazars,1987] lorsque la structure est soumise à un chargement monotone. Par ailleurs, l'énergie dissipée à la rupture tend vers zéro quand on raffine suffisamment le maillage ce qui est physiquement inadmissible. Cette aberration est due à la localisation de l'endommagement sur un seul élément du maillage.

D'où la nécessité d'améliorer la modélisation afin d'assurer l'indépendance de la zone de localisation vis à vis du maillage. Deux approches permettant de s'affranchir de cette dépendance ont été proposées. La première approche concerne les limiteurs de localisation. L'autre approche concerne les modèles d'endommagement non-locaux.

Dans ce qui suit, nous rappellerons le principe de ces deux approches.

#### A- LIMITEURS DE LOCALISATION

Plusieurs types de limiteurs de localisation ont été proposés :

- Modèle de la bande multifissurée

Le moyen le plus simple de contrôler la taille de la zone de la localisation est d'imposer la taille des éléments du maillage égale à une longueur,  $w_c$ , supposée être une caractéristique du matériau.

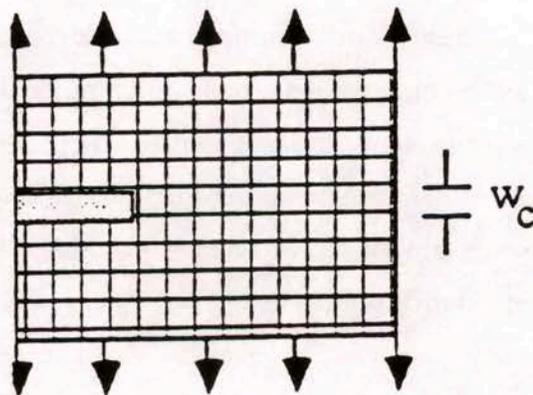


Figure 1.4: Modèle de la bande multifissurée [Bazant et Oh,1983]

Dans le modèle proposé par Bazant et Oh [Bazant et Oh,1983], la fissure est représentée par une bande de largeur  $w_c$  où sont réparties uniformément des microfissures parallèles. Le critère d'apparition de cette zone microfissurée s'écrit:

$$(1.8) \quad \sigma_y = f_t$$

où  $f_t$  est un paramètre du modèle et  $\sigma_y$  la contrainte principale maximale de traction.

Dans un calcul par éléments finis, ce modèle consiste à diminuer la raideur de la bande microfissurée de largeur  $w_c$  perpendiculairement à la direction de la traction maximale. Ce modèle présente donc l'avantage d'être facile à implanter dans un code d'éléments finis classique.

L'avantage de ce modèle est qu'il permet de rendre compte de l'effet d'échelle de structure [Bazant,1986]. Ainsi, il a été montré que la valeur de  $w_c$  optimale qui permet un ajustement avec les résultats expérimentaux est de l'ordre de trois fois la taille du plus gros grain.

Cependant, la limitation de la taille de la discrétisation à  $w_c$  présente un inconvénient majeur. En effet, la convergence de la méthode des éléments finis nécessite souvent l'utilisation de maillages fins dont la taille serait éventuellement inférieure à  $w_c$ . Donc, l'utilisation de ce modèle donne nécessairement des solutions qui ne dépendent pas du maillage mais présentant l'inconvénient d'être peu précises.

Dans le cas de la propagation d'une fissure en mode I, ce modèle est analogue au modèle de la fissure fictive. Il présente les mêmes inconvénients que ce dernier quant à la détermination expérimentale des caractéristiques du modèle et de la dépendance de celles-ci en fonction du chargement et de la taille de la structure.

#### • Modèle du gradient

Le problème de la localisation n'est pas un problème purement numérique mais provient de la perte d'ellipticité des équations d'équilibre et de l'apparition d'un problème de bifurcation (non unicité de la solution) [Belytschko et Lasry,1988].

L'idée essentielle des limiteurs de localisations consiste à régulariser les équations d'équilibre pour empêcher la perte d'ellipticité et ceci en introduisant un terme supplé-

mentaire dans la loi de comportement. Le modèle du gradient consiste à introduire dans la loi de comportement un terme supplémentaire en gradient de la déformation.

Des calculs numériques conduits par Belytschko et Lasry [*Belytschko et Lasry, 1988*] sur ce type de limiteur de localisation montrent que la matrice de rigidité associée au problème n'est pas toujours définie positive. Par conséquent, l'introduction du limiteur de localisation ne permet pas de résoudre tous les problèmes inhérents à l'utilisation de lois adoucissantes dans un calcul par éléments finis. Par contre, la localisation ne se fait plus sur un seul élément mais sur une zone de taille finie.

Cette méthode présente aussi l'inconvénient d'avoir une formulation variationnelle non classique et de nécessiter l'emploi d'éléments finis d'ordre élevé [*Belytschko et Lasry, 1988*].

## B- APPROCHES NON-LOCALES

Deux types d'approches non locales ont été proposées.

### • Loi de comportement non-locale

Dans cette approche, l'endommagement est local: le dommage au point  $\underline{x}$ ,  $D(\underline{x})$  relié à l'état de déformation qui règne en ce point. Par contre, la loi de comportement du matériau est non-locale: la contrainte est reliée à la déformation moyenne autour d'un certain volume représentatif du point matériel considéré. Cela revient à écrire la loi de comportement sous la forme :

$$(1.9) \quad \underline{\sigma}(\underline{x}) = f(\overline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}))$$

avec

$$(1.10) \quad \overline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) = \int_V \underline{\epsilon}(\underline{x} + \underline{s}) \alpha(\underline{s}) ds$$

où  $\alpha(\underline{s}) = \alpha(-\underline{s})$  est une fonction de pondération et  $V$  est le volume représentatif.

D'autres formulations prenant en compte les dérivées spatiales d'ordre plus élevé du champ de déformation ont été proposés [Bazant, Balytschko et Chang, 1984]. Cette méthode présente l'avantage de limiter la localisation et de garantir l'indépendance des résultats en fonction du maillage.

Cependant, elle présente plusieurs inconvénients. En effet, la formulation variationnelle du problème élastique n'est pas standard et nécessite l'utilisation d'éléments finis particuliers (éléments finis imbriqués) ainsi que la prise en compte de conditions aux limites supplémentaires [Bazant, 1984]. Par ailleurs, le comportement purement élastique décrit par ce modèle est non-local alors que l'approche locale donne des résultats satisfaisants.

#### • Loi d'évolution non-locale

L'autre idée consiste à garder une loi de comportement locale et de considérer que l'évolution de la variable d'endommagement est non-locale. La méthode des éléments finis classique est alors suffisante pour étudier le problème de l'évolution de l'endommagement puisque le seul changement porte sur la loi d'évolution de l'endommagement.

L'approche multiéchelle proposée par C. Saouridis [Saouridis, 1988] s'inspire de ce formalisme. Dans cette approche, on attache à chaque point matériel  $x$  un volume élémentaire  $V_E$  sur lequel on définit la contrainte, la déformation, le tenseur d'élasticité et la variable d'endommagement  $D(\underline{x})$  et un volume représentatif  $V_D \gg V_E$  dont l'état moyen pilote l'évolution de l'endommagement au point  $\underline{x}$ ,  $D(\underline{x})$ . La taille de ce volume représentatif est considérée comme une caractéristique du matériau et est supposée être liée à la taille du plus gros grain. Le schéma suivant illustre cette approche:

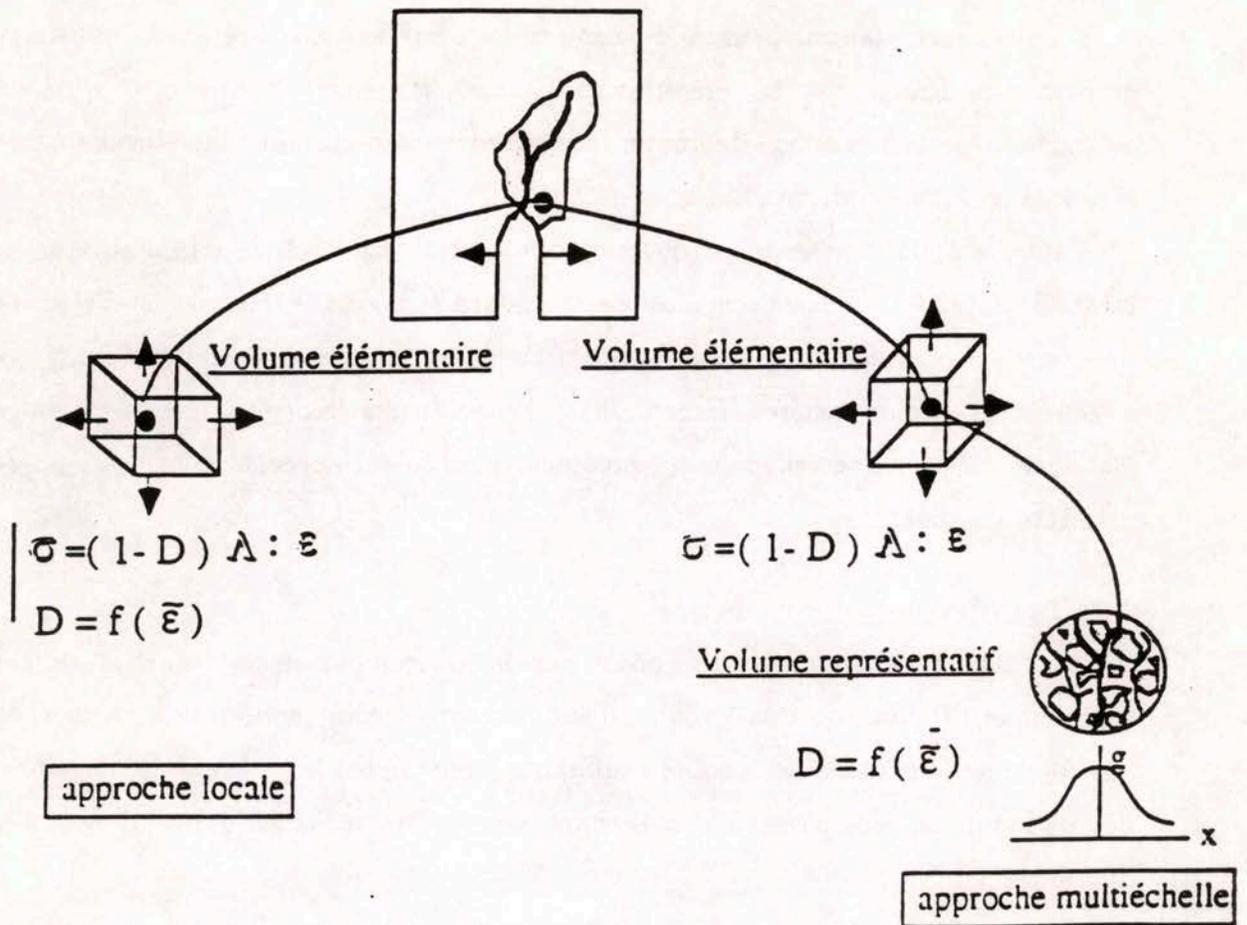


Figure 1.5: Approche multiéchelle

Dans une application de cette approche au béton, on relie l'endommagement  $D(\underline{x})$  au point  $\underline{x}$  à la déformation  $\bar{\epsilon}$  définie sur  $V_D$  par:

$$(1.11) \quad D(\underline{x}) = f(\bar{\epsilon}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{\epsilon} \leq \epsilon_{D_0} \\ \neq 0 & \text{si } \bar{\epsilon} > \epsilon_{D_0} \end{cases}$$

avec

$$(1.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\epsilon} = \frac{\int_{V_D} g(\underline{x}) \cdot \tilde{\epsilon}(\underline{x}) dV}{\int_{V_D} g(\underline{x}) dV} \\ \tilde{\epsilon}(\underline{x}) = \sqrt{\sum_i \langle \epsilon_i(\underline{x}) \rangle^2} \\ \langle \epsilon_i(\underline{x}) \rangle = \frac{\epsilon_i(\underline{x}) + |\epsilon_i(\underline{x})|}{2} \end{array} \right.$$

où  $\tilde{\epsilon}(\underline{x})$  est la déformation équivalente,  $\epsilon_i(\underline{x})$  sont les déformations principales et  $\epsilon_D$  est le seuil d'endommagement initial.

La fonction  $g(\underline{x})$  est une fonction de pondération sur les points appartenant au volume représentatif  $V_D$ . La fonction  $g(x)$  proposée est une gaussienne. Dans le cas bidimensionnel ( $V_D = (l_D)^2$ ),  $g(x)$  s'écrit:

$$(1.13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} g(x) = \exp \left\{ \left( \frac{2x}{l_D} \right)^2 \right\} & \text{si } x \leq 2l_D \\ g(x) = 0 & \text{si } x > 2l_D \end{array} \right.$$

Le besoin d'une description du caractère dissymétrique du comportement en traction et en compression du béton, a amené à une partition de l'endommagement en endommagement de traction  $D_t$  et en compression  $D_c$  [Mazars, 1984].

Pour un état de sollicitation multiaxiale, le couplage se fait à partir d'une relation linéaire:

$$(1.14) \quad D = \alpha_t \cdot D_t + \alpha_c \cdot D_c$$

avec

$$(1.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_t + \alpha_c = 1 \\ \alpha_t = 0 \text{ en compression pure} \\ \alpha_c = 0 \text{ en traction pure} \end{array} \right.$$

Le choix de la fonction  $f(\bar{\epsilon})$  a été guidé par les résultats expérimentaux dans le cas de la

traction et de la compression uniaxiale. J. Mazars [Mazars, 1984] a proposé l'expression suivante de  $f$ :

$$(1.16) \quad D_i = f_i(\bar{\epsilon}) = 1 - \frac{\epsilon_{D_o}(1 - A_i)}{\bar{\epsilon}} - \frac{A_i}{\exp[B_i(\bar{\epsilon} - \epsilon_{D_o})]}$$

avec  $i = t$  pour la traction et  $c$  pour la compression.

Sur la figure (Figure 1.6) est tracée l'évolution des variables  $D_t$  et  $D_c$ .

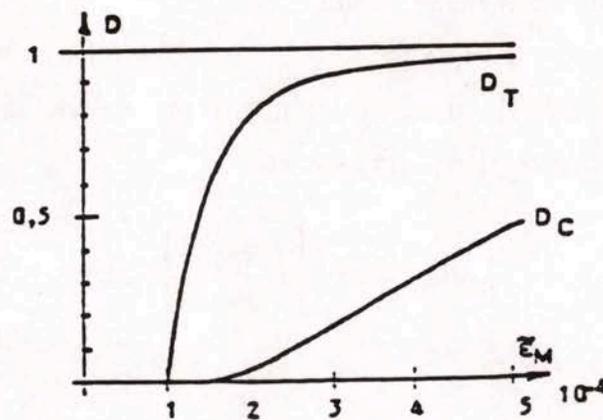


Figure 1.6: Evolution de l'endommagement en traction et en compression

Les paramètres  $A_t$ ,  $B_t$ ,  $A_c$  et  $B_c$  qui interviennent dans la relation (1.14) sont considérés comme des caractéristiques du matériau. Les courbes de la figure (Figure 1.7) permettent d'appréhender l'influence de leurs valeurs sur les réponses de simulation du comportement uniaxial.

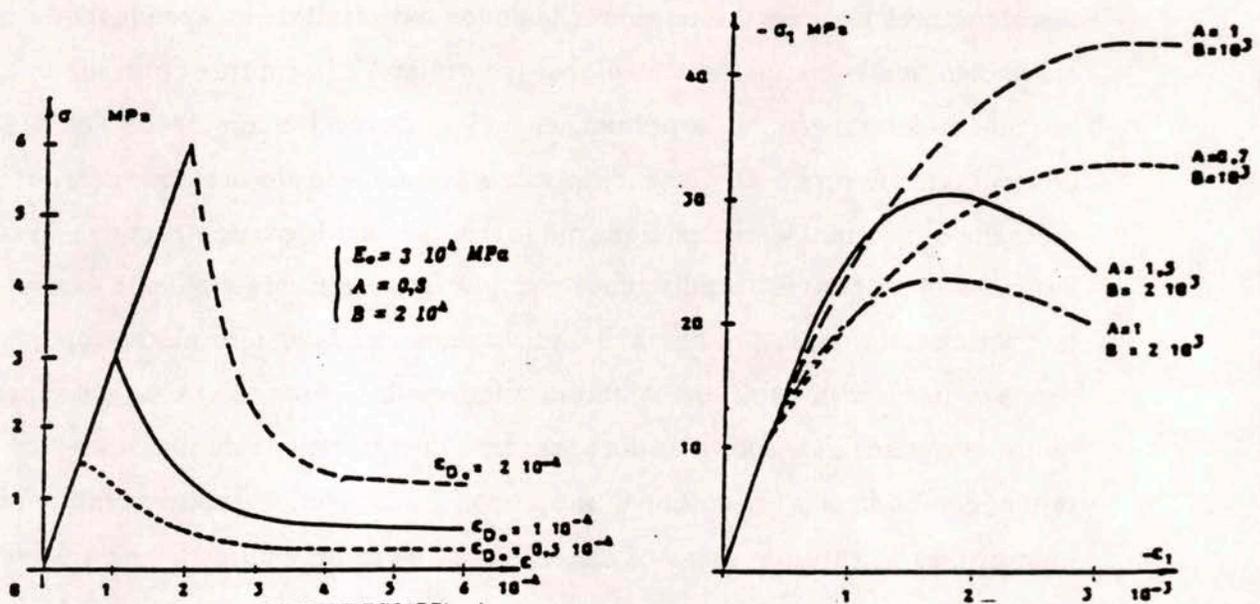


Figure 1.7: Influence des paramètres A et B

Le modèle proposé simule le comportement en traction par une courbe qui fait apparaître une asymptote au delà d'une certaine valeur en déformation. Le niveau de cette asymptote est piloté par le paramètre  $A_t$  tandis que la chute plus ou moins brutale de la contrainte est gouvernée par  $B_t$ . Le niveau de la contrainte en traction ou en compression est piloté naturellement par le seuil d'endommagement  $\epsilon_{D_0}$ , mais également par les autres paramètres du modèle.

Le principal apport de cette approche a été de résoudre les problèmes de nature purement numérique (dépendance des résultats vis à vis du maillage, localisation de l'endommagement sur un seul élément du maillage,...) que l'on rencontre avec des lois de comportement adoucissantes. Cette approche a d'autre part l'avantage d'introduire un paramètre lié aux hétérogénéités du matériau. Elle a été confortée à la suite de plusieurs études expérimentales [Pijaudier-Cabot, 1987] qui montrent l'existence d'une zone de taille finie dans laquelle la microfissuration se développe (la zone d'élaboration). La taille de cette zone est liée à la taille des plus grosses hétérogénéités du matériau ( $d \simeq 3d_a$  où  $d_a$  est la taille du plus gros grain). L'effet d'échelle de structure est dû à la taille relative de cette zone par rapport à la taille de la structure. Dans le cas

des structures fissurées, cette approche donne des résultats indépendants du maillage aussi bien sur le comportement global (contrainte à la rupture) que sur la taille de la zone endommagée. Elle permet, en outre, de rendre compte de l'effet d'échelle de structure (Figure 1.8). Cependant, elle s'avère moins efficace pour décrire les effets d'échelle de volume. Ceci s'explique par le fait que dans le cas de structures initialement fissurées, la rupture est conditionnée par la présence de forts gradients de contraintes: la microfissuration se produit alors au voisinage de la fissure macroscopique qui se propage jusqu'à la ruine de structure. Par contre, dans le cas de structures non-fissurées et dans l'absence d'un fort gradient, l'hétérogénéité du matériau joue un rôle prépondérant dans la génération d'une microfissuration diffuse pouvant initier plusieurs mécanismes de rupture. Dans ce cas, une prise en compte du caractère aléatoire de la rupture s'avère nécessaire.

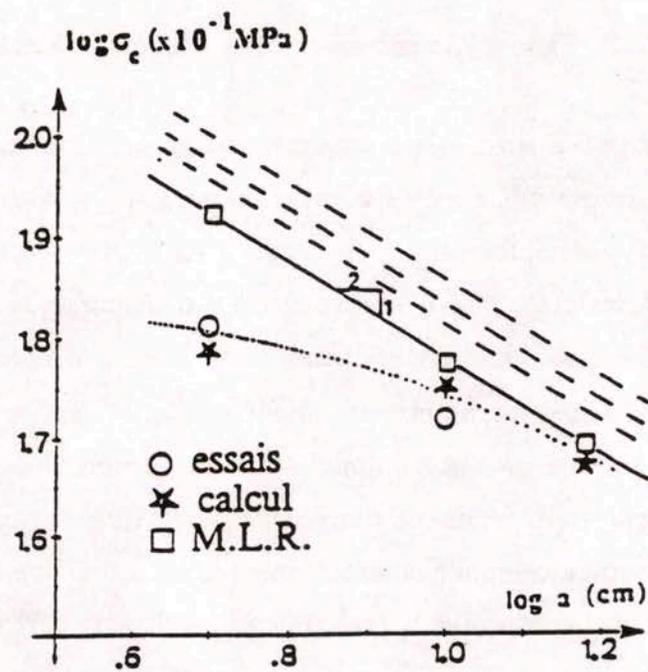


Figure 1.8: Effet d'échelle de structure: approche non-locale

### 1.2.3 Limites des approches déterministes

L'hypothèse de base utilisée dans toutes les approches déterministes est de supposer le matériau homogène. Ainsi, dans le cas d'une structure non fissurée, ceci revient à admettre qu'en l'absence d'un phénomène de bifurcation, l'application d'une sollicitation uniforme sur les bords d'un volume de matériau aura les mêmes conséquences en chaque point de ce volume, indépendamment de sa taille (distribution uniforme des contraintes et des déformations). Par conséquent, un critère de résistance ultime devrait être applicable et la contrainte à la rupture ne devrait pas dépendre de la taille de la structure.

En réalité tel n'est pas le cas. La contrainte à la rupture moyenne  $\sigma_r$  (=force maximale moyenne / section de l'éprouvette) mesurée expérimentalement à partir d'un essai de traction simple sur plusieurs éprouvettes homothétiques en béton de forme cylindriques avec des tailles différentes diminue en fonction du volume  $V$  des éprouvettes comme le montre la figure (Figure 1.9). On parle d'effet de volume. On représente les résultats dans le diagramme  $\text{Log}(\sigma_r) - \text{Log}V$ .

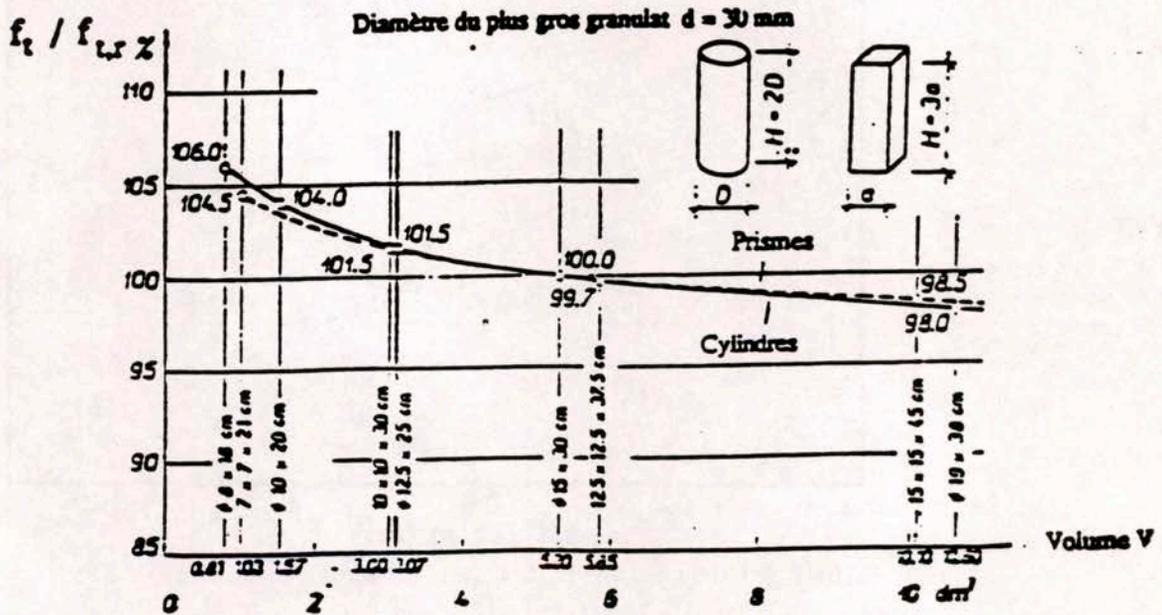


Figure 1.9: Effet de volume en traction uniaxiale: (Kadlecek et Spetla, 1987)

On remarque que la contrainte à la rupture  $\sigma_r$  semble suivre une loi en puissance:

$$(1.17) \quad \sigma_r \sim V^{-\alpha} \text{ avec } \alpha > 0$$

On peut aussi citer les récentes expériences de traction réalisées par Wu [Wu,1991] sur des cylindres homothétiques en béton. Trois types de bétons ont été testés: un béton ordinaire B.O, un béton de haute résistance B.H.R et un béton de très haute résistance B.T.H. Les trois bétons sont caractérisés par leurs résistances en compression  $R_c$ . La résistance en compression du béton est un indicateur de son homogénéité. En effet, l'homogénéité du béton augmente avec sa compacité donc avec sa résistance en compression. La résistance en compression des trois bétons est respectivement 35, 61 et 127 MPa. Les résultats sont présentés dans le diagramme  $\text{Log}\sigma_r - \text{Log}\Phi$  où  $\sigma_r$  est la contrainte à la rupture moyenne et  $\Phi$  le diamètre de l'éprouvette considérée (Figure 1.10)

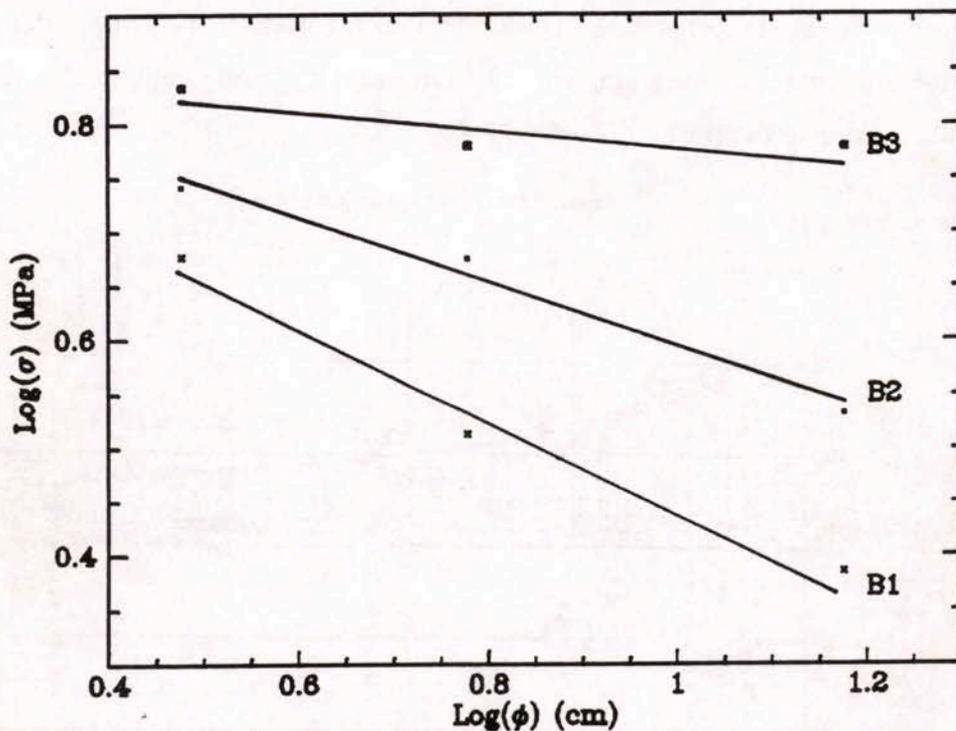


Figure 1.10: Effet de volume en traction uniaxiale d'après [Wu,1991]

On remarque d'abord que la contrainte à la rupture moyenne  $\sigma_r$  dépend du diamètre de l'éprouvette et d'après Rossi et Wu [Wu,1991] cette dépendance suit une loi de puis-

sance de type:

$$(1.18) \quad \sigma_r \sim \Phi^{-\alpha} \text{ avec } \alpha > 0$$

Notons ici le faible nombre d'échantillons testés où en particulier un effet de taille systématique sur le module élastique est observé ce qui rend l'analyse de l'effet de taille sur la contrainte à la rupture plus difficile à interpréter.

La diminution de la contrainte à la rupture avec la taille du volume sollicité apparaît aussi pour d'autres types d'essais où la sollicitation extérieure crée des gradients de déformation (ex: flexion trois points de poutres non entaillées en béton). De même, un effet d'échelle dit de gradient a été mis en évidence par L'Hermitte [L'Hermitte, 1973] sur des expériences en traction directe, en flexion trois et quatre points sur des prismes en béton de dimensions différentes. Dans les expériences de flexion, la contrainte à la rupture de traction  $f_t$  est mesurée en supposant le matériau élastique fragile et en utilisant la théorie classique des poutres pour le calcul des champs de contraintes dans l'éprouvette.

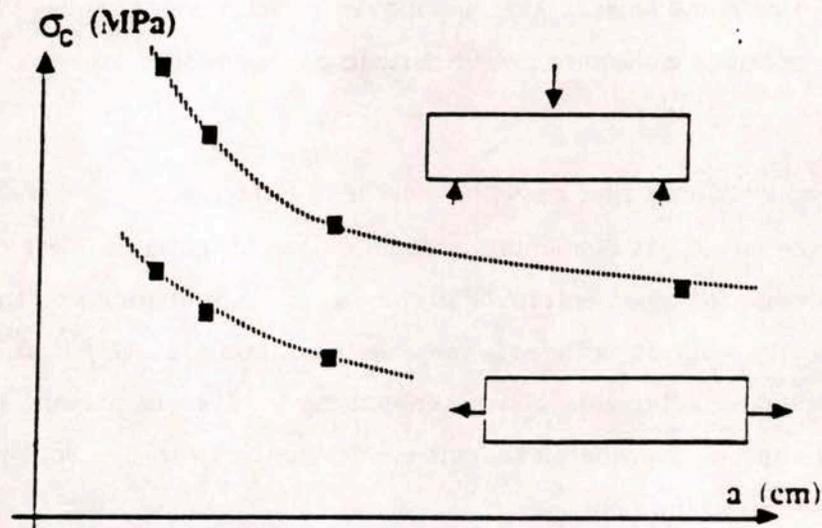


Figure 1.11: Effet de gradient [L'Hermitte, 1973]

On observe d'abord (Figure 1.11) une différence entre les valeurs des contraintes maximales obtenues pour les trois types d'essais. Cette différence est notamment liée aux hypothèses de calculs mais aussi à l'existence d'un gradient de contrainte dans le cas de la flexion. On observe aussi (Figure 1.11) la diminution en fonction du volume de la contrainte à la rupture pour le cas de la flexion trois points et il semble que cette contrainte tende vers une asymptote comme l'indique J. Mazars [Mazars, 1984].

**Remarque:**

La loi de Bazant (1.3) ne tient pas compte de l'effet de volume. En effet, cette loi suppose que pour des structures de petites tailles, un critère ultime est applicable. Cependant, les expériences citées précédemment montrent que même pour des structures de petites tailles, il existe un effet de volume. Ces expériences montrent que cet effet de volume s'écrit simplement comme une loi de puissance  $\sigma_r \sim d^{-\alpha}$  où  $d$  est la taille de la structure. Ainsi, pour tenir compte de cet effet de volume, on propose d'écrire la loi de Bazant sous la forme:

$$(1.19) \quad \sigma_r = \sigma_r^{Max} \left(\frac{d}{d_a}\right)^{-\alpha} \left[1 + \left(\frac{d}{\lambda \cdot d_a}\right)\right]^{-(\frac{1}{2}-\alpha)}$$

Cette loi combine ainsi la M.L.R pour des structures de grandes tailles et un effet de volume en loi de puissance pour des structures de petites tailles.

En conclusion, l'effet de volume est lié à l'hétérogénéité du matériau. En effet, la résistance locale des éléments de matière dans le matériau n'est pas uniforme, mais suit une distribution aléatoire. Par conséquent, la probabilité de trouver des éléments de faible résistance croît avec la taille de la structure. De ce fait, la rupture apparaîtra plus tôt quand la taille de la structure augmente. C'est en partant de ces constatations que les approches probabilistes ont été développées car elles sont les plus à même de modéliser ce phénomène.

### 1.3 APPROCHES PROBABILISTES

Le but essentiel des approches probabilistes est de prendre en compte explicitement l'hétérogénéité du matériau et d'étudier son influence sur la rupture. Différentes approches ont été élaborées principalement pour comprendre et modéliser les effets d'échelle de volume.

Ces approches peuvent, schématiquement, être regroupées en deux types d'approches: 1- Le premier type d'approche consiste à prendre en compte l'influence de l'hétérogénéité sur le comportement du matériau par une meilleure description de la microstructure en ayant recours soit à une description statistique des caractéristiques macroscopiques du matériau (module d'Young, résistance à la rupture, facteurs d'intensité de contraintes, ... etc), soit à une simulation numérique de la microstructure. La réponse de la structure est donnée sous la forme d'une moyenne sur plusieurs réalisations du milieu. Dans les deux cas, le milieu est supposé continu.

2- Dans le deuxième type d'approche, on s'intéresse plutôt à la compréhension qualitative de l'influence du désordre sur la rupture du matériau; la microstructure est alors modélisée sommairement par assemblage de micro-éléments dont le comportement et les règles d'assemblage répondent à des lois simples : c'est le domaine d'application des réseaux. Ces approches ne prétendent pas modéliser un milieu continu.

Avant de présenter ces deux types d'approches, nous allons tout d'abord rappeler la statistique de Weibull qui a été le premier à bâtir un modèle probabiliste pour la rupture des matériaux.

#### 1.3.1 Statistique de Weibull

Il y a une quarantaine d'années, Weibull [Weibull, 1939] proposa une théorie statistique de la résistance des matériaux en étudiant la rupture d'une chaîne constituée de  $n$  maillons identiques. Cette statistique est basée sur l'hypothèse du maillon le plus faible: il suffit qu'un seul maillon de la chaîne casse pour que l'ensemble de la chaîne casse. On note  $p_1(\sigma)$  la probabilité de rupture d'un maillon subissant une contrainte supérieure ou égale à  $\sigma$ .

La probabilité de survie d'un maillon est donc  $1-p_1(\sigma)$ . Par conséquent, en utilisant l'hypothèse de l'indépendance et l'hypothèse du maillon le plus faible, la probabilité de survie de la chaîne de  $n$  maillons s'écrit:

$$(1.20) \quad [1 - p_1(\sigma)]^n = \exp[n \text{Log}(1 - p_1(\sigma))]$$

La probabilité de rupture de l'ensemble de la chaîne  $p_n(\sigma)$  est donc:

$$(1.21) \quad p_n(\sigma) = 1 - \exp\left[-n \text{Log}\left(\frac{1}{1 - p_1(\sigma)}\right)\right]$$

Généralement, la fonction  $p_1(\sigma)$  est inconnue et on introduit plutôt une fonction:

$$(1.22) \quad f(\sigma) = \text{Log}\left[\frac{1}{1 - p_1(\sigma)}\right]$$

Les fonctions  $f(\sigma)$  fréquemment utilisées sont:

$$(1.23) \quad f(\sigma) = \left(\frac{\sigma}{\sigma_u}\right)^m \quad \text{et} \quad f(\sigma) = \left(\frac{\sigma - \sigma_c}{\sigma_u}\right)^m$$

qui sont respectivement appelées lois de Weibull à deux et à trois paramètres,  $m$  est l'exposant de Weibull.

L'exemple de la chaîne montre que le problème de rupture n'est pas un problème de moyenne statistique mais plutôt un problème de queue de distribution. En effet, la rupture est conditionnée par la résistance du maillon le plus faible.

### 1.3.2 Approches milieux continus

#### • Modèles Morphologiques

La statistique de Weibull a été généralisée au cas bidimensionnel et tridimensionnel en tenant compte du champ de contrainte réel dans la structure et a donné des résultats très satisfaisants dans le cas d'une rupture de type fragile (la rupture de la structure se produit dès que l'élément de volume le plus faible casse). De nombreux auteurs, en

particulier, Frudenthal [*Frudenthal*] et Jayatilaka [*Jayatilaka*] ont montré le bien fondé de la fonction de distribution de Weibull par l'utilisation de modèles microstructuraux basés sur la M.L.R.

Cependant, la loi de Weibull est un cas particulier de lois développées en théorie statistique des valeurs extrêmes. Par conséquent, cette loi n'a aucune raison d'être retenue comme l'unique loi associée à l'hypothèse du maillon le plus faible. Cette idée a été développée par D. Jeulin [*Jeulin, 1991*] et a permis de proposer différents modèles de rupture. Ces modèles utilisent l'hypothèse du maillon le plus faible. Ceci a pour conséquence que la rupture d'une structure se produit dès que la contrainte  $\sigma(x_o)$ , en un point  $x_o$  de cette structure, dépasse un seuil critique local  $\sigma_c(x_o)$ :

$$(1.24) \quad \sigma(x_o) \geq \sigma_c(x_o)$$

La probabilité,  $P$ , de survie d'un volume sollicité  $B_x$ , entourant un point  $x$ , est donnée par:

$$(1.25) \quad P = P\left\{ \inf_{y \in B_x} (\sigma_c(y) - \sigma(y - x)) \geq 0 \right\}$$

Dans le cas d'un champ de contrainte homogène (échantillon cubique),  $B_x$  représente toute la structure. Par contre, dans le cas d'une structure fissurée et dans le cadre d'un comportement élastoplastique,  $B_x$  représente la zone plastifiée en amont de la fissure.

Une simplification importante est apportée à ce type de modèles en considérant un champ de contrainte  $\sigma(x)$  déterministe calculé pour un milieu homogène équivalent. Contrairement aux approches classiques utilisant l'indépendance des seuils critiques  $\sigma_c(x)$ , les modèles morphologiques autorisent des corrélations à grande échelle de  $\sigma_c(x)$ . Les seuils critiques  $\sigma_c(x)$  sont construits à partir de variétés aléatoires booléennes. Ceci consiste à implanter des défauts aléatoires dans l'espace, suivant un processus poissonien. On effectue ensuite des opérations de dilatation ou d'érosion sur ces défauts indépendamment de leur localisation dans la structure. Les défauts sont appelés des grains primaires et peuvent être des sphères, des ellipsoïdes, ...

Les modèles développés par D. Jeulin sont utilisables simplement dans un code de calcul par éléments finis en post-processeur, puisque le calcul du champ de contraintes est effectué pour un matériau de loi de comportement homogène, et les résultats utilisent une opération de dilatation ou d'érosion des défauts indépendamment de leur localisation dans la structure.

Par ailleurs, la diversité des lois d'échelle obtenues, selon les critères de rupture ou les modèles de structures aléatoires choisies, offre de nouvelles possibilités pour le traitement et l'interprétation des essais mécaniques sur des matériaux hétérogènes, en prenant en compte leurs microstructures. Ces lois d'échelle obtenues reposent sur un calcul théorique et sont aussi valables pour des structures de grandes tailles contrairement aux lois obtenues par des simulations numériques effectuées sur des systèmes de petites tailles. Enfin, les paramètres de ces modèles (grain primaires, ..) peuvent être identifiés à l'aide d'une coupe du matériau et d'une analyse d'image.

Cependant, ces modèles s'intéressent uniquement à la rupture des matériaux fragiles. Par conséquent, ils ne tiennent pas compte de l'évolution du champ de contraintes. Cette évolution, due à la redistribution des contraintes après la rupture d'un défaut et à l'interaction entre ces défauts, a une importance considérable dans l'étude des problèmes de localisation.

#### • Modèle probabiliste de l'endommagement

Ce modèle a été développé par D. Breysse [Breysse, 1988] et a été implanté dans le code d'éléments finis CESAR. Il consiste en une formulation probabiliste de la loi d'évolution. Il repose sur une analyse à deux niveaux :

- Au niveau macroscopique (c'est à dire à l'échelle où on peut considérer le matériau comme homogène et continu), la mécanique de l'endommagement est l'outil adopté pour rendre compte de la perte de rigidité élastique de l'élément de volume représentatif du matériau. Un élément de volume représentatif est décrit par assemblage en parallèle de  $N_T$  ressorts (bundle) (Figure 1.12).

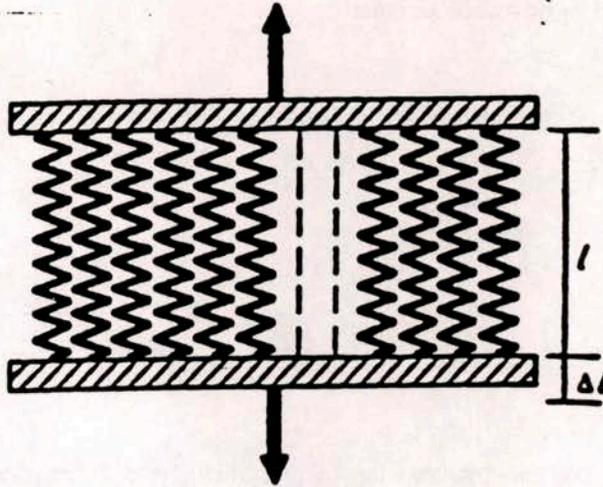


Figure 1.12: Modélisation d'un élément de volume: bundle

- Au niveau microscopique, le comportement à la rupture des ressorts est modélisé par une loi élastique fragile uniaxiale probabilisée comme suit:

déformation  $\rightarrow$  probabilité de rupture(d'un ressort)  
 $\epsilon \rightarrow p_F(\epsilon)$

La loi de probabilité  $p_F$  choisie est une loi de Weibull à deux paramètres:

$$(1.26) \quad p_F(\epsilon) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^m\right)$$

Après chaque rupture, on suppose que la redistribution des efforts dans un élément de volume représentatif se fait de façon uniforme entre tous les ressorts encore présents.

On définit alors l'endommagement  $D$  comme la fraction de ressorts rompus:

$$(1.27) \quad D = \frac{N_F}{N_T}$$

où  $N_F$  de le nombre de ressorts rompus.

$D$  varie selon l'état de sollicitation et l'on peut construire sa loi d'évolution: Considérons un état initial connu  $\epsilon_i, D_i$  et un incrément de déformation  $\Delta\epsilon_i$  sur l'élément de volume, alors tous les états d'endommagement  $D_j$  ( $D_j \in [D_i, 1]$ ) sont accessibles selon

la distribution binomiale suivante:

$$(1.28) \quad p_F(D_i \rightarrow D_j) = C_{N_T - N_{F_i}}^{N_{F_j} - N_{F_i}} \cdot \bar{p}^{(N_{F_j} - N_{F_i})} \cdot (1 - \bar{p})^{(N_T - N_{F_j})}$$

où

$$(1.29) \quad \bar{p} = \frac{p_F(\epsilon_i + \Delta\epsilon_i) - p_F(\epsilon_i)}{1 - p_F(\epsilon_i)}$$

A tout moment du processus, la probabilité d'atteindre n'importe quel état d'endommagement dans l'intervalle  $[D_i, 1]$  est donc connue à partir de la valeur de  $D_i$ , des déformations appliquées et de la loi de rupture micro utilisée.

La loi micro utilisée n'a pas été calée sur des données expérimentales. En effet une plus grande importance a été accordée aux aspects qualitatifs des phénomènes mis en jeu au détriment de leurs aspects quantitatifs.

Les simulations numériques effectuées à l'aide de ce modèle mettent en évidence que la rupture résulte d'un processus d'évolution du désordre local, caractérisé par  $N_T$  et la loi micro utilisée, sous l'influence des champs globaux et des perturbations locales (liées à la présence des hétérogénéités). Selon le désordre initial une structure s'avère plus ou moins sensible à la présence des hétérogénéités. Ces simulations montrent aussi que les modèles d'endommagement non-locaux sont plus adaptés pour rendre compte des effets d'échelle sur les structures dans le cas où la concentration de contrainte joue un rôle plus important que l'hétérogénéité du matériau (effet d'échelle de structure). Par contre, dans le cas où le champ de déformation est quasi uniforme le rôle des hétérogénéités devient prépondérant et seul un modèle qui les prend en compte permet de décrire les effets d'échelle et les modes de rupture.

En résumé, ce modèle montre que la réponse d'une structure est fonction de l'influence du désordre local et des redistributions de ce désordre tout au long de l'histoire du chargement. La connaissance du désordre et de son évolution sont donc deux facteurs prépondérants dans l'étude des effets d'échelle.

Cependant, ce modèle est soumis aux mêmes limitations que les modèles d'endom-

magement locaux concernant la dépendance des résultats vis -à-vis du maillage.

### • Le modèle stochastique du LCPC

Les principaux objectifs du modèle stochastique élaboré par P. Rossi [*Rossi et Piau, 1988*] sont les suivants:

- prendre en compte de manière explicite l'hétérogénéité du matériau.
- obtenir une modélisation qui donne des résultats indépendants du maillage.
- rendre compte des effets d'échelle observés expérimentalement.

Ce modèle consiste à introduire des distributions statistiques sur les caractéristiques mécaniques élastiques du matériau, ainsi que sur le critère local de création des microfissures. Ces distributions statistiques sont identifiées expérimentalement.

Les deux points essentiels de cette modélisation sont les suivants:

1- Les fonctions de distribution statistique des caractéristiques du matériau dépendent de la taille des éléments finis du maillage.

2- Cette modélisation ne repose sur aucune loi constitutive non linéaire pour décrire la fissuration ou la dégradation du matériau.

La création des microfissures est modélisée par une rupture des éléments de contact qui sont des raccords d'épaisseur nulle entre les éléments finis du maillage. Les éléments finis gardent un comportement élastique, homogène et isotrope. Ainsi la microfissuration ne se développe que dans les interfaces des éléments finis et constitue la seule source de dissipation d'énergie.

A chaque élément de contact est associée une loi de comportement permettant de prendre en compte différentes natures de contact. Cette loi de comportement est exprimée sous forme matricielle par la relation  $\sigma = [E]\epsilon$ . Trois types de lois de comportement ont été envisagés: adhérence, frottement de Coulomb et glissement parfait. A chacune de ces lois correspond une matrice de comportement  $[E]$  qui permet d'assurer la continuité des déplacements.

Par ailleurs, le critère de création des fissures (ouverture des éléments de contact) est élastique fragile. Ce critère porte sur la contrainte normale au centre de l'élément de contact  $\sigma_n$  et s'écrit:

$$(1.30) \quad \text{si } \sigma_n \geq R_t \text{ alors } \begin{cases} \underline{\sigma} = \underline{0} \\ R_t = 0 \end{cases}$$

Ceci signifie qu'une fois que l'élément de contact est ouvert, la fissure peut se refermer ou se réouvrir sans dissipation d'énergie supplémentaire. Un critère a été introduit pour empêcher les deux lèvres de la fissure de s'interpénétrer.

Les lois de distributions statistiques ont été déterminées expérimentalement par Wu [Wu, 1991] à l'aide d'essais en traction sur trois types de béton: un béton ordinaire, un béton de haute performance et un béton de très haute performance. Les trois bétons sont caractérisés par leurs résistances en compression  $R_c$ . La résistance en compression du béton est un indicateur de son homogénéité. En effet, l'homogénéité du béton augmente avec sa compacité donc avec sa résistance en compression. La résistance en compression des trois bétons est respectivement 35, 61 et 127 MPa.

Ces essais ont conduit à proposer des expressions analytiques assez générales qui permettent d'accéder à ces lois de distributions en fonction du volume du matériau. Les seules données à connaître étant respectivement le rapport du volume du matériau ( $V_b$ ) sur le volume du plus gros grain ( $V_g$ ) et la résistance en compression du béton  $R_c$ :

$$(1.31) \quad m = a \left( \frac{V_b}{V_g} \right)^{-b} \quad \text{et} \quad \frac{\sigma}{m} = A \left( \frac{V_b}{V_g} \right)^{-B}$$

$$(1.32) \quad \text{avec } \begin{cases} a = 6.685 + 3.135 * 10^{-3} R_c \\ b = 0.235 - 2.888 * 10^{-3} R_c + 9.721 * 10^{-6} R_c^2 \\ A = 0.22269 + 1.3397 * 10^{-3} R_c \\ B = 6.084 * 10^{-2} - 7.721 * 10^{-4} R_c + 9.906 * 10^{-6} R_c^2 \end{cases}$$

$m$  étant la moyenne de la loi de distribution et  $\sigma^2$  sa variance.

L'application de cette modélisation au calcul des structures a fourni des résultats qualitatifs en très bonne concordance avec la réalité. Les principaux résultats concernent les effets d'échelle de volume et l'étude des modes de rupture ( ex: poutre en béton armé en flexion trois points...).

### 1.3.3 Les réseaux

#### • Le réseau hiérarchique:

Ce modèle a été développé par D. Breysse [Breysse, 1991] pour étudier l'influence du désordre local initial et de son évolution au cours du chargement en privilégiant dans cette étude les aspects statistiques au détriment des aspects microstructuraux. Le réseau hiérarchique est construit de la façon suivante: un élément représentatif du niveau  $i$  est constitué de quatre éléments du niveau inférieur  $i-1$ , disposés selon un schéma mixte série parallèle (Figure 1.13).

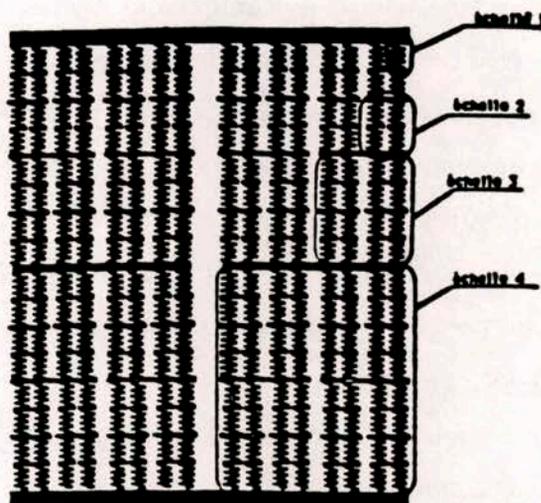


Figure 1.13: Le réseau hiérarchique

Le principal avantage de ce modèle est qu'il permet de faire des calculs sur des structures de grandes tailles.

Le comportement des éléments micros est élastique fragile. L'aléa est introduit de deux manières différentes :

1- seules les limites à la rupture des éléments micros sont aléatoires; les propriétés élastiques sont alors identiques pour tous les éléments.

2- les limites à la rupture et les propriétés élastiques sont toutes deux aléatoires.

Ce modèle a permis de décrire le processus de fissuration et de rupture des matériaux hétérogènes. La microfissuration se produit d'abord de façon diffuse, puis la présence

des hétérogénéités favorise la localisation dans certaines zones qui provoque une rupture instable de la structure. D'autre part, ce modèle a permis de montrer l'influence du désordre sur la ductilité du matériau ainsi que sur les effets d'échelle. Contrairement aux prédictions de la théorie de Weibull, ces effets d'échelle ne sont pas de nature purement statistique mais influencés par les redistributions des contraintes.

### • Physique des milieux aléatoires

Les modèles de réseaux ont reçu une attention considérable de la part des physiciens durant les dix dernières années. L'utilisation des réseaux en physique des milieux aléatoires dépasse le cadre purement mécanique et trouve des applications dans plusieurs domaines (électricité, mécanique des fluides, ...).

L'objet principal de ces études est de comprendre les propriétés de transport dans les milieux hétérogènes aléatoires. La nouvelle approche des milieux hétérogènes repose sur l'utilisation du concept de percolation. La percolation consiste à étudier le comportement global d'un système duquel on ôte progressivement et de manière aléatoire des éléments jusqu'à atteindre un état critique appelé seuil de percolation au delà duquel le système perd ses propriétés de transport. Les deux apports essentiels de la percolation sont les suivants:

1- Il existe des lois d'effet d'échelle sur les caractéristiques étudiées (ex : le module de Young) au voisinage du seuil de percolation. Ces lois d'échelle ont des exposants qui ne dépendent pas du détail de la microstructure.

2- L'exposant critique n'est généralement ni entier ni quotient d'entiers.

L'objet principal de la théorie de percolation est l'étude des propriétés de transport et par conséquent des propriétés linéaires (en percolation la suppression progressive d'éléments ne joue que sur la conductivité des éléments et ne provoque pas de concentration de contraintes). Le problème de la rupture est beaucoup plus complexe car il fait intervenir un comportement non linéaire irréversible. La physique des milieux aléatoires s'est récemment intéressée au problème de la rupture et a montré qu'il n'est pas nécessaire de construire des situations de désordre aussi complexes que la percolation pour observer des phénomènes critiques réalistes. Différentes études ont été réalisées pour étudier l'influence du désordre sur les effets d'échelle de volume. Le

désordre étant introduit comme un facteur stabilisant naturel qui limite la localisation.

Les questions essentielles que relèvent ces études se résument en deux points:

1- Comment varie la force à la rupture du système en fonction du désordre et de la taille du système ?

2- Existe-t-il un comportement universel (indépendant du désordre et du détail de la microstructure) sur la force à la rupture ?

La plupart des études effectuées dans ce domaine ont été faites dans le cadre de l'électricité. Une étude récente a été effectuée par H.J Hermann, A. Hansen et S. Roux [*Hermann, Hansen et Roux, 1989*] sur la rupture d'un réseau carré de poutres encastrees.

Dans ce qui suit, nous rappelons les principaux résultats de cette étude.

**Description du modèle** On considère une structure de taille  $L \times L$  formée d'un réseau carré de poutres encastrees de taille unité. On impose à cette structure un déplacement vertical croissant  $\Delta$  sur le côté haut alors que le côté bas est fixe. (Figure 1.14)

Le comportement des poutres est élastique fragile avec des limites à la rupture aléatoires tirées selon une loi de distribution donnée. Le critère de rupture adopté est l'équivalent d'un critère de Von Mises:

$$(1.33) \quad C(i) = \left(\frac{F(i)}{R_i}\right)^2 + \frac{\max(|M_1(i)|, |M_2(i)|)}{q \cdot R_i}$$

La poutre  $i$  casse dès que  $C(i) \geq 1$ .

$F(i)$  est l'effort normal dans la poutre  $i$ ,  $M_1(i)$  et  $M_2(i)$  sont les moments de flexion aux noeuds de la poutre et  $q$  une constante donnée.

$R_i$  est la limite à la rupture de la poutre  $i$ ; elle est choisie aléatoirement selon la loi suivante:

$$(1.34) \quad \text{Prob}(R_i \leq t) = \begin{cases} t^m & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases} \quad \text{avec } 0 < m \leq 2$$

La procédure de calcul s'effectue comme suit:

- On impose un déplacement unité sur le bord du haut.
- On détermine les efforts dans les différentes poutres du réseau et on teste leurs critères de rupture.
- On calcule le déplacement  $\Delta$  à imposer pour casser la poutre  $i_0$  où le critère est maximal ( $i_0 = \max_i C(i)$ ).
- On décharge la structure après la rupture de la poutre  $i_0$ .
- Le calcul est réitéré jusqu'à la rupture totale de la structure.

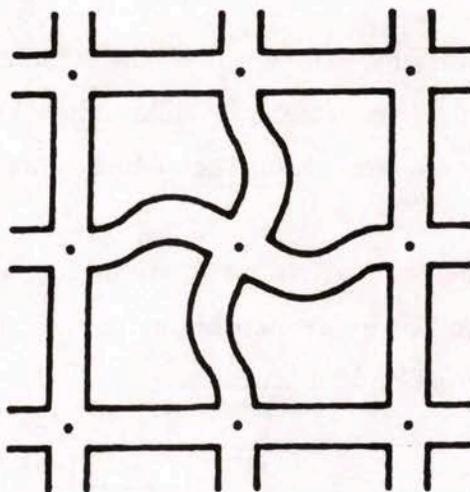


Figure 1.14: Réseau de poutres encastrees

**Résultats des simulations:** Plusieurs tailles de structures ont été simulées ( $L = 4, 8, 16, 32$  et  $64$ ). Pour chacune de ces structures, plusieurs simulations ont été effectuées afin de faire une analyse statistique des résultats pour une structure de taille donnée. On note  $p(L)$  le nombre de simulations effectuées pour une structure de taille  $L$ . Le nombre de simulations effectuées dans cette étude est respectivement ( $p(4) = 50000, p(8) = 10000, p(16) = 500, p(32) = 40$  et  $p(64) = 1$ )

Pour une simulation donnée  $p$  et à la  $q^{\text{ième}}$  rupture de poutre, on note:

- le déplacement imposée sur le bord:  $\Delta_{p,q}(L)$

- la réaction du bord:  $F_{p,q}(L)$

Notons que  $q$ , le nombre de poutres cassées est le véritable paramètre de chargement.

Les quantités  $F_{p,q}(L)$  et  $\lambda_{p,q}(L)$  sont moyennées sur différentes simulations de la même structure:

$$(1.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{F}_q(L) = \frac{\sum_{p=1}^{p(L)} F_{p,q}(L)}{p(L)} \\ \bar{\Delta}_q(L) = \frac{\sum_{p=1}^{p(L)} \Delta_{p,q}(L)}{p(L)} \end{array} \right.$$

On obtient ainsi deux courbes moyennes paramétrées par  $q$  pour chaque structure de taille  $L$ : une courbe "force - déplacement" reliant  $\bar{F}$  à  $\bar{\Delta}$  et la courbe qui exprime le nombre de poutres cassées en fonction du déplacement reliant  $q$  à  $\bar{\Delta}$ .

La conclusion essentielle de cette étude est qu'il existe des lois d'échelle sur ces courbes. Ces lois décrivent la plus grande partie de la courbe  $\bar{F} - \bar{\Delta}$ , mais elles ne sont généralement valables que jusqu'au maximum de la force (la force à la rupture  $F_r$ ). Au delà de cette valeur, on remarque une tendance vers une rupture de type fragile quand la taille de la structure augmente.

Plusieurs types de lois ont été testées. Une bonne concordance avec les résultats numériques a été obtenue avec des lois de puissance. La loi d'échelle s'écrit simplement sous la forme:

$$(1.36) \quad \bar{F} \approx L^{\frac{3}{4}} \phi(\bar{\Delta} L^{-\frac{3}{4}}) \quad \text{et} \quad q \approx L^{\frac{7}{4}} \psi(\bar{\Delta} L^{-\frac{3}{4}})$$

Dans toute la suite, le symbole  $\approx$  signifiera que l'égalité a été vérifiée numériquement.  $\phi$  et  $\psi$  sont des fonctions réelles indépendantes de  $L$  qui sont déterminées numériquement. L'erreur sur ces exposants est de 10 %.

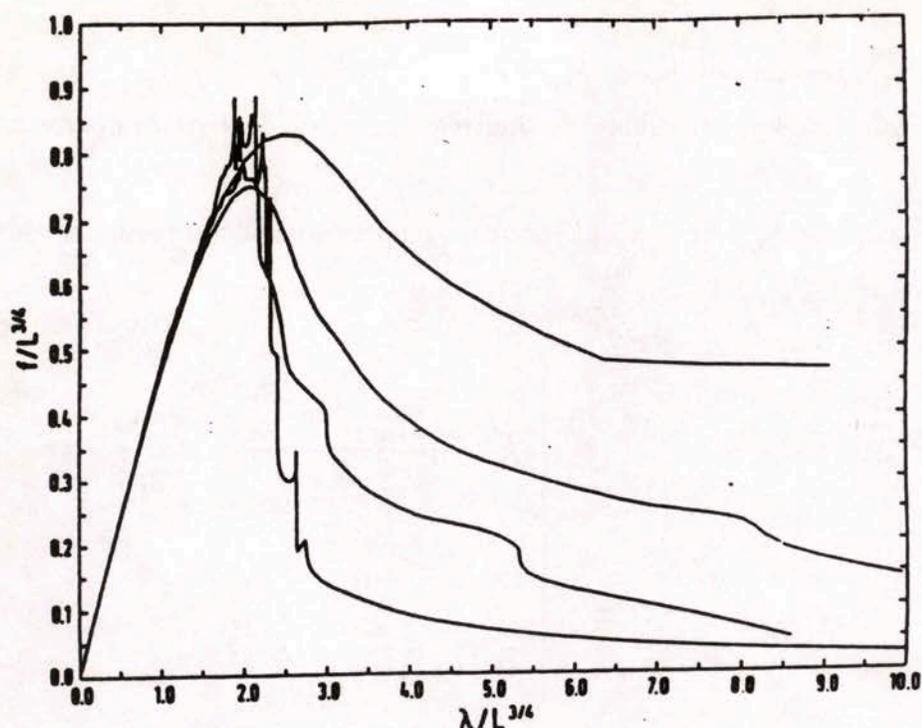


Figure 1.16: Courbe  $\bar{F}-\bar{\Delta}$  [Hermann, Hansen et Roux, 1989]

Ces lois ont été vérifiées par H.J Hermann et al pour  $0 < m \leq 1$  et semblent être valables pour  $0 < m < 2$ . Par contre, pour  $m = 2$ , il semble que ces lois d'échelle ne soient plus valables. Dans ce cas aussi, des lois de puissance ont été testées et une bonne concordance avec les résultats numériques a été obtenue avec le même type de loi mais avec des exposants différents:

$$(1.37) \quad \bar{F} = L^{0.85} \phi(\bar{\Delta} L^{-0.8})$$

• **Remarques:**

**R1** - Nous montrerons dans le troisième chapitre que pour  $m \geq 2$ , la loi d'échelle ne s'écrit pas simplement sous forme d'une loi de puissance. En effet, nous mettons en évidence une taille critique notée  $L_c$  dépendant de  $m$  pour laquelle:

$$(1.38) \quad \begin{cases} \text{pour } L \leq L_c & \bar{F} \approx L^{\frac{3}{4}} \phi(\bar{\Delta} L^{-\frac{3}{4}}) \\ \text{pour } L \geq L_c & \bar{F} \approx L_c^{\frac{3}{4}} \phi(\bar{\Delta} L_c^{-\frac{3}{4}}) \end{cases}$$

L'existence de cette taille critique à partir de laquelle il y a absence d'effet d'échelle sera confortée par les résultats expérimentaux de ROSSI et WU qui indique l'apparition d'un palier pour le B.T.H.R

**R2** - Si on note:  $F_r = \max_q \bar{F}$  et  $\sigma_r = \frac{F_r}{L}$  la contrainte à la rupture, alors:

$$(1.39) \quad \sigma_r \sim L^{-\frac{1}{4}} \quad \text{pour } 0 < m < 2$$

Ainsi, pour  $m < 2$ , on obtient des lois d'échelle semblables à celles obtenues expérimentalement: ( $\sigma_r \sim V^{-\alpha}$ ).

En résumé, ces simulations ont révélé des lois d'échelle qui rendent compte de l'effet de volume. Ces lois décrivent la plus grande partie de la courbe  $F - \Delta$  et s'écrivent sous la forme de lois de puissance. Les valeurs des exposants semblent être indépendantes du désordre et du modèle considéré (électrique ou mécanique). Ces pourquoi ces lois d'échelle sont dites universelles.

D'autres études numériques ont été effectuées dans le cadre de l'électricité. Dans ces études, on simule la rupture d'un réseau de fusibles selon le même schéma. Différentes distributions aléatoires ont été testées, en particulier:

- Une distribution uniforme de seuils entre  $[1 - \frac{\omega}{2}, 1 + \frac{\omega}{2}]$ , pour  $\omega \leq 2$  [Hermann et al, 1988]. Cette étude montre que pour  $\omega < 2$ , la rupture est localisée (apparition d'une fissure macroscopique). Par contre, pour  $\omega = 2$ , on obtient un endommagement diffus.

En dehors de ces études numériques, une étude théorique a été récemment développée par S. Roux et A. Hansen [Roux et Hansen, 1989] dans le cas d'une distribution en loi de puissance.

Cette étude a été motivée par l'importance du comportement près de zéro de la distribution des seuils de rupture. Les résultats obtenus reposent sur l'approche de "Flory" que nous présentons ici.

**Approche de "Flory"** Considérons un réseau homogène infini sur lequel on applique une tension unité à l'infini. Le critère de rupture  $C_{ij}$  d'un lien  $ij$ ,  $i$  et  $j$  sont les noeuds du lien, s'écrit:

$$(1.40) \quad C_{ij} = \frac{|V_i - V_j|}{V_{ij}^c}$$

où  $V_i$  est le potentiel du noeud  $i$  et  $V_{ij}^c$  est le seuil de rupture du lien  $ij$ . Le lien  $ij$  casse dès que  $C_{ij} \geq 1$ .

Les seuils  $V_{ij}^c$  sont tirés aléatoirement selon une loi de puissance:

$$(1.41) \quad \text{Prob}(V_{ij}^c \leq t) = \begin{cases} t^m & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases} \quad \text{avec } m > 0$$

Le courant dans les liens est uniforme, par conséquent, le premier lien qui va rompre sera simplement le lien le plus fragile (celui qui a le seuil de rupture  $V_{ij}^c$  le plus faible). On s'intéresse alors à la rupture du deuxième lien.

Le critère de rupture est le rapport entre deux valeurs: d'une part, le courant local, et d'autre part, le seuil de rupture local distribué aléatoirement. Le processus de rupture résulte donc d'une compétition entre deux effets: d'une part la distribution des courants qui joue un rôle attractif, d'autre part, le désordre lié aux seuils de rupture et qui joue un rôle dispersif. Dans le cas d'un milieu avec très peu de désordre, c'est le champ de courant créé par la rupture du premier lien qui l'emporte. Donc, le deuxième lien à casser sera dans le voisinage du premier d'où le nom de régime localisé. Dans ce cas, la rupture sera fragile et non contrôlée. Par contre, dans le cas d'un fort désordre, c'est le lien le plus fragile qui casse indépendamment du courant qui le traverse d'où le nom de régime diffus. L'approche de "Flory" consiste à étudier l'importance de l'un des deux phénomènes par rapport à l'autre afin de déterminer le mode de rupture (localisé ou diffus).

Cette approche a permis de distinguer deux cas:

- $m < 2$  : Dans ce cas, la rupture est contrôlée par l'influence du désordre. Le deuxième lien cassera donc aléatoirement et par conséquent, l'endommagement sera

diffus.

-  $m \geq 2$ : Dans ce cas, on montre qu'il existe une taille  $L_c^o$  de la structure qui sépare deux régimes. Si la taille de la structure  $L$  est inférieure à  $L_c^o$  alors on a un régime localisé, par contre si  $L$  est supérieure à  $L_c^o$  on obtient un régime diffus. La taille critique  $L_c^o$  s'écrit simplement:

$$(1.42) \quad L_c^o \sim a.(1 + \lambda)^{\frac{m}{2d}}$$

où  $a$  est la taille de la maille élémentaire,  $\lambda$  est un paramètre très grand par rapport à un et  $d$  est la dimension de l'espace.

Dans cette approche, on se base uniquement sur l'étude des premiers stades de la rupture et on suppose que la proportion de liens rompus est faible. Ainsi, on néglige l'interaction entre les microfissures et on suppose que la répartition de ces microfissures est homogène. Ces hypothèses ne sont évidemment pas valables dans des stades plus avancés de la rupture. En particulier, les résultats obtenus à l'aide de cette approche pour  $m \geq 2$  sont partiellement en contradiction avec les résultats de nos simulations numériques (1.36). En effet, cette approche prévoit l'existence d'une taille critique  $L_c^o$  telle que:

$$(1.43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } m < 2 \quad \forall L : \text{régime diffus} \\ \text{pour } m \geq 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } L \leq L_c^o : \text{régime localisé} \\ \text{pour } L \geq L_c^o : \text{régime diffus} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ainsi, on devrait s'attendre à ce que pour  $L \geq L_c^o$  et  $m \geq 2$ , on ait le même type de lois d'échelle que pour  $m < 2$ . Les simulations numériques du troisième chapitre montrent que c'est le contraire qui se produit. Nous mettrons en évidence une taille critique  $L_c$  telle que:

$$(1.44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } m < 2 \quad \forall L : \sigma_r \sim L^{-\frac{1}{4}} \\ \text{pour } m \geq 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } L \leq L_c : \sigma_r \sim L^{-\frac{1}{4}} \\ \text{pour } L \geq L_c : \sigma_r \sim L_c^{-\frac{1}{4}} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ceci veut dire que pour  $L \leq L_c$  et  $m \geq 2$ , nous avons le même régime que pour  $m < 2$ . Nous reviendrons dans les prochains chapitres sur le sens physique de  $L_c$ .

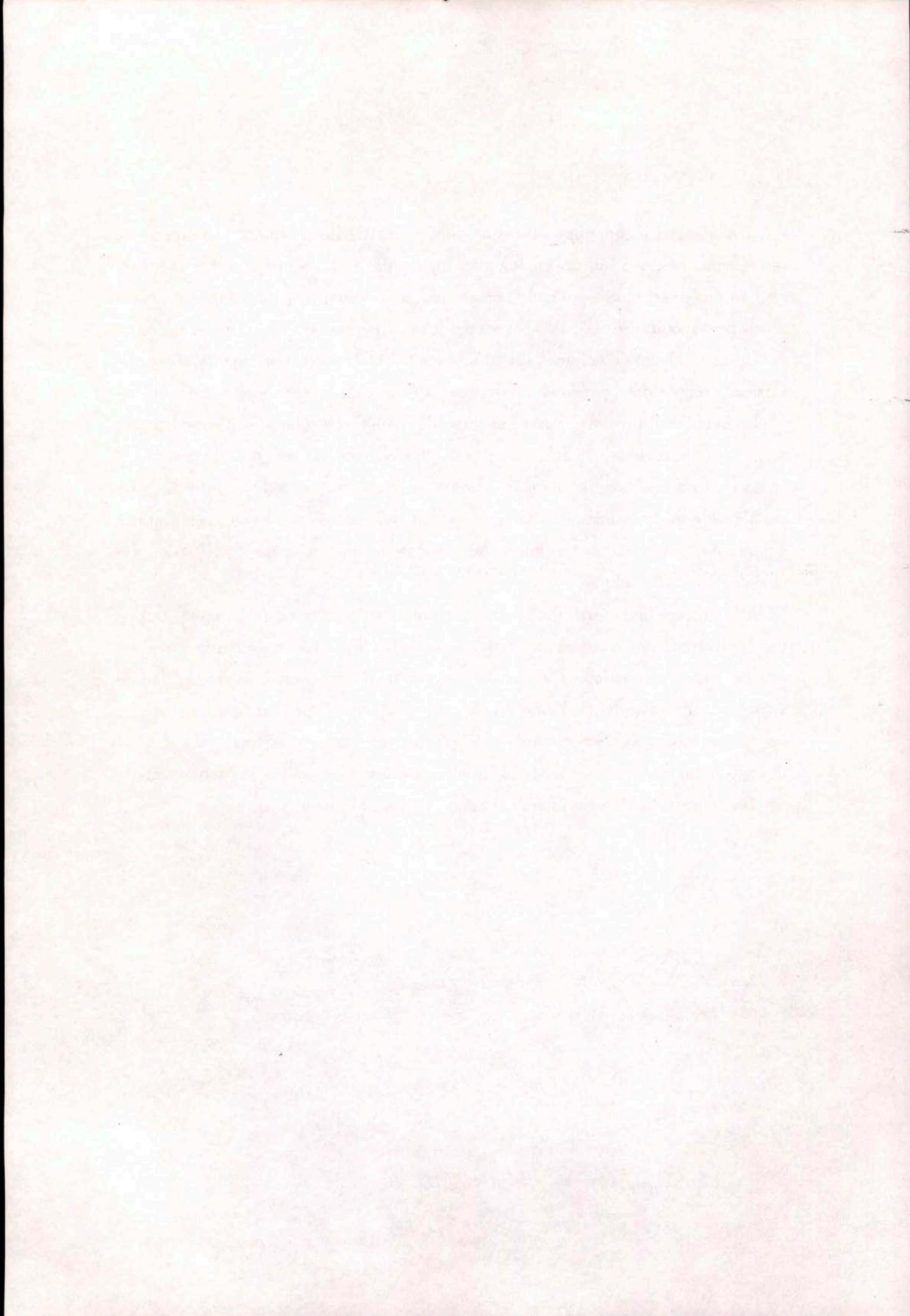
Néanmoins, l'intérêt de l'approche de Flory est d'avoir permis de donner une classification des modes de rupture en fonction du comportement au voisinage de zéro de la distribution aléatoire. En particulier, la distinction entre le cas  $m < 2$  et  $m \geq 2$  sera confirmée dans le troisième chapitre et nous permettra d'étendre ce résultat à un cas plus général.

## 1.4 CONCLUSION

Les modèles d'endommagement continu permettent de résoudre le problème de la dépendance des résultats en fonction du maillage. La plupart de ces modèles, et notamment les modèles d'endommagement non-locaux, rendent compte des effets d'échelle de structure. Cependant, ces modèles ne permettent pas de rendre compte des effets d'échelle de volume. En effet, dans le cas de structures non fissurées une prise en compte du caractère hétérogène et aléatoire du matériau est nécessaire.

Le but des approches probabilistes est de prendre en compte explicitement cet aléa. Ces approches tentent de décrire qualitativement le processus de fissuration et de rupture des matériaux hétérogènes et de comprendre l'influence du désordre sur l'évolution de la microfissuration en ayant souvent recours à des modélisations simples de type réseaux. Ces approches permettent une meilleure modélisation des effets d'échelle de volume.

A la lumière de l'étude bibliographique présentée dans ce chapitre, on est frappé par la diversité des modèles existants et par le fait que chacun de ces modèles est adapté à un type particulier d'effet d'échelle qu'il soit de volume, de gradient ou de structure. Il n'en reste pas moins que lors de la rupture d'une structure quelconque, les effets de volume, de structure ou de gradient ne sont pas indépendants. Le but des prochains chapitres est de bâtir un unique modèle de rupture qui rende compte simultanément de ces trois effets d'échelle.



## Chapitre 2

# Modélisation d'un matériau endommagé à l'aide d'un milieu discret équivalent

2.1- INTRODUCTION

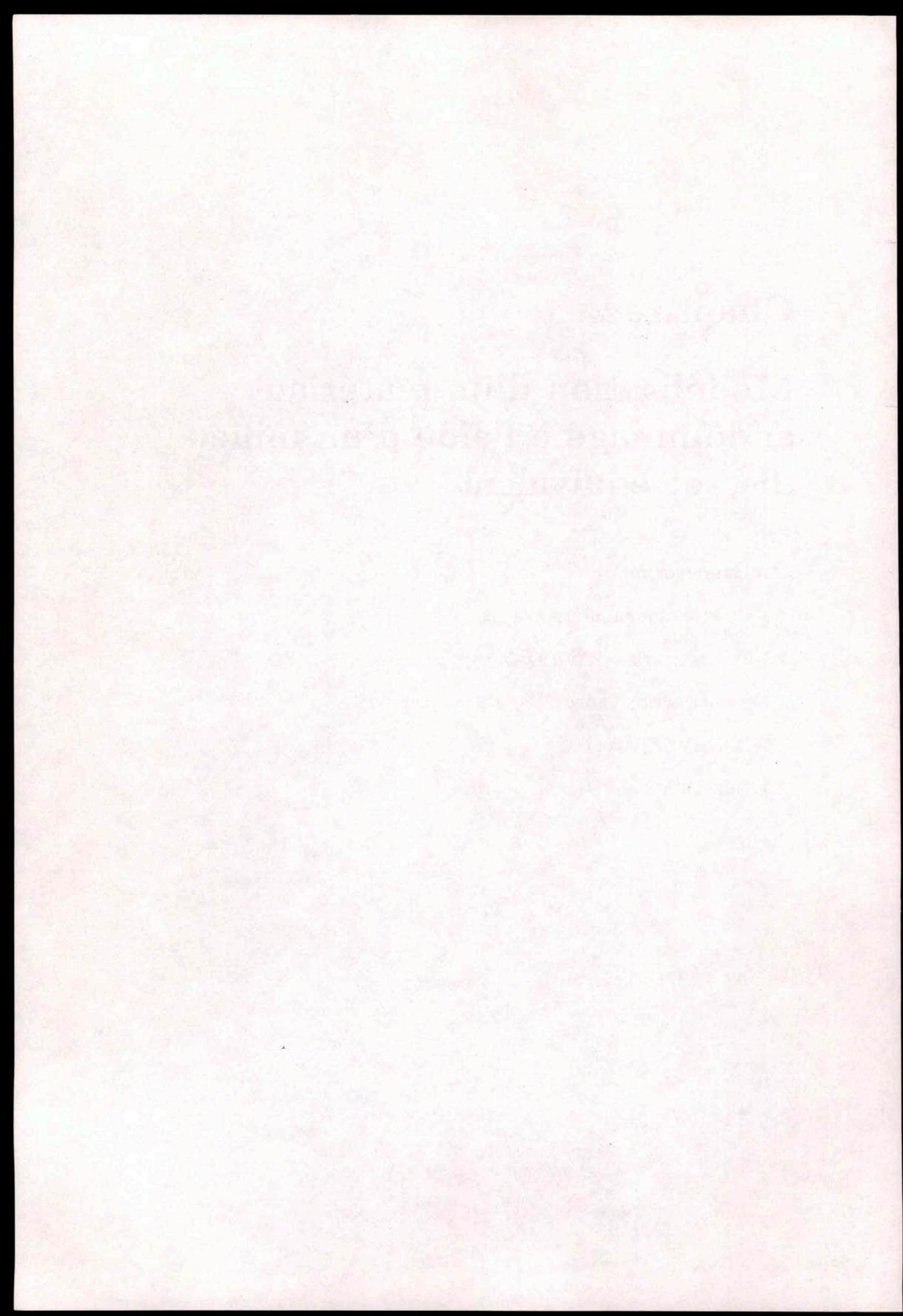
2.2- POSITION DU PROBLÈME

2.3- DISCRÉTISATION DU MILIEU

2.4- MODÉLISATION PROPOSÉE

2.5- SCHÉMA DE CALCUL

2.6- CONCLUSION



## 2.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous décrivons le cadre général de notre étude. Nous commençons dans la première section par formuler précisément le problème auquel nous nous intéressons, à savoir la rupture sous chargement monotone des matériaux quasi-fragiles et les effets d'échelle qui en résultent. Ensuite, nous rappellerons dans la deuxième section la théorie dite des équivalences qui permet de remplacer un milieu continu par un milieu discret équivalent. Cette théorie sera utilisée dans la classe de modèles proposée et qui est décrite dans la troisième section.

Enfin, nous présentons les méthodes de calcul utilisées dans le cadre de cette classe de modèles.

## 2.2 POSITION DU PROBLÈME

L'objectif principal de notre travail est de bâtir une classe de modèles pour la prévision de la rupture et de ses effets d'échelle dans les matériaux quasi-fragiles soumis à des chargements monotones. Dans toute la suite, on se place dans le cas des chargements à un seul paramètre. En effet, dans toutes les expériences faites sur la rupture des matériaux quasi-fragiles, le chargement a été piloté à l'aide d'un seul paramètre. Ainsi, nous ne pourrions juger de la pertinence d'un modèle de rupture que pour ce type de chargement. Nous commencerons tout d'abord par rappeler la définition d'un chargement à un seul paramètre.

Soit un milieu continu  $C$ , occupant un volume  $\Omega$ , en équilibre sous l'action d'un chargement classiquement décrit par des données statiques (forces de volume, composantes du vecteur contrainte sur une partie du bord) et des données cinématiques complémentaires (composantes du déplacement sur une partie du bord).

Dans toute la suite, on considère des chargements décrits par des données statiques toutes nulles et des données cinématiques dépendant linéairement d'une seule variable scalaire notée  $\Delta$  homogène à un déplacement.  $\Delta$  est le paramètre de chargement qui croît en fonction du temps.

On écrit alors:

$$(2.1) \quad \xi_i(\underline{x}) = \Delta \cdot \xi_i^o(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \partial\Omega_i$$

où  $\xi_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du déplacement et  $\xi_i^o(\underline{x})$  est une fonction donnée définie sur une partie du bord de  $\Omega$  notée  $\partial\Omega_i$ .

L'application du théorème des travaux virtuels nous permet d'écrire:

$$(2.2) \quad \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\epsilon}(\underline{\xi}) = \Delta \cdot \sum_i \int_{\partial\Omega_i} \xi_i^o \cdot \sigma_{ij} \cdot n_j ds$$

pour tout champ  $\underline{\sigma}$  statiquement admissible et tout champ  $\underline{\xi}$  cinématique compatible avec (2.1).

Notons  $F = \sum_i \int_{\partial\Omega_i} \xi_i^o \cdot \sigma_{ij} \cdot n_j ds$ , il vient alors:

$$(2.3) \quad \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\epsilon}(\underline{\xi}) = \Delta \cdot F$$

Ainsi,  $\Delta$  est le paramètre cinématique de chargement et  $F$  est le paramètre statique associé.

Dans l'étude de la rupture des matériaux quasi-fragiles, on suppose que le comportement ne dépend pas du temps physique (on néglige les effets de viscosité). Par conséquent, la simulation de la rupture progressive des matériaux se fera en augmentant le paramètre de chargement  $\Delta$  de manière incrémentale. Dans le cas où un modèle de comportement déterministe est adopté, la courbe  $F - \Delta$  décrit une fonction déterministe. Par contre, dans le cas d'un comportement aléatoire, cette courbe est une réalisation d'un processus aléatoire.

L'étude bibliographique du premier chapitre montre qu'il existe deux approches différentes pour simuler la rupture progressive d'un matériau:

1- Dans les modèles d'endommagement continu, on postule tout d'abord une loi de comportement et une loi d'évolution du milieu continu. Puis, le problème d'évolution ainsi défini est discrétisé et résolu incrémentalement à l'aide de la méthode des éléments finis. La pertinence du modèle est principalement évaluée selon deux critères:

- La première exigence est de vérifier que les résultats sont indépendants de la discrétisation à partir d'une certaine finesse de maillage; sinon, le couple loi de comportement - loi d'évolution est à changer. Dans la suite, on parlera de "cohérence" du modèle. La cohérence du modèle se vérifie à partir des courbes  $F - \Delta$ . On vérifie alors que ces courbes ne dépendent pas de la discrétisation à partir d'une certaine finesse du maillage. L'étude bibliographique du premier chapitre montre que certains modèles existants et notamment les modèles non locaux permettent d'assurer cette cohérence.

- La deuxième exigence est de vérifier que le modèle permet de prévoir les effets d'échelle observés expérimentalement. La plupart des modèles d'endommagement continu cités dans le premier chapitre permettent de rendre compte des effets d'échelle de structure mais ne rendent pas compte des effets de volume.

2- Quant aux modèles de réseau existants, ils ne suivent pas ce schéma classique. En effet, la "loi de comportement" est postulée directement sur un milieu discret qui ne résulte pas d'une discrétisation d'un milieu continu et la notion de cohérence du modèle perd alors son sens. En physique des milieux aléatoires, par exemple, la taille de la maille élémentaire du réseau est introduite comme une donnée du matériau qui caractérise la taille de ses hétérogénéités. L'objectif des modèles de réseau est une étude qualitative des phénomènes mis en jeu dans la rupture des matériaux aléatoires au détriment des aspects quantitatifs. Rappelons aussi que les modèles de réseau s'intéressent uniquement aux effets d'échelle de volume.

Le point commun entre les deux types d'approches évoquées ci-dessus est que la rupture du matériau est décrite par une chute progressive de la matrice de rigidité initiale (à l'état vierge) de la structure. Dans le cas des modèles d'endommagement continu, la matrice initiale est la matrice de rigidité élastique correspondant à la discrétisation en éléments finis. Cette matrice évolue de manière déterministe à l'aide d'une loi d'évolution discrétisée. Par contre, dans le cas des réseaux, la matrice de rigidité initiale est la matrice de rigidité du réseau à l'état vierge. Cette matrice évolue d'une manière aléatoire en tenant compte de l'état de contrainte dans la structure et de la distribution aléatoires des limites à la rupture.

Le modèle qu'on propose est une synthèse des modèles d'endommagement continu et des modèles de réseau.

On se propose de modéliser le milieu continu par un milieu discret qui a la même matrice de rigidité que le milieu continu à l'état vierge. Ensuite, on postule une loi de comportement sur le milieu discrétisé qui soit indépendante du maillage en ce sens que la statistique de la courbe  $F - \Delta$  ne dépend plus de la discrétisation à partir d'une certaine finesse. Notre objectif est de pouvoir rendre compte des effets d'échelle de volume, de gradient et de structure à l'aide d'un même modèle.

## 2.3 DISCRÉTISATION DU MILIEU

La discrétisation que nous avons choisie est basée sur la théorie des équivalences [Absi, 1972]. Cette théorie substitue à un milieu continu homogène élastique linéaire isotrope un réseau périodique de poutres dont la rigidité globale est équivalente à celle du milieu continu. Ici l'équivalence entre le milieu continu et le milieu discret a le même sens énergétique que celui qui fonde la méthode des éléments finis. En particulier, le champ de déplacement obtenu par extrapolation des déplacements aux noeuds du réseau constitue une estimation du champ de déplacement du milieu continu aussi précise que celle que permet un calcul par éléments finis. Il converge vers la solution exacte quand la taille de la période du réseau tend vers 0. Un rappel de la théorie des équivalences est donnée dans l'annexe A.

Pour un milieu bidimensionnel, nous utilisons le réseau généré par la maille élémentaire carrée décrite par la figure (Figure 2.1) qui montre des articulations aux noeuds A, B, C et D et un encastrement en H.

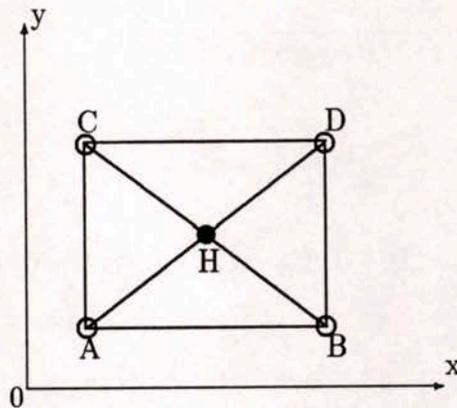


Figure 2.1: Maille élémentaire du réseau équivalent

Les poutres AB, BD, CD et AC situées sur le contour de l'élément équivalent (ABCDH) travaillent en traction-compression, par contre les éléments diagonaux HA, HB, HC, et HD travaillent à la fois en traction-compression et en flexion.

Nous noterons respectivement  $\rho_i$  et  $\eta_i$  la raideur et la flexion d'une poutre  $i$  du réseau (cf. Annexe A).

Pour des raisons de symétrie, on a:

$$(2.4) \quad \begin{cases} \rho_{AB} = \rho_{CD} \quad , \quad \rho_{AC} = \rho_{BD} \\ \rho_H = \rho_{HA} = \rho_{HB} = \rho_{HC} = \rho_{HD} \\ \eta_H = \eta_{HA} = \eta_{HB} = \eta_{HC} = \eta_{HD} \end{cases}$$

Nous rappelons l'expression analytique des raideurs et des flexions de ces poutres en fonction de l'aire  $S(K)$  de la maille et des caractéristiques élastiques  $(\lambda, \mu)$  du milieu (cf. *Annexe A*).

• En déformations planes:

$$(2.5) \quad \begin{cases} \rho_{AB} = \left[ \lambda + \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot (1 - \cot^2(\alpha)) \right] \cdot S(K) \\ \rho_{AC} = \left[ \lambda + \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot (1 - \tan^2(\alpha)) \right] \cdot S(K) \\ \rho_H = \frac{\mu}{4 \cdot \sin^2(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot S(K) \\ \eta_H = \frac{\mu - \lambda}{4 \cdot \sin^2(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot S(K) \end{cases}$$

• En contraintes planes:

$$(2.6) \quad \begin{cases} \rho_{AB} = \frac{\mu}{2 \cdot (\lambda + 2\mu)} \cdot [5 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu - (\lambda + 2 \cdot \mu) \cdot \cot^2(\alpha)] \cdot S(K) \\ \rho_{AC} = \frac{\mu}{2 \cdot (\lambda + 2\mu)} \cdot [5 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu - (\lambda + 2 \cdot \mu) \cdot \tan^2(\alpha)] \cdot S(K) \\ \rho_H = \frac{\mu}{4 \cdot \sin^2(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot S(K) \\ \eta_H = \frac{\mu}{4 \cdot \sin^2(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot \frac{2 \cdot \mu - \lambda}{\lambda + 2 \cdot \mu} \cdot S(K) \end{cases}$$

## 2.4 MODÉLISATION PROPOSÉE

On considère un milieu continu élastique homogène et isotrope et on s'intéresse à la rupture de ce milieu sous un chargement monotone. Ce chargement est piloté à l'aide d'un paramètre  $\Delta$  qui croît en fonction du temps. On suppose que le comportement ne dépend pas du temps physique (on néglige la viscosité). L'accroissement de ce paramètre se fera donc de manière incrémentale.

On représente le milieu continu par un milieu discret équivalent formé par le réseau de poutres décrit dans la précédente section.

Après avoir représenté le milieu sain par un réseau de poutres, on postule que le milieu endommagé peut être représenté par le même réseau auquel on a ôté quelques poutres. Cette hypothèse peut se justifier par le fait qu'on peut représenter le milieu endommagé dans lequel des fissures ou des cavités apparaissent par un milieu équivalent auquel on a ôté les poutres qui recouvrent ces défauts, à condition que la taille des poutres soit suffisamment petite par rapport à la taille de ces défauts. Autrement dit, si on fait le parallèle avec une modélisation de type éléments finis, ceci revient à garder la même discrétisation du milieu à l'état vierge et à l'état endommagé et à adopter une loi d'endommagement brutal.

Ainsi, le milieu endommagé est caractérisé par le champ de déplacement élastique  $U^S$  aux noeuds des poutres existantes et par un vecteur endommagement  $\underline{D} = (D_i)$  où  $D_i = 1$  si la poutre  $i$  est rompue et  $D_i = 0$  si la poutre  $i$  n'est pas rompue. Il nous reste alors à décrire l'évolution de  $\underline{D}$ .

Dans tout ce travail, on suppose que l'évolution de  $\underline{D}$  est pilotée par le champ de déplacement élastique  $U^S$ . Cette évolution est décrite par la rupture progressive des poutres du système. Chaque poutre aura un comportement élastique fragile avec une limite à la rupture aléatoire. Nous noterons  $f_i$  le critère de la poutre  $i$  et  $R_i$  sa limite à la rupture. Le critère de rupture de la poutre  $i$  est une fonction positivement homogène de degré 1 du champ de déplacement élastique  $U^S$  et s'écrit:

$$(2.7) \quad \text{si } f_i(U^S) \geq R_i \quad \text{alors la poutre } i \text{ casse}$$

La rupture d'une poutre sera irréversible.

Le choix des fonctions  $f_i$  et de la distribution statistique des limites à la rupture fera l'objet des prochains chapitres. Nous nous limiterons ici à décrire le schéma général de la simulation de la progression de l'endommagement dans un milieu aléatoire ainsi modélisé.

• **Remarque**

Dans tout ce travail, l'élasticité sera supposée homogène et déterministe. Ceci étant, l'hétérogénéité élastique du matériau peut facilement être prise en compte en associant à chaque maille du réseau des coefficients élastiques aléatoires. Nous avons choisi d'introduire l'aléa au niveau du comportement à la rupture des poutres et non sur leur comportement élastique.

## 2.5 SCHÉMA DE CALCUL

On considère une structure soumise à un chargement. On considère un pavage de cette structure à l'aide de carrés de taille  $l$ . Chaque carré du pavage est ensuite discrétisé selon la théorie des équivalences sous forme du réseau de poutres préalablement décrit. A chacune des poutres du réseau, on associe une limite à la rupture aléatoire. Ainsi le problème devient complètement déterministe et la simulation de l'augmentation du chargement et de la rupture progressive des poutres est conceptuellement très simple puisqu'il s'agit de faire des calculs élastiques sur un réseau de poutres, d'enlever les poutres qui dépassent leurs critères et de réitérer l'opération jusqu'à la rupture complète de la structure. Le calcul se fait de la manière suivante:

1- On impose un déplacement unité  $\Delta = 1$ .

2- On résoud le problème élastique après assemblage de la matrice de rigidité. La résolution du problème élastique revient à trouver les déplacements aux noeuds du maillage et donc à résoudre le système linéaire suivant:

$$(2.8) \quad \mathbf{R}_o^S \cdot \mathbf{U}_o^S = \mathbf{F}$$

- $\mathbf{R}_o^S$  est la matrice de rigidité de la structure obtenue par assemblage des différentes matrices de rigidité  $\mathbf{R}^i$  ( $\mathbf{R}_o^S = \sum_p \mathbf{R}^i$ ) des poutres  $i$  du réseau à l'état initial.
- $\mathbf{U}_o^S$  est la matrice colonne des déplacements nodaux à l'état initial.
- $\mathbf{F}$  est la matrice colonne des forces généralisées.

La résolution du système numérique se fait à l'aide de la méthode de Choleski.

3- On calcule les efforts dans les différentes poutres du réseau:

$$(2.9) \quad \mathbf{F}^i = \mathbf{R}^i \cdot \mathbf{U}^i$$

où

- $\mathbf{F}^i$  est la matrice colonne des efforts dans la poutre  $i$
- $\mathbf{U}^i$  est la matrice colonne des déplacements des noeuds de la poutre  $i$

4- On teste les critères de rupture sur toutes les poutres du réseau. Ceci nous permet de déterminer la (les) poutre(s) où le critère est maximal (au sens où  $\frac{f_i(\mathbf{U}_o^S)}{R_i}$  est maximal) et de calculer ainsi la valeur du chargement  $\Delta_1$  qui ne casse que cette (ces) poutre(s) ci.

$$(2.10) \quad \Delta_1 \text{ tel que } \max_i \frac{f_i(\Delta_1 \cdot \mathbf{U}_o^S)}{R_i} = 1$$

$f_i$  étant une fonction positivement homogène de degré 1 du champ de déplacement, on a donc  $f_i(\Delta_1 \cdot \mathbf{U}_o^S) = \Delta_1 f_i(\mathbf{U}_o^S)$ . Par conséquent:

$$(2.11) \quad \Delta_1 = \min_i \frac{R_i}{f_i(\mathbf{U}_o^S)}$$

5- Après rupture de ces poutres, on assemble la nouvelle matrice de rigidité  $\mathbf{R}_n^S = (\mathbf{R}_o^S - \sum_{i \in Pr} \mathbf{R}^i)$ ,  $Pr$  étant l'ensemble des poutres rompues, et on résout le nouveau

problème élastique en imposant toujours le chargement  $\Delta_1$ .

$$(2.12) \quad \mathbf{R}_n^S \cdot \mathbf{U}_n^S = \Delta_1 \cdot \mathbf{F}$$

La résolution de ce problème élastique nous permet de tester les critères de rupture des poutres. Deux schémas de rupture "extrêmes" sont envisagés:

- a) On casse toutes les poutres qui atteignent leurs critères de rupture ( $f_i(\mathbf{U}_n^S) \geq R_i$ )
- b) On casse uniquement la poutre  $i_0$  pour laquelle le critère maximal est atteint ( $i_0 = \max_i \left( \frac{f_i(\mathbf{U}_n^S)}{R_i} \right)$ )

Ce processus est réitéré, en gardant le même chargement  $\Delta_1$ , jusqu'à stabilisation de la rupture (c'est à dire jusqu'à ce qu'aucune poutre ne dépasse son critère).

6- Après chaque étape de stabilisation, on détermine le paramètre de chargement  $\Delta_{n+1}$  à appliquer à la structure  $\Delta_{n+1} > \Delta_n$  qui casse la (les) poutre(s) qui ont le critère maximal.

$$(2.13) \quad \Delta_{n+1} = \min_i \frac{R_i}{f_i(\mathbf{U}_n^S)}$$

7- On réitère l'opération jusqu'à la rupture complète de la structure.

Pour chacune des simulations  $p$  effectuées, on note le déplacement imposé  $\Delta_{p,q}$  et le paramètre statique associé  $F_{p,q}$  correspondants à la rupture de la  $q^{\text{ième}}$  poutre.

Ces quantités seront moyennées sur différentes réalisations aléatoires. Ceci nous permettra de procéder à une analyse statistique des résultats des simulations numériques.

#### ANALYSE STATISTIQUE DES RÉSULTATS

Pour étudier l'indépendance des résultats en fonction de la finesse du maillage,  $l$ , ainsi que les effets d'échelle, nous avons besoin d'étudier la statistique des courbes  $F - \Delta$ . On se donne alors une taille de structure  $L$  et une finesse de maillage  $l$  et on effectue  $p(l, L)$  simulations de cette même structure. L'indépendance des résultats en fonction de la finesse du maillage, signifie que la "moyenne statistique" des courbes

$(F - \Delta)(l, L)$ , en un sens à définir, ne dépend pas de  $l$ . Si tel est le cas, nous noterons  $(F - \Delta)(L)$ , la moyenne statistique des courbes  $(F - \Delta)(l, L)$ . L'étude des effets d'échelle se fait ensuite sur les courbes "moyennes"  $(F - \Delta)(L)$  en faisant varier la taille  $L$  de la structure.

Le schéma de calcul qu'on a présenté montre qu'à partir du moment où on a choisi un critère de rupture des poutres et qu'on a simulé les limites à la rupture des poutres du réseau, le problème devient complètement déterministe. Les accroissements du paramètre de chargement  $\Delta$  sont calculés de manière à rompre le minimum de poutres. Par conséquent, l'évolution du chargement ainsi que l'état de la structure sont entièrement décrits par le nombre de poutres rompues à chaque étape de rupture. Ce nombre noté  $q$  croît en fonction du temps et représente le temps chronologique. Ainsi, la moyenne statistique sur les courbes  $(F - \Delta)(l, L)$  sera définie de la manière suivante:

Pour une structure de taille donnée  $L$  et une finesse de maillage  $l$ , les quantités  $F_{p,q}(l, L)$  et  $\Delta_{p,q}(l, L)$  sont moyennées sur différentes simulations  $p$  de la même structure ( $p \in [1, p(l, L)]$ ):

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{F}_q(l, L) = \frac{\sum_{p=1}^{p(l, L)} F_{p,q}(l, L)}{p(l, L)} \\ \bar{\Delta}_q(l, L) = \frac{\sum_{p=1}^{p(l, L)} \Delta_{p,q}(l, L)}{p(l, L)} \end{array} \right.$$

On obtient ainsi, pour chaque structure  $(l, L)$ , une courbe force - déplacement paramétrée par  $q$  qu'on notera  $(\bar{F} - \bar{\Delta})(l, L)$ .

• Remarques:

**R1)** Nous noterons par  $(F_p)_r = \max_q F_{p,q}$ , la force à la rupture et  $(\Delta_p)_r$  le déplacement à la rupture correspondant à l'instant où  $(F_p)_r$  est atteint et nous définirons la force à la rupture moyenne  $\overline{F}_r(l, L)$  et le déplacement à la rupture moyen  $\overline{\Delta}_r(l, L)$  par la moyenne arithmétique sur toutes les simulations  $p$  (avec  $p \in [1, p(l, L)]$ ) de  $(F_p)_r(l, L)$  et  $(\Delta_p)_r(l, L)$  respectivement:

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{F}_r(l, L) = \frac{\sum_{p=1}^{p(l, L)} (F_p)_r(l, L)}{p(l, L)} \\ \overline{\Delta}_r(l, L) = \frac{\sum_{p=1}^{p(l, L)} (\Delta_p)_r(l, L)}{p(l, L)} \end{array} \right.$$

Notons que  $\overline{F}_r(l, L)$  est en général supérieur au  $\max_q \overline{F}_q(l, L)$ .

Nous définirons aussi l'écart type, qu'on note  $\Delta \overline{F}_r(l, L)$ , des valeurs  $(F_p)_r(l, L)$  par:

$$(2.16) \quad \Delta \overline{F}_r(l, L) = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^{p(l, L)} [(F_p)_r(l, L)]^2 - \frac{1}{p(l, L)} \left[ \sum_{p=1}^{p(l, L)} (F_p)_r(l, L) \right]^2}{p(l, L) - 1}}$$

La contrainte moyenne à la rupture  $\sigma_r(l, L)$  ainsi que la déformation moyenne à la rupture sont définies par:

$$(2.17) \quad \sigma_r(l, L) = \frac{\overline{F}_r(l, L)}{L} \quad \text{et} \quad \epsilon_r(l, L) = \frac{\overline{\Delta}_r(l, L)}{L}$$

**R2)** L'étude de la cohérence du modèle ainsi que l'étude des effets d'échelle seront faites sur les courbes  $(\overline{F} - \overline{\Delta})(l, L)$  ainsi que sur  $\sigma_r(l, L)$ . L'indépendance des résultats en fonction du maillage signifie que  $(\overline{F} - \overline{\Delta})(l, L)$  et  $\sigma_r(l, L)$  ne dépendent pas de  $l$ . L'absence d'effet d'échelle de volume signifie que  $\sigma_r(L)$  ne dépend pas de  $L$ . L'absence d'effet d'échelle de structure signifie que  $\sigma_r(L) \sim L^{-\frac{1}{2}}$ .

### DIFFICULTÉS NUMÉRIQUES:

#### **A- Le temps de calcul:**

Cette méthode de simulation présente des difficultés liées au temps de calcul. En effet, la matrice de rigidité de la structure varie après chaque étape de rupture. Le problème à résoudre après  $n$  étapes de rupture est le suivant:

$$(2.18) \quad \mathbf{R}_n^S \cdot \mathbf{U}_n^S = \Delta_n \cdot \mathbf{F}$$

avec  $\mathbf{R}_n^S = \mathbf{R}_o^S - \sum_{i \in Pr} \mathbf{R}^i$

- $\sum_{i \in Pr} \mathbf{R}^i$  est l'assemblage des différentes matrices de rigidité des poutres rompues
- $\Delta_n$  est le déplacement imposé à l'étape  $n$ .

Cette résolution est à faire à chaque étape de rupture ce qui nécessiterait un calcul d'inversion de la matrice de rigidité  $\mathbf{R}_n^S$  pour chacune de ces étapes. Or ceci serait très coûteux en temps de calcul ce qui nous amène à utiliser un algorithme itératif sur les termes de force qui ne fait intervenir que la matrice de rigidité initiale  $\mathbf{R}_o^S$ . En effet, nous écrivons (2.17) sous la forme suivante:

$$(2.19) \quad \mathbf{R}_o^S \cdot \mathbf{U}_n^S = \sum_{i \in Pr} \mathbf{R}^i \cdot \mathbf{U}_n^S + \Delta_n \cdot \mathbf{F}$$

Nous considérons alors l'algorithme suivant:

$$(2.20) \quad \begin{cases} \mathbf{R}_o^S \cdot \mathbf{V}_i = \sum_{i \in Pr} \mathbf{R}^i \cdot \mathbf{V}_{i-1} + \Delta_n \cdot \mathbf{F} \\ \mathbf{V}_o \text{ donné} \end{cases}$$

Pour tout  $\mathbf{V}_o$ , la suite  $(\mathbf{V}_i)$  converge vers la solution recherchée  $\mathbf{U}_n^S$ . La convergence est assurée dès que la matrice  $\mathbf{R}_n^S$  est définie positive. La positivité de cette matrice est garantie par le fait que  $\mathbf{R}_n^S$  est l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires de toutes les poutres du réseau alors que  $\sum_{i \in Pr} \mathbf{R}^i$  est l'assemblage des matrices de rigidité des poutres rompues. Par contre, cette matrice est non définie dans deux cas:

1) Quand il y a apparition de sous structures hypostatiques dans la structure (typiquement une barre ayant une extrémité libre et une extrémité articulée).

2) Quand il y a apparition d'un trou dans la structure (un ou plusieurs noeuds non reliés à aucune poutre du réseau). On note  $T$  l'ensemble de ces noeuds.

Dans le cas où il y a apparition d'un trou dans la structure, on propose un algorithme généralisé:

$$(2.21) \quad \begin{cases} \mathbf{R}_o^S \cdot \mathbf{V}_i = \left( \sum_{i \in Pr} \mathbf{R}^i - \mathbf{I}_T \right) \cdot \mathbf{V}_{i-1} + \Delta_n \cdot \mathbf{F} \\ \mathbf{V}_o \text{ donné} \end{cases}$$

où  $\mathbf{I}_T$  est la restriction de la matrice identité à l'ensemble ( $T$ ). Cet algorithme converge vers la solution  $\mathbf{U}_n^S$  dans le cas où il n'y a pas formation de mécanismes dans la structure. En effet, la définie positivité de la matrice  $(\mathbf{R}_n^S + \mathbf{I}_T)$  assure la convergence de l'algorithme vers une solution  $\mathbf{V}_n^S$  telle que:

$$(2.22) \quad (\mathbf{R}_n^S + \mathbf{I}_T) \cdot \mathbf{V}_n^S = \Delta_n \cdot \mathbf{F}$$

Les solutions  $\mathbf{U}_n^S$  et  $\mathbf{V}_n^S$  diffèrent uniquement par leurs valeurs sur  $T$  qui n'interviendront plus dans la suite de l'évolution.

Dans le cas où il y a apparition d'un mécanisme, l'analyse du noyau de la matrice de rigidité  $\mathbf{R}_n^S + \mathbf{I}_T$  nous permet de connaître les poutres non chargées qui n'interviennent plus dans la suite de l'évolution (les poutres dont l'un des deux noeuds a un déplacement non nul). On enlève alors ces poutres du réseau.

Ainsi, pour analyser le noyau de  $\mathbf{R}_n^S + \mathbf{I}_T$ , on utilise la méthode de Jacobi.

#### • La méthode de Jacobi

Soit  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  une matrice  $N \times N$  non inversible.

On construit une suite  $\mathbf{X}^k = (x_i)^k$  avec  $i=1, N$  de la manière suivante:

$$(2.23) \quad \begin{cases} x_i^{k+1} = \frac{-1}{a_{ii}} \cdot \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} \cdot x_j^k \\ \mathbf{X}^o \in \mathbf{R}^N - \{0\} \end{cases}$$

Dans le cas où  $a_{ii} > 0$ , cette suite converge vers une solution non nulle de l'équation  $A.X = 0$ . Cette condition est remplie par la matrice  $(R_n^S + I_T)$ , ce qui assure la convergence de l'algorithme.

Cette méthode ne permet d'éliminer qu'un seul des mécanismes existants. Dans le cas où il existe plusieurs mécanismes, cette méthode est réitérée jusqu'à élimination de tous les mécanismes.

### B- La place mémoire:

Les calculs ont été effectués sur une station Sun Spark IPC dont la mémoire vive est de 12 Mo. Pour effectuer des simulations sur des maillages fins, nous avons utilisé deux techniques numériques:

1- Nous avons d'abord réduit la dimension de la matrice de rigidité du système en effectuant une condensation de la matrice de rigidité  $R_o^S$  par élimination des inconnues relatives aux noeuds rigides ( $H$ ) afin de diminuer la taille du problème. Cette élimination est obtenue en remplaçant les déplacements de chaque noeud rigide ( $H$ ) par leurs valeurs en fonction des déplacements des quatre noeuds qui l'entourent ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ ) et ceci à chaque étape de rupture. Ceci revient à condenser la matrice de rigidité élémentaire d'une maille endommagée de dimension  $11 \times 11$  en une matrice de rigidité de dimension  $8 \times 8$ .

Notons  $U_{11}^m = (U_8, U_3)$  le vecteur déplacement d'une maille élémentaire.

A chaque étape  $n$  de rupture, on écrit:

$$(2.24) \quad \begin{bmatrix} R_{8,8} & R_{8,3} \\ R_{3,8} & R_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_8 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_8 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

sous la forme:

$$(2.25) \quad [R_{8,8} - R_{8,3} \cdot R_{3,3}^{-1} \cdot R_{3,8}] \cdot U_8 = F_8 - R_{8,3} \cdot R_{3,3}^{-1} \cdot F_3$$

La matrice  $\begin{bmatrix} R_{8,8} & R_{8,3} \\ R_{3,8} & R_{3,3} \end{bmatrix}$  de dimension  $11 \times 11$  est ainsi condensée en une matrice  $[R_{8,8} - R_{8,3} \cdot R_{3,3}^{-1} \cdot R_{3,8}]$  de dimension  $8 \times 8$ .



- éléments équivalents. Les éléments finis peuvent être des éléments rectangulaires à 4 noeuds ou des éléments triangulaires à 3 noeuds. Ceci nous permet, dans le cas où on connaît a priori les zones dans lesquelles la microfissuration va se développer, de les mailler finement à l'aide du modèle équivalent et de mailler grossièrement avec des éléments finis les zones qui ne s'endommagent pas tout au long de l'histoire du chargement.

#### ORGANIGRAMME DU PROGRAMME NUMÉRIQUE

Nous avons réalisé un programme numérique qui simule la progression de la microfissuration dans un milieu hétérogène aléatoire. L'organigramme ci-dessous montre les principales étapes de ce programme:

Entrée des données :  
 Finesse du maillage  
 Caractéristiques mécaniques  
 Conditions aux limites



Discrétisation de la structure par  
 la méthode des équivalences  
 Calcul de  $R_o^S$  et de  $F$



Simulation des limites à la rupture  $R_i$



calcul de  $\Delta_1 = \min_i \frac{R_i}{f_i[(R_o^S)^{-1}.F]}$



Résolution du problème élastique  
 $R_n^S \cdot U_n^S = \Delta_n \cdot F$

$$\begin{cases} \Delta_{n+1} = \Delta_n \\ R_{n+1}^S = R_n^S - R^{i_o} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_{n+1} = \frac{1}{C_{Max}^n} \\ R_{n+1}^S = R_n^S \end{cases}$$



Calcul de :

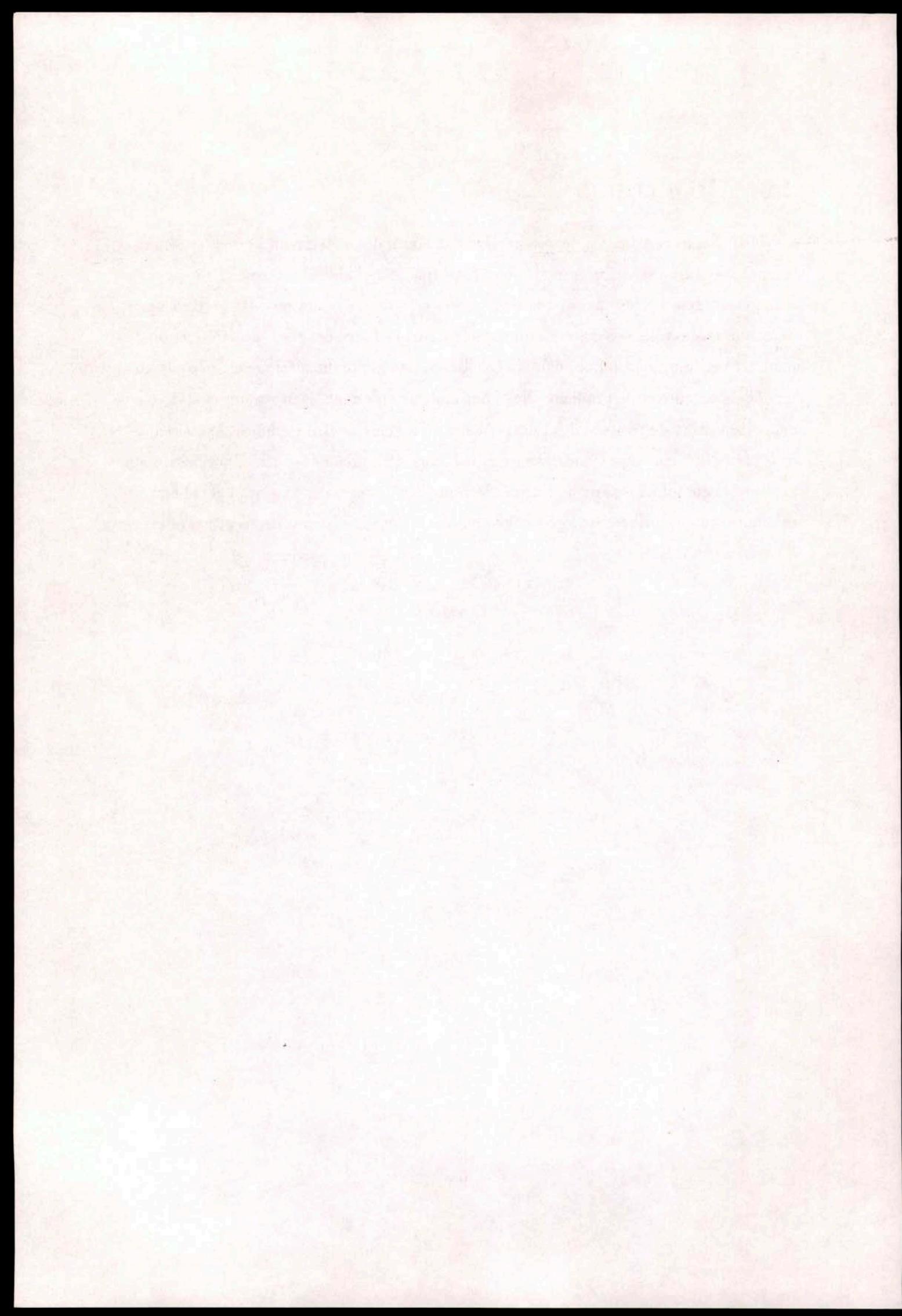
$$C_{Max}^n = \max_i \frac{f_i(U_n^S)}{R_i} = \frac{f_{i_o}(U_n^S)}{R_{i_o}}$$

$C_{Max}^n \geq 1$   
 $\Rightarrow$  rupture de  $i_o$

$C_{Max}^n < 1$   
 $\Rightarrow$  aucune rupture

## 2.6 CONCLUSION

Nous avons construit dans ce chapitre une classe de modèles qui permet de simuler la rupture progressive d'un matériau quasi-fragile à l'aide d'un réseau de poutres élastiques fragiles. Nous avons aussi précisé les critères d'évaluation de la pertinence de ces modèles à savoir, la cohérence du modèle (indépendance des résultats en fonction du maillage) et la prédiction des effets d'échelle observés expérimentalement: effet de volume, de structure et de gradient. Nous nous intéressons dans les prochains chapitres au choix du critère de rupture des poutres ainsi qu'au choix des distributions statistiques des limites à la rupture. Nous construirons alors deux modélisations: l'une locale qui exploite et complète les travaux de la physique des milieux aléatoires et l'autre non locale qui est une synthèse de l'approche non-locale déterministe et des résultats obtenus à l'aide du modèle local.



# Chapitre 3

## Modèle local

### 3.1- INTRODUCTION

### 3.2 DESCRIPTION DU MODÈLE LOCAL

3.2.1: Choix du critère de rupture des poutres

3.2.2: Choix de la distribution statistique des limites à la rupture

### 3.3 MODÈLE LOCAL: $0 < m < 2$

3.3.1: Structures non fissurées

3.3.2: Structures fissurées

3.3.3: Application du modèle local

3.3.4: Conclusion

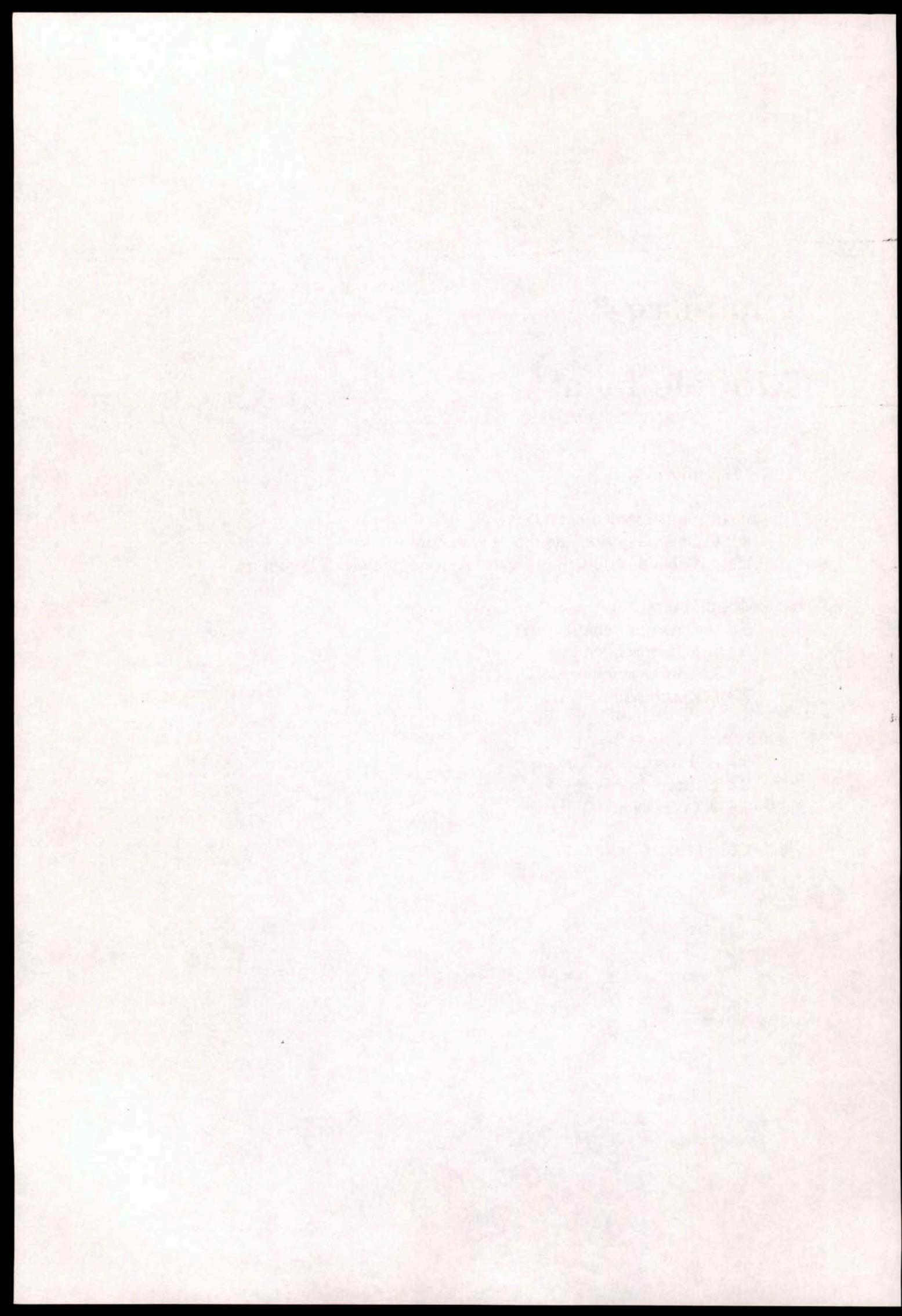
### 3.4 ETUDE DE $m \geq 2$

3.4.1: Structures non fissurées

3.4.2: Structures fissurées

3.4.3: Conclusion

### 3.5- CONCLUSION GÉNÉRALE



### 3.1 INTRODUCTION

Le point de départ du modèle local proposé dans ce chapitre est l'étude numérique effectuée par H.J Hermann, A. Hansen et S. Roux [*Hermann, Hansen et Roux, 1989*]. Nous rappelons que cette étude a porté sur la rupture d'un réseau carré  $L \times L$  de poutres encastrees de longueur unité. Les poutres sont élastiques fragiles avec des limites à la rupture tirées aléatoirement selon une loi de Weibull de paramètre  $m$  avec  $0 < m < 2$ . La conclusion essentielle de cette étude est qu'il existe une loi d'effet d'échelle qui décrit la courbe force - déplacement  $\bar{F} - \bar{\Delta}$  jusqu'à la force maximale supportée par la structure et que cette loi d'échelle s'exprime simplement sous forme d'une loi de puissance :

$$(3.1) \quad \bar{F} \approx L^{\frac{3}{4}} \phi(\bar{\Delta} L^{-\frac{3}{4}}) \text{ pour } 0 < m < 2$$

où  $\phi$  est une fonction indépendante de  $L$ .

De plus, cette loi d'échelle est annoncée comme étant "universelle", c.à.d indépendante du détail de la microstructure. Ceci laisse penser que la courbe force - déplacement calculée par un modèle local basé sur la discrétisation décrite dans le précédent chapitre dépend de la finesse de maillage. En particulier, les courbes force - déplacement obtenues seront homothétiques en fonction du maillage.

Notre démarche va donc consister à renormaliser le critère de rupture en associant à chaque poutre une limite à la rupture qui dépend de sa longueur effective. Nous rejoignons ici la démarche de Rossi [*Rossi et Piau, 1988*] qui introduit dans son modèle stochastique du L.C.P.C des limites à la rupture fonction de la taille de la discrétisation (voir la bibliographie exposée au premier chapitre).

Ce chapitre est composé de trois parties. Dans une première partie, nous précisons le choix du critère de rupture des poutres du réseau équivalent décrit dans le précédent chapitre ainsi que la distribution des limites à la rupture renormalisées. Cette distribution dépend du paramètre  $m$  de la loi de Weibull. Dans la deuxième partie, nous étudierons le modèle pour les valeurs de  $m$  comprises entre 0 et 2. Nous montrerons numériquement qu'avec la renormalisation obtenue à l'aide de la loi (3.1), les

résultats sont indépendants du maillage pour des expériences de traction simple sur des éprouvettes non fissurées. Ceci constitue une confirmation des résultats numériques obtenus par H.J Hermann, A. Hansen et S. Roux [*Hermann, Hansen et Roux, 1989*] avec un autre réseau et un autre critère de rupture. Par ailleurs, nous appliquerons ce modèle à des structures fissurées et nous montrerons, toujours avec la même renormalisation, qu'il y a indépendance des résultats vis à vis du maillage. Quant aux effets d'échelle prédits par ce modèle, ils s'expriment simplement, et de la même façon, pour les effets de volume et de structure à l'aide d'une loi de puissance reliant la contrainte moyenne à la rupture à la taille de la structure  $L$ :  $\sigma_r \sim L^{-\frac{1}{4}}$ . Ceci n'est évidemment pas en accord avec les résultats expérimentaux.

Cette constatation nous a poussé à explorer le modèle pour les valeurs de  $m \geq 2$ . Les résultats numériques constituent la troisième partie de ce chapitre. Dans le cas des structures non fissurées, ces résultats se caractérisent par la mise en évidence d'une longueur critique  $L_c(m)$  au delà de laquelle une éprouvette carrée de taille  $L \geq L_c(m)$  maillée avec des mailles de longueur unité n'exhibe plus d'effet d'échelle de volume lorsqu'elle est soumise à une traction simple. Nous présenterons aussi la loi qui relie  $L_c$  à  $m$ . Nos résultats infirment les simulations de H.J Hermann, A. Hansen et S. Roux pour  $m = 2$  ainsi que certaines conclusions de l'analyse de Flory présentée dans le premier chapitre. Par ailleurs, pour  $m \geq 2$ , nous montrerons comment l'apparition de cette longueur critique  $L_c(m)$  rend problématique la définition d'une règle de renormalisation des seuils de rupture qui assure la cohérence du modèle. En effet, cette renormalisation dépendrait nécessairement de la taille de la structure et conduirait à une absence d'effet d'échelle de volume. Par conséquent, nous abandonnerons dans le cadre de ce modèle l'idée d'une renormalisation et nous imposerons la taille de la maille élémentaire comme une caractéristique du matériau. Nous rejoignons ici la démarche de Bazant qui introduit dans le modèle de la bande multi-fissurée la taille de la discrétisation comme caractéristique du matériau. Nous montrerons alors que dans le cas des structures fissurées, ce modèle prévoit que la M.L.R est applicable pour les structures de grandes tailles ce qui est en accord avec les observations expérimentales. La difficulté apparue pour assurer la cohérence du modèle local  $m \geq 2$  motivera l'introduction du modèle non-local présenté dans le quatrième chapitre.

## 3.2 DESCRIPTION DU MODÈLE LOCAL

### 3.2.1 Choix du critère de rupture des poutres

La méthode des équivalences entre un milieu continu et un milieu discret formé par un réseau des poutres est une méthode énergétique. Il est donc naturel de choisir un critère de rupture énergétique pour les différentes poutres du réseau. Le critère de rupture choisi sera de nature locale, il portera sur l'énergie de déformation de la poutre considérée. L'avantage de ce critère est qu'il ne fait intervenir qu'une seule limite à la rupture  $R_i$  pour chacune des poutres de réseau. Cette limite à la rupture  $R_i$  est tirée aléatoirement selon une loi de Weibull de paramètre  $m$ .

Le milieu discret équivalent contient deux types de poutres qui ne jouent pas le même rôle dans la rupture: les poutres intérieures (obliques) travaillent à la fois en traction-compression et en flexion, puis les poutres extérieures (horizontales et verticales) travaillent uniquement en traction-compression. Par ailleurs, les poutres verticales et horizontales non situées sur le bord de la structure ont une raideur double étant formées par l'assemblage en parallèle de deux poutres de même raideur. Par conséquent, le critère de rupture sera normalisé de manière à ce que les différentes poutres du réseau jouent le même rôle dans la rupture. Pour ce faire, nous nous baserons sur l'idée que pour une structure homogène (même limite à la rupture pour toutes les poutres du réseau) l'application d'une dilatation uniforme sur les bords de la structure aura pour conséquence de casser toutes les poutres du réseau au même instant.

Le critère de rupture choisi s'écrit simplement sous la forme:

$$(3.2) \quad \frac{W_i}{W_i^0} \geq R_i^2$$

où:

- $W_i$  est l'énergie de déformation de la poutre  $i$
- $W_i^0$  est un paramètre de normalisation.
- $R_i$  est la limite à la rupture de la poutre  $i$

La fonction  $f_i$  est donc égale à:

$$(3.3) \quad f_i = \sqrt{\frac{W_i}{W_i^o}}$$

où  $W_i^o$  est l'énergie élastique dans la poutre  $i$  soumise à une dilatation unité. Elle s'exprime en fonction de la raideur  $\rho_i$  de la poutre  $i$  par:

$$(3.4) \quad W_i^o = \frac{1}{2} \cdot \rho_i$$

Nous noterons en particulier que  $f_i$  est homogène à une déformation.  $f_i$  est une fonction du champ de déplacement positivement homogène de degré un.

Nous vérifions facilement que pour une structure homogène  $R_i = R$ , soumise à une dilatation uniforme décrite par  $(\xi(\underline{x}) = \frac{\Delta}{L} \cdot \underline{x}, \forall \underline{x} \in \partial\Omega$  où  $L$  est la taille de la structure), le critère sera atteint simultanément dans toutes les poutres du réseau pour un chargement  $\Delta = R.L$ .

### 3.2.2 Choix de la distribution statistique des limites à la rupture

Pour assurer la cohérence du modèle, et compte tenu des études effectuées par H.J. Hermann, A. Hansen et S. Roux [*Hermann, Hansen et Roux, 1989*], nous choisirons une distribution des limites à la rupture des poutres qui dépend de la finesse du maillage de telle sorte que la limite à la rupture d'une poutre augmente quand sa longueur diminue.

Ainsi, nous choisirons comme distribution des limites à la rupture  $R_i$  une loi de Weibull de paramètre  $0 < m < 2$  renormalisée par un paramètre  $R^{max}(l)$  fonction décroissante de la taille de la maille,  $l$ .

$$(3.5) \quad Prob(R_i \leq t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{R^{max}(l)}\right)^m & 0 < t < R^{max}(l) \\ 1 & t \geq R^{max}(l) \end{cases}$$

La forme de la loi reliant  $R^{max}$  à  $l$  doit être identifiée de façon à assurer la cohérence

du modèle.

### 3.3 MODÈLE LOCAL: $0 < m < 2$

Pour assurer la cohérence du modèle, il faut que la courbe  $(\bar{F} - \bar{\Delta})(l, L)$  soit indépendante de  $l$ , ainsi que la force à la rupture moyenne  $\bar{F}_r(l, L)$ . D'après la conjecture d'universalité de la loi (3.1), il est légitime de penser que, pour  $0 < m < 2$ , seule une loi reliant  $l$  et le paramètre de renormalisation  $R^{max}$  de la forme:

$$(3.6) \quad R^{max}(l) = R^{max}(1) \cdot l^{-\frac{1}{4}}$$

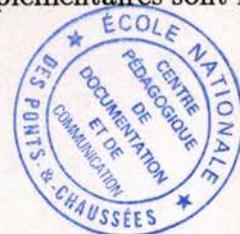
peut assurer la cohérence du modèle.

De plus, et toujours d'après les résultats de H.J Hermann, A. Hansen et S. Roux [Hermann, Hansen et Roux, 1989], nous nous attendons à ce que la cohérence du modèle ne soit assurée que jusqu'au pic de la force. En effet, après le pic de la force, et pour des maillages fins on devrait avoir une rupture de type fragile et la courbe  $(\bar{F} - \bar{\Delta})(l, L)$  devrait s'effondrer quand la finesse du maillage augmente. Si on adopte (3.6) comme règle de renormalisation, le modèle local proposé dépend alors de 4 paramètres supposés être des caractéristiques du matériau:  $E$  le module d'Young,  $\nu$  le coefficient de Poisson qui sera pris égal à 0.2 dans toutes les simulations numériques,  $m$  avec  $0 < m < 2$  l'exposant de Weibull et  $R^{max}(1)$  un paramètre multiplicatif qu'on prendra égal à un.

L'objet du prochain paragraphe est de présenter des résultats numériques utilisant (3.6) qui confirment la conjecture d'universalité sur une expérience de traction simple pour plusieurs valeurs de  $m$  avec  $0 < m < 2$ .

#### 3.3.1 Structures non fissurées

Nous considérons une structure carrée de taille  $L$  égale à l'unité soumise à une traction simple. On impose à cette structure, un déplacement vertical croissant,  $\Delta$ , sur le bord supérieur alors que le déplacement vertical du bord inférieur est imposé nul (Figure 3.1). Par ailleurs, toutes les données statiques complémentaires sont nulles sur le bord.



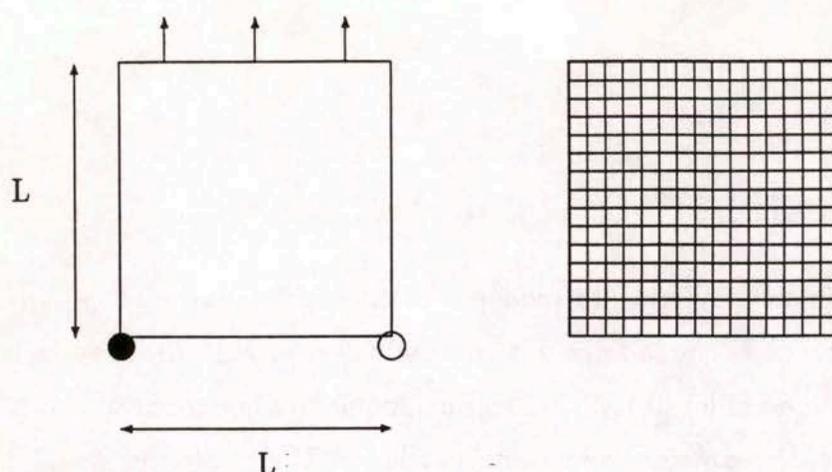


Figure 3.1: Structure carrée soumise à une traction simple

• **Cohérence du modèle**

Nous commençons par vérifier la cohérence du modèle utilisant la renormalisation (3.6) en faisant varier l'orientation du maillage. Ainsi, trois orientations du maillage:  $\beta = 0^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$  et  $\beta = 45^\circ$  ont été testées, la finesse du maillage étant fixée à  $(\frac{L}{l} = 40)$ . Puis, nous avons vérifié la cohérence du modèle en faisant varier la finesse du maillage. Cinq finesesses de maillage:  $\frac{L}{l} = 10, 20, 40, 60$  et  $80$  ont été testées avec une orientation  $\beta = 0^\circ$  pour plusieurs valeurs de  $m$  avec  $0 < m < 2$ .

Les résultats sont synthétisés dans la figure (Figure 3.2) et les tableaux (Tableau 3.1 et 3.2). Ils montrent en effet que la règle de renormalisation (3.6) assure la cohérence du modèle jusqu'au pic de la courbe force - déplacement.

Après avoir vérifié la cohérence du modèle dans le cas des structures non fissurées, nous nous intéressons dans le prochain paragraphe à l'étude des effets d'échelle de volume.

$m$	$\beta$	$\bar{F}_r$	Nb. Sim.
1.	$0^\circ$	4959	40
	$30^\circ$	4929	40
	$45^\circ$	4937	40

Tableau 3.1: Indépendance de  $\bar{F}_r$  en fonction de l'orientation de maillage

m	$\frac{L}{l}$	$\bar{F}_r$	Nb. Sim.
0.5	10	1661	100
	20	1580	50
	40	1622	40
	60	1679	15
	80	1611	5
1.	10	5104	100
	20	4917	50
	40	4959	40
	60	5010	15
	80	4950	5
1.5	10	8102	100
	20	7916	50
	40	7929	40
	60	8017	15
	80	7932	5

Tableau 3.2: Indépendance de  $\bar{F}_r$  en fonction de la finesse de maillage

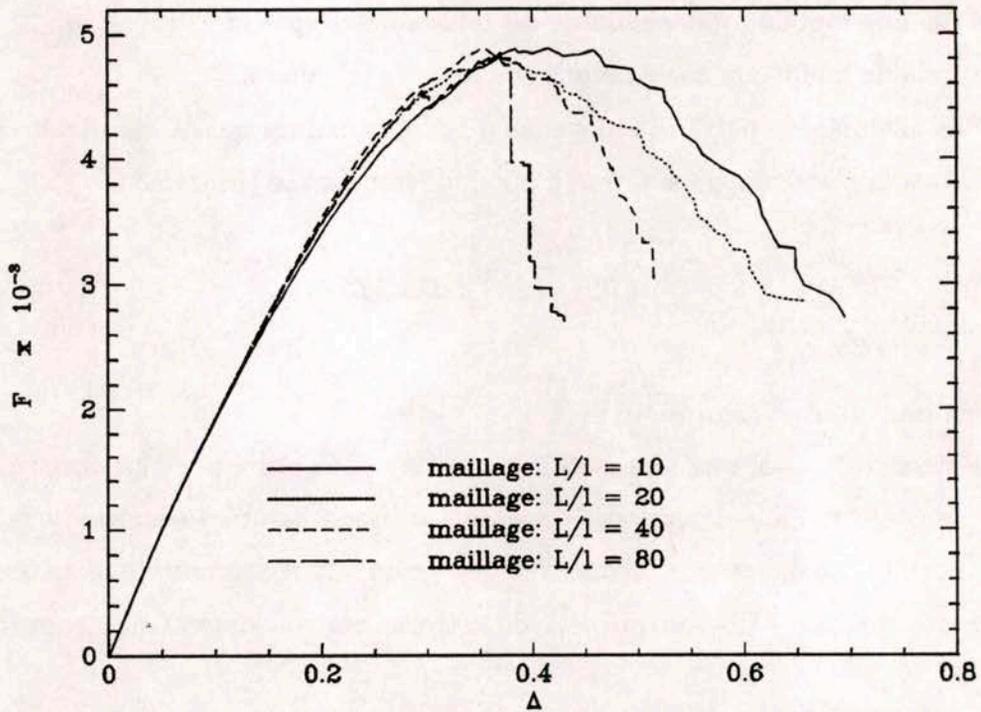


Figure 3.2: Courbe  $(\bar{F} - \bar{\Delta})$  pour différentes finesesses de maillage:  $m = 1$

• **Effet d'échelle de volume**

La cohérence du modèle se traduit par:

$$(3.7) \quad (\bar{F} - \bar{\Delta})(l, L) \approx (\bar{F} - \bar{\Delta})(1, L) \approx (\bar{F} - \bar{\Delta})(L)$$

Or, une analyse immédiate montre que la cohérence obtenue avec la renormalisation (3.6) est équivalente à la loi d'échelle (3.1) qui s'écrit:

$$(3.8) \quad \bar{F}(1, L) \approx L^{\frac{3}{4}} \phi(\bar{\Delta} \cdot L^{-\frac{3}{4}})$$

Nous en déduisons que l'effet d'échelle de volume s'écrit sous la forme d'une loi de puissance:

$$(3.9) \quad \bar{F}(L) \approx L^{\frac{3}{4}} \phi(\bar{\Delta} \cdot L^{-\frac{3}{4}})$$

où  $\phi$  est une fonction indépendante de  $L$  paramétrée par  $m$  avec  $0 < m < 2$ . Cette loi n'est valable que jusqu'au maximum de la force (Figure 3.2)

Par ailleurs, la contrainte moyenne à la rupture ainsi que la déformation moyenne à la rupture s'écrivent sous forme d'une loi de puissance (Figure 3.3):

$$(3.10) \quad \sigma_r(L) \sim L^{-\frac{1}{4}} \quad \text{et} \quad \epsilon_r(L) \sim L^{-\frac{1}{4}}$$

et ceci pour toute valeur de  $m$  avec  $0 < m < 2$ .

En conclusion, la renormalisation du critère de rupture nous a permis d'assurer la cohérence du modèle dans le cas des structures non fissurées soumises à une traction simple. Cette cohérence n'est assurée que jusqu'aux maximum de la force. En effet, pour des maillages fins, et au delà de cette valeur, on obtient une rupture de type fragile.

Ceci constitue une confirmation de la validité de la renormalisation (3.6) avec un autre réseau et un autre critère. On vérifie alors l'intuition des physiciens sur

l'indépendance de la loi (3.1) en fonction du détail de la microstructure.

Outre cette confirmation, notre apport ici est de nature méthodologique puisque nous reformulons (3.1) de manière à assurer en premier lieu la cohérence du modèle puis à estimer les effets d'échelle.

Dans ce qui suit, nous allons appliquer ce modèle à des structures fissurées afin de tester la validité de la loi (3.1) dans ce cas.

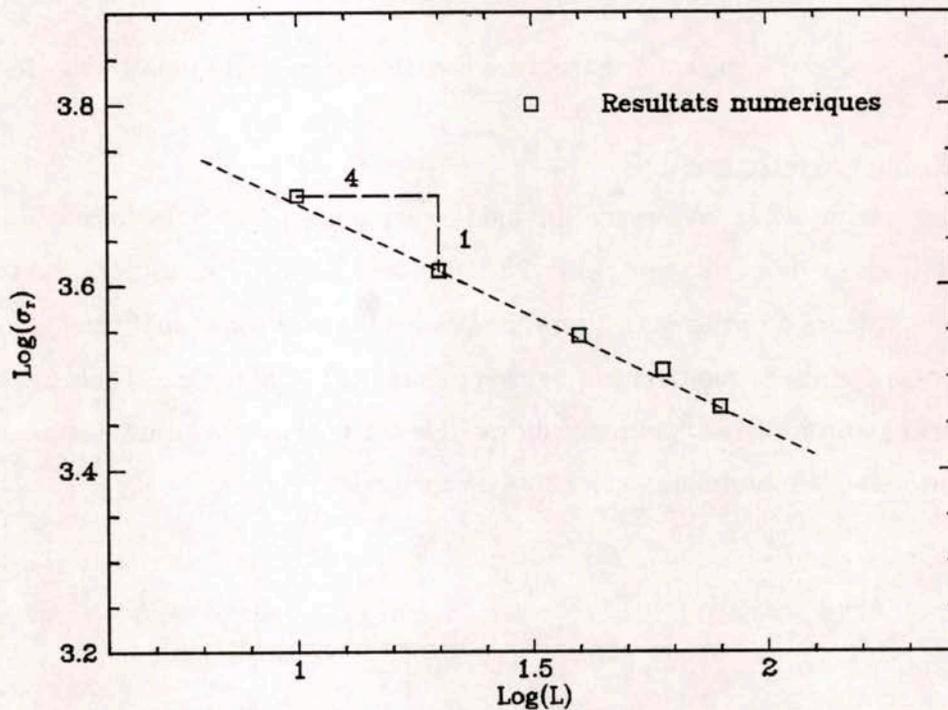


Figure 3.3: Courbes  $\text{Log}(\sigma_r(L)) - \text{Log}(L)$  pour  $m = 1$

### 3.3.2 Structures fissurées

Nous considérons une structure carrée fissurée de taille  $L$  égale à l'unité contenant une fissure rectiligne de longueur  $a = 0.2L$ . Cette structure est chargée en mode I (Figure 3.4).

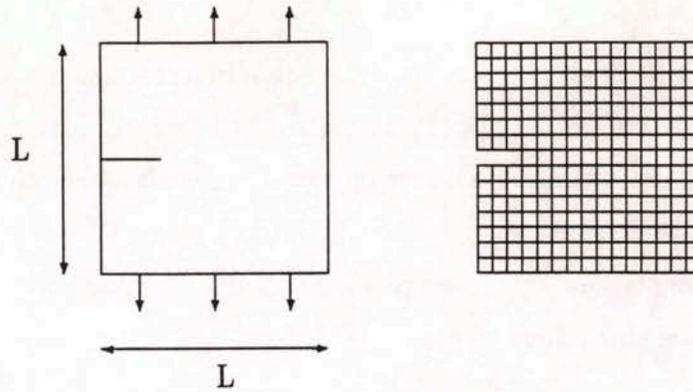


Figure 3.4: Structure fissurée chargée en mode I

• **Cohérence du modèle**

Nous vérifions la cohérence du modèle en faisant varier la finesse du maillage. Quatre finesesses de maillages:  $\frac{L}{l} = 20, 40, 60$  et  $80$  ont été testées. Nous testerons plusieurs valeurs de  $m$  avec  $0 < m < 2$ . Les résultats obtenus confirment la cohérence du modèle comme le montrent la figure (Figure 3.5) et le tableau (Tableau 3.3).

Après avoir vérifié la cohérence du modèle dans le cas des structures fissurées, nous nous intéressons maintenant aux effets d'échelle de structure.

$m$	$\frac{L}{l}$	$\bar{F}_r$	Nb. Sim.
1.	20	2380	40
	40	2314	30
	60	2270	20
	80	2310	5

Tableau 3.3: Indépendance de  $\bar{F}_r$ , en fonction de la finesse de maillage

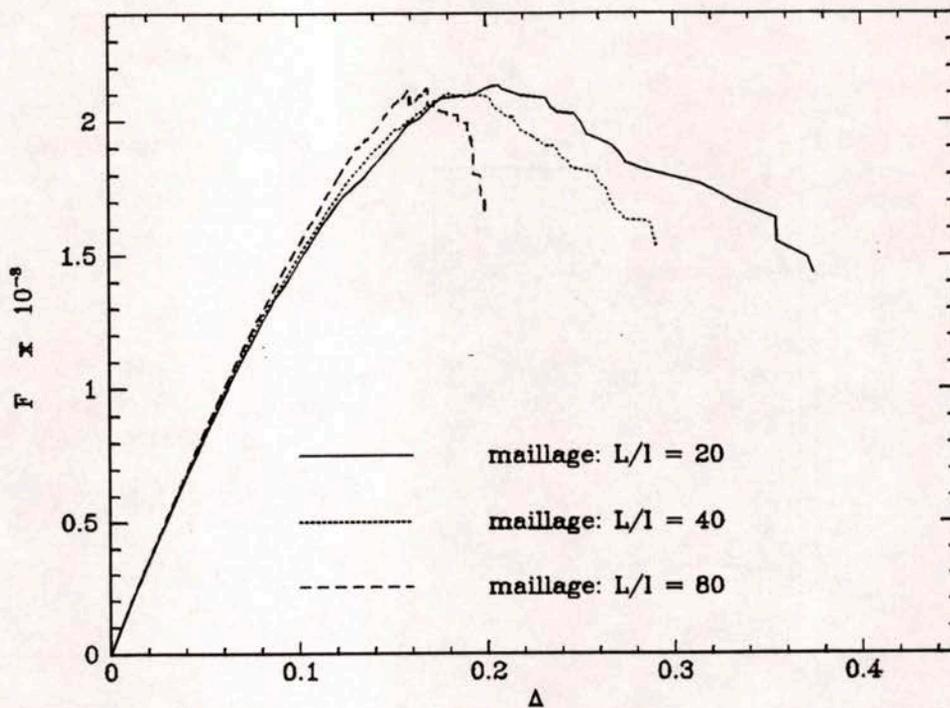


Figure 3.5: Courbe  $(\bar{F} - \bar{\Delta})$  pour différentes finesses de maillage:  $m = 1$

• **Effet d'échelle de structure**

Une analyse similaire à celle présentée pour le cas de la traction simple nous permet d'écrire l'effet d'échelle de structure sous la forme de la même loi de puissance:

$$(3.11) \quad \bar{F}(L) \approx L^{\frac{3}{4}} \psi(\bar{\Delta} \cdot L^{-\frac{3}{4}})$$

où  $\psi$  est une fonction indépendante de  $L$  paramétrée par  $m$  avec  $0 < m < 2$ . Cette loi n'est valable que jusqu'au maximum de la force.

Par ailleurs, la contrainte moyenne à la rupture ainsi que la déformation moyenne à la rupture s'écrivent sous forme d'une loi de puissance:

$$(3.12) \quad \sigma_r(L) \sim L^{-\frac{1}{4}} \text{ et } \epsilon_r(L) \sim L^{-\frac{1}{4}}$$

et ceci pour tout de  $m$  avec  $0 < m < 2$ .

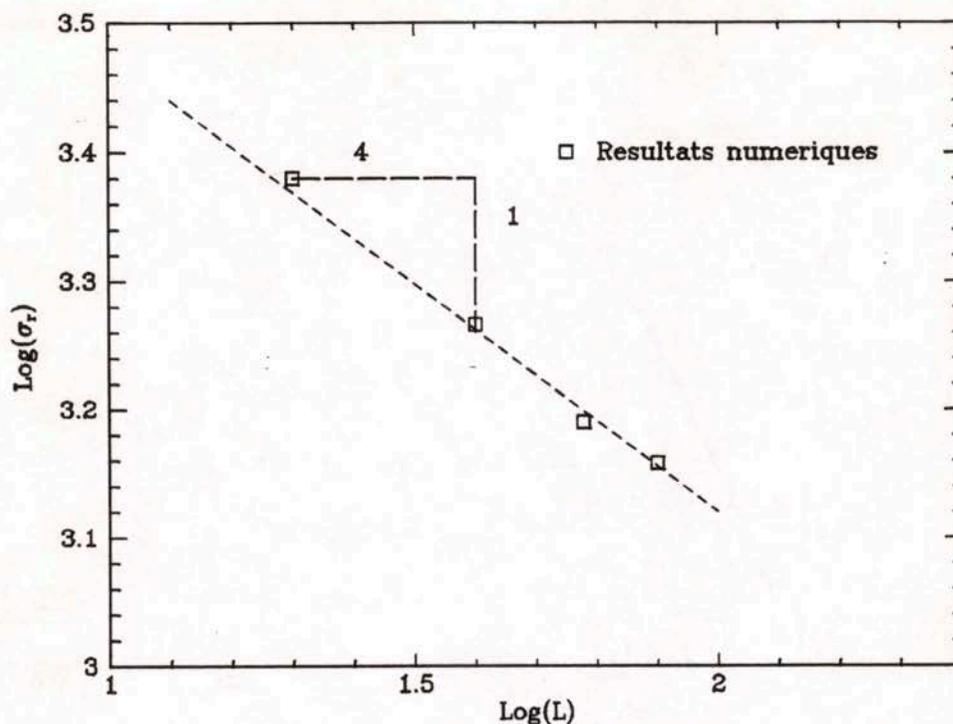


Figure 3.6: Courbes  $\text{Log}(\sigma_r(L)) - \text{Log}(L)$  pour  $m = 1$

En résumé, les simulations sur les structures fissurées et non fissurées montrent que la cohérence du modèle local utilisant la renormalisation (3.6) est assurée indépendamment de la structure et du chargement (chargement à un paramètre) jusqu'au maximum de la force. En effet, pour des maillages fins, et au delà de cette valeur, on obtient une rupture de type fragile.

Quant aux effets d'échelle, ils sont exprimés indépendamment de la finesse du maillage par la loi (3.1) qui est ainsi généralisée au cas des structures fissurées.

Dans ce qui suit, nous allons montrer que la cohérence du modèle local est assurée dans le cas d'un autre critère de rupture et que le modèle permet de faire un calcul prévisionnel assez satisfaisant concernant la contrainte à la rupture et la partie pré-pic de la courbe force - déplacement.

### 3.3.3 Application du modèle local

Dans cette partie, nous simulons la rupture de trois poutres entaillées (Figure 3.7) soumises à une flexion trois points. Les résultats expérimentaux font partie d'une

campagne d'essais internationale [Hillerborg, 1985] pour l'étude des effets d'échelle de structure. La figure (Figure 3.7) résume les caractéristiques géométrique des poutres testées et les propriétés du matériau telles qu'elles ont été fournies [Horvath et Persson, 1984].

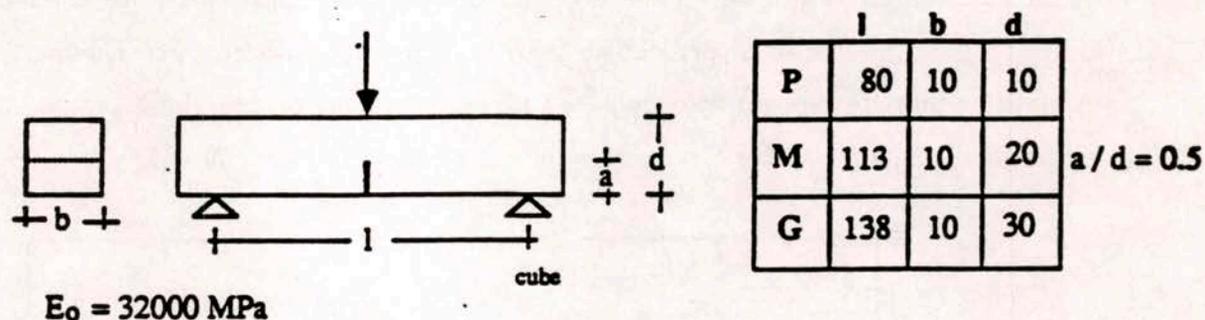


Figure 3.7: Structure en flexion trois points

Dans cette partie nous adoptons comme critère de rupture:

$$(3.13) \quad \text{si } \frac{W_i}{W_i^o} \geq R_i^2 \text{ et } F(i) \geq 0 \text{ alors la poutre } i \text{ casse}$$

où:

- $W_i$  est l'énergie de déformation de la poutre  $i$
- $F(i)$  est l'effort normal dans la poutre  $i$

et

$$(3.14) \quad W_i^o = \frac{1}{2} \cdot \rho_i$$

où  $\rho_i$  est la raideur de la poutre  $i$ .

Les limites à la rupture sont tirées selon la loi de Weibull et normalisées selon (3.6):

$$(3.15) \quad R^{max}(l) = R^{max}(1).l^{-\frac{1}{4}}$$

Nous avons vérifié la cohérence du modèle pour plusieurs valeurs de  $m$  avec  $0 < m < 2$ .

L'identification des paramètres  $m$  et  $R^{max}(1)$  du modèle se fait par simulations numériques et calage sur la courbe  $F - \Delta$  de la plus petite structure  $P$ . Une fois ces paramètres identifiés, on simule les structures de plus grandes tailles  $M$  et  $G$  et on vérifie si le modèle local permet de faire un calcul de structure prévisionnel. Les simulations numériques ont été effectuées en déformations planes. Le calage à partir des résultats expérimentaux sur la structure  $P$  a fourni la valeur  $m = 1$ .

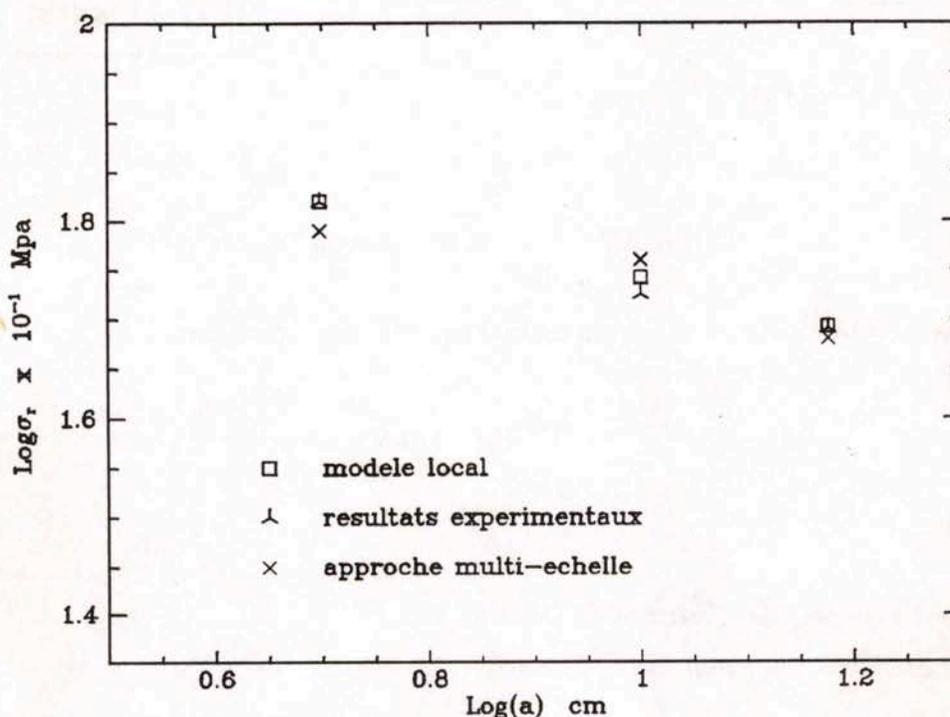


Figure 3.8: Comparaison des réponses globales expérimentales et numériques

Ainsi, malgré sa simplicité, le modèle local donne des résultats assez satisfaisants concernant la contrainte à la rupture et la partie pré-pic de la courbe force - déplacement. Par contre, les parties post-pic des courbes ne peuvent pas être décrites à l'aide de ce modèle.

### 3.3.4 Conclusion

La renormalisation du critère de rupture nous a permis d'assurer l'indépendance des résultats en fonction du maillage aussi bien pour les structures non fissurées que pour les structures fissurées. Nous avons aussi retrouvé les mêmes lois d'échelle de volume que celle qui ont été obtenues par H.J.Hermann et al (3.1) dans le cas d'un réseau de poutres encastrees. Ceci confirme que les effets d'échelle obtenus ne dépendent pas du détail de la microstructure. Nous avons ensuite généralisé cette étude au cas des structures fissurées et nous avons montré que l'effet d'échelle de structure obtenu avec cette modélisation locale s'écrit sous la même forme que l'effet d'échelle de volume. Cependant le modèle local n'est pas satisfaisant pour plusieurs raisons:

1- Les résultats numériques montrent que l'effet de volume s'écrit sous la forme d'une loi de puissance en  $L^{-\frac{1}{4}}$ . Par conséquent, ce modèle ne permet pas de rendre compte de la variation de cet effet d'échelle en fonction de la compacité du béton conformément aux résultats expérimentaux de Wu [Wu, 1991]. En effet, le seul paramètre de ce modèle destiné à modéliser l'hétérogénéité du matériau est le paramètre  $m$ . L'effet d'échelle semble être indépendant de la variation de ce paramètre. Nous montrerons dans le quatrième chapitre que pour rendre compte de la variation de cet effet d'échelle, nous aurons besoin d'introduire un paramètre supplémentaire pour modéliser l'hétérogénéité du matériau.

2- L'étude numérique a montré que l'effet d'échelle de structure s'écrit aussi comme une loi de puissance en  $L^{-\frac{1}{4}}$ . Cependant, pour des structures de grandes tailles, on devrait s'attendre à ce que la M.L.R soit applicable conformément aux observations expérimentales. Par conséquent, l'effet d'échelle doit être en  $L^{-\frac{1}{2}}$  pour des structures de grandes tailles. Ce modèle ne permet donc pas de rendre compte de la variation de l'effet d'échelle en fonction de la taille de la structure.

3- La loi d'échelle (3.1) n'est valable que jusqu'au pic de la force. Par conséquent, ce modèle ne permet pas de décrire de manière satisfaisante la partie post - pic de la courbe  $(\bar{F} - \bar{\Delta})(L)$ :

4- Le modèle peut être adopté pour étudier les effets d'échelle de volume dans le cas de structures à très grand désordre. En effet, nous montrerons dans le quatrième

chapitre que l'effet d'échelle de volume s'écrit toujours comme une loi de puissance:  $\sigma_r \sim L^{-\alpha}$  avec  $\alpha \leq \frac{1}{4}$  et que  $\alpha = \frac{1}{4}$  est valable dans le cas de structures à très grand désordre dans un sens que nous définirons.

Par ailleurs, ce modèle permet de modéliser d'une manière assez satisfaisante les effets d'échelle de structure dans le cas où ni la M.L.R. ni un critère ultime ne sont applicables comme le montre l'exemple d'application.

Dans ce qui suit, nous allons étendre l'étude du modèle local au cas  $m \geq 2$ .

### 3.4 ETUDE DE $m \geq 2$

Le but de cette partie est d'étendre l'étude précédente au cas  $m \geq 2$ . Nous simulerons les limites à la rupture  $R_i$  aléatoirement selon une distribution de Weibull de paramètre  $m$ :

$$(3.16) \quad \text{Prob}(R_i \leq t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{R^{\max}(l)}\right)^m & 0 < t < R^{\max}(l) \\ 1 & t \geq R^{\max}(l) \end{cases}$$

avec  $m \geq 2$  et  $R^{\max}(l) > 0$ .

A notre connaissance, le cas  $m \geq 2$  n'a pas fait l'objet d'une étude numérique. Ainsi, ne connaissant pas a priori la forme des lois d'échelle dans ce cas, nous ne normaliserons pas les limites à la rupture et nous prendrons:

$$(3.17) \quad R^{\max}(l) = R^{\max}(1)$$

Nous avons effectué des simulations numériques pour différentes valeurs de  $m \geq 2$ . Nous avons fixé la taille de la maille élémentaire à un ( $l = 1$ ) et nous avons augmenté la taille de la structure,  $L$ . Notons ici que  $L$  ne prend que des valeurs entières ( $L \in \mathbf{N}^*$ ). Les résultats obtenus sont représentés dans le diagramme  $\text{Log}(\sigma_r) - \text{Log}(L)$ .

#### 3.4.1 Structures non fissurées

Pour une structure carrée non fissurée soumise à une traction simple, nous trouvons numériquement que,  $m \geq 2$  étant fixé, les points de coordonnées  $(x, y) = (\text{Log}(L), \text{Log}(\sigma_r(L)))$  avec  $L \in \mathbf{N}^*$  sont situés sur une ligne brisée qui part du point  $(0, \text{Log}(\sigma_r(1)))$  avec une pente  $-\frac{1}{4}$  jusqu'à atteindre un point  $(\text{Log}(L_c), \text{Log}(\sigma_r(L_c)))$  à partir duquel la pente devient nulle comme le montre la figure (Figure 3.9). Des résultats similaires sont observés sur la courbe  $(\text{Log}(L), \text{Log}(\epsilon_r(L)))$ .

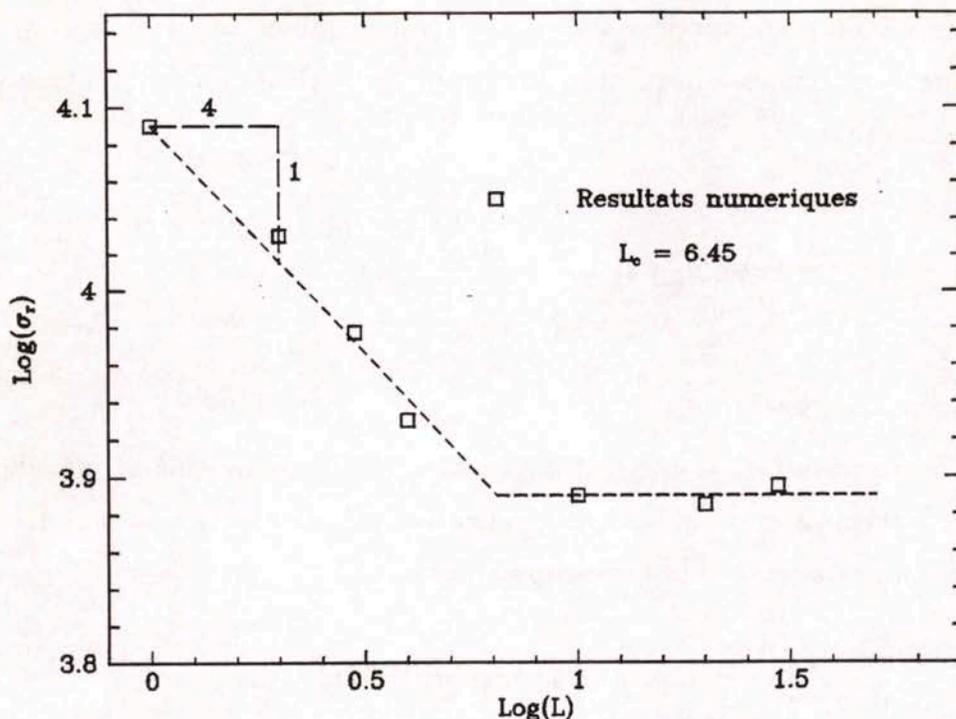


Figure 3.9: Courbes  $\text{Log}(\sigma_r) - \text{Log}(L)$  pour  $m = 3$

Autrement dit, ces courbes mettent en évidence une longueur critique  $L_c$  qui dépend de  $m$  pour laquelle il y a un changement de comportement. Au delà de  $L_c$ , la structure n'exhibe plus d'effet d'échelle:

$$(3.18) \quad \begin{cases} L \leq L_c & \sigma_r \sim L^{-\frac{1}{4}} \\ L \geq L_c & \sigma_r \sim L_c^{-\frac{1}{4}} \end{cases}$$

La taille critique  $L_c$  est une fonction décroissante de  $m$ . Précisons que la validité de cette description et de cette interprétation est restreinte au cas où  $m$  n'est pas trop grand car il est clair que dans ce cas la structure est déterministe et  $\text{Log}(\sigma_r(1)) = \text{Log}(\sigma_r(2))$ . Ainsi, la pente  $-\frac{1}{4}$  de départ n'existe plus et la longueur  $L_c$  n'a plus de sens. Dans toute la suite quand on parlera de  $m \geq 2$  cela signifiera que  $m$  est suffisamment petit pour qu'un effet de volume soit observé.

L'interprétation que nous donnons de ces résultats numériques est que les points

théoriques ( $\text{Log}(L), \text{Log}(\sigma_r(L))$ ) seraient situés sur une courbe régulière décroissante avec  $L$  ayant une tangente de pente  $-\frac{1}{4}$  en  $L = 1$  et tendant asymptotiquement vers son minimum pour  $L = +\infty$ . Le  $L_c$  serait ainsi défini par l'intersection de cette tangente et de cette asymptote. Si tel était le cas, nos simulations numériques signifieraient que la courbe théorique est suffisamment collée à la ligne brisée formée par la tangente et l'asymptote pour que la courbe numérique s'y identifie.

### Remarque

Dans toute la suite, quand on parlera d'une taille critique, nous lui donnerons implicitement le même sens que celui qu'on vient de définir ; c.à.d l'intersection de la tangente en  $L = 1$  et de l'asymptote en  $L = +\infty$ .

Nous avons tracé les variations de  $\text{Log}(L_c)$  en fonction de  $m$ . Nous trouvons que cette courbe est une droite de pente négative pour  $m \geq 2$ . Cette pente a été identifiée en s'appuyant sur des valeurs de  $m = 3, 4, 5, 6$  et  $7$

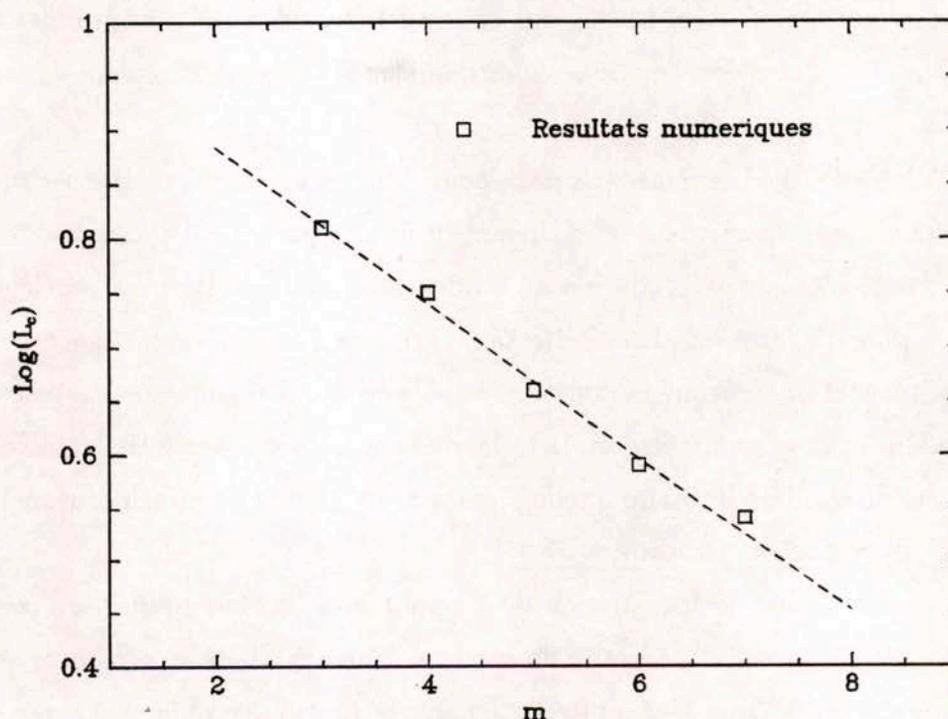


Figure 3.10: Courbe  $\text{Log}(L_c) - m$

Nous en déduisons que  $L_c$  s'écrit sous la forme:

$$(3.19) \quad L_c = A.B^{-m} \text{ pour } m \geq 2$$

avec  $A$  et  $B$  sont des constantes indépendantes de  $m$ . Nous trouvons  $A = 10.83$  et  $B = 1.168$ .

La relation (3.19) va nous permettre de montrer numériquement qu'on a un changement de régime pour  $m = 2$ . En effet, si on avait le même comportement pour  $m < 2$  que pour  $m \geq 2$ , la relation (3.19) serait valable et nous aurait permis de déterminer, pour une valeur de  $m$  donnée inférieure à 2, la taille critique  $L_c$  à partir de laquelle on aurait absence d'effet d'échelle. Ainsi, pour  $m = 1.9$ , nous aurions obtenu  $L_c = 8.06$ . Il suffit alors de simuler deux structures de tailles supérieures à  $L_c$  et de vérifier si on a un effet d'échelle. Pour  $m = 1.9$ , nous avons simulé deux structures de tailles respectives  $L_1 = 10$ ,  $L_2 = 20$  et  $L_3 = 30$ . On trouve que  $\sigma_r(L_1).L_1^{-\frac{1}{4}} \approx \sigma_r(L_2).L_2^{-\frac{1}{4}} \approx \sigma_r(L_3).L_3^{-\frac{1}{4}}$ . Par conséquent, pour  $m = 1.9$  et pour des structures de tailles plus grandes que  $L_c$ , on a toujours un effet d'échelle. Nous confirmons qu'il y a un changement de régime pour  $m = 1.9$ .

Nous avons effectué la même opération pour différentes valeurs de  $m$  avec  $m < 2$  et les résultats obtenus confirment un changement de comportement pour  $m < 2$ .

En conclusion, nous avons mis en évidence une taille critique à partir de laquelle il n'y a plus d'effet d'échelle. Cette taille critique  $L_c$  a une importance considérable car elle permet de prévoir, en fonction du désordre qui régit dans la structure et qui est modélisé par le paramètre  $m$ , la taille de la structure à partir de laquelle celle-ci se comporte de manière similaire à celle prédit par un modèle de milieu continu homogène.

#### • Cohérence du modèle $m \geq 2$

La connaissance de la variation de  $L_c$  pour  $m \geq 2$  nous permet de normaliser le critère afin d'assurer la cohérence du modèle. Une analyse simple montre que la seule renormalisation possible des limites à la rupture  $R_i$  qui assure la cohérence du modèle s'écrit de la manière suivante:

$$(3.20) \quad \begin{cases} R^{max}(l) = R^{max}(l_c) \cdot \left(\frac{l}{l_c}\right)^{-\frac{1}{4}} & \text{pour } l \geq l_c \\ R^{max}(l) = R^{max}(l_c) & \text{pour } l \leq l_c \end{cases}$$

où  $l$  est la finesse de la discrétisation et  $l_c$  est une taille de discrétisation critique:

$$(3.21) \quad l_c = \frac{1}{A} \cdot B^m \cdot L \quad \text{pour } m \geq 2$$

#### • Effet d'échelle de volume

Il est aisé de vérifier qu'avec la renormalisation (3.20) et (3.21), il y a absence d'effet d'échelle de volume. Ceci nous met dans le dilemme suivant: assurer la cohérence du modèle ou rendre compte des effets d'échelle de volume. Ainsi, quand on parlera d'effet d'échelle du modèle local  $m \geq 2$ , ceci signifiera qu'on impose la taille de la maille élémentaire comme une caractéristique du matériau et qu'on n'effectue pas de renormalisation. Le modèle local avec  $m \geq 2$  est alors analogue au modèle de la bande multifissurée dans le cas des structures non fissurées. Il permet, en plus, de rendre compte des effets d'échelle de volume. Cet effet de volume s'écrit alors:

$$(3.22) \quad \begin{cases} L \leq L_c & \bar{F}(L) \approx L^{\frac{3}{4}} \phi(\bar{\Delta} \cdot L^{-\frac{3}{4}}) \\ L \geq L_c & \bar{F}(L) \approx L_c^{\frac{3}{4}} \phi(\bar{\Delta} \cdot L_c^{-\frac{3}{4}}) \end{cases}$$

où  $\phi$  est une fonction indépendante de  $L$ .

En conclusion, l'étude du cas  $m \geq 2$ , a montré que pour  $m = 2$ , on a un changement de régime. Ce résultat conforte l'approche de Flory. Cependant, pour  $m \geq 2$  cette approche prévoit l'existence d'une taille critique à partir de laquelle on a un régime diffus semblable au régime qu'on obtient avec  $m < 2$ ; ce qui laisse penser qu'au delà de cette taille on devrait retrouver les mêmes effets d'échelle que pour  $m < 2$ . Or, les simulations numériques ont montré que tel n'est pas le cas. En effet, pour des structures de tailles plus grandes qu'une taille critique  $L_c$ , on a absence d'effet d'échelle. Par contre, pour des structures de tailles plus petites que  $L_c$ , on a la même loi d'effet d'échelle que pour  $m < 2$ .

L'étude numérique montre aussi que  $L_c$  décroît en fonction de  $m$  contrairement à la taille critique (1.42) trouvée à l'aide de l'approche de Flory.

Par ailleurs, ces résultats infirment les résultats numériques de Herman et al pour le cas  $m = 2$  qui prévoient aussi une loi d'échelle en puissance pour le cas  $m = 2$ . La loi prévue s'écrit:  $\sigma_r \sim L^{-0.15}$ . Nous pensons que cette erreur est due à l'approximation d'une ligne brisée par une droite de pente médiane.

L'existence d'une taille critique à partir de laquelle il n'y a absence d'effet d'échelle est confortée par l'expérience de Wu [Wu, 1991] sur des bétons de résistance à la compression différentes. Cette expérience montre, en effet, que pour le B.T.H.R, on obtient la même contrainte à la rupture pour  $\Phi = 6 \text{ cm}$  et  $\Phi = 15 \text{ cm}$ . Ceci pourrait indiquer l'apparition d'un palier mais il reste à le confirmer expérimentalement car seules trois valeurs de  $\Phi$  ont été testées dans [Wu, 1991]. Nous pensons que dans le cas des matériaux réels, on a  $m \geq 2$ . Cette présomption trouve son origine dans les simulations effectuées sur des structures fissurées et que nous présentons maintenant.

### 3.4.2 Structures fissurées

Dans ce qui suit, nous allons appliquer le modèle local avec  $m \geq 2$  à des structures fissurées. Nous imposerons la taille de la maille élémentaire comme une caractéristique du matériau qui modélise la taille de ses hétérogénéités. Nous aboutissons alors à un modèle analogue au modèle de la bande fissurées. Par conséquent, nous ne normaliserons pas les seuils de rupture. Nous prendrons:

$$(3.23) \quad R^{max}(l) = R^{max}(1)$$

Nous avons effectué des simulations numériques sur des structures fissurées chargées en mode I. Nous avons fixé la taille de la maille élémentaire à un et nous avons augmenté la taille de la structure.

Les résultats montrent que la courbe  $\text{Log}(\sigma_r(L)) - \text{Log}(L)$  (ainsi que  $\text{Log}(\epsilon_r) - \text{Log}(L)$ ) admet une pente à l'origine  $-\frac{1}{4}$  et une asymptote de pente  $-\frac{1}{2}$ . Cette courbe met en évidence une zone de non linéarité conformément aux observations expérimentales et montre que la M.L.R est applicable pour des structures de grandes

tailles. Nous remarquons aussi que, pour des structures de "petites tailles", il existe un effet d'échelle semblable à l'effet d'échelle de volume qui s'écrit sous la forme  $\sigma_r \sim L^{-\frac{1}{4}}$ . Par contre, pour des structures de grandes tailles, nous trouvons que la M.L.R est applicable. L'effet d'échelle de structure est une transition continu entre ces deux effets d'échelle. Nous rejoignons ici la proposition faite au premier chapitre. A savoir qu'on peut proposer une loi d'effet d'échelle qui s'inspire de la loi de Bazant et qui prend en compte l'effet de volume pour des structures de petites tailles:

$$\sigma_r = \sigma_r^{Max} \cdot \left(\frac{d}{d_a}\right)^{-\alpha} \left[1 + \left(\frac{d}{\lambda \cdot d_a}\right)\right]^{-(\frac{1}{2}-\alpha)} \text{ avec } \alpha = \frac{1}{4}$$

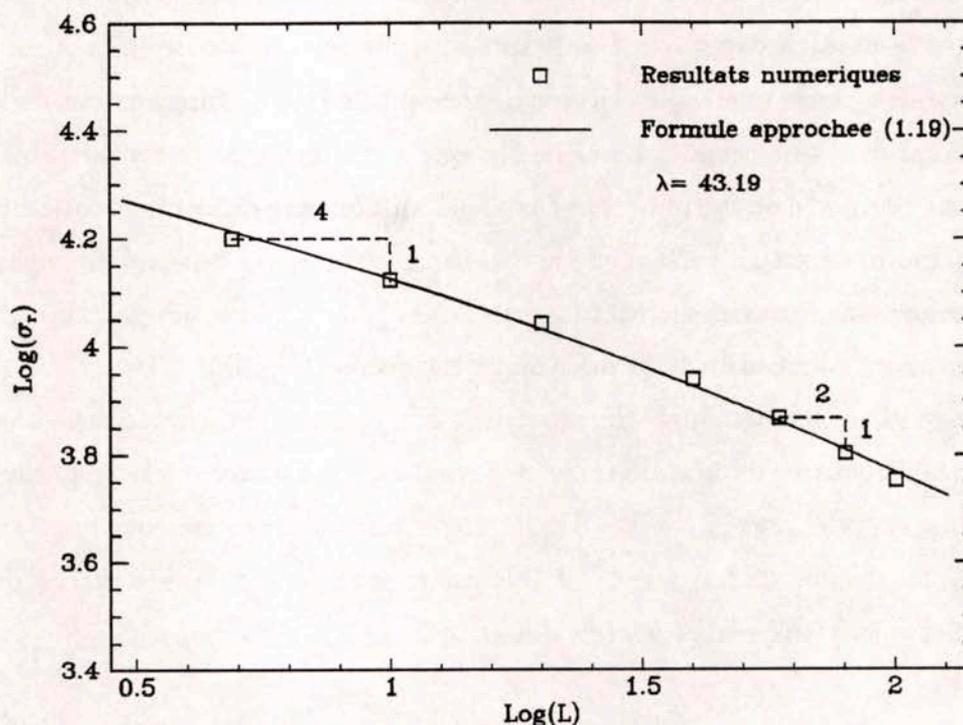


Figure 3.11: Courbes  $\text{Log}(\sigma_r) - \text{Log}(L)$  pour  $m = 3$

Nous remarquons alors que la loi proposée (1.19) approche bien les résultats numériques trouvés et qu'elle permet de rendre compte aussi bien de l'effet d'échelle de volume pour des structures de petites tailles que de la M.L.R pour des structures de grandes tailles.

#### • Cohérence du modèle $m \geq 2$

Dans le cas des structures fissurées, une renormalisation des seuils de rupture nécessiterait la connaissance de la forme exacte de la courbe  $\sigma_r(L) - L$ . Cependant, comme dans le cas des structures non fissurées, cette renormalisation conduirait à une absence d'effet d'échelle de structure. Nous sommes conduits dans ce cas aussi à introduire la taille de la maille élémentaire comme caractéristique du matériau.

### 3.4.3 conclusion

Le modèle local  $m \geq 2$  ne répond pas aux exigences que l'on s'est fixées. En effet, nous avons montré que la cohérence du modèle se traduit par une absence d'effet d'échelle. Nous avons alors introduit la taille de la maille élémentaire comme une caractéristique du matériau qui modélise la taille de ses hétérogénéités.

Dans le cas des structures non fissurées, le modèle local à  $m \geq 2$  nous a permis de mettre en évidence une taille critique dépendant de la structure à partir de laquelle on a un changement de régime. La taille critique a une importance considérable. En effet, elle nous permet de déterminer, par rapport au désordre de la microstructure, la taille de la structure à partir de laquelle le matériau se comporte de manière "déterministe". Par conséquent, pour des structures de tailles plus grandes que la taille critique, on peut appliquer les outils de la mécanique classique.

Ce modèle permet aussi de montrer qu'il y a absence d'effet d'échelle de volume pour des structures de grande taille. Ce résultat semble être conforté par les résultats expérimentaux effectués par Wu [Wu, 1991] et ceci laisse penser que contrairement au modèle local  $m < 2$ , puisque la M.L.R est applicable pour des structures de grande taille, les matériaux réels sont tels que  $m \geq 2$ .

### 3.5 CONCLUSION GÉNÉRALE

Le modèle local avec  $0 < m < 2$  est basé sur une renormalisation du critère de rupture des poutres en fonction de leur longueur effective. Cette renormalisation consiste à changer la loi de distribution statistique des limites à la rupture quand la finesse du maillage varie afin d'assurer la cohérence du modèle. Notons que cette renormalisation assure la cohérence uniquement jusqu'au pic de la force et qu'elle conduit à des résultats physiquement contestables. En effet, ce modèle montre que la M.L.R n'est pas applicable même pour des structures de grandes tailles ce qui est contraire aux observations expérimentales. Par ailleurs, nous pensons qu'il est physiquement inacceptable d'imaginer que les limites à la rupture deviennent infiniment grandes quand on regarde plus finement la microstructure, comme le prévoit le modèle local pour  $0 < m < 2$ . Quant au modèle local  $m \geq 2$ , il prévoit l'existence d'une taille critique de maille notée  $l_c$  à partir de laquelle les limites à la rupture deviennent indépendantes de la discrétisation. Par conséquent, une renormalisation des seuils de rupture conduit nécessairement à une absence d'effet d'échelle. Nous avons alors introduit, dans ce modèle, la taille de la maille élémentaire comme une caractéristique du matériau. Ce modèle nous permet de montrer que, conformément à l'expérience, la M.L.R est applicable pour des structures de grandes tailles. L'intérêt du modèle local avec  $m \geq 2$  est d'avoir montré qu'en fixant la taille de la maille élémentaire, et par conséquent le nombre de limites à la rupture indépendantes comme une caractéristique du matériau, on rend compte des effets d'échelle de volume et de structure. Nous pensons que l'introduction d'une corrélation spatiale entre les limites à la rupture est nécessaire pour sortir de l'impasse. C'est sur cette idée que nous nous appuyons pour construire le modèle non-local du quatrième chapitre.

Par ailleurs, les modèles locaux montrent qu'un effet d'échelle sur le maillage se traduit directement, après renormalisation, sur les effets d'échelle de volume et de structure. Il faudrait alors séparer ces deux types d'effets d'échelle: l'un qualifié de numérique et l'autre qualifié d'effet d'échelle de volume ou de structure mais qui est dans le cas d'un modèle local une transposition du premier. Pour ce faire, nous nous inspirons des résultats des modèles d'endommagement non - locaux déterministes que

nous tenterons de généraliser aux cas aléatoire. En effet, les modèles d'endommagement non-locaux déterministes permettent à la fois d'assurer l'indépendance des résultats en fonction du maillage et de décrire de manière satisfaisante la partie post-pic de la courbe force - déplacement.

# Chapitre 4

## Modèle non-local

### 4.1- INTRODUCTION

### 4.2- MODÈLE NON-LOCAL

4.2.1: Critère de rupture

4.2.2: Modélisation de l'hétérogénéité du matériau

### 4.3 COHÉRENCE DU MODÈLE

4.3.1: Structures non fissurées

4.3.2: Structures fissurées

### 4.4 ETUDE DES EFFETS D'ÉCHELLE

4.4.1: Effets d'échelle de volume

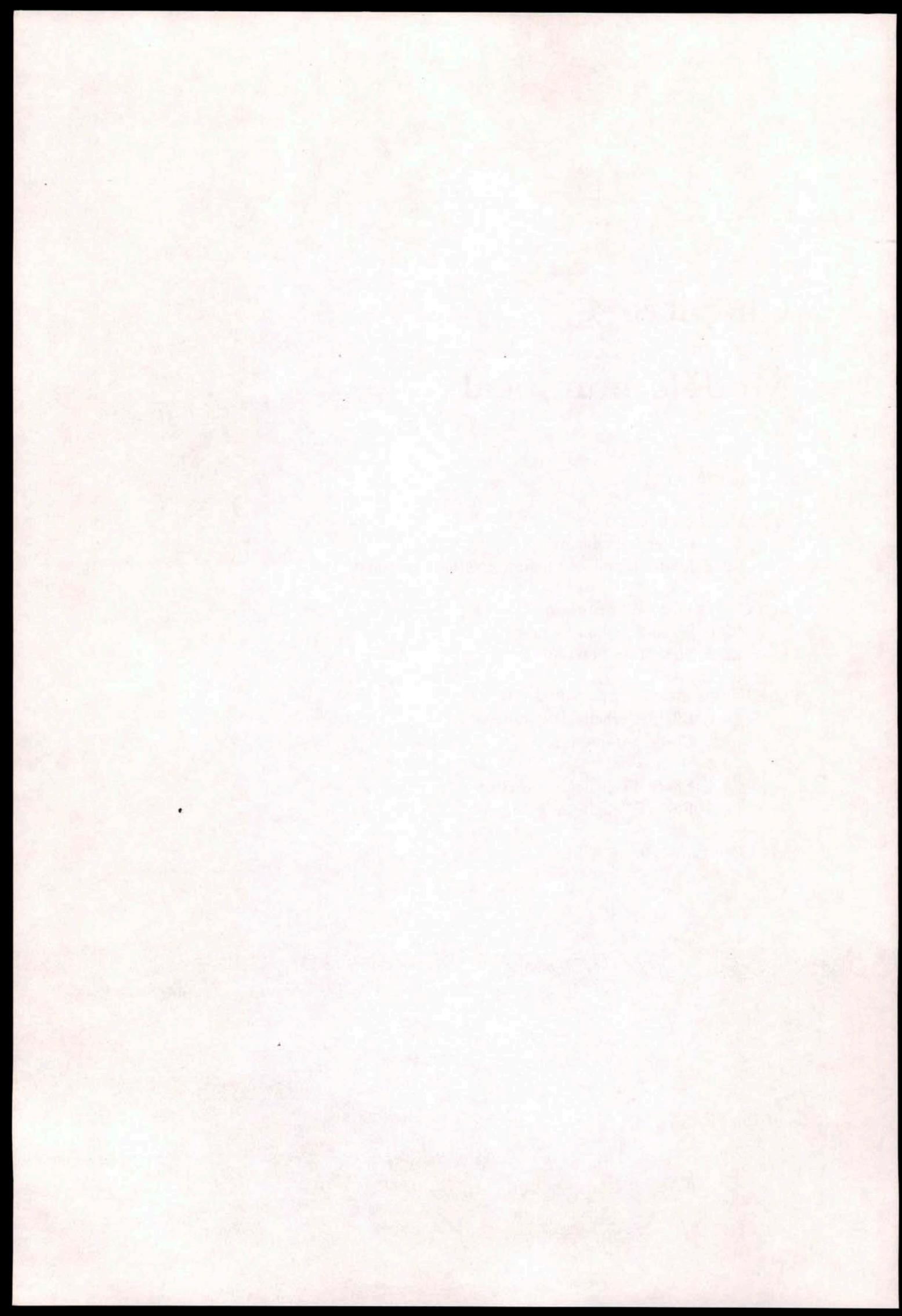
4.4.2: Etude paramétrique

4.4.3: Discussion

4.4.4: Effets d'échelle de structure

4.4.5: Effets d'échelle de gradient

### 4.5- CONCLUSION



## 4.1 INTRODUCTION

Dans le troisième chapitre, nous avons montré que le modèle local  $0 < m < 2$  ne permet pas de décrire d'une manière satisfaisante les effets d'échelle. En effet, ce modèle prévoit que les effets d'échelle de volume et de structure s'écrivent sous la forme d'une même loi de puissance:  $\sigma_r \sim L^{-\frac{1}{2}}$  qui ne coïncide pas avec la M.L.R pour des structures de grandes tailles. La cohérence du modèle local  $0 < m < 2$  est basée sur une renormalisation des seuils de rupture qui suppose que les limites à la rupture tendent vers l'infini quand on raffine le maillage, ce qui est physiquement inacceptable. Nous avons ensuite prolongé cette étude au cas  $m \geq 2$  sans renormalisation des seuils de rupture et nous avons montré que pour des structures fissurées de grandes tailles, la M.L.R est applicable. Cependant, l'insuffisance du modèle apparaît au niveau de sa cohérence. En effet, nous avons montré qu'il est impossible dans ce cas de faire une renormalisation qui assure la cohérence du modèle sans gommer les effets d'échelle.

Ainsi, la principale conclusion du troisième chapitre est que l'idée d'une renormalisation des seuils de rupture d'un critère local conduit à une impasse.

L'objet du présent chapitre est de proposer un modèle cohérent qui rende compte des trois types d'effet d'échelle observés expérimentalement: effet d'échelle de volume, de structure et de gradient. Le modèle proposé dans ce chapitre est basé sur l'idée d'un critère de rupture non-local et d'une corrélation spatiale des seuils de rupture.

En effet, nous avons vu dans le premier chapitre que les modèles d'endommagement non-locaux sont cohérents dans le cas déterministe. Ils permettent aussi de rendre compte des effets d'échelle de structure et de gradient. Rappelons que dans ces modèles, l'évolution du dommage en un point  $x$  de la structure est fonction de la déformation moyenne dans un volume représentatif de centre  $x$  dont la taille est supposée être une caractéristique du matériau.

Afin d'étendre la validité des modèles non-locaux déterministes au cas aléatoire, notre démarche va consister à choisir un critère non-local de rupture des poutres. Ce critère portera sur la moyenne arithmétique de l'énergie de déformation des poutres dans un volume représentatif  $V^{er}$  de taille  $d$  caractéristique du matériau. Nous introduirons ensuite un paramètre  $\hat{h}$  destiné à modéliser l'hétérogénéité de l'élément de

volume représentatif  $V^{er}$ . Ce paramètre désigne le nombre de limites à la rupture indépendantes dans  $V^{er}$ .

Nous montrerons que ce modèle est cohérent aussi bien pour des structures fissurées et non fissurées. Ceci généralise les résultats des modèles d'endommagement non-locaux déterministes au cas aléatoire. Ensuite, nous étudierons les effets d'échelle de volume, de structure et de gradient. Nous montrerons que, vis à vis des effets d'échelle, les modèles locaux du troisième chapitre et les modèles d'endommagement non-locaux déterministes sont des cas limites du modèle proposé.

## 4.2 MODÈLE NON-LOCAL

### 4.2.1 Critère de rupture

Le critère de rupture d'une poutre  $i$  de centre  $c_i$  est non local. Dans un état d'endommagement donné, il portera sur la moyenne arithmétique de l'énergie de déformation des poutres non rompues qui sont situées parallèlement à la poutre  $i$  dans un volume cubique de centre  $c_i$  et de côté  $d$ . On appelle ce volume, le volume représentatif  $V^{er}$  et on suppose que la taille de ce volume est une caractéristique du matériau.

En réalité, comme nous le montrerons ultérieurement, la distinction ou non entre les poutres selon leurs orientations ainsi que la définition précise de l'énergie moyenne ne changent pas les résultats de l'étude. Seul le caractère non-local de la loi de rupture est déterminant.

En notant  $\overline{W}_i$  l'énergie de déformation moyenne de la poutre  $i$  dans  $d$ , le critère de rupture de la poutre  $i$  s'écrit alors

$$(4.1) \quad \frac{\overline{W}_i}{\overline{W}_i^o} \geq R_i^2$$

où  $R_i$  est la limite à la rupture de la poutre  $i$ .

$\overline{W}_i^o$  est l'énergie élastique moyenne de la poutre  $i$  dans  $d$  soumise à une dilatation unité:

$$(4.2) \quad \overline{W}_i^o = \frac{1}{2} \cdot \rho_i$$

La fonction  $f_i$  est donc égale à:

$$(4.3) \quad f_i = \sqrt{\frac{\overline{W}_i}{\overline{W}_i^o}}$$

Nous noterons en particulier que  $f_i$  est homogène à une déformation.  $f_i$  est une fonction du champ de déplacement positivement homogène de degré un.

#### 4.2.2 Modélisation de l'hétérogénéité du matériau

L'hétérogénéité du matériau est modélisée par l'introduction d'une distribution aléatoire sur les seuils de rupture  $R_i$  de la façon suivante:

- On simule  $[hV]$  points, notés  $(P_\alpha)$ , uniformément répartis dans la structure considérée.  $V$  est le volume de la structure,  $h$  est le nombre de points par unité de volume et  $[x]$  est la partie entière de  $x$ .

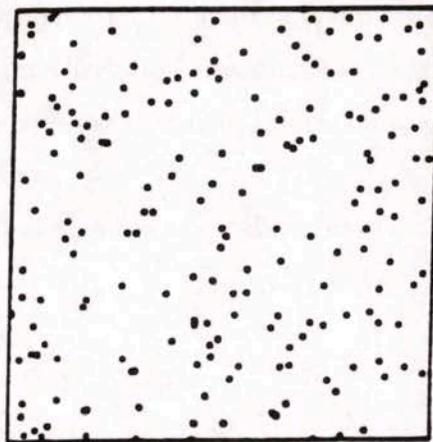


Figure 4.1: Simulation des points  $(P_\alpha)$

- A chacun des points  $P_\alpha$  est affecté un seuil de rupture  $R_\alpha > 0$  tiré aléatoirement selon la loi de probabilité suivante paramétrée par  $m > 0$  et  $R^{max} > 0$  :

$$(4.4) \quad Prob(R_\alpha \leq t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{R^{max}}\right)^m & 0 < t \leq R^{max} \\ 1 & t \geq R^{max} \end{cases}$$

- Enfin, le seuil de rupture,  $R_i$ , d'une poutre  $i$  de centre  $c_i$  est choisi aléatoirement parmi les seuils de rupture des points  $(P_\alpha)$  se trouvant dans le volume représentatif de centre  $c_i$ .

L'hétérogénéité du matériau est décrite indépendamment de la discrétisation par une distribution aléatoire de seuils de rupture en des points aléatoirement répartis au sein de la structure. Ainsi, nous ne changeons pas de microstructure en changeant le

maillage.

• **Remarques:**

**R1)** A  $h$  fixé et pour  $m \rightarrow +\infty$  les seuils de rupture tendent vers  $R^{max}$ . Le modèle proposé s'identifie alors à un modèle d'endommagement brutal non-local.

**R2)**  $\hat{h} = hd^2$  représente le nombre moyen de points dans un volume représentatif et plus exactement le nombre de seuils de rupture indépendants que peuvent prendre les poutres situées dans  $V^{er}$ . Si à  $m$  fixé  $\hat{h} \rightarrow +\infty$ , tous les volumes représentatifs comporteront la même information statistique. Ils auront alors un comportement radoucissant global identique et le matériau paraîtra homogène. Notre modèle s'identifie dans ce cas à un modèle d'endommagement non-local avec loi radoucissante sur l'élément de volume. Par contre si  $\hat{h}$  est petit, la dispersion du comportement global des volumes représentatifs sera grande et le matériau paraîtra hétérogène.

**R3)** Si  $l$  est la finesse de la discrétisation (on rappelle que  $l$  est la longueur de la maille élémentaire du réseau de poutres équivalent), alors le nombre de poutres dans un volume élémentaire est  $6(\frac{d}{l})^2$ . Ce nombre doit être supérieur ou égal à  $\hat{h}$  afin d'assurer que le nombre de seuils de rupture indépendants que peuvent prendre les poutres situées dans  $V^{er}$  soit égal à  $\hat{h}$ . Si ce nombre est supérieur à  $\hat{h}$ , certaines poutres du volume élémentaire considéré auront les mêmes seuils de rupture issus des mêmes points ( $P_\alpha$ ), ceci introduit une corrélation spatiale entre les  $R_i$ . Par contre, si le nombre de poutres dans  $V^{er}$  est égal à  $\hat{h}$  alors il y aura indépendance entre les  $R_i$ . En particulier, si  $l = d$ , nous devons retrouver les résultats du modèle local non renormalisé. Par ailleurs, nous montrerons dans la suite que le vrai paramètre matériau du modèle est  $p = \sqrt{\frac{\hat{h}}{6}}$ . En effet, le facteur 6 est propre au réseau équivalent utilisé dont la maille élémentaire contient 6 poutres.

**R4)** Lors des simulations d'un test de traction simple sur une éprouvette carrée à l'aide du modèle non-local, nous avons défini le volume représentatif d'un point près du bord en prolongeant la structure par périodicité (Figure 4.2). Ceci a été fait pour éviter des effets de bord artificiels en assurant que chaque volume représentatif a la même taille et qu'il contient en moyenne le même nombre de points ( $P_\alpha$ ).

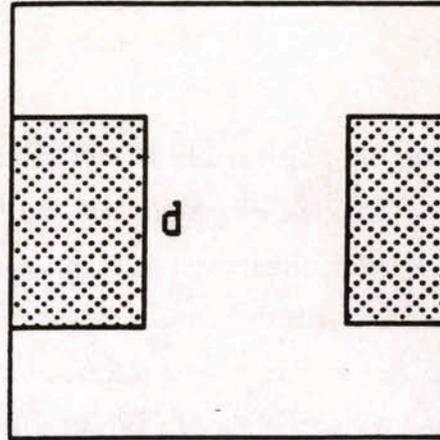


Figure 4.2: Points du bord

En résumé, les paramètres  $d$ ,  $m$ ,  $\hat{h}$  et  $R^{max}$  caractérisent le comportement à la rupture du matériau à condition de vérifier que les résultats obtenus par ce modèle sont indépendants de la discrétisation au delà d'une certaine finesse du maillage. Le paramètre  $R^{max}$  est un paramètre multiplicatif que nous prendrons égal à un dans toutes les simulations numériques.

### 4.3 COHÉRENCE DU MODÈLE

Nous avons effectué des simulations numériques afin de vérifier la cohérence du modèle. Ces simulations ont été effectuées sur une structure carrée de côté  $L$  soumise à une traction simple et sur une structure carrée de côté  $L$  fissurée et chargée en mode I. Pour chaque structure, trois finesses et trois orientations du maillage ont été testées.

Nous commencerons par étudier notre modèle dans le cas  $\hat{h} = 6$  qui correspond au modèle local non renormalisé quand la finesse de maillage  $l$  est égale à la taille du volume représentatif  $d$ . Plusieurs simulations avec  $\frac{l}{d} \searrow 0$  nous permettront de vérifier que le modèle non-local est cohérent sans avoir à effectuer une renormalisation des seuils de rupture. Nous vérifierons la cohérence du modèle dans le cas  $0 < m < 2$  et  $m \geq 2$ . Ensuite, nous vérifierons la cohérence du modèle pour d'autres valeurs de  $\hat{h}$ .

Nous présenterons les résultats pour une seule valeur de  $\frac{L}{d} = 4$ . Ce choix est justifié pour deux raisons. D'abord, pour une raison numérique. En effet, si nous voulons mailler très finement l'élément de volume  $d$ , nous ne pouvons pas choisir un très grand rapport de  $\frac{L}{d}$ . La deuxième raison est plus physique. En effet, pour  $\hat{h} = 6$  et compte tenu des résultats du troisième chapitre pour  $m \geq 2$ , les structures de grandes tailles ( $\frac{L}{d}$  grand) ne devraient plus exhiber d'effet d'échelle. Par conséquent, la vérification de la cohérence du modèle pour des grandes valeurs de  $\frac{L}{d}$  pourrait être simplement due à une absence d'effet d'échelle.

#### 4.3.1 Structures non fissurées

Nous considérons une structure carrée de taille  $L$  égale à l'unité soumise à une traction simple. Nous avons testé la cohérence du modèle pour différentes finesses et orientations du maillage. Nous présentons les résultats obtenus avec:  $\frac{L}{d} = 4$ ,  $\hat{h} = 6$ ,  $\hat{h} = 54$  et  $m = 3$  pour trois finesses du maillage:  $\frac{d}{l} = 3, 5, 9$ . Les résultats sont synthétisés dans la figure (Figure 4.3) et le tableau (Tableau 4.1). Ces résultats montrent que la cohérence du modèle est assurée sur toute la courbe force - déplacement pour toute valeur de  $m$ . Dans ce qui suit, nous vérifierons la cohérence du modèle dans le cas des structures fissurées.

$m$	$\hat{h}$	$\frac{d}{l}$	$F_r$	Nb. Sim.
<b>3</b>	6	3	31570	30
		5	31600	30
		9	31490	30
<b>3</b>	54	3	26978	30
		5	26920	30
		9	26895	30

Tableau 4.1: Indépendance de  $\bar{F}_r$  en fonction de la finesse de maillage

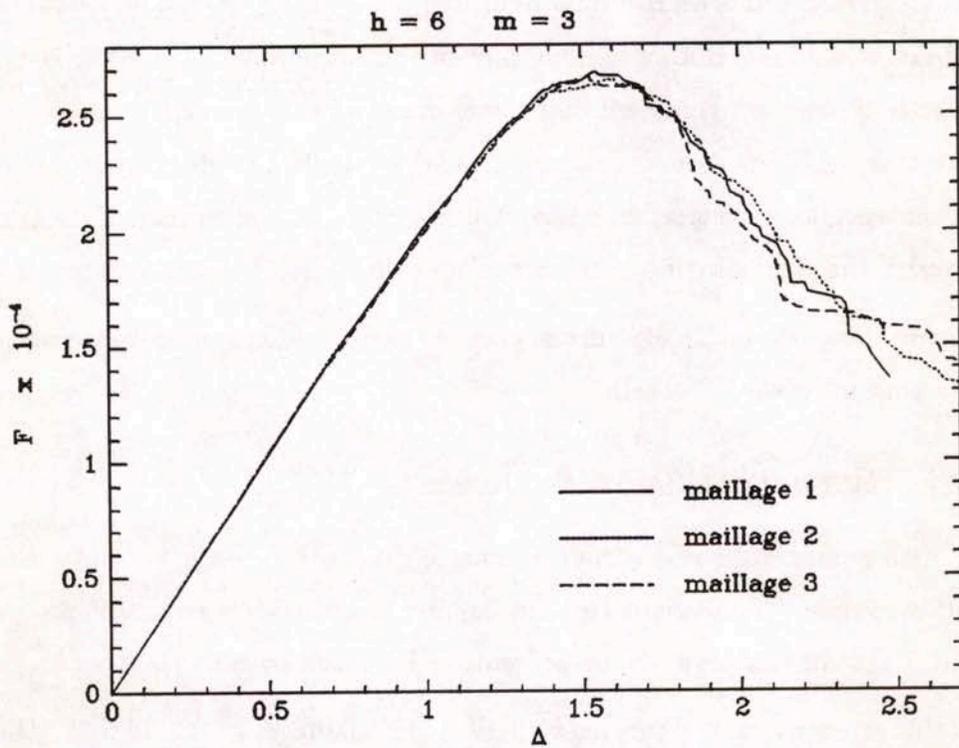


Figure 4.3: Courbes moyennes  $F - \Delta$  pour différentes finesses de maillage

### 4.3.2 Structures fissurées

Nous considérons une structure carrée de taille  $L$  égale à l'unité contenant une fissure rectiligne de longueur  $a = 0.2L$ . Cette structure est chargée en mode I.

Nous présentons les résultats obtenus avec:  $\frac{L}{d} = 4$ ,  $\hat{h} = 6$  et  $m = 1$  pour trois finesses du maillage:  $\frac{d}{l} = 3, 5, 9$ . Les résultats obtenus (Figure 4.4) confirment que la cohérence du modèle est aussi assurée sur toute la courbe force - déplacement pour toute valeur de  $m$  pour les structures fissurées.

En conclusion, nous avons vérifié la cohérence du modèle non-local dans le cas des structures fissurées et non fissurées. Nous avons montré que cette cohérence est assurée sur toute la courbe  $F - \Delta$ , et en particulier sur sa partie post - pic. Ceci généralise les résultats des modèles d'endommagement déterministes non-locaux au cas aléatoire.

Après avoir vérifié la cohérence du modèle dans le cas des structures fissurées et non fissurées, nous nous intéressons dans la prochaine partie à l'étude des effets d'échelle de volume et de structure.

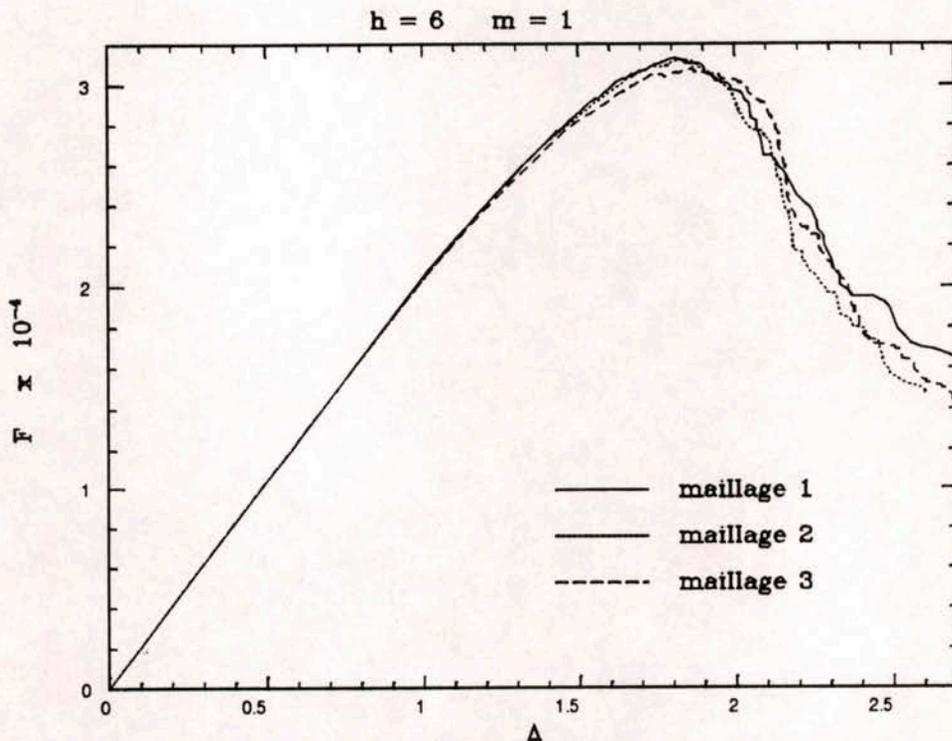
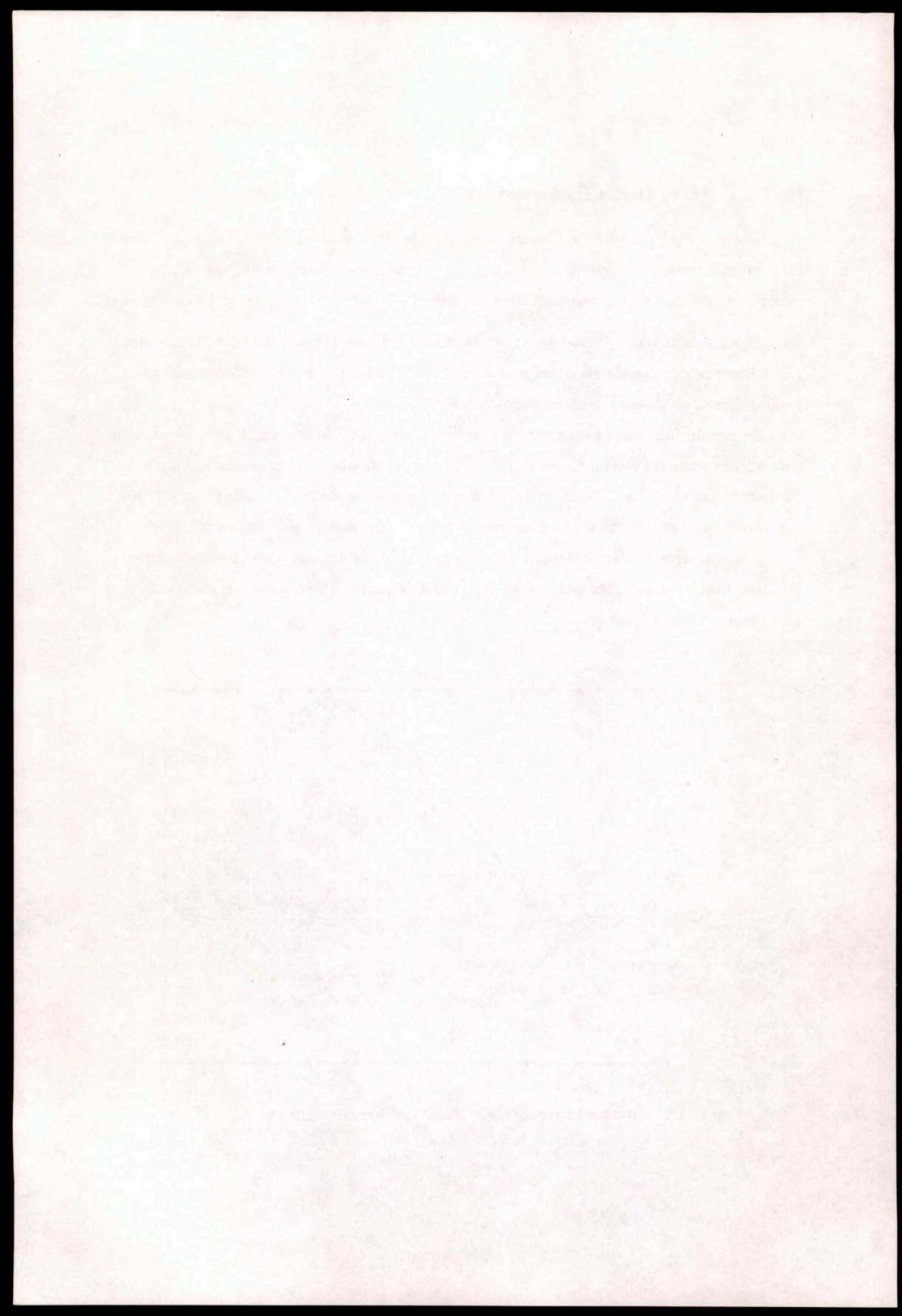


Figure 4.4: Courbes moyennes  $F - \Delta$  pour différentes finesses de maillage



## 4.4 ETUDE DES EFFETS D'ÉCHELLE

Nous avons effectué des simulations numériques sur des structures bidimensionnelles: expérience de traction simple, expérience de flexion 3-points sur une structure fissurée et expérience de flexion 3-points sur une structure non fissurée. Le but de ces simulations est l'observation des effets d'échelle de volume, de structure et de gradient, ainsi que l'influence des paramètres de rupture du modèle sur ces effets d'échelle.

### 4.4.1 Effet d'échelle de volume

Nous avons effectué des simulations sur des structures carrées en traction simple. L'étude a porté sur l'influence des trois paramètres du modèle:  $\hat{h}$ ,  $m$  et  $\frac{L}{d}$ . Nous représentons les résultats dans le diagramme  $\text{Log}(\frac{\sigma_r}{\sigma_r^M}) - \text{Log}(\frac{L}{d})$  (logarithme décimal) où  $\sigma_r^M$  est la contrainte moyenne de rupture pour  $L = d$  (nous noterons aussi  $\epsilon_r^M$  la déformation moyenne à la rupture pour  $L = d$ ). Notons que  $\frac{\sigma_r}{E \cdot R^{max}}$  est une fonction de  $\frac{L}{d}$ ,  $m$ ,  $\hat{h}$  et  $\nu$ . De même, la fonction  $\frac{\sigma_r}{\sigma_r^M}$  est une fonction décroissante de  $\frac{L}{d}$  paramétrée par  $m$ ,  $\hat{h}$  et  $\nu$  qui sera pris égal à 0.2 dans toutes les simulations numériques.

Nous avons d'abord effectué des simulations pour  $\hat{h} = 6$  et différentes valeurs de  $m$ . Nos résultats confirment que le modèle non-local avec  $\hat{h} = 6$  prédit les mêmes effets d'échelle de volume que le modèle local. En effet,

- pour  $m < 2$  :

Nous trouvons que la courbe  $\text{Log}(\frac{\sigma_r}{\sigma_r^M}) - \text{Log}(\frac{L}{d})$  (ainsi que  $\text{Log}(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r^M}) - \text{Log}(\frac{L}{d})$ ) est une droite de pente  $-\frac{1}{4}$ .

- pour  $m \geq 2$  :

Nous trouvons que la courbe  $\text{Log}(\frac{\sigma_r}{\sigma_r^M}) - \text{Log}(\frac{L}{d})$  (ainsi que  $\text{Log}(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r^M}) - \text{Log}(\frac{L}{d})$ ) est une ligne brisée formée d'une droite partant du point origine de pente  $-\frac{1}{4}$  pour  $\frac{L}{d} \leq (\frac{L}{d})_c$  et d'un palier horizontal pour  $\frac{L}{d} \geq (\frac{L}{d})_c$ .

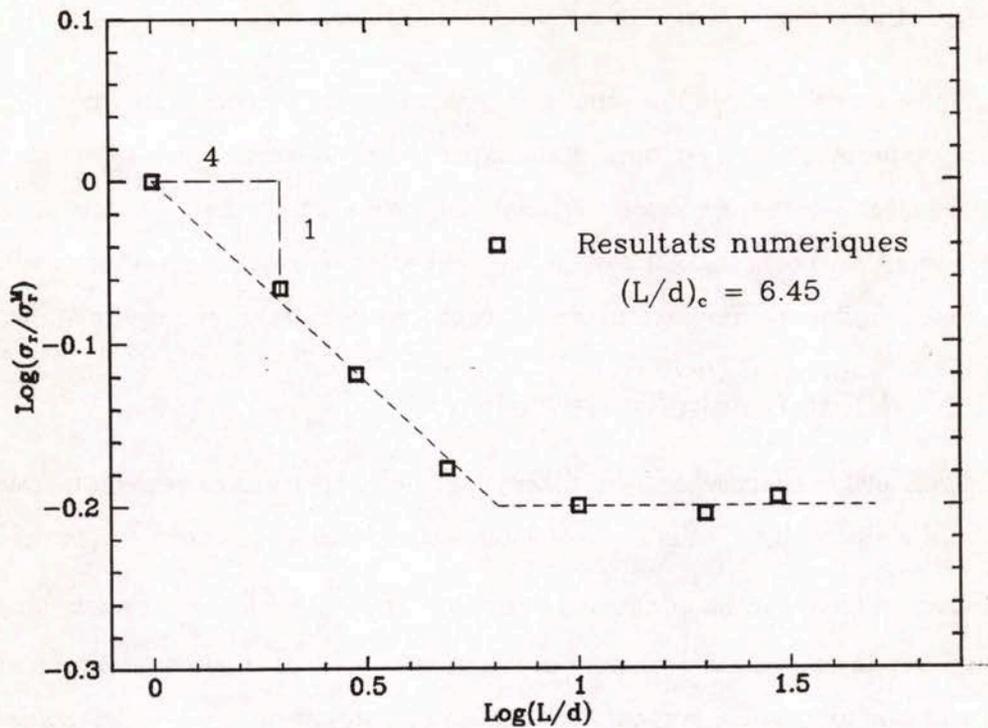


Figure 4.5: Courbe  $\text{Log}(\frac{\sigma_r}{\sigma_r^M}) - \text{Log}(\frac{L}{d})$  pour  $m = 3$  et  $\hat{h} = 6$

Autrement dit:

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } m < 2 \\ \text{pour } m \geq 2, \exists (\frac{L}{d})_c \text{ tq} \end{array} \right. \quad \forall L \quad \frac{\sigma_r}{\sigma_r^M} \approx (\frac{L}{d})^{-\frac{1}{4}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \frac{L}{d} \leq (\frac{L}{d})_c \text{ alors } \frac{\sigma_r}{\sigma_r^M} \approx (\frac{L}{d})^{-\frac{1}{4}} \\ \text{si } \frac{L}{d} \geq (\frac{L}{d})_c \text{ alors } \frac{\sigma_r}{\sigma_r^M} \approx (\frac{L}{d})_c^{-\frac{1}{4}} \end{array} \right.$$

Nous avons effectué les mêmes simulations pour  $\hat{h} = 54$ .

- pour  $m = 1$  :

Nous trouvons que la courbe  $\text{Log}(\frac{\sigma_r}{\sigma_r^M}) - \text{Log}(\frac{L}{d})$  (ainsi que  $\text{Log}(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r^M}) - \text{Log}(\frac{L}{d})$ ) est une droite de pente  $-\frac{1}{8}$ .

- pour  $m \geq 2$  :

Nous trouvons que la courbe  $\text{Log}(\frac{\sigma_r}{\sigma_r^M}) - \text{Log}(\frac{L}{d})$  (ainsi que  $\text{Log}(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r^M}) - \text{Log}(\frac{L}{d})$ ) est une

ligne brisée formée d'une droite partant du point origine de pente  $-\frac{1}{8}$  pour  $\frac{L}{d} \leq (\frac{L}{d})_c$  et d'un palier horizontal pour  $\frac{L}{d} \geq (\frac{L}{d})_c$ .

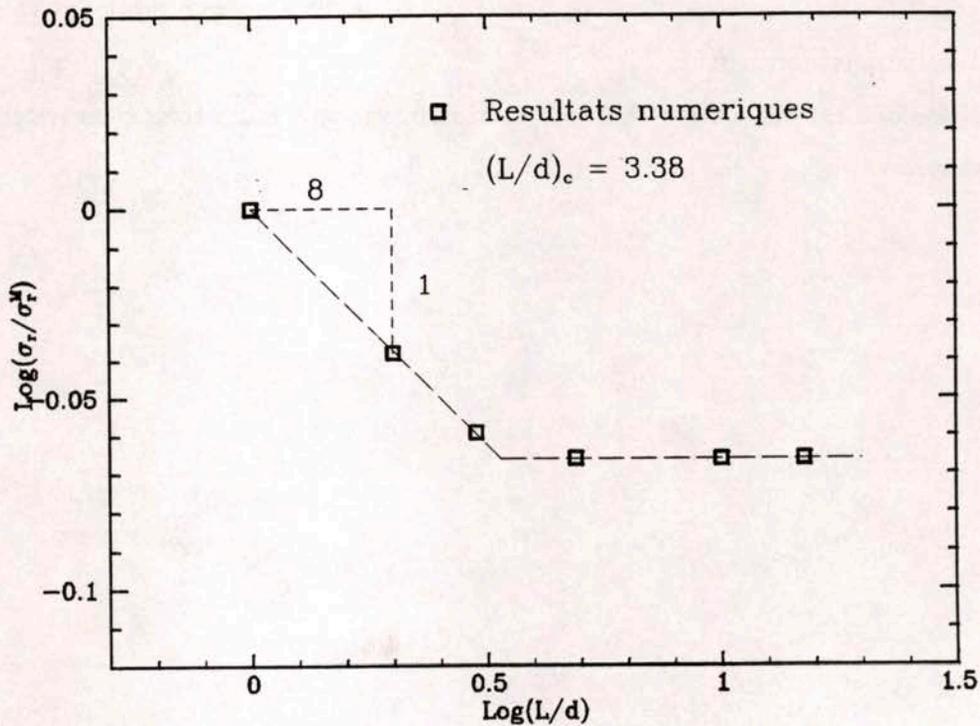


Figure 4.6: Courbe  $\text{Log}(\frac{\sigma_r}{\sigma_r^M}) - \text{Log}(\frac{L}{d})$  pour  $\hat{h} = 54$  et  $m = 4$

Ces résultats ainsi que l'étude du cas  $\hat{h} = 6$  (modèle local) nous ont amené à vérifier que pour toute valeur de  $\hat{h}$ , il existe une valeur critique de  $m$  notée  $m_c^{\hat{h}}$  telle que:

$$(4.6) \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } m < m_c^{\hat{h}} \\ \text{pour } m \geq m_c^{\hat{h}}, \exists (\frac{L}{d})_c \text{ tq} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \forall L \quad \frac{\sigma_r}{\sigma_r^M} \approx (\frac{L}{d})^{-\alpha_{m,\hat{h}}} \\ \text{si } \frac{L}{d} \leq (\frac{L}{d})_c \text{ alors } \frac{\sigma_r}{\sigma_r^M} \approx (\frac{L}{d})^{-\alpha_{m,\hat{h}}} \\ \text{si } \frac{L}{d} \geq (\frac{L}{d})_c \text{ alors } \frac{\sigma_r}{\sigma_r^M} \approx (\frac{L}{d})_c^{-\alpha_{m,\hat{h}}} \end{array} \right.$$

Ainsi, trois paramètres génèrent la courbe  $\text{Log}(\frac{\sigma_r}{\sigma_r^M}) - \text{Log}(\frac{L}{d})$ ; la pente  $\alpha_{m,\hat{h}}$ , le rapport critique  $(\frac{L}{d})_c(m, \hat{h})$  à partir duquel il n'y a plus d'effet d'échelle et la valeur de  $m_c^{\hat{h}}$  au

dessous de laquelle  $(\frac{L}{d})_c$  est infini.

Notons que pour  $m$  suffisamment grand, il n'y a plus d'effet d'échelle dans le sens où nous trouvons numériquement que  $\sigma_r(L) \approx \sigma_r^M \quad \forall L \geq d$ . Il s'ensuit que la définition et l'identification numérique de  $\alpha_{m,\hat{h}}$  et  $(\frac{L}{d})_c$  n'ont de sens que pour des valeurs de  $m$  limitées supérieurement.

Nous présentons maintenant une étude numérique de ces trois paramètres en fonction de  $m$  et de  $\hat{h}$ .

## 4.4.2 Etude paramétrique

### • Etude de la pente $\alpha_{m,\hat{h}}$

Une étude paramétrique a été effectuée sur plusieurs valeurs du couple  $(m, \hat{h})$  afin de déterminer la variation de la pente  $-\alpha_{m,\hat{h}}$  en fonction de  $m$  et de  $\hat{h}$ . Pour chaque valeur de  $\hat{h}$ , sept valeurs de  $m$  ont été testées:  $m = 1, m = 2, m = 3, m = 4, m = 5, m = 6$  et  $m = 7$ .

Cette étude paramétrique a montré que la pente  $-\alpha_{m,\hat{h}}$  est en réalité indépendante de  $m$  (Figure 4.7) et qu'elle est liée à  $\hat{h}$  par la formule:

$$(4.7) \quad \alpha_{\hat{h}} \approx \frac{1}{2(j(\hat{h}) + 2)}$$

où  $j(\hat{h})$  est une fonction croissante de  $\hat{h}$  à valeur entière qui vaut  $j(\hat{h}) = \left[ \sqrt{\frac{\hat{h}-1}{6}} \right]$  où  $[x]$  est la partie entière de  $x$  (Figure 4.8). La loi (4.7) a été vérifiée numériquement pour dix valeurs de  $\hat{h}$ :  $\hat{h} = 1, 6, 8, 24, 25, 54, 56, 96, 100$  et  $150$ . La figure 4.6 représente les valeurs de  $\frac{1}{2\alpha_{\hat{h}}} - 2$  calculés numériquement pour ces dix valeurs de  $\hat{h}$ . L'écart des valeurs numériques de  $\alpha_{\hat{h}}$  par rapport à la loi proposée (4.7) est inférieure à 5%.

$\alpha_{\hat{h}}$  est donc une fonction décroissante de  $\hat{h}$ . En particulier:

$$(4.8) \quad 0 \leq \alpha_{\hat{h}} \leq \frac{1}{4}$$

Par ailleurs, on retrouve pour  $\hat{h} = 6$  l'exposant  $\alpha_6 = \frac{1}{4}$  trouvé dans le cas des modèles locaux présentés dans le troisième chapitre et qui correspond au cas le plus hétérogène. On retrouve aussi  $\alpha_{+\infty} = 0$ . Ceci veut dire que les grandes valeurs de  $\hat{h}$  correspondent à une absence d'effet d'échelle de volume conformément à la théorie de l'endommagement non-local déterministe.

Ainsi, les effets d'échelle de volume prédits par le modèle local du troisième chapitre et par la théorie de l'endommagement non-local déterministe apparaissent comme des cas limites de notre modèle.

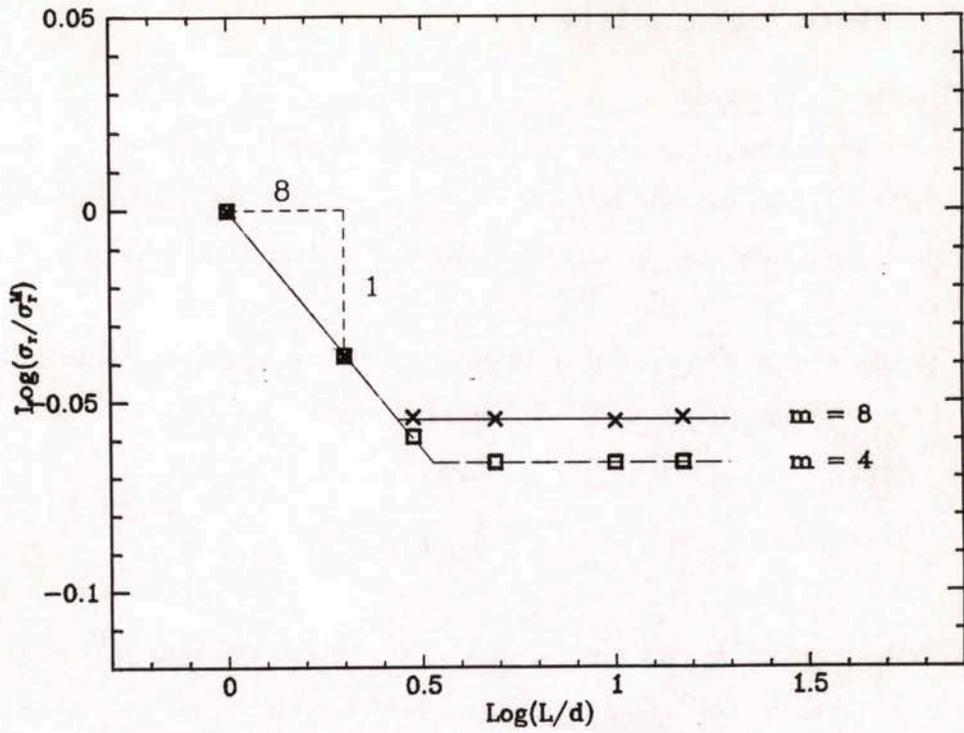


Figure 4.7: Indépendance de  $\alpha_{m,\hat{h}}$  en fonction de  $m$

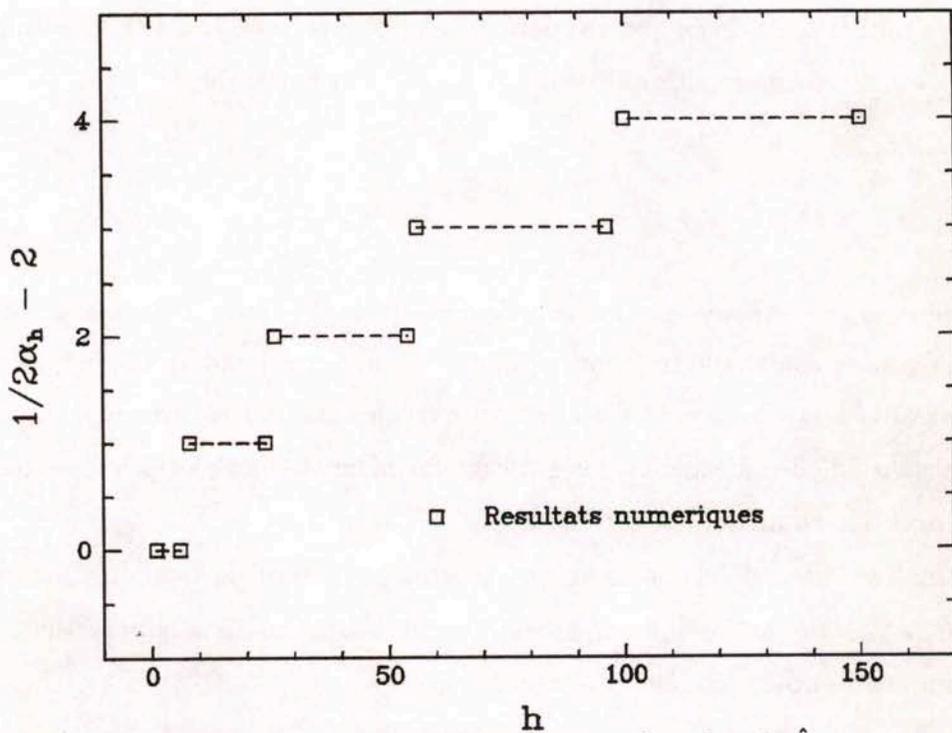


Figure 4.8: Variation de la pente  $\alpha_{\hat{h}}$  en fonction de  $\hat{h}$

• Etude du facteur  $(\frac{L}{d})_c$

Le paramètre  $(\frac{L}{d})_c$  permet la détection d'une taille de structure à partir de laquelle il n'y a plus d'effet d'échelle de volume.

Nous avons effectué une étude paramétrique pour étudier l'influence des paramètres  $m$  et  $\hat{h}$  sur le facteur  $(\frac{L}{d})_c$  pour  $m \geq 2$ .

L'influence par rapport au paramètre  $m$  a été déterminée en fixant trois valeurs de  $\hat{h}$ : 6, 24 et 54 et en faisant varier  $m$ . La conclusion essentielle de cette étude est que:

$$(4.9) \quad (\frac{L}{d})_c \approx g(\hat{h}) \cdot (f(\hat{h}))^{-m}$$

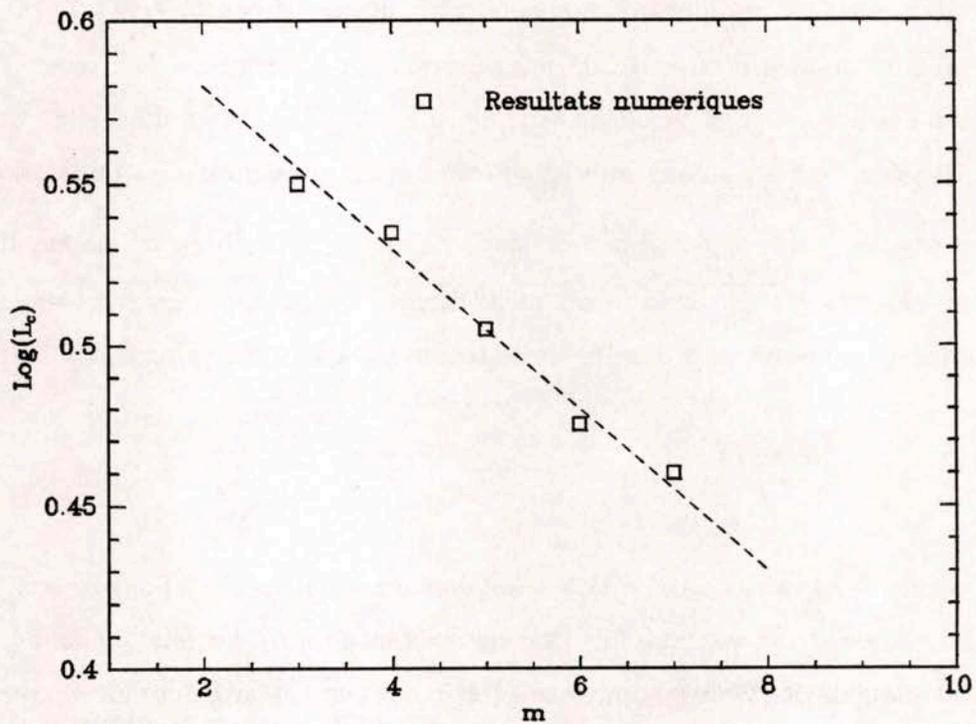


Figure 4.9: Courbe  $\text{Log}(L_c) - m$  pour  $\hat{h} = 54$

Les simulations numériques ont montré que:

$$(4.10) \quad \begin{cases} f(6) \approx 1.168 & \text{et } g(6) \approx 10.83 \\ f(54) \approx 1.055 & \text{et } g(54) \approx 4.20 \end{cases}$$

Nous retrouvons les résultats du modèle local:  $f(6) \approx B \approx 1.168$  et  $g(6) \approx A \approx 10.83$ .

• Détermination du  $m_c^{\hat{h}}$

Nous rappelons ici que la validité de (4.9) est limitée supérieurement aux valeurs de  $m$  pour lesquelles l'effet d'échelle de volume donnée par la loi de puissance  $\frac{\sigma_r}{\sigma_r^M} \sim (\frac{L}{d})^{-\alpha h}$  peut être détecté numériquement. Par ailleurs, d'après (4.6), la validité de (4.9) est forcément limitée aux valeurs de  $m$  supérieures à  $m_c^{\hat{h}}$ .

Ainsi, pour déterminer  $m_c^{\hat{h}}$ , nous pourrions utiliser la courbe  $(\frac{L}{d})_c = g(\hat{h}) \cdot (f(\hat{h}))^{-m}$ . En effet, la donnée d'un  $m$  et d'un  $\hat{h}$ , devrait nous permettre de trouver l'éventuelle taille de la structure à partir de laquelle il n'y a plus d'effet d'échelle. Connaissant cette valeur de  $(\frac{L}{d})_c$ , nous effectuons des simulations pour des tailles de structure telles que  $(\frac{L}{d}) > (\frac{L}{d})_c$ . Si pour ces tailles de structure, il n'y a pas apparition d'un palier, alors  $m \geq m_c^{\hat{h}}$ . Dans le cas contraire,  $m < m_c^{\hat{h}}$ . Ainsi, on peut déterminer par dichotomie  $m_c^{\hat{h}}$  pour un  $\hat{h}$  donné. Cette technique a été utilisée pour  $\hat{h} = 54$  et a donné:

$$(4.11) \quad m_c^{54} \approx 1.21$$

On vérifie dans ce cas aussi qu'on a un changement de régime pour  $m = m_c^{\hat{h}}$ .

Par ailleurs,  $m_c^{\hat{h}}$  est une fonction décroissante de  $\hat{h}$ . En effet, quand  $\hat{h}$  augmente le matériau devient plus homogène et par conséquent la valeur de  $m$  pour laquelle le matériau n'exhibe plus d'effet d'échelle pour des structures de grandes tailles doit diminuer. Par ailleurs,

$$(4.12) \quad 0 \leq m_c^{\hat{h}} \leq 2$$

car,  $m_c^{+\infty} = 0$  et  $m_c^6 = 2$ .

### 4.4.3 Discussion

Dans cette partie, nous discuterons l'influence des choix que nous avons fait lors de la formulation du critère de rupture des poutres ainsi que l'influence de la discrétisation du milieu par un réseau équivalent.

#### • Choix du critère de rupture

Nous avons fait un certain nombre de choix lors de la formulation du critère de rupture:

1- Le critère de rupture de la poutre  $i$  porte sur la moyenne arithmétique des énergies des poutres parallèles à  $i$  situées dans un volume cubique de côté  $d$  autour de  $i$ . Ceci signifie que nous faisons une moyenne arithmétique sur les poutres de même orientation. Ainsi, nous faisons une distinction entre les différentes poutres (6 types de poutres) situées dans le même volume représentatif. Ce choix a été fait afin de garder un caractère anisotrope à la rupture.

Afin de montrer que ce choix ne modifie pas les résultats exposés, nous considérons le critère de rupture (4.1) avec  $\bar{W}_i$ ; égale à la moyenne arithmétique de l'énergie de déformation de toutes les poutres non rompues situées dans un volume représentatif autour de  $i$ . Ainsi, nous ne distinguons plus les différentes poutres du réseau.

Nous avons vérifié la cohérence du modèle pour  $m = 1$  et  $\hat{h} = 54$ . Ensuite, nous avons effectué des simulations numériques sur des structures carrées en traction simple. Les résultats trouvés confirment qu'on retrouve les mêmes lois d'effet d'échelle.

2- Le critère de rupture porte sur la moyenne arithmétique des énergies de déformation des poutres non rompues dans le volume représentatif  $V^{er}$ . Nous avons modifié ce choix en considérant une moyenne arithmétique sur toutes les poutres de  $V^{er}$  en affectant une énergie nulle à chaque poutre rompue. Dans ce cas aussi, le modèle est cohérent et nous retrouvons les mêmes lois d'échelle.

3- La limite à la rupture d'une poutre  $i$  est choisi aléatoirement parmi les seuils de rupture des points ( $P_\alpha$ ) se trouvant dans un volume représentatif autour de  $i$ . Ainsi, nous avons implicitement choisie de corrélérer les poutres situées dans le même volume représentatif dans lequel on calcule l'énergie moyenne de  $i$ . Dans la suite, nous dis-

tinguerons entre l'élément de volume représentatif notée  $V^{er}$  de taille  $dxd$  et dans lequel on effectue la moyenne et le volume de corrélation  $V^{ec}$  de taille  $d'xd'$  dans lequel on corrèle les limites à la rupture des poutres. Nous allons montrer que les effets d'échelle ne dépendent que du nombre de seuils de rupture indépendants que peuvent prendre les poutres situées dans  $V^{er}$ . Notons ce nombre  $h^{er}$ . Remarquons ici que toutes les simulations déjà présentées dans ce chapitre correspondent au cas  $d' = d$ , c.à.d  $h^{er} = \hat{h}$ . Afin de montrer que les effets d'échelle sont en réalité pilotés par  $h^{er}$  dans le cas  $d' \neq d$ , nous considérons les deux cas suivants:

- dans le premier cas, nous choisissons un volume de corrélation plus petit que le volume représentatif:  $d' = \frac{1}{2}.d$  et nous fixons le nombre de points dans  $V^{er}$  à  $\hat{h} = 24$ . Le volume de corrélation contient alors 6 points et  $h^{er} = 24$ .

Nous trouvons alors que l'effet d'échelle s'écrit:  $\sigma_r \sim L^{-\frac{1}{6}}$ . Ainsi, l'effet d'échelle est relié à  $h^{er}$ .

- dans le deuxième cas, nous choisissons un volume de corrélation plus grand que le volume représentatif:  $d' = 2.d$  et nous fixons le nombre de points dans  $V^{er}$  à  $\hat{h} = 6$ . Le volume de corrélation contient alors 24 (4x6) points et  $h^{er}$  est égal à 24.

Nous trouvons que l'effet d'échelle s'écrit:  $\sigma_r \sim L^{-\frac{1}{6}}$ . Là aussi, l'effet d'échelle est relié à  $h^{er}$ .

La conclusion essentielle de cette étude est que l'effet d'échelle est fonction de  $h^{er}$  indépendamment de la manière avec laquelle sont corrélés les seuils de rupture des poutres situées dans le volume représentatif  $V^{er}$ .

Nous avons aussi corrélé les limites à la rupture en associant à chaque poutre la limite à la rupture du point  $P_\alpha$  le plus proche. Dans ce cas aussi  $h^{er} = \hat{h}$  et nous retrouvons les mêmes effets d'échelle. Notons que cette façon de choisir les limites à la rupture correspond à une partition du milieu en zones où la loi de rupture est homogène. Ainsi, dans chaque zone (ou grain) les  $R_i$  sont identiques et la partition obtenue est connue sous le nom de diagramme de Voronoï.

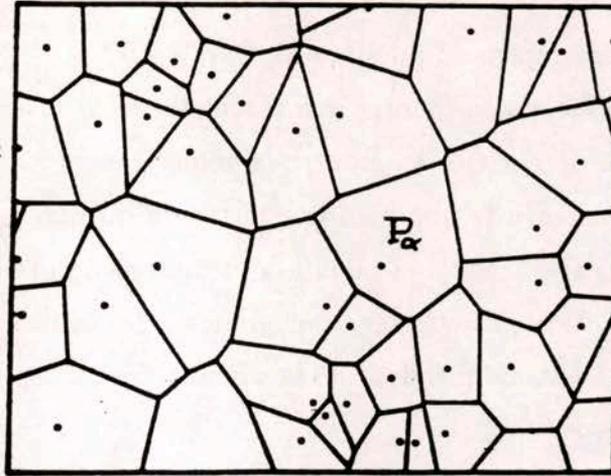


Figure 4.10: Diagramme de Voronoï

#### • Choix de la discrétisation

Après avoir discuté du choix du critère de rupture, nous abordons maintenant le choix de la discrétisation adoptée. Nous avons déjà signalé que le facteur 6 qui intervient dans la loi (4.7) est lié à la discrétisation car il est égal au nombre de poutres par maille. Plus précisément, 6 est le nombre de ruptures nécessaires pour annuler la rigidité globale de la maille. La question légitime que l'on doit se poser est: quels effets d'échelle aurions nous en adoptant une discrétisation par éléments finis où chaque maille se rompt dès que le critère calculé en son centre est atteint? Dans ce cas, une seule rupture annule totalement la rigidité de la maille. Nous avons effectué des simulations numériques en effectuant une discrétisation par éléments finis carrés à 4 noeuds avec une description du milieu donnée par le diagramme de Voronoï décrit ci - dessus et avec les paramètres  $\hat{h} = 9$  et  $m = 1$ . Nous trouvons que l'effet d'échelle s'écrit:  $\sigma_r \sim L^{-\frac{1}{8}}$ . Nous vérifions alors que le facteur 6 qui intervient dans les lois d'effet d'échelle est propre au réseau équivalent. Par contre, les lois trouvées ne dépendent pas de la discrétisation choisie à condition de bien définir le nombre de variables indépendantes au sein d'un élément de volume représentatif.

Notons que l'intérêt d'une discrétisation du milieu à l'aide d'un réseau équivalent est d'introduire un comportement radoucissant au niveau de la maille qui peut être

dans  $2^6$  états d'endommagement possibles.

En conclusion, nous avons montré que la définition précise du critère de rupture ainsi que la manière de corréler les poutres n'interviennent pas dans les lois d'effets d'échelle. Nous avons ensuite abouti à une partition du milieu en grains homogènes dans laquelle une poutre hérite de la limite à la rupture du grain qui la contient. Par ailleurs, une modélisation par éléments finis donnent les mêmes effets d'échelle ce qui montre que le modèle est indépendant de la discrétisation adoptée.

#### • Identification des paramètres du modèle

Nous proposons ici une procédure d'identification des quatre paramètres du modèle:  $\hat{h}$ ,  $m$ ,  $d$  et  $R^{max}$  sur une expérience bidimensionnelle de traction simple. Supposons données les courbes expérimentales  $\text{Log}(\sigma_r^{exp}) - \text{Log}(L)$  et  $\text{Log}(\epsilon_r^{exp}) - \text{Log}(L)$  (Figure 4.12).

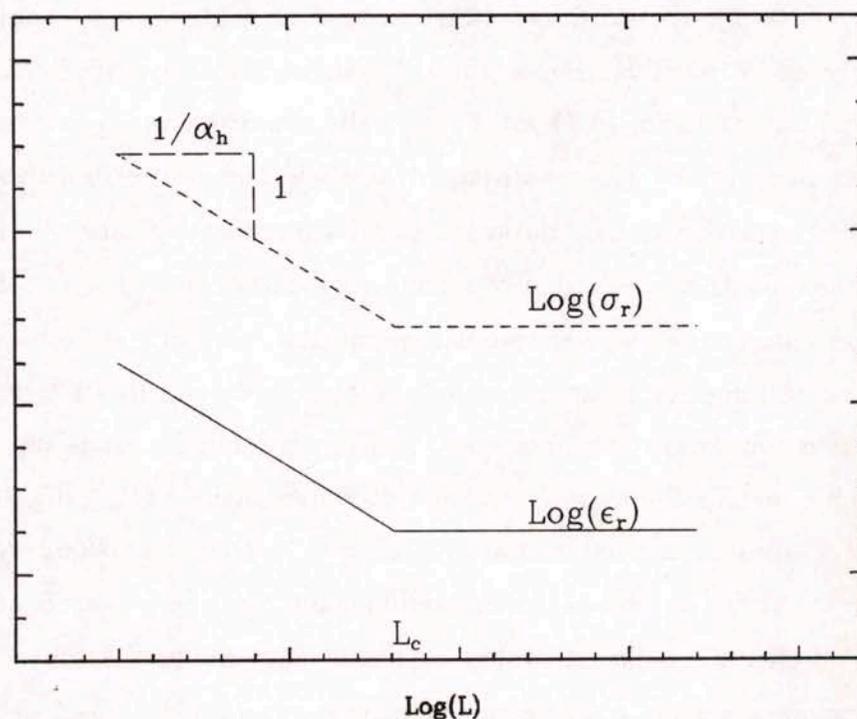


Figure 4.11: Courbes expérimentales

L'existence d'une taille critique  $L_c$  au delà de laquelle il y a absence d'effet d'échelle

(apparition d'un palier dans les courbes citées) constitue une première confirmation de la validité du modèle. Si tel est le cas, la détermination des paramètres du modèle est assez simple. En effet:

- dans le cas où la pente des deux courbes  $\alpha_{\hat{h}}$  a la forme (4.7), ceci nous permet de déterminer la valeur de  $\hat{h}$ .

- Pour la détermination de  $d$  et  $m$ , nous remarquons qu'ils sont liés par  $L_c = dg(\hat{h}) \cdot f(\hat{h})^{-m}$  où  $\hat{h}$  est déjà identifié et  $L_c$  est une donnée expérimentale. Ainsi, si  $d$  est connu,  $m$  est déterminé sans ambiguïté. De même pour un  $d$  connu, nous pouvons par extrapolation des courbes expérimentales identifier  $\frac{(\sigma_r^M)^{exp}}{(\epsilon_r^M)^{exp}}$  en fonction de  $d$ . Par ailleurs, nous savons que la valeur théorique de  $\frac{(\sigma_r^M)^{exp}}{(\epsilon_r^M)^{exp}}$  pour  $R^{max} = 1$  ne dépend que de  $\hat{h}$  et  $m$  (qui est déterminé si  $d$  est connu). Ainsi, connaissant la valeur de  $\hat{h}$  et de  $L_c$ , nous effectuons alors des simulations numériques afin de déterminer le rapport  $\frac{(\sigma_r^M)^{sim}}{(\epsilon_r^M)^{sim}}$  pour  $\hat{h}$  et  $m(d)$ . La valeur de  $d$  est donc celle qui réalise:

$$(4.13) \quad \frac{(\sigma_r^M)^{exp}}{(\epsilon_r^M)^{exp}} = \frac{(\sigma_r^M)^{sim}}{(\epsilon_r^M)^{sim}}$$

Cette procédure de calcul nous permet de déterminer  $d$  puis  $m$ .

- connaissant  $(\sigma_r^M)^{sim}$  et  $(\sigma_r^M)^{exp}$ , la valeur de  $R^{max}$  est telle que:

$$(4.14) \quad R^{max} = \frac{(\sigma_r^M)^{exp}}{(\sigma_r^M)^{sim}}$$

#### 4.4.4 Effet d'échelle de structure

Nous avons effectué des simulations numériques sur des structures carrées homothétiques fissurées chargées en mode I pour  $\hat{h} = 6$  et différentes valeurs de  $m$ . Nos résultats montrent que le modèle non-local avec  $\hat{h} = 6$  prédit les mêmes effets d'échelle de structure que le modèle local. En effet, pour  $m < 2$  nous obtenons une droite de pente  $-\frac{1}{4}$ , et pour  $m \geq 2$ , la courbe  $\text{Log}(\frac{\sigma_r}{\sigma_r^M}) - \text{Log}(\frac{L}{d})$  admet une pente à l'origine de  $-\frac{1}{4}$  et une asymptote de pente  $-\frac{1}{2}$  à l'infini (Figure 4.12). Notons  $B_{m,6}$  le point d'intersection de ces deux droites. Ce point parcourt la droite de pente  $-\frac{1}{4}$  issue de  $O$

quand  $m$  varie.

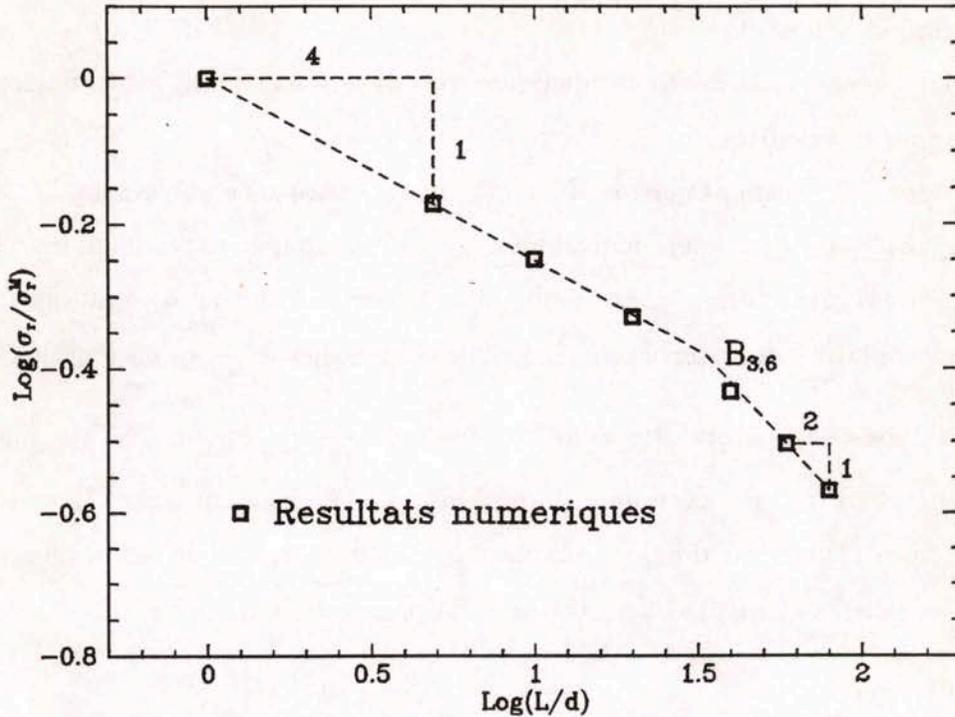


Figure 4.12: Effet d'échelle de structure pour  $\hat{h} = 6$  et  $m = 3$

Par ailleurs, on met en évidence un changement de comportement à  $m = 2$  comme dans le cas du modèle local.

Nous avons ensuite effectué des simulations pour  $\hat{h} = 54$  et différentes valeurs de  $m \geq 2$ . Les résultats montrent que pour  $\hat{h} = 54$  et  $m \geq 2$ , la courbe  $\text{Log}(\frac{\sigma_r}{\sigma_r^M}) - \text{Log}(\frac{L}{d})$  admet une pente à l'origine de  $-\frac{1}{8}$  et une asymptote de pente  $-\frac{1}{2}$  à l'infini (Figure 4.13). Notons  $B_{m,54}$  le point d'intersection de ces deux droites. Ce point parcourt la droite de pente  $-\frac{1}{8}$  issue de  $O$  quand  $m$  varie.

Dans le cas général ( $\hat{h}$  quelconque) et pour  $m > m_c^{\hat{h}}$ , la courbe  $\text{Log}(\frac{\sigma_r}{\sigma_r^M}) - \text{Log}(\frac{L}{d})$  admet une pente à l'origine de  $-\alpha_{\hat{h}}$  et une asymptote de pente  $-\frac{1}{2}$  à l'infini (Figure 4.). Le point  $B_{m,\hat{h}}$  d'intersection de ces deux droites parcourt la droite de pente  $-\alpha_{\hat{h}}$  issue de  $O$  quand  $m$  varie.

Nous retrouvons la courbe prédite par la théorie de l'endommagement non-local déterministe avec une loi d'endommagement radoucissante pour  $\hat{h} = +\infty$  (car  $\alpha_{+\infty} =$

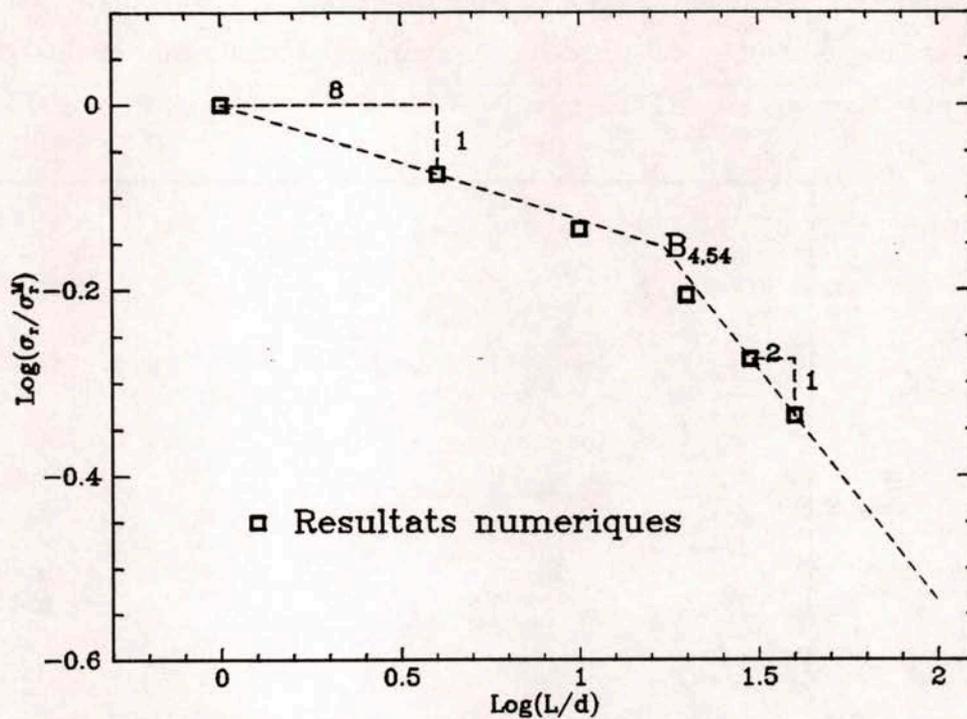
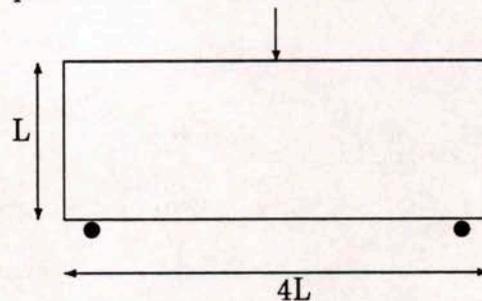


Figure 4.13: Effet d'échelle de structure pour  $\hat{h} = 54$  et  $m = 4$

0) et des valeurs de  $m \geq m_c^{\hat{h}}$  pas trop grandes. On retrouve aussi pour  $m$  très grand, la M.L.R qui correspond dans notre modèle à un modèle non-local déterministe avec une loi d'endommagement brutale.

#### 4.4.5 Effet d'échelle de gradient

Nous avons effectué des simulations numériques sur une structure non fissurée soumise à une flexion trois points.



Nous avons adopté le même critère de rupture que (4.1) sauf qu'on ne casse que les

poutres qui sont en traction:  $F(i) \geq 0$ . Nous avons effectué des simulations numériques pour  $\hat{h} = 54$  et différentes valeurs de  $m$ . Les résultats obtenus sont qualitativement en accord avec les résultats de L'Hermite.

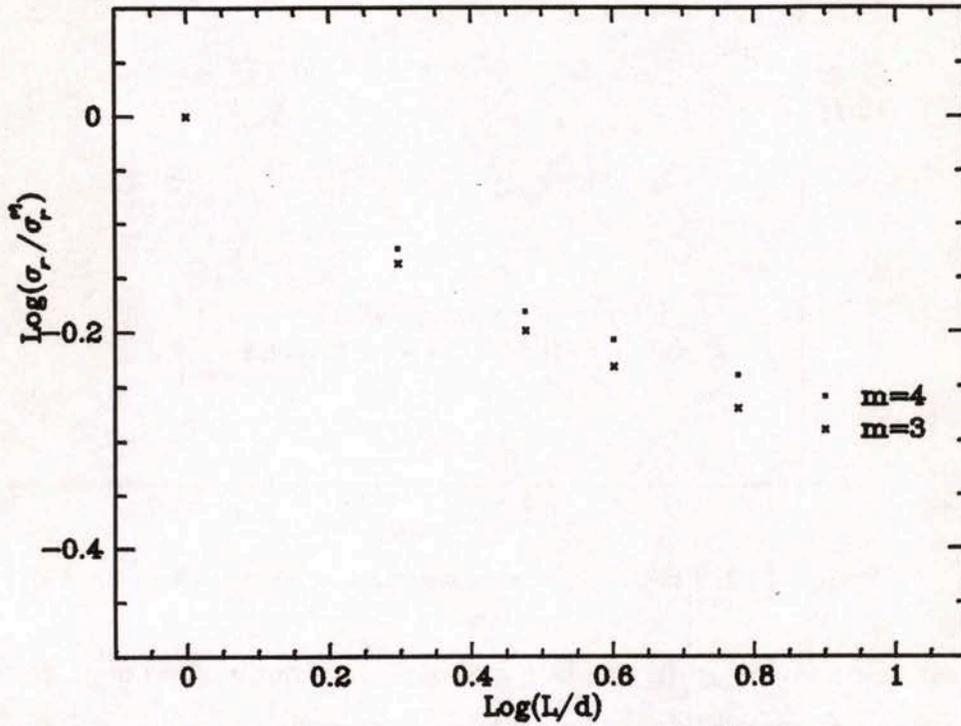


Figure 4.14: Effet d'échelle de gradient pour  $\hat{h} = 54$

## 4.5 CONCLUSION

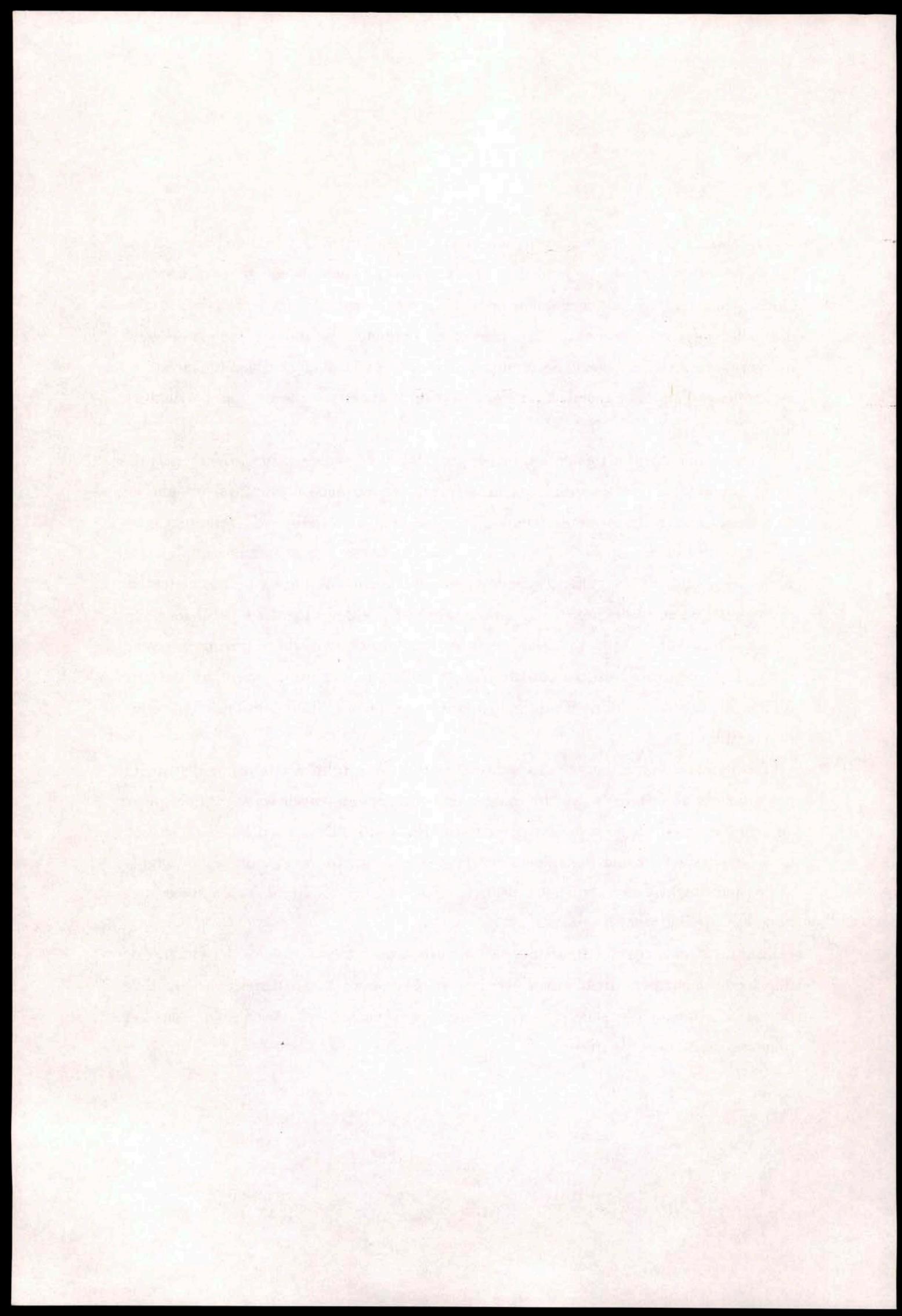
Le choix d'un critère de rupture non-local ainsi que l'introduction d'un paramètre  $\hat{h}$ , indépendant de la finesse de maillage, nous a permis d'assurer la cohérence du modèle. Nous avons montré que ce modèle permet de rendre compte des trois types d'effet d'échelle: effet de volume, de structure et de gradient. Le modèle proposé permet de retrouver les effets d'échelle prédits par le modèle local du troisième chapitre et les modèles d'endommagement non-locaux déterministes comme des cas particuliers limites.

Nous avons ensuite mis en évidence, pour toute valeur de  $\hat{h}$ , une valeur critique de  $m$  notée  $m_c^{\hat{h}}$  au dessous de laquelle la contrainte moyenne de rupture suit une loi de puissance et au dessous de laquelle il existe une taille critique  $L_c$  telle que pour une structure carrée de taille  $L$  supérieure à  $L_c$  soumise à une traction simple cette structure n'exhibe plus d'effet d'échelle de volume. Ce modèle nous a permis de mettre en évidence de nouvelles lois de puissance qui sont reliés simplement à  $\hat{h}$  par la loi (4.7).

La connaissance de la variation de  $L_c$  en fonction de  $m$  et de  $\hat{h}$  ainsi que la variation de la pente  $\alpha_{\hat{h}}$  en fonction de  $\hat{h}$  nous ont permis de proposer une procédure d'identification des paramètres du modèle sur une expérience bidimensionnelle de traction simple.

La discussion faite dans ce chapitre montre que les résultats obtenus ne dépendent pas du choix du critère de rupture et de la manière dont on corrèle les seuils de rupture au sein d'un élément de volume représentatif. Nous avons alors abouti à une partition de la structure en zones homogènes (grains). Le paramètre  $\hat{h}$  est alors le nombre de grains par élément de volume. Ce paramètre modélise le nombre d'étapes nécessaires pour rompre l'élément de volume.

Enfin, dans le cas des structures non fissurées, nous avons prolongé les champs de déplacement par périodicité afin d'éviter les effets de bord. Cette démarche ne modifie pas les lois d'effet d'échelle trouvées étant donné que nous obtenons les mêmes lois pour des structures fissurées .



# Chapitre 5

## Applications et perspectives

### 5.1- INTRODUCTION

### 5.2- SCHÉMAS DE FISSURATION

5.2.1: Modèle local

5.2.2: Interprétation des résultats

5.2.3: Modèle non-local

5.2.4: Interprétation des résultats

### 5.3 APPLICATIONS À DES STRUCTURES RÉELLES

5.3.1: Flexion trois points d'une poutre en béton armé

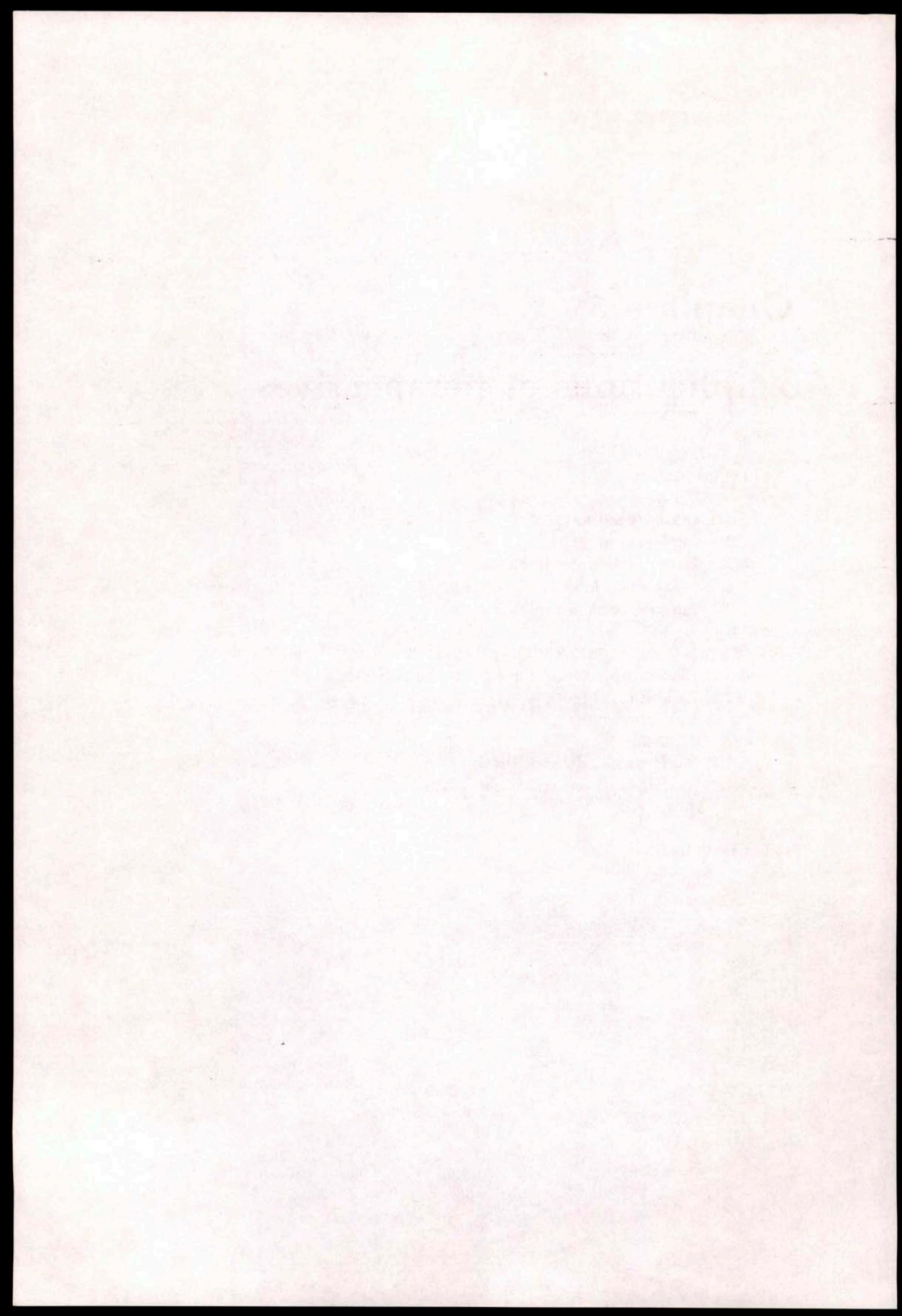
5.3.2: Essai P.I.E.D

### 5.4 PERSPECTIVES

5.4.1: Modèle non-local radoucissant

5.4.2: Modèle local élastoplastique fragile

### 5.5- CONCLUSION



## 5.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous présentons quelques exemples d'application du modèle local et non-local sur des structures réelles.

Nous commençons par présenter et commenter quelques schémas de fissuration dans le cas de structures fissurées et non fissurées. Nous discuterons en particulier le caractère diffus et localisé de la rupture et nous commenterons quelques aspects de la localisation.

Dans la deuxième partie, nous présentons deux exemples d'application: expérience de flexion trois points et l'exemple de l'essai P.I.E.D et nous comparerons les résultats obtenus à l'aide des modèles local et non-local avec les résultats obtenus à l'aide d'autres approches classiques. Nous montrons que notre modèle reproduit de manière satisfaisante les schémas de fissuration observés expérimentalement. Nous retrouvons en particulier la multifissuration obtenu expérimentalement dans ces deux essais.

Dans la troisième partie, nous présentons quelques perspectives de cette étude. Nous montrerons que le comportement élastique fragile des poutres n'intervient pas directement dans les résultats présentés dans le quatrième chapitre. Pour cela, nous étudierons deux nouveaux modèles. Dans le premier modèle, le critère de rupture est non-local mais la rupture en un point  $x$  consiste en un affaiblissement uniforme de la rigidité des poutres qui sont situés dans le volume représentatif entourant  $x$ . Nous montrons que ce modèle donne les mêmes lois d'effets d'échelle que le modèle non-local du quatrième chapitre. Dans le second modèle, le comportement des poutres est local. Nous étudions le cas où chaque poutre suit une loi élastoplastique parfaite jusqu'à ce que la déformation plastique atteigne un seuil  $\beta R_i$  à partir duquel la poutre se rompt brutalement. Ici  $\beta \geq 0$  est une constante et  $R_i$  est la limite d'élasticité de la poutre  $i$  tirée aléatoirement selon une loi de Weibull de paramètre  $m$ . Dans le cas où  $\beta = 0$ , le comportement des poutres est élastique fragile et nous retrouvons le modèle local du troisième chapitre. Dans le cas où  $\beta = +\infty$ , le comportement des poutres est plastique parfait. Nous obtenons, dans le cas  $\beta \neq +\infty$ , les mêmes lois d'effets d'échelle que pour le modèle local du troisième chapitre. Ceci nous permettra de conclure sur l'universalité des lois d'échelle trouvées.



## 5.2 SCHÉMAS DE FISSURATION

Dans cette partie, nous présentons quelques schémas de fissuration obtenus dans le cas de structures fissurées et non fissurées. Nous présentons des simulations dans le cas d'une structure non fissurée soumise à une traction directe et dans le cas d'une structure fissurée chargée en mode I. Dans le cas du modèle local, nous présentons des simulations pour  $m < 2$  et  $m \geq 2$  et pour un maillage  $\frac{L}{l} = 60$  (fig. 5.2). Dans le cas du modèle non-local, nous présentons des simulations pour  $\hat{h} = 54$  avec  $m < m_c^{\hat{h}}$  et  $m \geq m_c^{\hat{h}}$  sur une structure telle que  $\frac{L}{l} = 30$  et  $\frac{d}{l} = 3$ . Le but de cette partie est d'observer l'influence du désordre sur le schéma de fissuration.

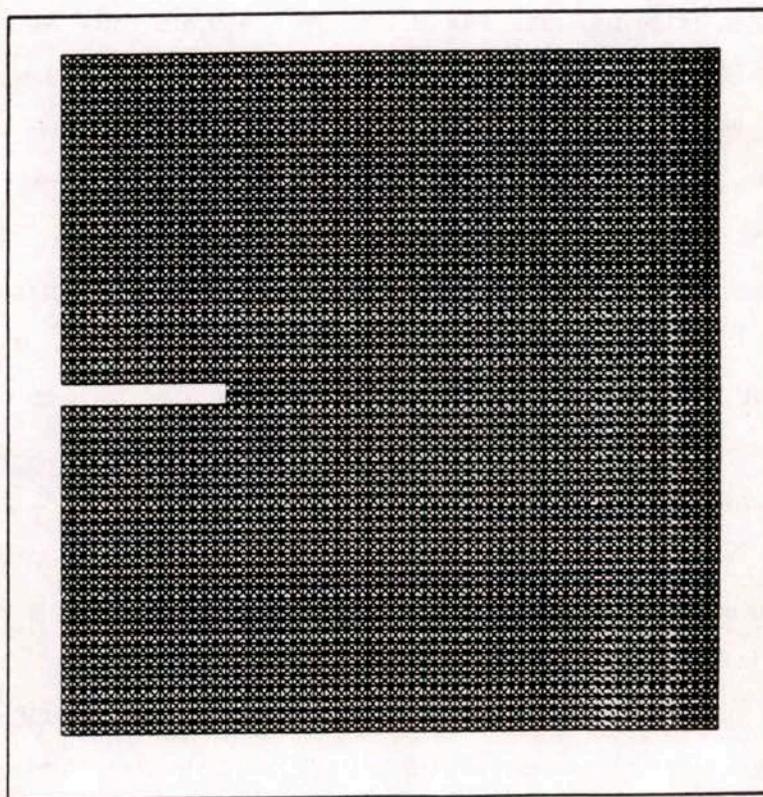


Figure 5.2: Maillage de la structure fissurée

### 5.2.1 Modèle local

#### 1- Structures non fissurées:

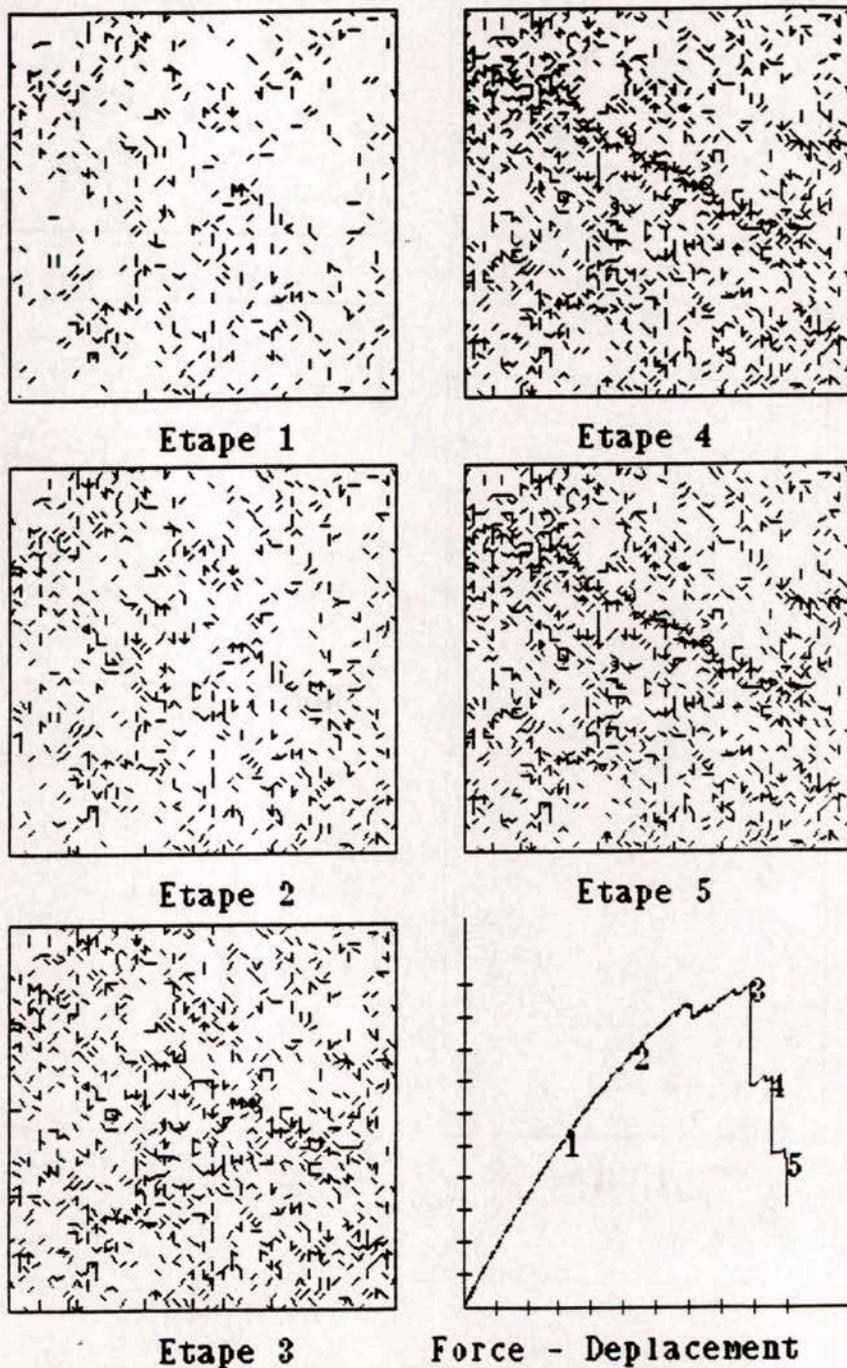


Figure 5.3: Différentes étapes de rupture:  $m = 1$

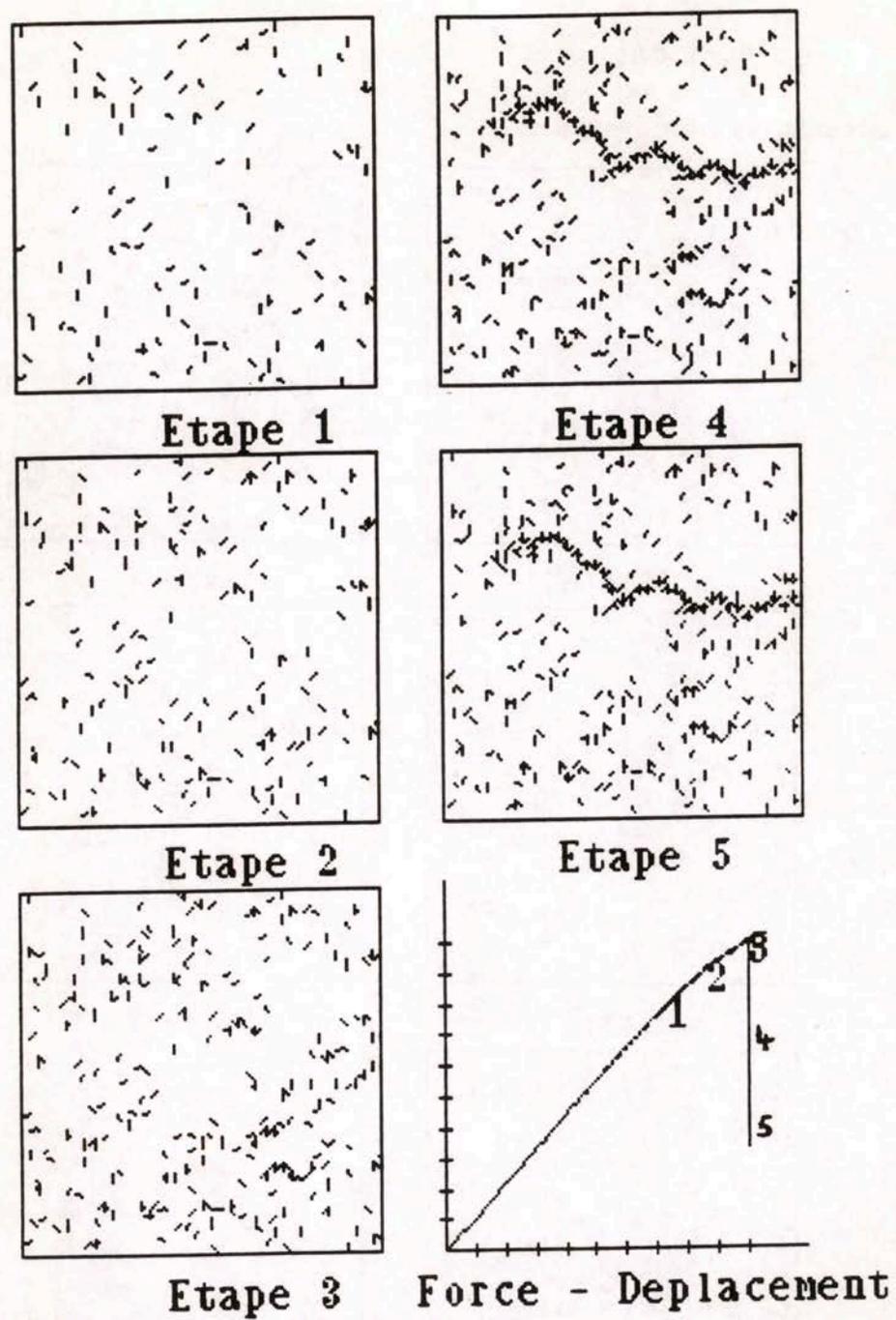


Figure 5.4: Différentes étapes de rupture:  $m = 3$

## 2- Structures fissurées

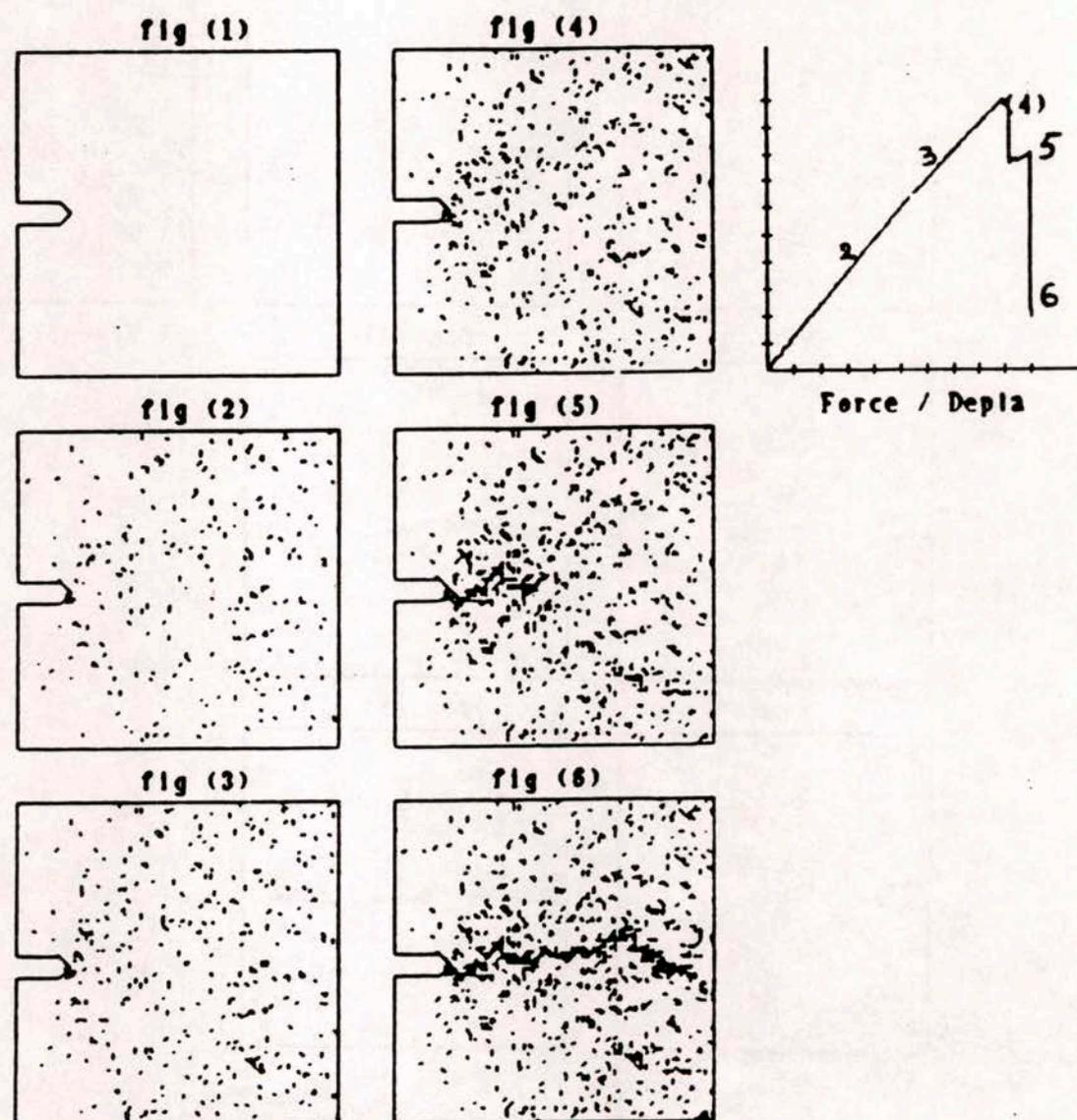


Figure 5.5: Différentes étapes de rupture:  $m = 1$

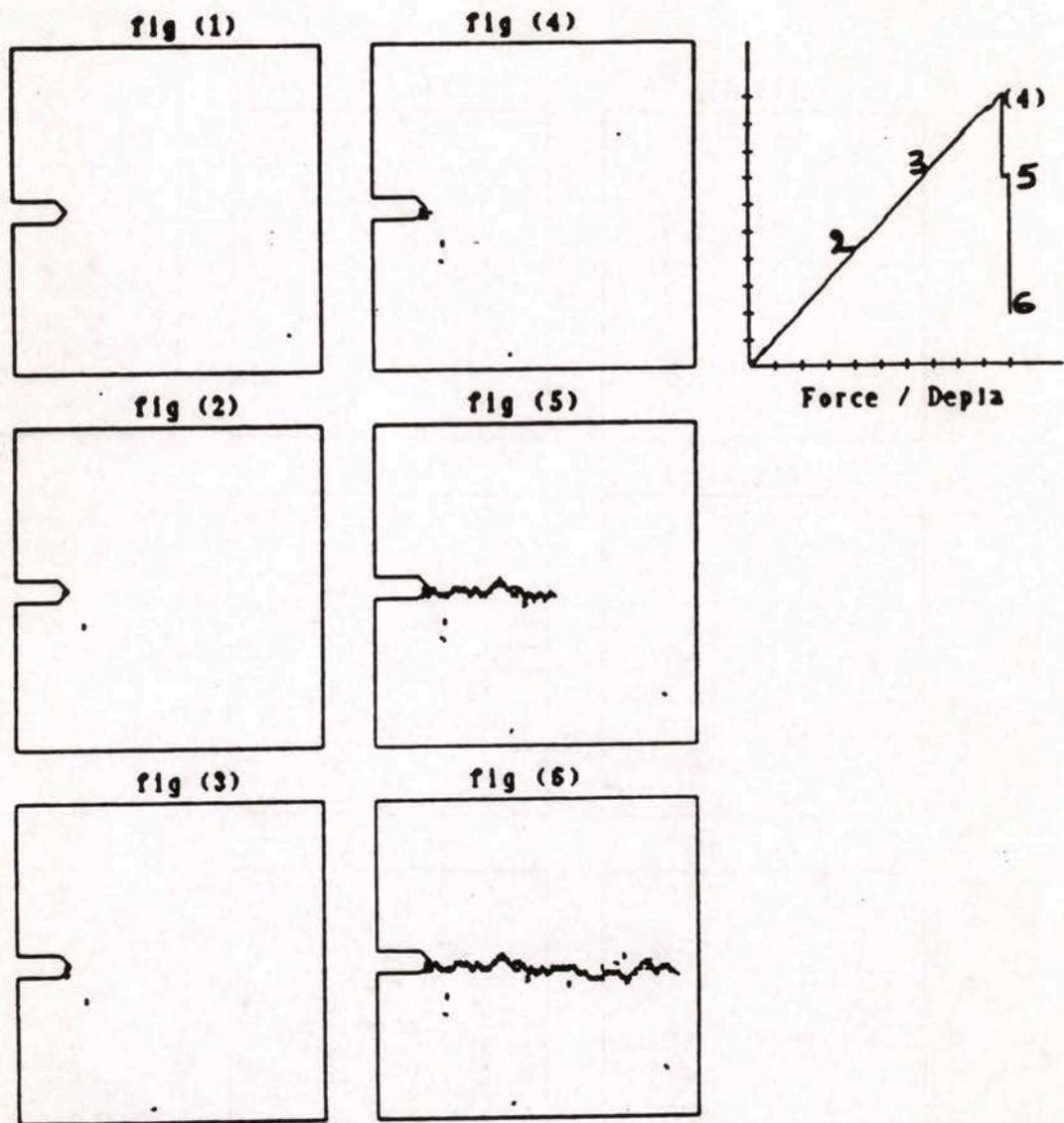


Figure 5.6: Différentes étapes de rupture:  $m = 3$

### 5.2.2 Interprétation des résultats

Le critère de rupture est le rapport entre le champ de déformation local et le seuil de rupture choisi aléatoirement. Ainsi, on peut décrire schématiquement la rupture comme une compétition entre deux effets antagonistes; d'une part un effet dispersif qui ne prend en compte que la dispersion des limites à la rupture et qui tend à casser les poutres aléatoirement dans la structure indépendamment du champ de déformation local. Cet effet est dû au caractère aléatoire. D'autre part, un effet attractif qui ne prend en compte que le champ de déformation local et qui tend à casser les poutres indépendamment de leurs limites à la rupture. Cet effet est dû à la concentration de la contrainte autour du premier défaut.

La rupture de la structure se fait en trois étapes. Dans la première étape, le caractère dispersif joue un rôle prépondérant. Les poutres cassent aléatoirement dans la structure dans l'ordre croissant de leurs limites à la rupture comme si le champ de déformation était homogène. La deuxième étape est une compétition entre les deux effets: attractif et dispersif. Enfin, dans la troisième étape de la rupture, le caractère attractif joue un rôle prépondérant. Dans cette étape, nous obtenons une localisation de l'endommagement qui aboutit à la formation d'une fissure et à une rupture instable de la structure. La localisation se fait sur une seule maille de la discrétisation et aboutit à la formation d'une fissure. Quand  $m$  tend vers l'infini, les deux premières étapes deviennent négligeables et on tend vers une rupture de type fragile; la rupture de la première poutre conduit à la rupture instable de la structure. On parle alors d'endommagement localisé. Par contre, quand  $m$  diminue, la première étape devient prépondérante. On parle d'endommagement diffus. La rupture de la structure se produit toujours de manière instable et la localisation se fait aussi sur une seule maille de la discrétisation.

L'étude effectuée dans ce travail a montré que les effets d'échelle dépendent de la position de  $m$  par rapport à 2. Les schémas de fissuration obtenus montrent que pour  $m < 2$ , nous avons un endommagement diffus quelque soit la taille de la structure. Quand  $m \geq 2$ , l'endommagement est diffus pour des structures de "petites" tailles et localisé pour des structures de "grandes" tailles. Ceci reconforte, les résultats obtenus

pour le modèle local, à savoir que pour  $m \geq 2$  et pour des structures de petites tailles, nous obtenons les mêmes effets d'échelle que pour  $m < 2$ . Ce résultat infirme les conclusions obtenues à l'aide de l'approche de Flory.

Il faut aussi noter que pour  $m \geq 2$  et dans le cas des structures fissurées, nos observations visuelles montrent qu'une localisation se produit dans une "certaine zone" autour de la pointe de la fissure après le développement d'un endommagement diffus au sein de cette zone. Cependant, nous continuons à avoir des ruptures aléatoires de poutres en dehors de cette zone. Nous observons aussi que la taille de cette zone augmente avec la taille de la structure. malheureusement, nous n'avons trouvé à ce jour aucun moyen systématique de définir rigoureusement cette zone et d'évaluer sa taille en fonction de la taille de la structure. Nous pensons néanmoins qu'elle correspond à la zone d'élaboration et nous trouvons que sa taille dépend de la taille de la structure, de la valeur de  $m$  et du type de chargement. Ainsi, elle ne peut en aucun cas être considérée comme caractéristique du matériau.

De même, il semble difficile de donner un sens précis à la taille critique  $L_c(m)$ , dans le cas des structures non fissurées, à partir des schémas de fissuration obtenus.

### 5.2.3 Modèle non-local

#### 1- Structures non fissurées:

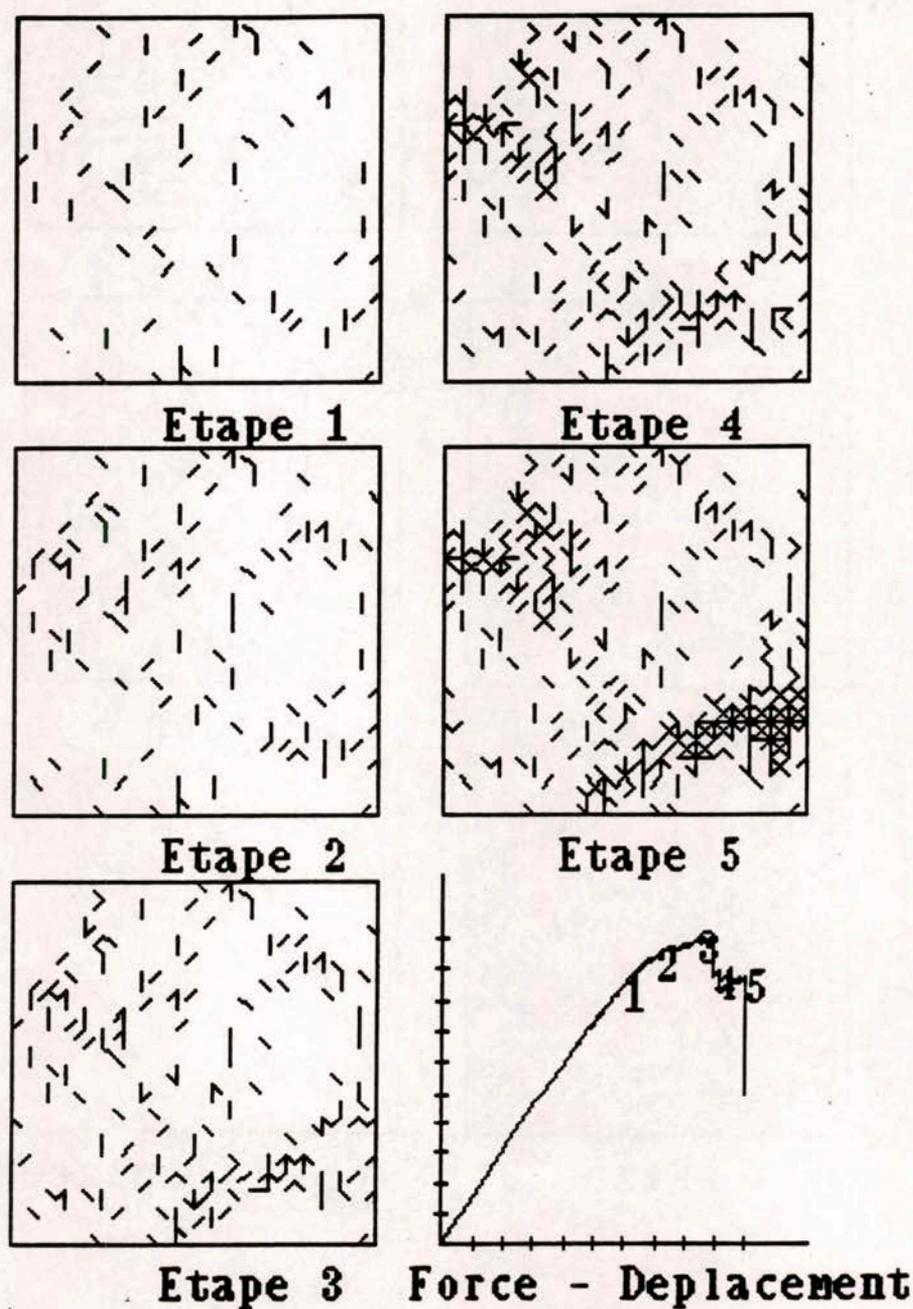


Figure 5.7: Différentes étapes de rupture:  $m = 3$  et  $\hat{h} = 54$

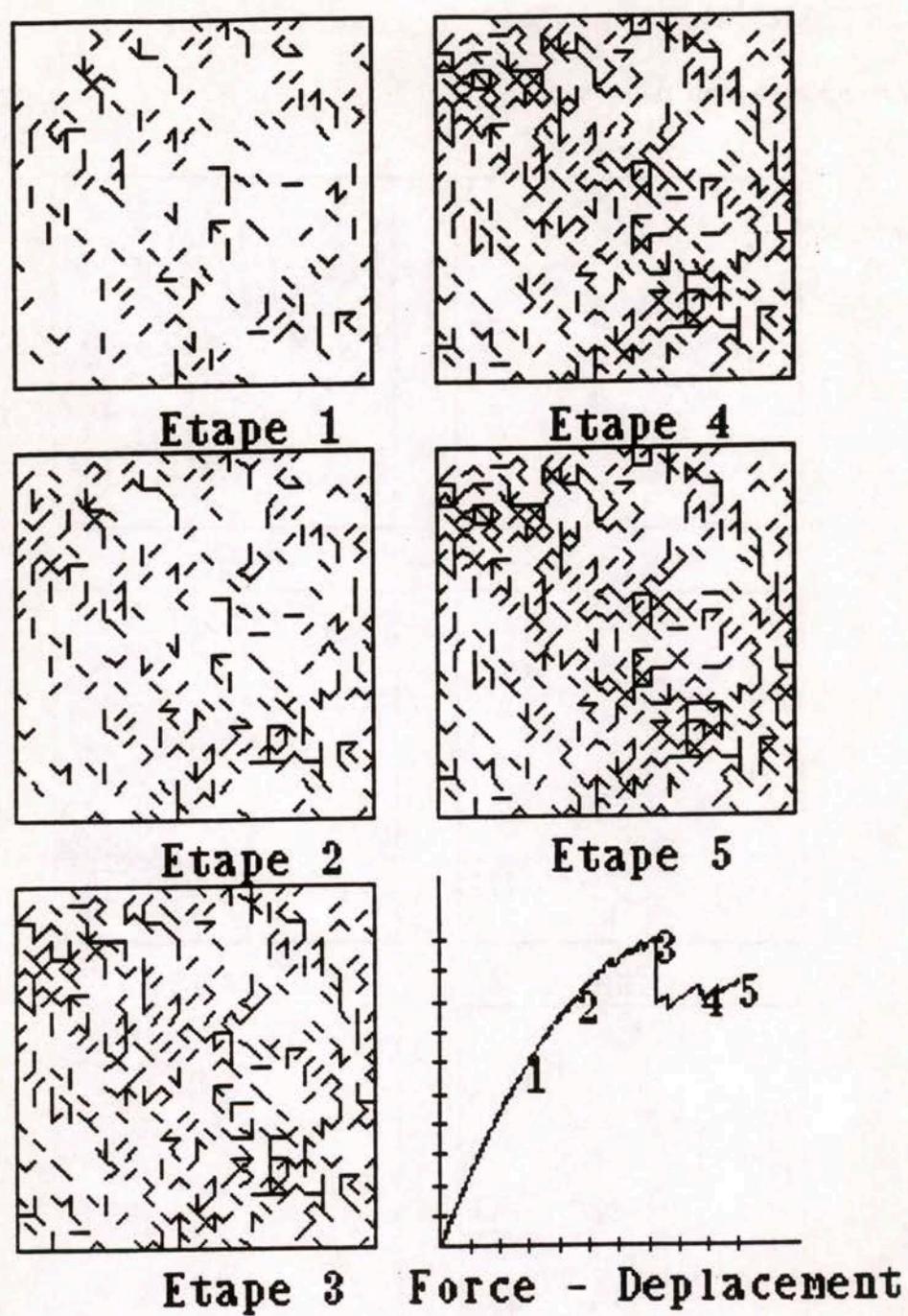


Figure 5.8: Différentes étapes de rupture:  $m = 1$  et  $\dot{h} = 54$

2- Structures fissurées:

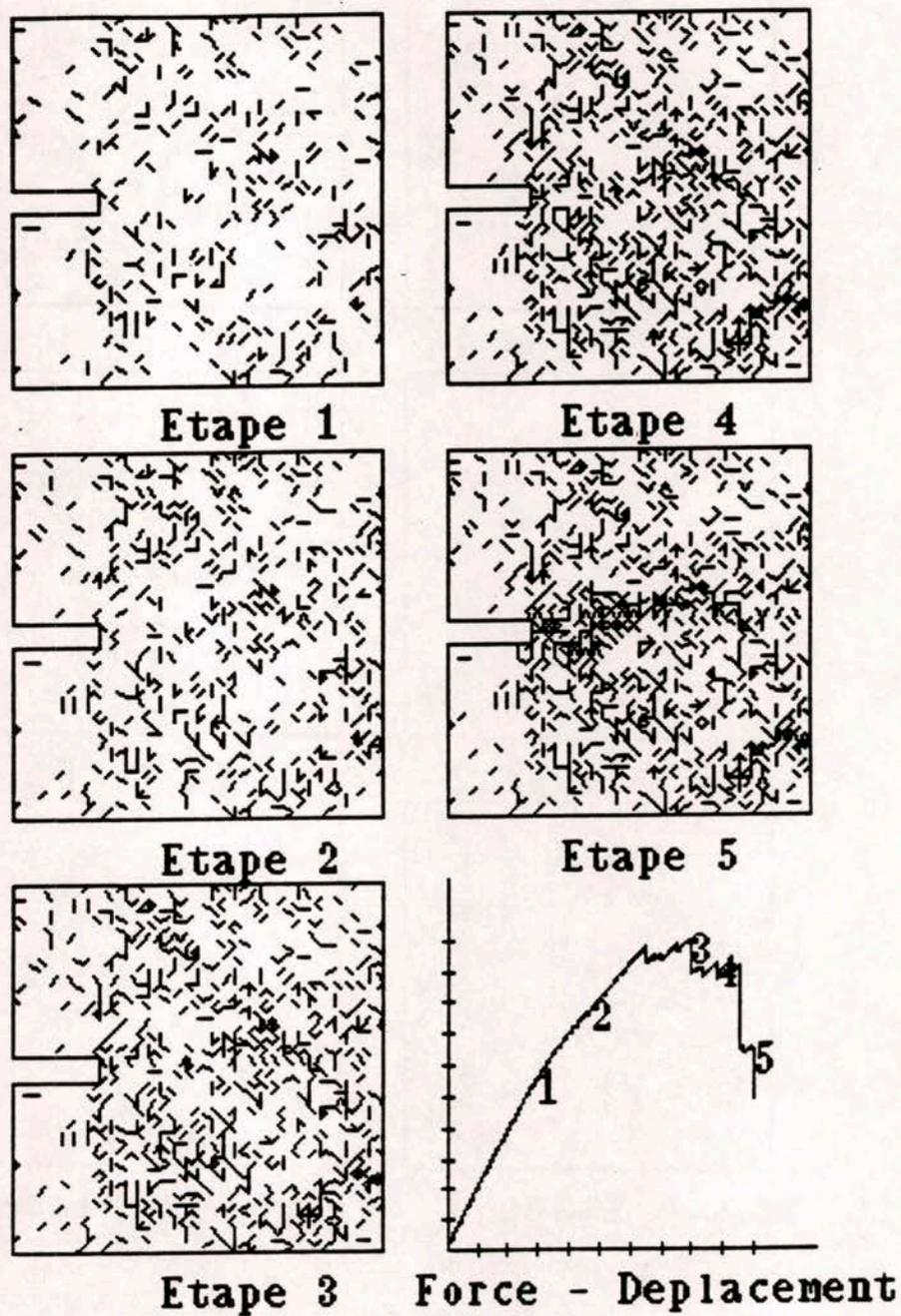


Figure 5.9: Différentes étapes de rupture:  $m = 1$  et  $\hat{h} = 54$

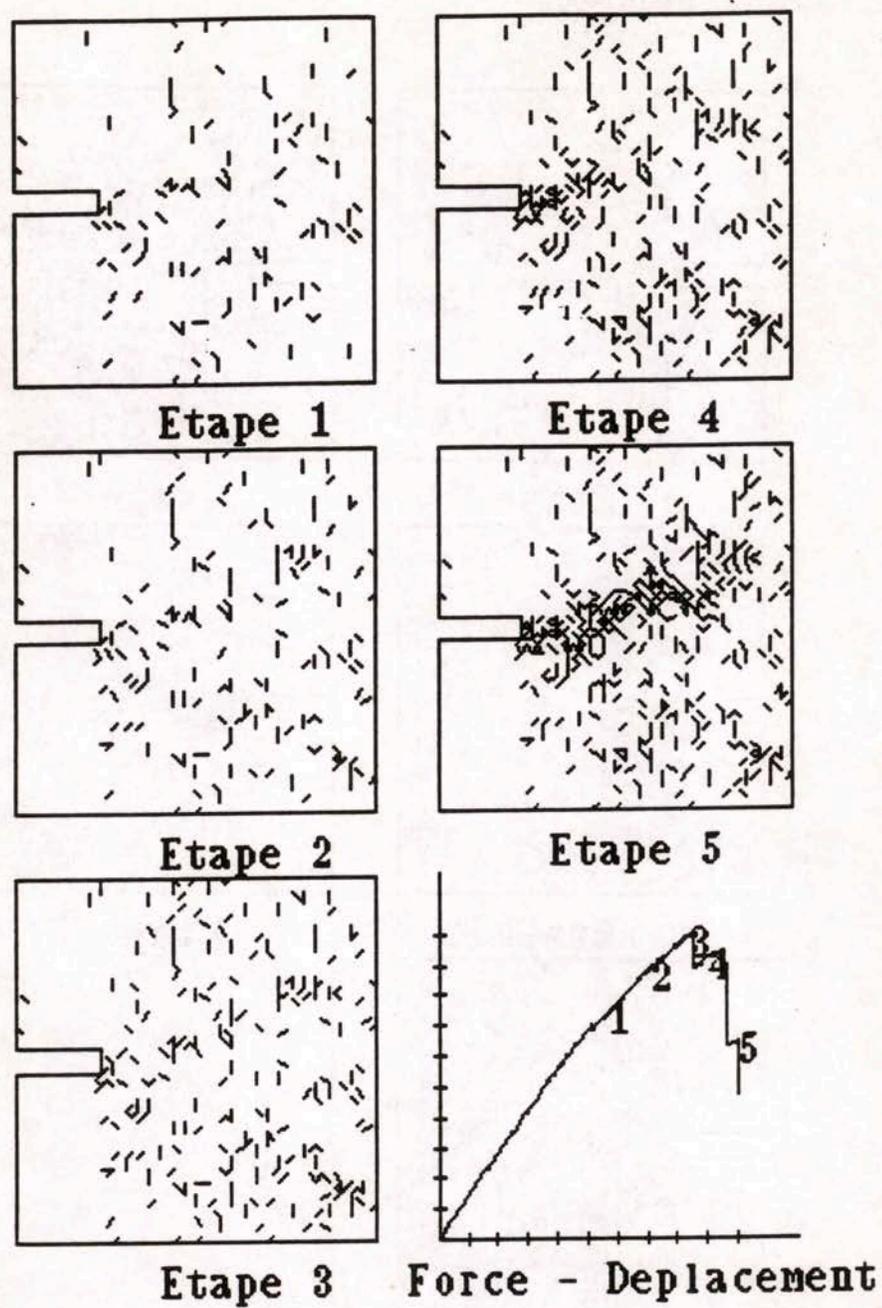


Figure 5.10: Différentes étapes de rupture:  $m = 3$  et  $\hat{h} = 54$

#### 5.2.4 Interprétation des résultats

Dans le cas du modèle non-local, nous obtenons les mêmes schémas de fissuration que pour le modèle local sauf que la localisation ne se produit plus sur une seule maille de la discrétisation mais sur une zone de taille  $d$  qui est celle du volume représentatif et ceci indépendamment de l'hétérogénéité et de la taille de la structure. Nous obtenons aussi les mêmes régimes de rupture que dans le cas du modèle local selon que  $m$  est inférieur ou supérieur à  $m_c^h$ . Par contre, ce modèle nous permet de souligner, une fois de plus, que la taille de localisation, qui est égale à  $d$ , est différente de la taille de la zone d'élaboration. L'assimilation de la zone de localisation à la zone d'élaboration est justifiée dans le cas où le matériau est homogène  $m \rightarrow +\infty$ . C'est sur cette base que les modèles d'endommagement non-locaux déterministes trouvent leur justification. Par contre, dans le cas d'un matériau hétérogène, il faut séparer zone de localisation et zone d'élaboration. Les modèles d'endommagement déterministes se basent sur des observations expérimentales qui estiment la taille de la zone d'élaboration. Cette taille est ensuite introduite comme taille caractéristique de la structure dans laquelle on effectue la moyenne. Cette démarche nous semble justifiée uniquement dans le cas des matériaux faiblement hétérogènes.

### 5.3 APPLICATIONS À DES STRUCTURES RÉELLES

Dans ce qui suit, nous présentons quelques applications du modèle local à deux expériences: la flexion trois points et l'essai P.I.E.D. Le but de cette partie étant de comparer les schémas de fissuration obtenus aux schémas de fissuration observés expérimentalement.

#### 5.3.1 Flexion trois points d'une poutre en béton armé

Nous avons simulé la rupture d'une structure non fissurée en béton armé soumise à une flexion trois points. Sur la figure 5.11 est représenté la géométrie de la structure, les conditions aux limites et le maillage adopté.

La figure 5.12 représente les schémas de fissuration obtenus ainsi que la réponse force - déplacement.

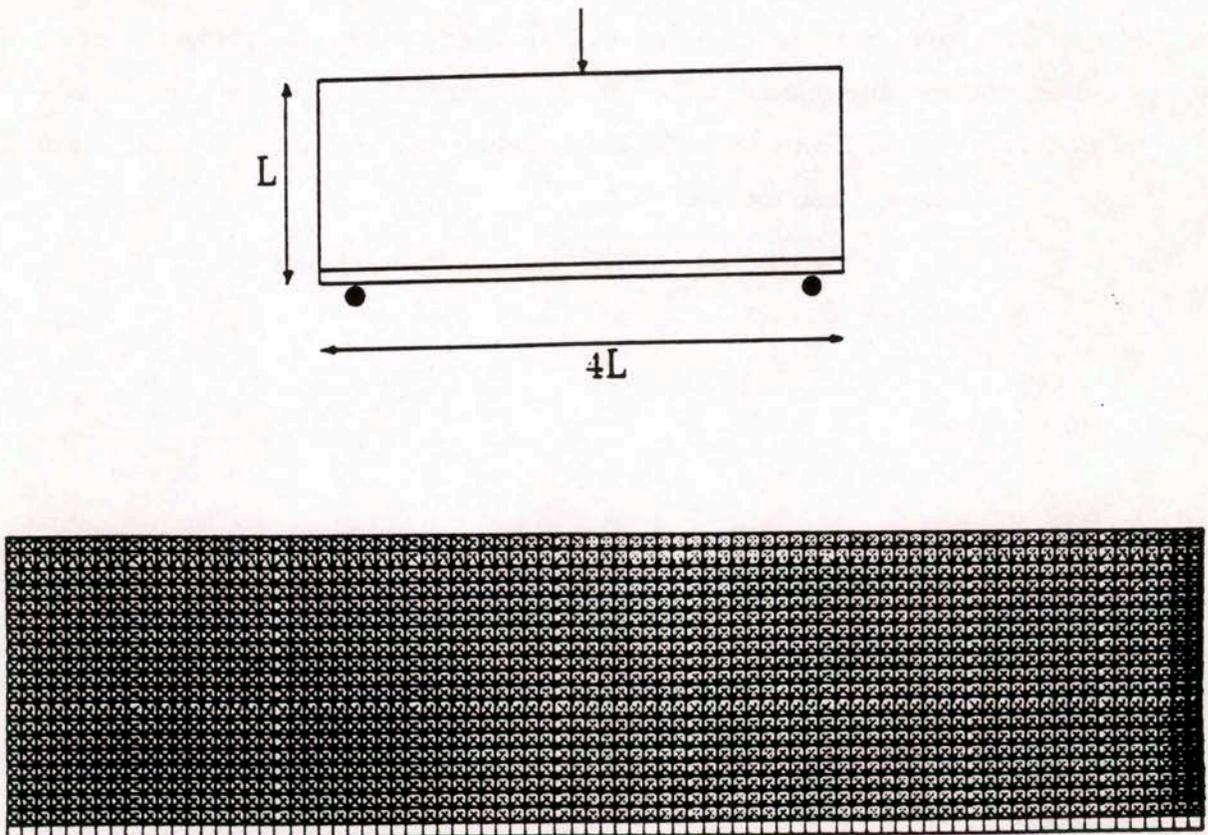


Figure 5.11: Structure en flexion trois points

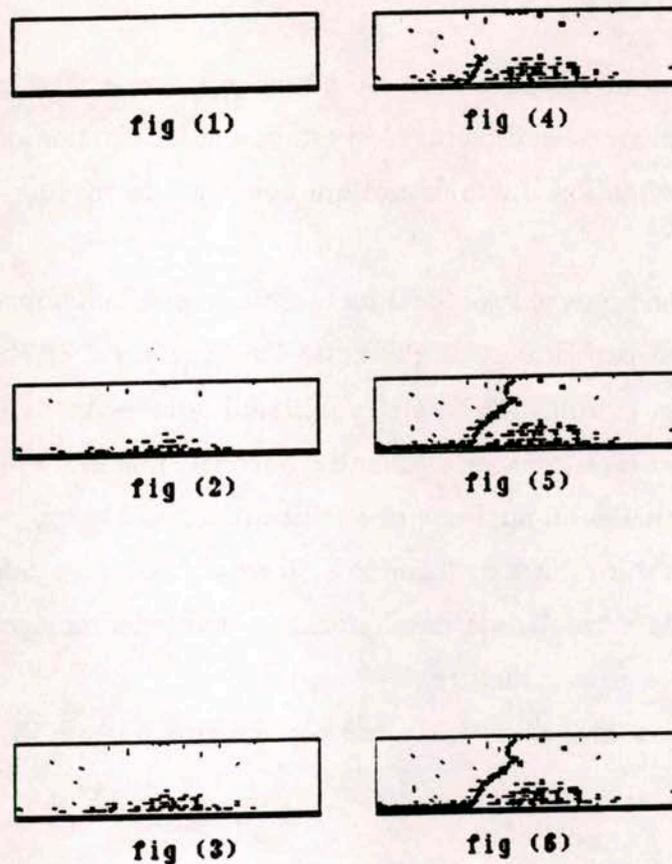


Figure 5.12: Différentes étapes de rupture  $m = 2.5$

Les modèles local et non-local permettent de mettre en évidence une multifissuration de la structure conformément aux observations expérimentales. La rupture de la structure se produit de manière dissymétrique et ne privilégie pas la fibre médiane contrairement aux résultats obtenus à l'aide des approches déterministes.

### 5.3.2 Essai P.I.E.D

L'identification du comportement du béton en traction n'est pas possible à l'aide d'une expérience en traction directe. Ceci est dû à la localisation de l'endommagement qui provoque la formation d'une fissure qui aboutit à la rupture de la structure par instabilité.

L'essai P.I.E.D désigne le Procédé d'Identification de l'Endommagement Diffus. Cet essai a été proposé par Bazant et Pijaudier-Cabot [Bazant et Pijaudier-Cabot, 1987] ensuite par Mazars et coll. [Mazars et coll., 1989] pour éviter la localisation de l'endommagement. Cet essai consiste à coller des barrettes métalliques en aluminium ou en acier à travers lesquelles on applique une sollicitation. Les barres métalliques ont pour effet de répartir les contraintes de manière à garder un champ de déformation homogène dans le béton et de permettre le développement d'un endommagement diffus jusqu'à la rupture complète de la structure.

Le principe du montage est représenté sur la figure (Figure 5.13):

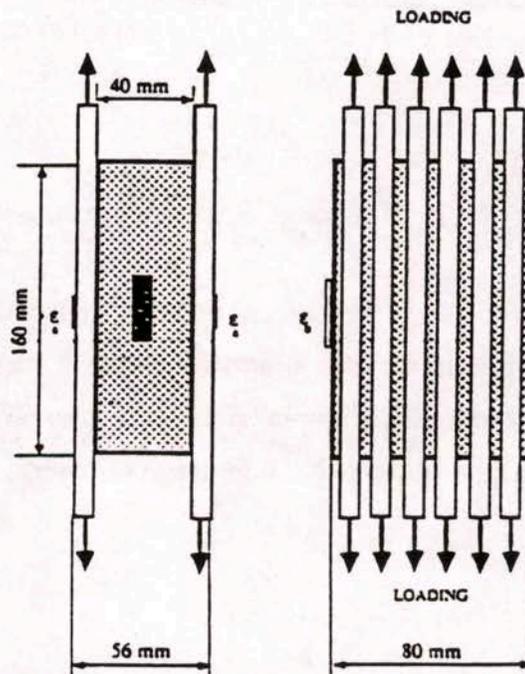


Figure 5.13: Essai P.I.E.D

On mesure au cours de l'essai l'effort appliqué et les déformations du béton et des barrettes à l'aide de jauges extensométriques ( $\epsilon_a$ ,  $\epsilon_b$  Figure 5.13).

La courbe  $\sigma - \epsilon$  du comportement du béton est déduite à partir de la courbe effort appliqué - déformation  $\epsilon_b$  en supposant un comportement linéaire élastique pour les barrettes d'aluminium et en considérant l'équilibre de la section centrale:

$$(5.1) \quad \sigma_b = \frac{F - E_a \epsilon_a S_a}{S_b}$$

où  $E_a$  est le module élastique de l'aluminium et  $S_a$ ,  $S_b$  les sections respectives des barrettes et de l'éprouvette en béton.

Les résultats expérimentaux montrent que l'endommagement n'est pas diffus et qu'il se produit en réalité une multi-localisation que le modèle probabiliste de l'endommagement [Breysse, 1988] décrit dans le premier chapitre permet de reproduire.

La différence essentielle de l'essai P.I.E.D avec une expérience de traction directe est que dans le cas de la traction directe l'apparition de la première fissure provoque la rupture de la structure. Par contre, dans le cas de l'essai P.I.E.D, la présence des barres métalliques latérales permet de répartir les contraintes dans le béton de manière à ce que les deux morceaux obtenus après l'apparition de la première fissure se comportent de manière indépendante. Ceci aboutit à une multi-fissuration du béton contrairement au résultat souhaité. La conclusion essentielle des résultats expérimentaux est que le comportement obtenu est un comportement de structure et non de matériau.

Nous avons simulé cet essai à l'aide du modèle local pour plusieurs valeurs de  $m$ . Les résultats obtenus montrent une multifissuration du béton conformément aux observations expérimentales (Figure 5.14). Les modèles d'endommagement déterministes locaux et non-locaux ne permettent pas de rendre compte de ce phénomène. On représente les résultats obtenus à l'aide de ces deux approches (Figure 5.15)

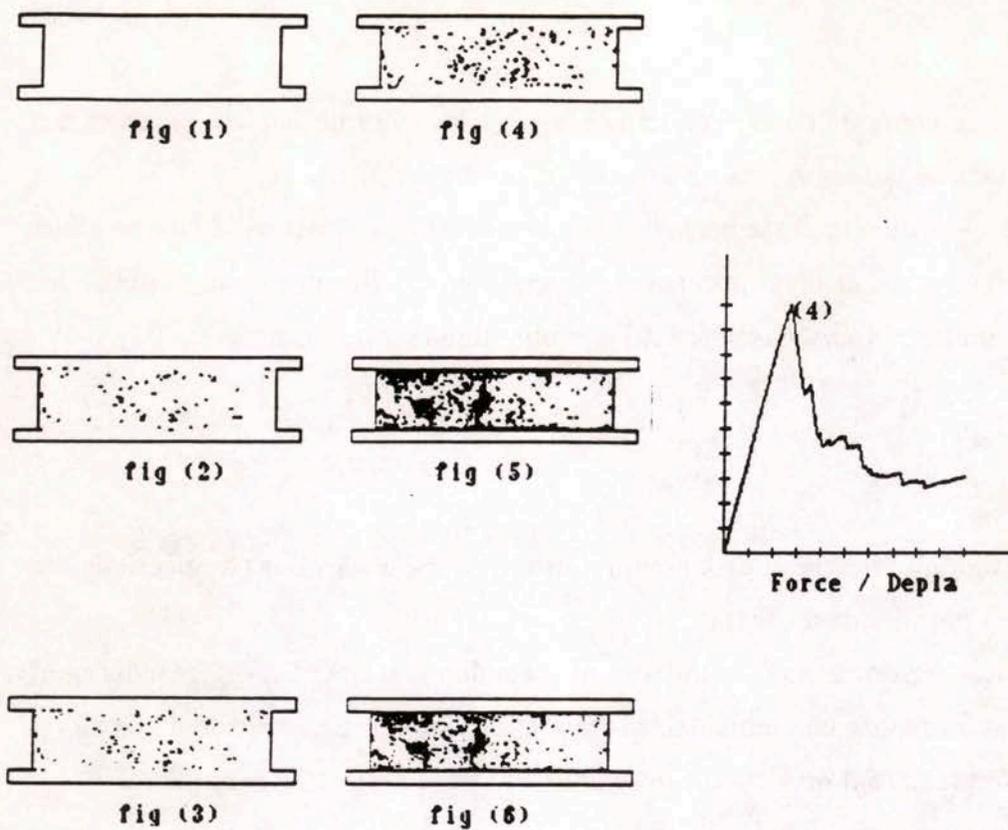


Figure 5.14: Différentes étapes de rupture :  $m = 1$

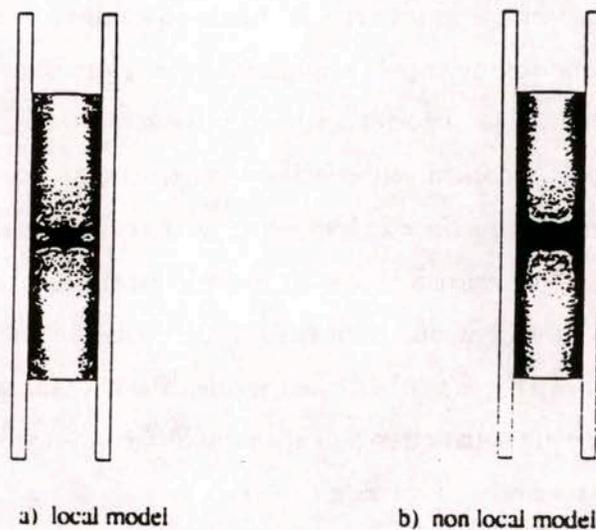


Figure 5.15: Résultats obtenus à l'aide des approches déterministes

## 5.4 PERSPECTIVES

La discussion faite dans le quatrième chapitre a montré que les effets d'échelle ne dépendent que du nombre de ruptures indépendantes nécessaires pour rompre le volume représentatif. Cette discussion a aussi montré que les effets d'échelle trouvés sont indépendants du critère de rupture et de la manière dont sont corrélées les poutres. C'est en ce sens que nous avons parlé de l'universalité des lois d'échelle trouvées. L'un des aspects qu'il nous reste à discuter est l'influence de la loi de comportement des poutres. Les résultats obtenus laissent penser que seul l'affaiblissement progressif global du volume représentatif est important indépendamment de la manière dont on décrit la rupture locale en un point  $x$ .

Afin de tester cette conjecture, nous nous proposons d'étudier deux modèles. Dans le premier modèle, la rupture en un point  $x$  se traduit directement par un affaiblissement uniforme de la rigidité de toutes les poutres situées dans le volume représentatif entourant  $x$ . Dans le deuxième modèle, chaque poutre suit une loi élasto-plastique parfaite fragile.

### 5.4.1 Modèle non-local radoucissant

Dans ce modèle, nous adoptons exactement le même critère de rupture non-local et la même distribution aléatoire des seuils de rupture  $R_i$  que ceux décrits dans le quatrième chapitre. La seule différence est que dans le présent modèle la violation du critère de rupture dans une poutre  $i$  de centre  $c_i$  n'annule pas sa rigidité mais diminue la rigidité de toutes les poutres  $j$  situées dans le volume représentatif centré en  $c_i$ . Une fois le critère atteint dans une poutre, il n'est plus à respecter dans les étapes ultérieures. Ainsi, si  $n^{er}$  ( $= 6(\frac{d}{l})^2$ ) est le nombre de poutres situées dans un volume représentatif et  $k_i^{er}$  est le nombre de critères qui ont déjà été violés dans le volume représentatif centré sur la poutre  $i$ , alors on a :

$$(5.2) \quad \rho_j^a = \frac{n^{er} - k_i^{er}}{n^{er}} \rho_j \quad \eta_j^a = \frac{n^{er} - k_i^{er}}{n^{er}} \eta_j$$

où  $(\rho_j^a, \eta_j^a)$  et  $((\rho_j, \eta_j))$  désignent respectivement les constantes élastiques actuelles et

initiales de la poutre  $j$ .

Dans ce modèle, chaque poutre  $i$  a une loi de comportement radoucissante non-locale et l'annulation de sa rigidité correspond au fait que le critère a été violé au cours du chargement dans toutes les poutres du volume représentatif entourant  $i$ . Le nombre d'étapes indépendantes nécessaires pour casser le volume représentatif chargé uniformément est donc égal à  $\hat{h}$ .

Le but de cette étude est de montrer que les résultats présentés dans le quatrième chapitre sont indépendants du caractère localisé de la rupture d'une poutre et de la manière dont sont réparties les contraintes après chaque étape de rupture.

Nous avons simulé des structures homothétiques de taille  $L$  pour plusieurs valeurs de  $\hat{h}$ . Les résultats obtenus montrent que les effets d'échelle s'écrivent sous la même forme que les effets d'échelle obtenus dans le quatrième chapitre.

Ainsi, pour  $\hat{h} = 6$  et  $m = 1$ , nous obtenons:

$$(5.3) \quad \sigma_r \sim L^{-\frac{1}{4}}$$

et pour  $\hat{h} = 54$  et  $m = 1$ , nous obtenons:

$$(5.4) \quad \sigma_r \sim L^{-\frac{1}{12}}$$

Ces résultats laissent penser que seul le comportement global du volume représentatif est responsable des effets d'échelle.

#### 5.4.2 Modèle local élastoplastique fragile

Dans le présent modèle, nous nous proposons d'étudier le cas où le comportement des poutres est élasto-plastique parfait fragile.

Le critère de plasticité adopté est un critère en traction-compression qui s'écrit:

$$(5.5) \quad |N_i| \leq R_i$$

où  $N_i = \rho_i \epsilon_i^e$  est l'effort normal dans la poutre,  $\rho_i$  est la raideur de la poutre  $i$ ,  $\epsilon_i^e$  est la déformation élastique dans la poutre et  $R_i$  une limite d'élasticité tirée aléatoirement selon une loi de Weibull de paramètre  $m$ .

Le critère de rupture de la poutre  $i$  porte sur la déformation plastique dans la poutre  $i$ ,  $\epsilon_i^p$ :

$$(5.6) \quad |\rho_i \epsilon_i^p| \geq \beta \cdot R_i$$

où  $\beta$  est une constante positive commune à toute les poutres. Dans le cas où  $\beta = +\infty$ , le comportement des poutres est plastique parfait. Dans le cas où  $\beta = 0$ , le comportement des poutres est élastique fragile. Par ailleurs, dans ce modèle les courbes  $(N_i, \epsilon_i)$  des différentes poutres sont homothétiques. (Figure 5.16)

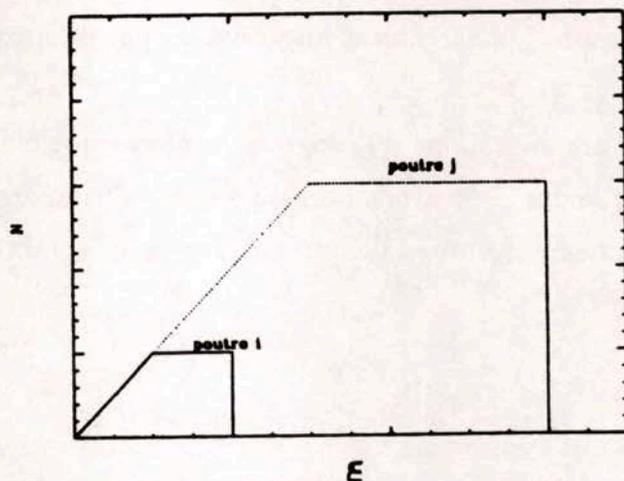


Figure 5.16: Comportement des poutres

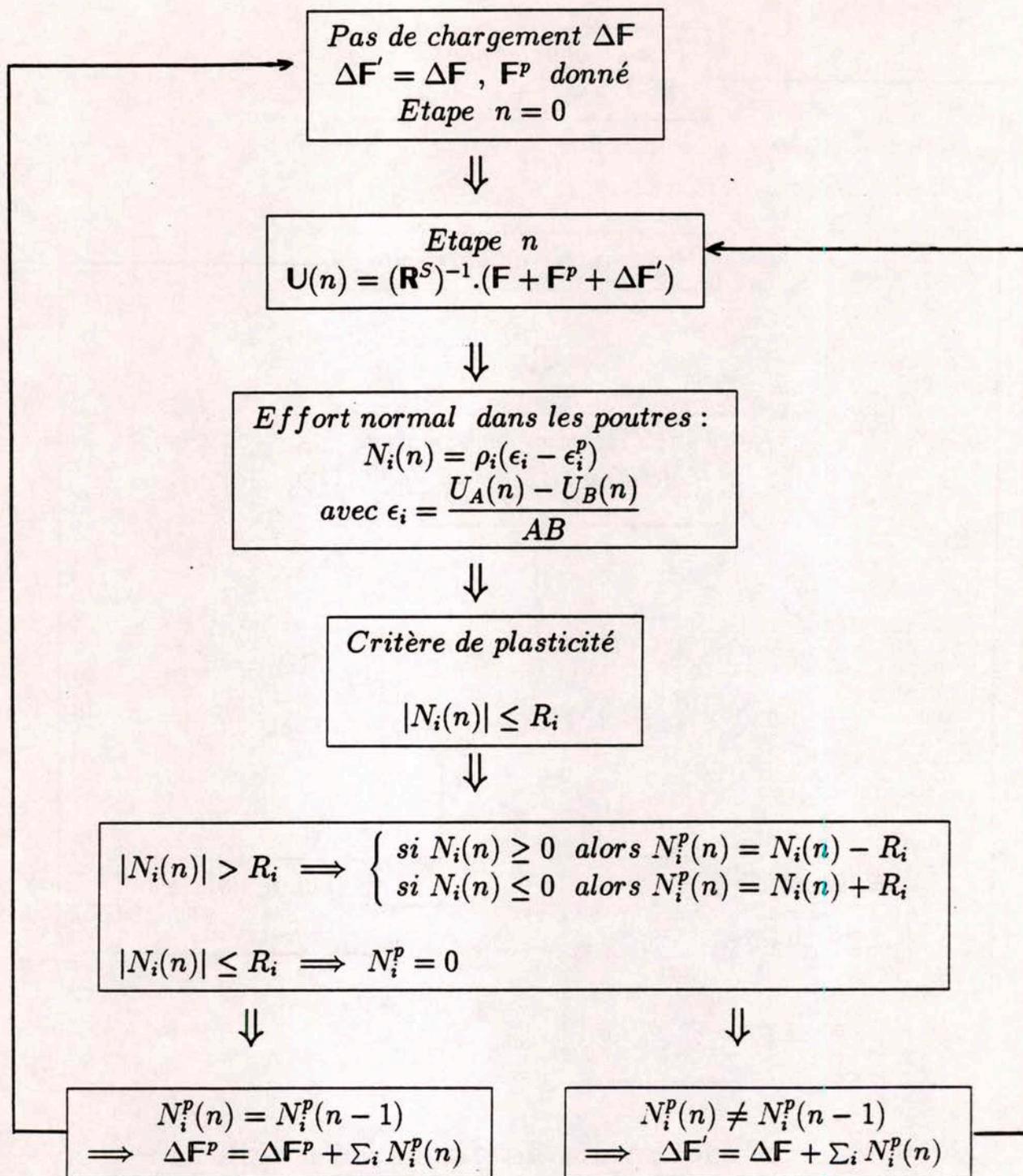
Notre programme est articulé autour d'une procédure appelée programme de plasticité dont nous donnons une description. Connaissant l'état actuel de la structure: la matrice de rigidité de la structure, les efforts appliqués et les déformations plastiques et étant donné un pas de chargement imposé  $\Delta F$ , le programme de plasticité permet de calculer l'incrément des déformations plastiques et le nouveau champ de déplacement. La méthode utilisée en plasticité est la méthode de la contrainte initiale (ou déformation initiale). Cette méthode consiste à garder une matrice de rigidité

constante, la déformation plastique des poutres  $\epsilon_i^p(n)$  à l'étape  $n$  intervient comme une contrainte initiale au cours des itérations.

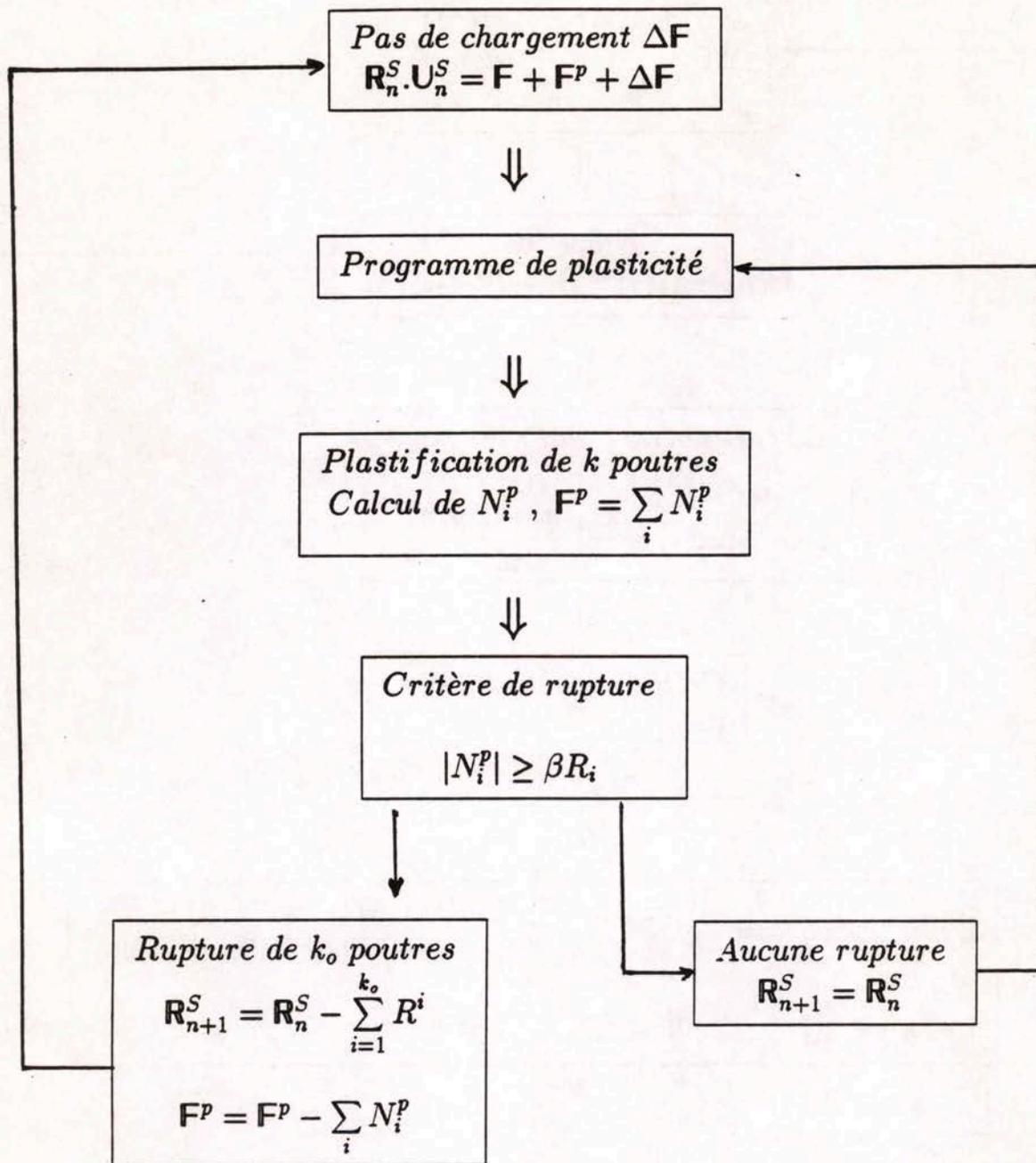
Le calcul d'une structure soumise à un chargement monotone se fait de la manière suivante: le chargement est discrétisé en pas de chargement imposés. Connaissant le pas de chargement imposé, nous faisons appel au programme de plasticité. Ce programme nous permet de calculer les nouvelles déformations plastiques et le nouveau champ de déplacement. Ensuite, nous testons les critères de rupture et nous rompons toutes les poutres qui violent leurs critères. Cette rupture se traduit alors par un changement de la matrice de rigidité et par un nouvel incrément de chargement égal à la résultante des efforts dans les poutres avant leur rupture. Ceci revient à annuler les déformations plastiques dans les poutres rompues  $N_i^p = 0$  et à garder constantes les déformations plastiques dans les autres poutres. Nous faisons appel au programme de plasticité pour déterminer les nouvelles déformations plastiques et le nouveau champ de déplacement.

Cette procédure est réitérée jusqu'au moment où il n'y a aucune poutre qui casse. Ensuite, nous augmentons le chargement imposé d'un pas et ainsi de suite jusqu'à la ruine de la structure.

Nous présentons l'organigramme du programme numérique que nous avons réalisé. Dans un premier lieu, nous présentons l'organigramme du programme numérique de plasticité. Ensuite, nous présentons l'organigramme de programme numérique de la plasticité fragile.



### Programme de plasticité



**Programme de plasticité fragile**

Nous présentons d'abord une validation du programme numérique. Nous avons effectué des simulations numériques sur des structures fissurées homothétiques de taille  $L$  chargées en mode I. Nous avons imposé  $\beta = +\infty$ . Ceci signifie que le comportement des poutres est élasto-plastique parfait et que les poutres ne cassent pas. Nous nous proposons de vérifier qu'il y a absence d'effet d'échelle dans le cas d'un matériau homogène ( $m$  très grand) et de comparer l'évolution de la zone plastique jusqu'à l'écoulement plastique avec les résultats qu'on obtiendrait dans un calcul par éléments finis. Les résultats obtenus montrent qu'il y a effectivement absence d'effet d'échelle dans le cas d'un matériau homogène et que l'évolution de la zone plastique est identique à celle que donnerait un calcul par élément finis avec un critère de Tresca.

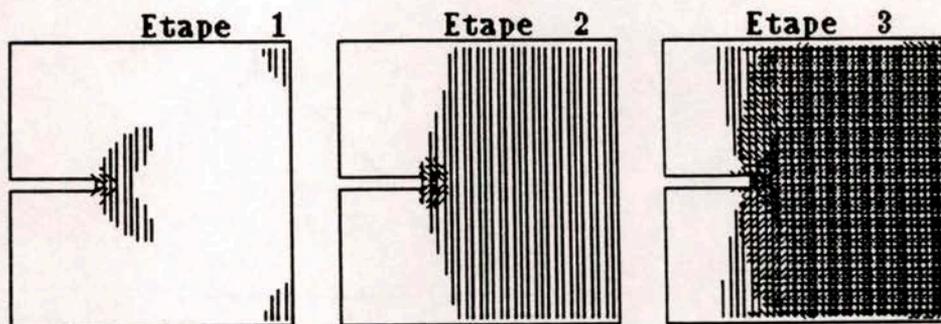


Figure 5.17: Evolution de la zone plastique

Nous avons effectué des simulations sur des structures homothétiques chargées en mode I avec  $\beta = 10$  et  $m = 1$ .

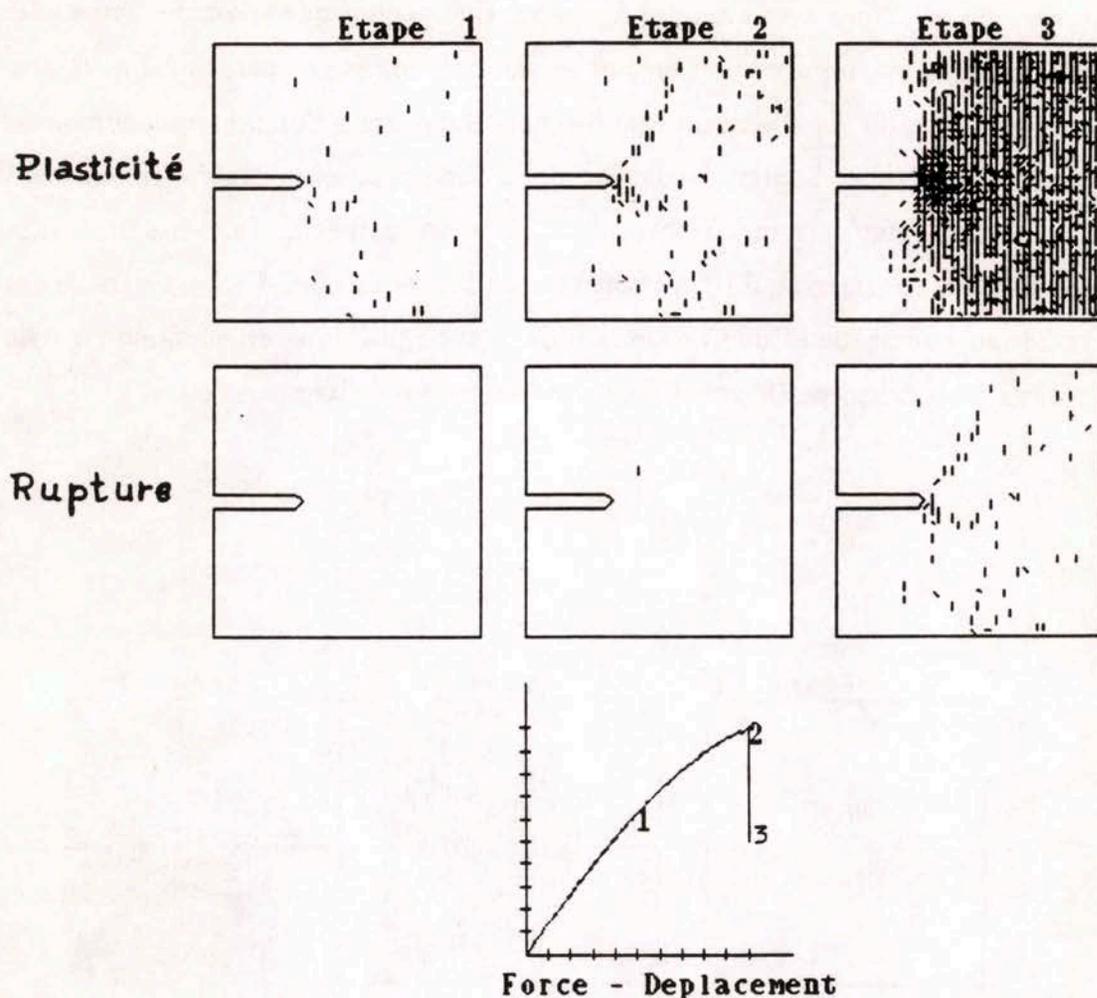


Figure 5.18: Différentes étapes de plastification et de rupture

Les résultats montrent que  $\sigma_r$  s'écrit sous la forme:

$$(5.7) \quad \sigma_r \sim L^{-\frac{1}{4}}$$

Nous retrouvons les mêmes effets d'échelle que ceux observés dans le cas local fragile. Nous confirmons alors que les effets d'échelle ne dépendent pas de la loi de comportement des poutres. Ceci laisse penser que ces effets d'échelle sont aussi valables dans le cas d'un comportement non-linéaire quelconque à condition de vérifier que les courbes  $(\sigma_i, \epsilon_i)$  des différentes poutres sont homothétiques.

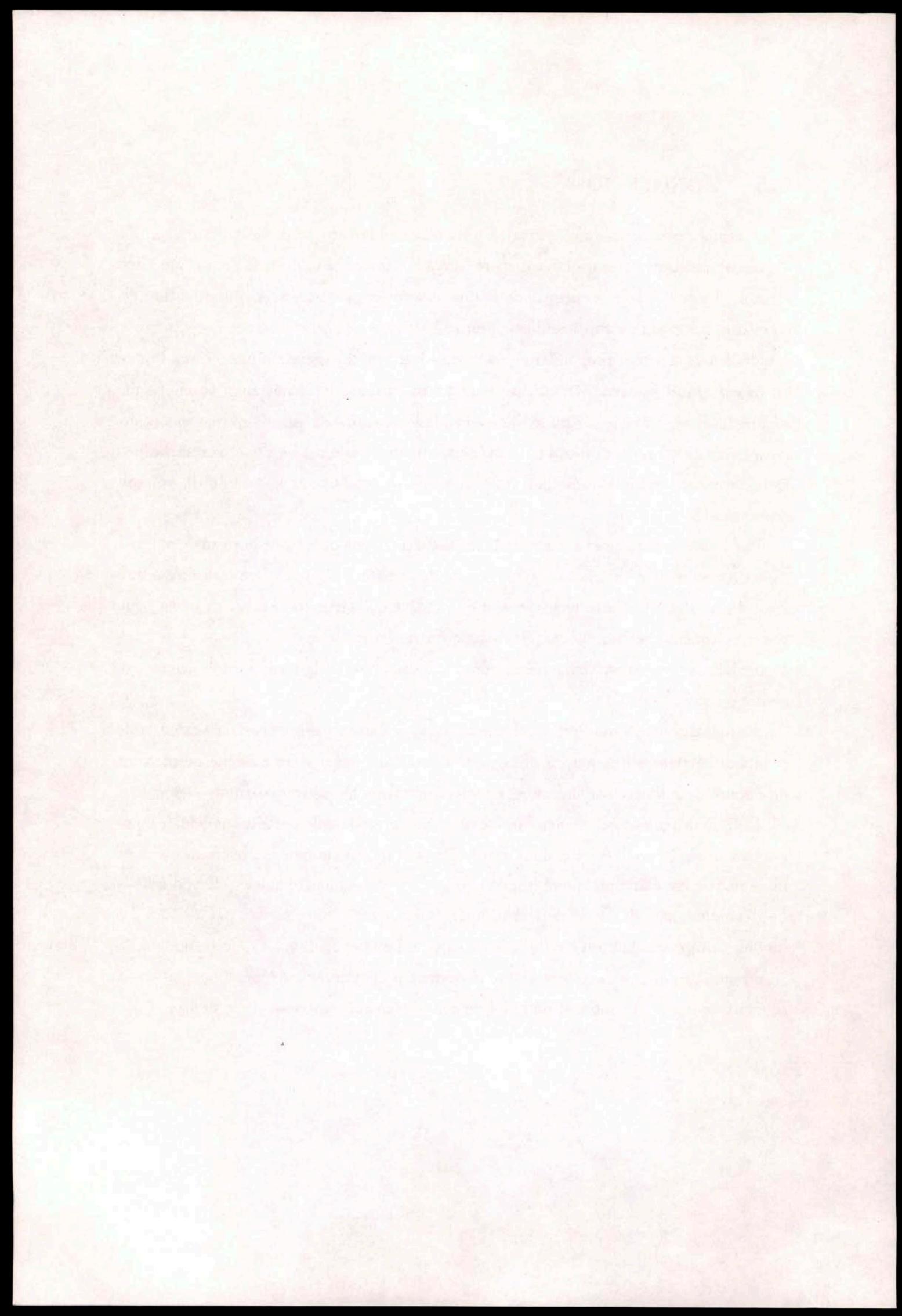
## 5.5 CONCLUSION

L'étude des schémas de fissuration a montré que la rupture de la structure résulte d'une compétition entre un effet dispersif lié à l'hétérogénéité du matériau et un effet attractif lié soit à la présence d'une fissure macroscopique soit à la concentration de contrainte créée par la rupture d'une poutre. Dans le cas où  $m$  est petit le caractère dispersif joue un rôle prépondérant et nous obtenons un régime diffus. Dans le cas où  $m$  est grand le caractère localisé joue un rôle prépondérant et nous obtenons un régime localisé. Dans le cas du modèle local, la localisation se fait indépendamment de la taille de la structure et de l'hétérogénéité sur une seule maille de la discrétisation. Dans le cas du modèle non-local, la localisation se produit sur la taille  $d$  du volume représentatif.

Par ailleurs, dans le cas des structures fissurées, nous observons pour  $m \geq m_c^h$  une zone de microfissuration autour de la pointe de la fissure qui peut être assimilée à une zone d'élaboration. Cette zone dépend de la taille de la structure et de  $m$  et ne peut pas être considérée comme caractéristique du matériau. Cependant, dans le cas des matériaux faiblement hétérogènes la zone de localisation et la zone d'élaboration sont confondues.

L'application des modèles local et non-local à deux expériences: la flexion trois points de poutre en béton armé et l'essai P.I.E.D a montré que ces modèles permettent de décrire de manière satisfaisante la multi-fissuration observée expérimentalement.

Enfin, nous avons étudié deux modèles de rupture. Dans le premier modèle, le comportement de la poutre est radoucissant. Dans le deuxième modèle, le comportement de la poutre est élastoplastique fragile. Nous avons alors montré que les effets d'échelle ne dépendent pas de la loi de comportement au niveau de la poutre. Dans tous les modèles proposés, la rupture de la structure se fait par instabilité. Cette instabilité se produit dès que le caractère attractif devient prépondérant indépendamment de la répartition des contraintes et de la loi de comportement au niveau de la poutre.



## CONCLUSION

L'objet de ce travail a été la modélisation et la prévision des effets d'échelle observés lors de la rupture des matériaux quasi-fragiles aléatoires soumis à un chargement monotone.

Dans la première partie de ce travail, nous avons examiné les différentes modélisations existantes de la rupture des matériaux quasi-fragiles. Nous avons insisté sur la nécessité et la difficulté de bâtir des modèles cohérents. Cette étude bibliographique a aussi montré que malgré la diversité des modèles existants, chacun de ces modèles est adapté à un type particulier d'effet d'échelle qu'il soit de volume, de structure ou de gradient. A l'issue de cette étude, nous avons conclu à la nécessité de bâtir un modèle unique cohérent qui rende compte à la fois des trois types d'effet d'échelle.

Nous avons alors construit une classe de modèles qui permet de simuler la rupture progressive d'un matériau quasi-fragile à microstructure aléatoire. Nous avons aussi précisé la définition de la cohérence et des effets d'échelle dans les matériaux aléatoires.

Nous avons ensuite proposé un modèle local qui utilise et complète l'étude numérique effectuée par Hermann et ses collaborateurs sur un réseau carré de poutres encastées élastiques fragiles dont les seuils de rupture sont tirés aléatoirement selon une loi de Weibull de paramètre  $m$ . Le modèle proposé est basé sur une idée de renormalisation qui consiste à choisir une distribution aléatoire des seuils de rupture dépendant de la finesse de maillage de telle sorte que la limite à la rupture d'une poutre augmente quand sa longueur diminue. Nous avons montré que dans le cas  $m < 2$ , ce modèle est cohérent et prédit des effets d'échelle de volume et de structure identiques qui s'écrivent sous forme d'une loi de puissance:  $\sigma_r \sim L^{-\frac{1}{2}}$ . Ce modèle est alors jugé physiquement inacceptable car il ne prédit pas que la M.L.R est applicable pour des structures de grandes tailles conformément aux résultats expérimentaux. Dans ce modèle, les effets d'échelle de maillage se traduisent directement après renormalisation sur les effets d'échelle de structure. Il faut alors séparer ces deux types d'effet d'échelle. Nous avons alors étudié le cas où  $m \geq 2$ . Dans ce cas, il n'est pas possible de renormaliser les seuils de rupture sans effacer les effets d'échelle. C'est pourquoi la taille de la maille élémentaire a été introduite comme une caractéristique du matériau. Ce modèle n'est pas cohérent mais il

prédit que la M.L.R est applicable pour des structures de grandes tailles conformément aux observations expérimentales. Quant aux effets d'échelle de volume exhibés pour  $m \geq 2$ , ils sont particulièrement intéressants car on met en évidence l'existence d'une taille critique de structure au delà de laquelle, le modèle n'exhibe plus d'effet d'échelle de volume. Une étude numérique nous alors a permis de déterminer sa variation en fonction de  $m$ .

Les deux conclusions essentielles du modèle local sont les suivantes:

- L'idée d'une renormalisation des seuils de rupture conduit nécessairement à une impasse

- L'introduction d'une taille caractéristique (celle de la maille élémentaire) permet d'obtenir la M.L.R pour  $m \geq 2$ .

Ces deux conclusions nous ont conduit à construire le modèle non-local du quatrième chapitre. Dans ce modèle, le critère de rupture est non-local. Il porte sur la moyenne de l'énergie de déformation des poutres dans un volume représentatif dont la taille est supposée être caractéristique du matériau. Par ailleurs, l'hétérogénéité du matériau est modélisée indépendamment du maillage par l'introduction d'un paramètre supplémentaire noté  $\hat{h}$ . Une étude paramétrique nous a permis de montrer que les effets d'échelle s'écrivent simplement en fonction de  $\hat{h}$  sous forme d'une loi de puissance. Nous retrouvons alors le modèle local du troisième chapitre et le modèle d'endommagement non-local déterministe comme des cas particuliers limites de notre modèle ( $\hat{h} = 6$  et  $\hat{h} = +\infty$ , respectivement). Par ailleurs, nous avons montré numériquement que pour tout  $\hat{h}$ , il existe un  $m_c^{\hat{h}}$  tel que pour  $m < m_c^{\hat{h}}$  l'effet d'échelle de volume s'écrit sous la forme d'une loi de puissance. Et pour  $m \geq m_c^{\hat{h}}$ , il existe une taille critique au dessous de laquelle l'effet d'échelle de volume s'écrit sous forme de la même loi de puissance et au dessus de laquelle il y a absence d'effet d'échelle. L'apparition de ce palier est ensuite confirmé par une étude des effets d'échelle de structure. En effet, nous avons montré que l'application de la M.L.R pour des structures de grandes tailles est uniquement valable dans où  $m \geq m_c^{\hat{h}}$ . Par conséquent, dans le cas des matériaux réels  $m \geq m_c^{\hat{h}}$ .

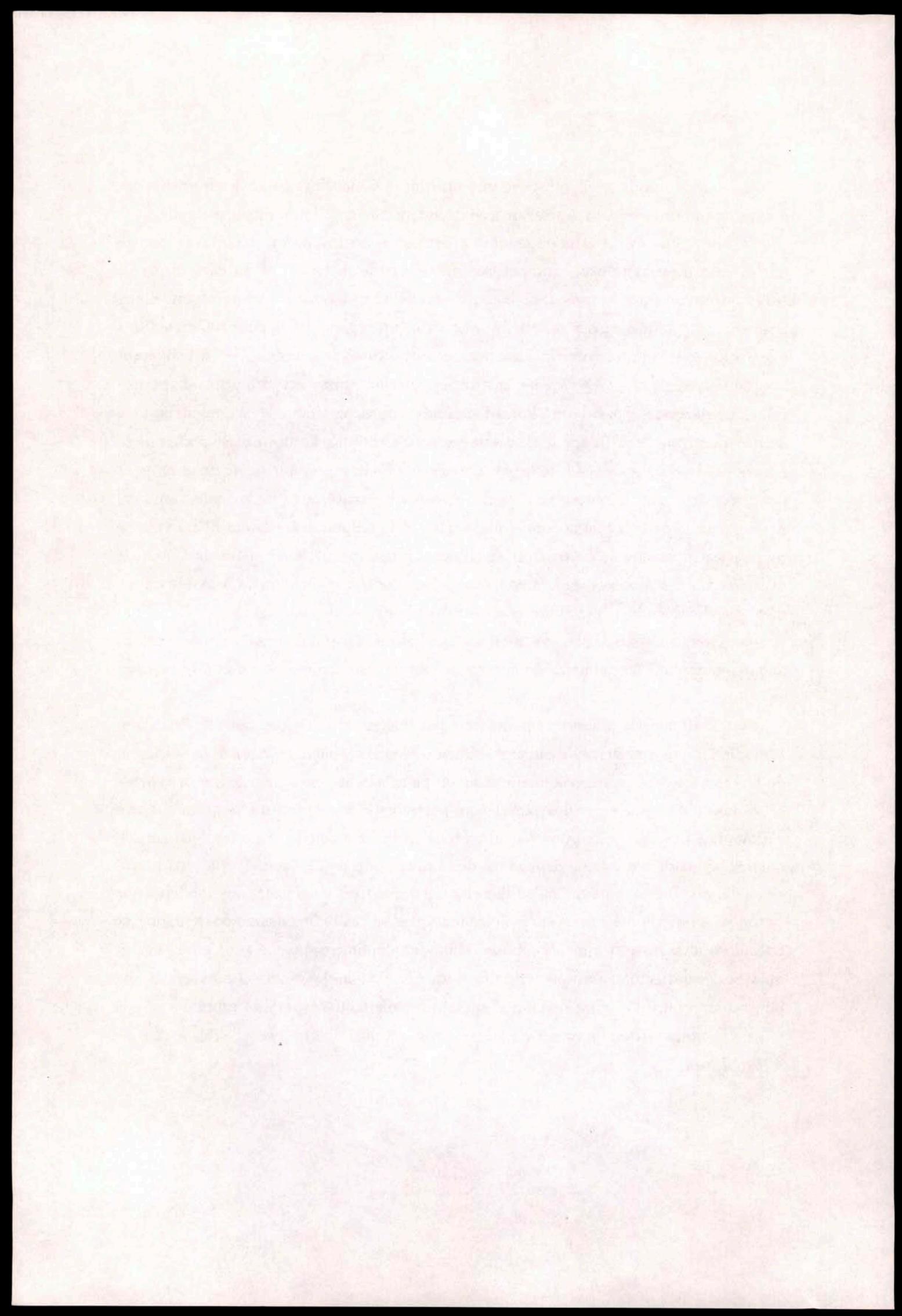
La discussion du quatrième chapitre a montré que les lois d'effets d'échelle sont indépendantes du critère de rupture et de la manière dont on corrèle les seuils de rupture des poutres. Nous avons aussi montré dans le cinquième chapitre que ces effets d'échelle sont indépendants de la loi de comportement de la poutre. Ainsi, un comportement radoucissant ou un comportement élastoplastique fragile donne les mêmes effets d'échelle qu'un comportement élastique fragile.

Par ailleurs, nous avons proposé une procédure d'identification expérimentale des différents paramètres du modèle sur une expérience de traction bidimensionnelle.

Ensuite, nous avons étudié quelques schémas de fissuration et nous avons montré que la rupture résulte de la compétition entre un effet attractif et un effet dispersif. Nous retrouvons que comme dans le cas du modèle local, nous avons un régime diffus pour  $m < m_c^h$ . Alors que si  $m \geq m_c^h$ , nous avons un régime diffus pour des structures de petites tailles et un régime localisé pour des structures de grandes. Ceci est cohérent avec le fait que, pour  $m \geq m_c^h$ , les lois d'effets d'échelle pour des structures de petites tailles ne dépendent pas de  $m$ . Par ailleurs, nous observons dans le cas des structures fissurées pour  $m \geq m_c^h$ , l'apparition d'une zone d'élaboration autour de la pointe de la fissure dont la taille dépend de la structure et de l'hétérogénéité. Cette zone ne peut donc pas être considérée comme caractéristique du matériau. Le modèle non-local nous a permis de voir que la zone d'élaboration est confondue avec la taille du volume représentatif dans le cas d'un matériau faiblement hétérogène. Ceci justifie la démarche utilisée dans les modèles d'endommagement non-locaux déterministes à savoir que la zone d'élaboration est introduite comme caractéristique du matériau.

Nous avons aussi appliqué les modèles local et non-local à deux expériences et nous avons montré que les schémas de fissuration obtenus sont conformes aux observations expérimentales.

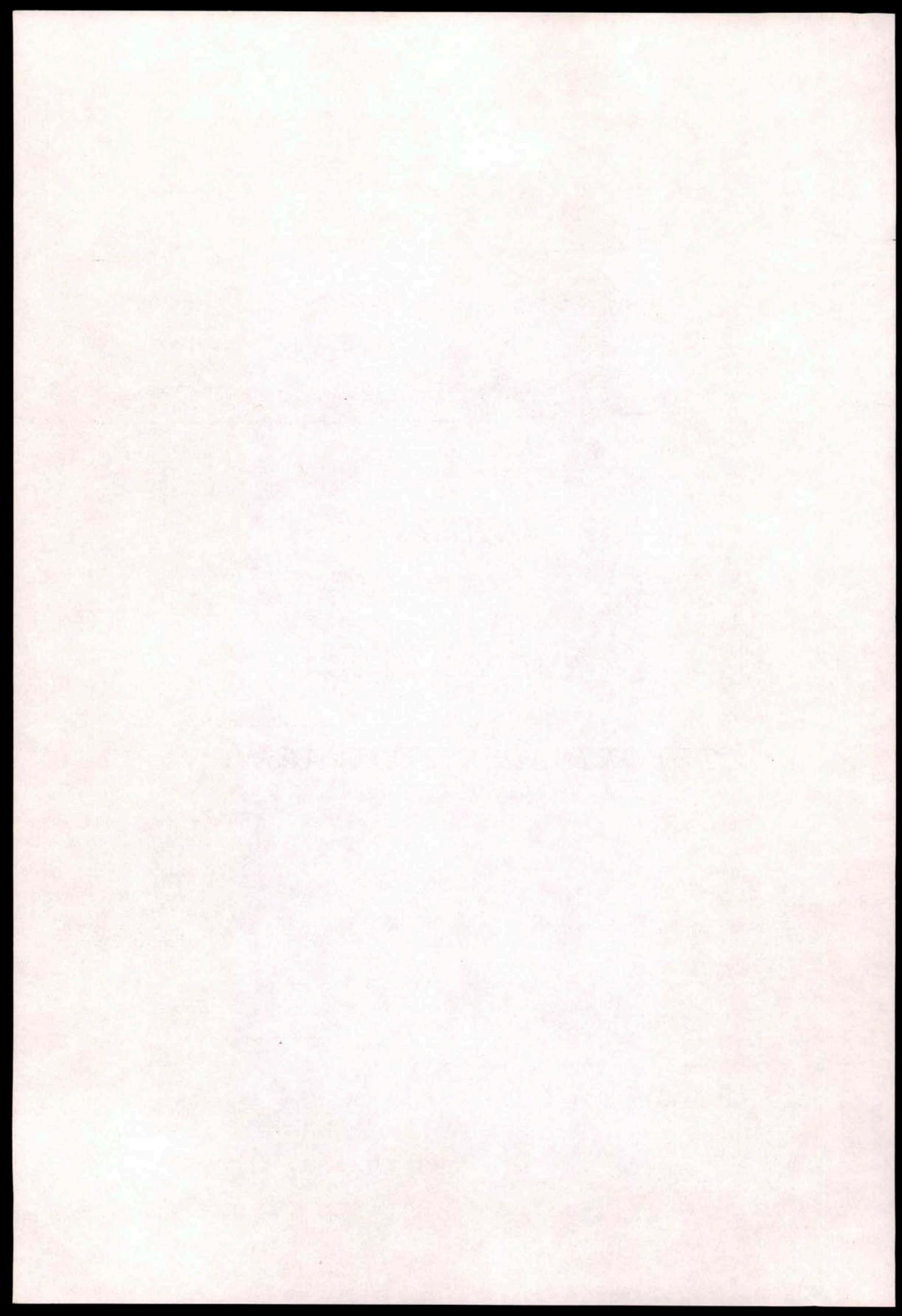
Ce travail devrait d'abord se poursuivre par une étude expérimentale afin de valider le modèle. Nous avons proposé une procédure d'identification dans le cas d'une expérience de traction directe bidimensionnelle mais on peut très bien imaginer le même type de procédure qui s'appuie sur des expériences portant sur des structures fissurées. Ce travail devrait aussi se poursuivre par une étude tridimensionnelle. En effet, il est certain que les lois d'effet d'échelle dépendent de la dimension de l'espace. L'étude tridimensionnelle ne pose aucune difficulté théorique, vu que tous les concepts de modélisation et toutes les méthodes numériques sont identiques au cas bidimensionnel traité dans ce travail. Il n'en reste pas moins qu'une telle étude tridimensionnelle n'est envisageable qu'avec des outils informatiques très puissants. Une étude théorique est aussi nécessaire pour comprendre l'origine des lois d'effets d'échelle trouvées, et l'interprétation à la fois de la taille critique à partir de laquelle il n'y a plus d'effet d'échelle, et de la zone d'élaboration.



ANNEXE A

RAPPEL DE LA

THEORIE DES EQUIVALENCES



La théorie des équivalences est une méthode de résolution numérique permettant de substituer à l'étude d'un corps continu chargé C celle d'un autre corps C' généralement discret. L'idée principale est d'approcher l'énergie potentielle totale du corps C par l'énergie potentielle totale du corps C'.

## A.1 Exposé général

Considérons un corps déformable C occupant un volume  $\Omega$  et soumis à un chargement dérivant d'un potentiel  $\Phi$ . Le potentiel total  $\Pi$  du corps C s'écrit alors:

$$(A.1) \quad \Pi = U + \Phi$$

où  $U$  est le potentiel de déformation du corps C. En désignant par  $U_o$  la densité de potentiel par unité de volume, l'expression précédente s'écrit:

$$(A.2) \quad \Pi = \int_{\Omega} U_o d\Omega + \Phi$$

Dans le cadre d'un comportement élastique, la résolution de ce problème revient à trouver un champ de déplacement cinématiquement admissible minimisant la fonctionnelle  $\Pi$  ( $\delta\Pi = 0$ ).

Considérons un deuxième corps C' occupant le même volume  $\Omega$  et soumis au même chargement que le corps C. En désignant par  $U'_o$  sa densité d'énergie de déformation. Le potentiel total  $\Pi'$  du corps C' s'écrit:

$$(A.3) \quad \Pi' = \int_{\Omega} U'_o d\Omega + \Phi$$

Dans le cadre d'un comportement élastique, la résolution de ce problème revient aussi à trouver un champ de déplacement cinématiquement admissible minimisant la fonctionnelle  $\Pi'$  ( $\delta\Pi' = 0$ ).

Dans le cas où  $\delta\Pi = \delta\Pi'$  les deux systèmes sont dits équivalents. Ils admettent le même champ de déplacement solution. En effet, tout champ de déplacement solution

du premier problème l'est aussi pour le second et l'on doit avoir:

$$(A.4) \quad \delta\Pi = \delta\Pi' = 0$$

Ainsi, on peut ramener l'étude d'un corps chargé à celle d'un corps équivalent ayant des lois de comportement différentes.

Il y a, en particulier, équivalence dans le cas où les deux densités d'énergie de déformation sont égales:

$$(A.5) \quad U_o = U'_o$$

La théorie des équivalences s'applique aussi dans le cas où:

$$(A.6) \quad \Pi = a\Pi'$$

où  $a$  est un coefficient quelconque, même si les deux corps n'occupent pas le même volume  $\Omega$ . On retrouve la condition de similitude entre un corps réel et son modèle réduit.

L'équivalence peut être réalisée entre:

- deux corps continus
- deux corps discrets
- un corps continu et un corps discret.

Dans ce qui suit, nous nous limiterons essentiellement à l'équivalence entre un milieu continu bidimensionnel et un milieu discret formé par un réseau de poutres et nous nous limiterons au cas du modèle rectangulaire (élément fini à 4 noeuds). La détermination des caractéristiques élastiques du modèle équivalent s'effectuera en identifiant les expressions des densités d'énergies de déformation ( $U_o = U'_o$ ) et ceci dans le cadre de l'élasticité linéaire.

## A.2 Méthode des équivalences

Soit un milieu continu  $C$  occupant un volume  $\Omega$ . Ce milieu est en équilibre sous l'action d'un système de forces extérieures, formé en général par une densité volumique de forces dans  $\Omega$  et des conditions aux limites en force et en déplacement sur la frontière de  $\Omega$ ,  $\Gamma$ .

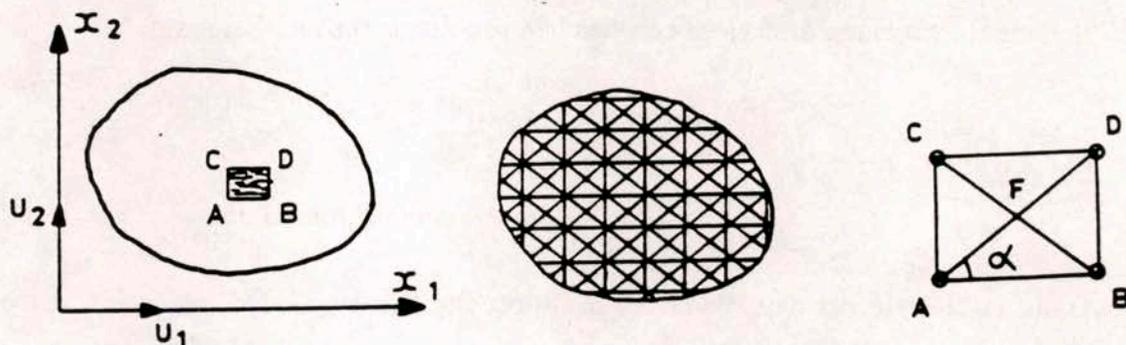


Figure A.1:

Etant donné un paramètre  $h > 0$  destiné à tendre vers zéro, on lui associe un recouvrement de  $\Omega$  par des rectangles  $K_i$ . Si  $K$  est un rectangle du recouvrement de sommets  $A, B, C$  et  $D$  alors la restriction sur  $K$  du champ de déplacement  $V = (u, v)$  est donné par:

$$(A.7) \quad \begin{cases} u(x, y) = \Delta_{AB}(u) \cdot x + \Delta_{AC}(u) \cdot y + \Delta\Delta(u) \cdot x \cdot y + u(A) \\ v(x, y) = \Delta_{AB}(v) \cdot x + \Delta_{AC}(v) \cdot y + \Delta\Delta(v) \cdot x \cdot y + v(A) \end{cases}$$

avec

$$(A.8) \quad \begin{cases} \Delta_{AB}(u) = \frac{u(A) - u(B)}{AB} & \Delta_{AB}(v) = \frac{v(A) - v(B)}{AB} \\ \Delta_{AC}(u) = \frac{u(A) - u(C)}{AB} & \Delta_{AC}(v) = \frac{v(A) - v(C)}{AB} \\ \Delta\Delta(u) = \frac{\Delta_{BD}(u) - \Delta_{AC}(u)}{AC} & \Delta\Delta(v) = \frac{\Delta_{BD}(v) - \Delta_{AC}(v)}{AB} \end{cases}$$

En déformations planes, l'énergie de déformation de l'élément fini  $K$  s'écrit alors:

$$(A.9) \quad U_o = \int_K \left\{ \left[ \frac{\lambda}{2} + \mu \right] \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\mu}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^2 \right\} dx dy$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé du corps élastique  $C$ .

La recherche de la solution élastique revient alors au calcul des déplacements aux noeuds du maillage et ceci en résolvant le problème approché suivant:

$$(A.10) \quad P_{EF} : \begin{cases} \text{minimiser } \Pi = \sum_K U_o + \Phi \\ \text{avec } V \text{ cinématiquement admissible} \end{cases}$$

Dans la théorie des équivalences, on approche l'énergie de déformation sur chaque rectangle par une intégration numérique aux sommets de façon à faire apparaître l'expression de l'énergie potentielle d'un système de poutres, dont les caractéristiques élastiques seront définies ultérieurement.

De manière plus précise, on utilise la formule d'intégration approchée suivante:

$$(A.11) \quad \int_K \Psi(x) dx = \frac{S(K)}{4} [\Psi(A) + \Psi(B) + \Psi(C) + \Psi(D)]$$

où  $S(K)$  désigne la surface de  $K$  et où  $\Psi(A), \Psi(B), \Psi(C)$  et  $\Psi(D)$  désignent respectivement les valeurs de la fonction  $\Phi$  aux points  $A, B, C$  et  $D$ .

On montre [Salameh, 1975] que :

$$(A.12) \quad U_o = \bar{U}_o + \frac{\mu}{2} \cdot W_o$$

avec

$$(A.13) \quad \bar{U}_o = \frac{S(K)}{4} \left\{ \begin{array}{l} 2\left[\frac{\lambda}{2} + \mu - \frac{\mu}{2} \cotg^2(\alpha)\right][(\Delta_{AB}(u))^2 + (\Delta_{CD}(u))^2] \\ + 2\left[\frac{\lambda}{2} + \mu - \frac{\mu}{2} \tg^2(\alpha)\right][(\Delta_{AC}(v))^2 + (\Delta_{BD}(v))^2] \\ + [\lambda - \mu][\Delta_{AB}(u) + \Delta_{CD}(u)][\Delta_{AC}(v) + \Delta_{BD}(v)] \\ + \frac{\mu}{\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)}[\Delta_{AD}(u)\cos(\alpha) + \Delta_{AD}(v)\sin(\alpha)]^2 \\ + \frac{\mu}{\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)}[\Delta_{BC}(u)\cos(\alpha) - \Delta_{BC}(v)\sin(\alpha)]^2 \end{array} \right\}$$

et

$$(A.14) \quad W_o = \frac{S(K)}{4} [(\Delta_{AC}(u) - \Delta_{BD}(u))^2 + (\Delta_{AB}(v) - \Delta_{CD}(v))^2]$$

On définit le problème équivalent suivant:

$$(A.15) \quad P_{EQ} : \left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser } \bar{\Pi} = \sum_K \bar{U}_o + \Phi \\ \text{avec } V \text{ cinématiquement admissible} \end{array} \right.$$

On montre [Salameh, 1975] que:

$$(A.16) \quad |W_o| < C_o \cdot h^2$$

où  $C_o$  est une constante qui ne dépend que de  $\max(\tg^2\alpha, \cotg^2\alpha)$ .

Ceci montre que la solution champ de déplacement obtenu par résolution du problème équivalent  $P_{EQ}$  approche le champ de déplacement obtenu par résolution du problème éléments finis  $P_{EF}$ . De plus, l'erreur commise sur les champs de déplacement est du même ordre de grandeur que celle de la méthode des éléments finis et vaut  $C'_o \cdot h^2$ , où  $C'_o$  est une constante qui ne dépend que de  $\max(\tg^2\alpha, \cotg^2\alpha)$ . Ceci a été justifié

mathématiquement dans [Salameh,1975]. La meilleure approximation du champ de déplacement est donc obtenue pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , c.à.d quand la maille du réseau est un carré.

Dans ce qui suit, nous allons montrer que  $\bar{U}_o$  est l'énergie de déformation d'un réseau de poutres qu'on va définir.

### A.3 Le modèle équivalent

Soit le modèle rectangulaire comportant des articulations aux noeuds (A,B,C,D) et un encastrement au noeud H:

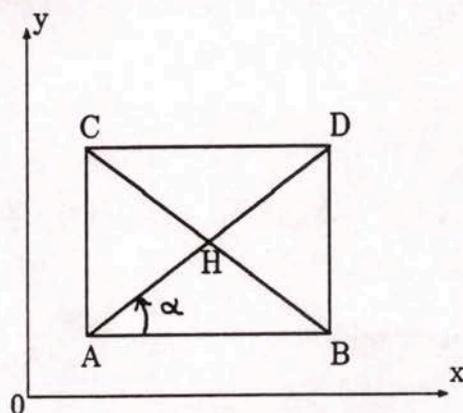


Figure A.2: Modèle équivalent rectangulaire.

Les poutres AB, BD, CD et AC situées sur le contour de l'élément équivalent (ABCDH) travaillent en traction-compression, par contre les éléments diagonaux HA, HB, HC, et HD travaillent à la fois en traction-compression et en flexion.

• Energie de déformation de l'élément équivalent: Considérons une poutre AB, de longueur  $l$  et de section  $S$  encastree en A et libre en B (Figure A.2). Notons  $E$  son module d'Young et  $I$  son moment d'inertie. Sous l'action d'un effort de traction  $N$  et d'un effort transversal  $F$ , l'extrémité B vient en B'. Désignons par  $u_B$  et  $v_B$  les composantes du vecteur déplacement  $BB'$  dans le référentiel local  $(x, y)$ .

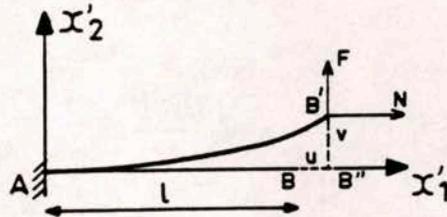


Figure A.3:

L'énergie de déformation emmagasinée dans la poutre  $AB$  se décompose en:

-Energie de traction-compression:

La loi de Hooke donne:

$$(A.17) \quad N = E.S.\frac{u_B}{l}$$

Donc l'énergie de traction de la poutre  $AB$  s'écrit:

$$(A.18) \quad W_{AB}^t = \frac{1}{2} \cdot N \cdot u_B = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\frac{u_B}{l}\right)^2$$

$$(A.19) \quad \rho = E.S.l$$

où  $\rho$  est la raideur de la poutre  $AB$ .

-Energie de flexion:

D'après les lois de la résistance des matériaux, on a:

$$(A.20) \quad F = \frac{3.E.I}{l^3} \cdot v_B$$

L'énergie de flexion de la poutre  $AB$  s'écrit donc:

$$(A.21) \quad W_{AB}^f = \frac{1}{2} F \cdot v_B = \frac{1}{2} \cdot \eta \cdot \left(\frac{v_B}{l}\right)^2$$

$$(A.22) \quad \eta = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l}$$

où  $\eta$  est la flexion de la poutre  $AB$ .

Le moment d'encastrement  $M_{AB}$  en  $A$  a pour valeur:

$$(A.23) \quad M_{AB} = F \cdot l = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l^2} \cdot v_B$$

Dans le cas où l'encastrement en  $A$  subit une rotation d'angle  $\theta$  (Figure A.3),

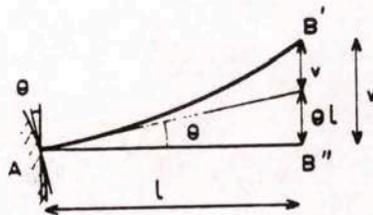


Figure A.4:

L'expression de  $W_{AB}^f$  s'écrit alors:

$$(A.24) \quad W_{AB}^f = \frac{1}{2} \cdot \eta \cdot \left(\frac{v_B - \theta \cdot l}{l}\right)^2$$

et le moment d'encastrement  $M_{AB}$  en  $A$  devient:

$$(A.25) \quad M_{AB} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l^2} \cdot (v_B - \theta \cdot l)$$

De même, si l'extrémité  $A$  subit un déplacement de composantes  $u_A$  et  $v_A$ , les expressions précédentes deviennent alors:

$$(A.26) \quad N = E.S. \frac{u_B - u_A}{l}$$

$$(A.27) \quad W_{AB}^t = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left( \frac{u_B - u_A}{l} \right)^2$$

$$(A.28) \quad F = \frac{3.E.I}{l^3} \cdot (v_B - v_A - \theta.l)$$

$$(A.29) \quad W_{AB}^f = \frac{1}{2} \cdot \eta \cdot \left( \frac{v_B - v_A - \theta.l}{l} \right)^2$$

$$(A.30) \quad M_{AB} = \frac{3.E.I}{l^2} \cdot (v_B - v_A - \theta.l)$$

Considérons le modèle équivalent rectangulaire ( $ABCDH$ ) où tous les noeuds sont des articulations sauf le centre  $H$  qui est un encastrement.

Pour des raisons de symétrie, on a:

$$(A.31) \quad \rho_{AB} = \rho_{CD} \quad , \quad \rho_{AC} = \rho_{BD}$$

$$(A.32) \quad \rho_H = \rho_{HA} = \rho_{HB} = \rho_{HC} = \rho_{HD}$$

$$(A.33) \quad \eta_H = \eta_{HA} = \eta_{HB} = \eta_{HC} = \eta_{HD}$$

Sous l'action d'un système de force symétrique par rapport à  $H$  appliqué aux extrémités  $A, B, C,$  et  $D,$  les poutres se déforment et le noeud  $H$  subit un déplacement  $(u_H, v_H)$  et une rotation  $\theta_H.$  Compte de la symétrie, le noeud  $H$  reste le barycentre des points  $A, B, C,$  et  $D$  après déformation du système:

$$(A.34) \quad u_H = \frac{u_A + u_B + u_C + u_D}{4}$$

$$(A.35) \quad v_H = \frac{v_A + v_B + v_C + v_D}{4}$$

L'équation d'équilibre du noeud  $H$  s'écrit:

$$(A.36) \quad M_{HA} + M_{HB} + M_{HC} + M_{HD} = 0$$

On en déduit après calcul:

$$(A.37) \quad \theta_H = \frac{v_A + v_B + v_C + v_D}{4.a} \cdot \sin(\alpha) + \frac{u_A + u_B + u_C + u_D}{4.a} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\text{où } a = HA = HB = HC = HD$$

Compte tenu des expressions précédentes, l'énergie totale de déformation de l'élément équivalent  $(ABCDH)$  s'écrit:

$$(A.38) \quad U'_o = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{1}{2} \rho_{AB} + \eta_H \cdot \sin^2(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \right] \cdot [\Delta_{AB}^2(u) + \Delta_{CD}^2(u)] \\ + \left[ \frac{1}{2} \rho_{AC} + \eta_H \cdot \sin^2(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \right] \cdot [\Delta_{AC}^2(v) + \Delta_{BD}^2(v)] \\ - \eta_H \cdot \sin^2(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot [\Delta_{AB}(u) + \Delta_{CD}(u)] \cdot [\Delta_{AC}(v) + \Delta_{BD}(v)] \\ + \rho_H \cdot [\cos(\alpha) \cdot \Delta_{AD}(u) + \sin(\alpha) \cdot \Delta_{AD}(v)]^2 \\ + \rho_H \cdot [\cos(\alpha) \cdot \Delta_{BC}(u) - \sin(\alpha) \cdot \Delta_{BC}(v)]^2 \end{array} \right\}$$

#### A.4 Equivalence entre le milieu continu et le milieu discret

L'équivalence entre l'élément fini rectangulaire et l'élément discret équivalent est obtenu en identifiant l'expression de l'énergie de déformation approchée  $\bar{U}_o$  de l'élément continu à celle de l'élément discret équivalent  $U'_o$ . Cette équivalence énergétique permet de déterminer les caractéristiques des différentes poutres de l'élément discret équivalent en fonction des données élastiques du milieu et de l'aire de l'élément fini considéré.

On trouve par identification et compte tenu des expressions de  $\bar{U}_o$  et de  $U'_o$ ,

- En déformations planes:

$$(A.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_{AB} = \left[ \lambda + \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot (1 - \cot^2(\alpha)) \right] \cdot S(K) \\ \rho_{AC} = \left[ \lambda + \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot (1 - \tan^2(\alpha)) \right] \cdot S(K) \\ \rho_H = \frac{\mu}{4 \cdot \sin^2(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot S(K) \\ \eta_H = \frac{\mu - \lambda}{4 \cdot \sin^2(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot S(K) \end{array} \right.$$

• En contraintes planes:

$$(A.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_{AB} = \frac{\mu}{2.(\lambda + 2\mu)} \cdot [5.\lambda + 2.\mu - (\lambda + 2.\mu).\cotg^2(\alpha)].S(K) \\ \rho_{AC} = \frac{\mu}{2.(\lambda + 2\mu)} \cdot [5.\lambda + 2.\mu - (\lambda + 2.\mu).tg^2(\alpha)].S(K) \\ \rho_H = \frac{\mu}{4.\sin^2(\alpha).\cos^2(\alpha)} \cdot S(K) \\ \eta_H = \frac{\mu}{4.\sin^2(\alpha).\cos^2(\alpha)} \cdot \frac{2.\mu - \lambda}{\lambda + 2.\mu} \cdot S(K) \end{array} \right.$$

• Remarques

R1) Dans le cas où la discrétisation n'épouse pas parfaitement le contour du corps réel (Figure A.5), il suffit de remplacer dans les formules donnant les caractéristiques du modèle équivalent  $S(K)$  par l'aire de la partie hachurée.

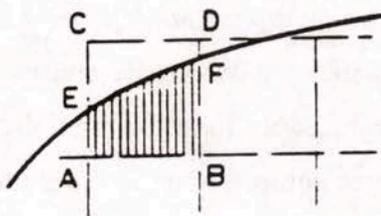


Figure A.5:

R2) Les caractéristiques d'une poutre commune à deux mailles du réseau s'obtiennent en additionnant les caractéristiques de chaque maille prise séparément (FigA.6).

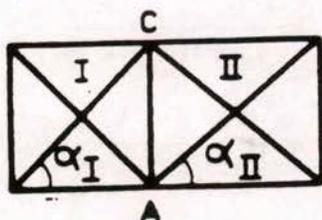


Figure A.6:

## BIBLIOGRAPHIE

- Absi E. , "La théorie des équivalences et son application à l'étude des ouvrages d'art", *Annales de l'I.T.B.T.P.* , (1972).
- Bazant Z.P., Balytschko T., Chang T.-P. , "Continuum theory for strain - softening", *J. of Engng Mech.*, Vol. 110, no. 12, pp. 1666-1692, (1984).
- Bazant Z.P, OH R.H. , "Crack band theory for fracture of concrete", *Materials and Structures, RILEM*, Vol. 16, no. 93, pp. 155-177, (1983).
- Belytschko T., Lasry D. , "Localization limiters and numerical strategies for strain softening material", *CNRS-NSF Workshop on 'Strain Localization and Size Effect due to Damage and Cracking'*, CACHAN-FRANCE, ed. by MAZARS J. and BAZANT Z.P., ELSEVIER Pbs., (1988).
- Belytschko T., Lasry D. , "Localization limiters in transient Problems", *Int. J. Solids and Structures*, (1988).
- Breysse D. , "A probabilistic model for damage of concrete structures", *Brittle Matrix Composite 2, Cedzyna, Poland*, pp. 20-22, ELSEVIER Pbs., (1988).
- Breysse D. , "Effets du désordre dans un modèle hiérarchique", *Rap. Scient. G.R.E.C.O, AUSSOIS-FRANCE*, (1990).
- Hermann H.J., Hansen A., Roux S. , "Fracture of disordred elastic lattices in two dimensions", *Phys. Rev. B*, pp. 637, (1989).
- Hillerborg A., Modeer M., Petersson P.E. , " Analysis of crack formation and growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements", *Cement and Concrete Research*, Vol. 6, no. 93, pp. 773-782, (1976).
- Hillerborg A. , "Analysis of a single crack", *Fracture Mechanics of concrete*, ed. Wittmann F.H., ELSEVIER Pbs., pp. 223-249, (1983).
- Hillerborg A. , "Results of three comparative test series for determining the fracture energy  $G_F$  of concrete", *Material and Structures, RILEM*, Vol. 18, no 107, pp. 407-413, (1985).

- Horvath R., Persson T.** , "The influence of the specimen size on the fracture energy of concrete", *Report TVBM-5005, Lund institute of technologie, LUND-SWEDEN, (1984).*
- Irwin G.R.** , "Analysis of stress and strain near the end of crack traversing a plate", *Journal of Applied Mechanics, (1957).*
- Jeulin D.** , "Modèles Morphologiques de structures aléatoires et de changement d'échelle", *Thèse de Doctorat ès Sciences, Université de Caen, (1991).*
- Kadlecek V., Spetla Z.** , "Effect of size and shape of test specimens on the direct tensile strength of concrete", *Bull. RILEM, no. 36, pp. 175-184, (1967).*
- L'Hermite R.** , "Influence de la dimension absolue sur la résistance à la flexion", *Annales de l'ITBTP, no. 309-310, pp. 39-41, (1973).*
- Mazars J.** , "Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire du béton de structure", *Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris 6, (1984).*
- Petersson P.E.** , "Fracture energy of concrete: method of determination", *Cement and Concrete Research, Vol. 10, no. 1, pp. 78-79, (1980).*
- Pijaudier-cabot G.** , "Nonlocal fracture characteristics of strain-softening materials", *PhD Dissertation, Northwestern University, Evanston - USA, (1987).*
- Roelfstra P.E., Sadouki H.** , "Fracture Process in Numerical Concrete", *Fracture toughness and Fracture Energy of concrete, ed. by Wittmann F.H., ELSEVIER Pbs., pp. 105-116, (1986).*
- Rossi P., Piau J.-M.** , "The usefulness of statistical models to describe damage and fracture in concrete", *ed. F. H. Wittmann. Elsevier, The Netherlands, (1983).*
- Roux S., Hansen A.** , "Early stages of rupture of disordered materials", *Europhys. Lett. 11(1), pp. 37-42, (1990).*
- Salameh S.** , "Théorie des équivalences et méthode des éléments finis", *Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle De L'Université de Pierre et Marie Curie, (1975).*
- Saouridis C.** , "Identification et numérisation objectives des comportements adoucissants: une approche multi-échelle de l'endommagement du béton", *Thèse de doctorat de l'Université Paris, (1988).*
- Saouridis C., Mazars J.** , "Analyse de la réponse des structures en béton par un traitement multi-échelle de l'endommagement", *Rap. Scient. G.R.E.C.O, AUSSOIS-FRANCE, (1987).*

**Weibull W.** , "A survey of statistical effects in the field of material failure", *Appl. Mech. Rev.*, 5, 11, pp. 449-451, (1952).

**Wu X.** , "Modélisation numérique de la fissuration du béton à partir d'une approche probabiliste", *Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées* , (1991).

