



**HAL**  
open science

# Amortissement autosimilaire d'une turbulence à grand nombre de Reynolds

M Lesieur, D Schertzer

► **To cite this version:**

M Lesieur, D Schertzer. Amortissement autosimilaire d'une turbulence à grand nombre de Reynolds. Journal de Mécanique, 1978, 17 (4), pp.609-646. hal-02918060

**HAL Id: hal-02918060**

**<https://enpc.hal.science/hal-02918060>**

Submitted on 20 Aug 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Amortissement autosimilaire d'une turbulence à grand nombre de Reynolds

par

M. LESIEUR\* et D. SCHERTZER\*\*

**RÉSUMÉ.** — En turbulence tridimensionnelle homogène et isotrope, la dynamique des tourbillons porteurs d'énergie et la loi de décroissance temporelle de l'énergie cinétique dépendent fortement des interactions entre les échelles très différentes (interactions « non locales »). Ces questions sont étudiées dans le cadre de la théorie quasi-normale markovianisée avec amortissement turbulent (E.D.Q.N.M.) grâce à une technique numérique prenant en compte correctement les interactions non locales; dans les schémas numériques usuels ces interactions sont en effet coupées à un rapport d'échelle trop élevé (de l'ordre de 0,2). Dans la limite des nombres de Reynolds infinis on trouve que le spectre évolue asymptotiquement de façon autosimilaire avec une loi de l'énergie  $v^2(t) \approx t^{-\alpha_E}$  et de l'échelle des tourbillons énergétiques  $l(t) \approx t^{\alpha_l}$ . Ces exposants  $\alpha_E$  et  $\alpha_l$  dépendent du comportement du spectre initial  $E_0(k)$  aux petits nombres d'onde. Pour  $E_0(k) \approx k^s$  et  $1 \leq s < 4$ , on obtient analytiquement  $\alpha_E = 2(s+1)/(s+3)$  et  $\alpha_l = 2/(s+3)$ . Pour  $s \geq 4$  on obtient numériquement  $\alpha_E = 1,38$  et  $\alpha_l = 0,31$ . On présente également des résultats à nombre de Reynolds initial plus faible ( $Re = 128$ ). Pour  $s = 1$  et pour cette seule valeur, le nombre de Reynolds reste invariant et la loi de décroissance de l'énergie est en  $t^{-1}$ . Pour  $s = 4$ , on trouve que la décroissance de l'énergie peut être représentée par une loi en puissance ( $\alpha_E \approx 1,43$ ) au bout de quelques dizaines de temps de retournement des tourbillons énergétiques, temps d'accès difficile expérimentalement.

**ABSTRACT.** — The dynamics of energy-containing eddies and the decay-law of kinetic energy for three-dimensional homogeneous isotropic turbulence are strongly influenced by interactions between scales with very different magnitudes ("non local" interactions). These questions are studied in the framework of the Markovian eddy-damped quasi-normal theory (E.D.Q.N.M.), with the help of a numerical technique taking accurately into account these non local interactions; in usual numerical schemes, these interactions are indeed cut off below a much too high scale-ratio (about 0.2). In the limit of infinite

\* Institut de Mécanique de Grenoble.

\*\* Direction de la Météorologie, E.E.R.M./G.M.D., Paris.

Reynolds numbers, the energy spectrum is found to evolve asymptotically in a self-similar way, the energy decays as  $v^2(t) \approx t^{-\alpha_E}$  and the scale of energy-containing eddies as  $l(t) \approx t^{\alpha_l}$ . These exponents  $\alpha_E$  and  $\alpha_l$  depend on the behaviour of the initial spectrum  $E_0(k)$  at small wave numbers. For  $E_0(k) \approx k^s$  and  $1 \leq s < 4$  we have the analytical results  $\alpha_E = 2(s+1)/(s+3)$  and  $\alpha_l = 2/(s+3)$ . For  $s \geq 4$ , we find numerically  $\alpha_E = 1.38$  and  $\alpha_l = 0.31$ . Some results at lower initial Reynolds number are also presented ( $Re = 128$ ). For  $s = 1$ , and only for this value, the Reynolds number remains invariant and the energy decays like  $t^{-1}$ . For  $s = 4$ , it is found that the energy decay can be represented by a power-law ( $\alpha_E \approx 1.43$ ) after a few tens of large eddy turn over time, this being difficult to reach experimentally.

## 1. Introduction

On sait que certaines propriétés universelles de la turbulence telles que l'existence d'un spectre en loi de puissance aux grands nombres d'onde

$$(1) \quad E(k) \approx k^{-a} \quad (a \simeq 5/3),$$

ne se manifestent que dans la limite de viscosité nulle. Des travaux récents ([1] à [4]) utilisant la théorie quasi normale markovianisée avec amortissement turbulent (E.D.Q.N.M.) montrent que, quand la viscosité tend vers zéro, l'énergie cinétique est conservée pendant un temps fini  $t_*$  de l'ordre de quelques temps de retournement des gros tourbillons initialement porteurs d'énergie, puis est dissipée. A cette « catastrophe énergétique » (dissipation finie d'énergie par une viscosité infinitésimale) qui survient au temps  $t_*$  et est liée à une divergence de l'énstrophie, correspond l'apparition dans le spectre d'énergie d'une zone inertielle en  $k^{-5/3}$  s'étendant jusqu'à l'infini. Pour  $t > t_*$ , l'énergie cinétique décroît. La question se pose alors de savoir s'il existe un exposant universel  $\alpha_E$  tel que, pour  $t \rightarrow \infty$ , on ait

$$(2) \quad \langle u^2(t) \rangle \approx t^{-\alpha_E}.$$

Des théories phénoménologiques ([5] à [9]) ont montré que l'exposant  $\alpha_E$  n'était pas universel, mais dépendait du comportement du spectre d'énergie aux petits nombres d'onde. Si l'on suppose pour le spectre initial un comportement en loi de puissance  $E_0(k) = C_s k^s + O(k^{s+1})$ , ces théories conduisent à la valeur

$$(3) \quad \alpha_E = 2 \left( \frac{s+1}{s+3} \right).$$

En fait, cette loi n'est exacte que pour  $s < 4$ , ce qui invalide en particulier l'exposant  $10/7$  obtenu pour  $s = 4$  [10]. En effet les démonstrations qui en sont données s'appuient toujours sur le concept d'invariance des très gros tourbillons, c'est-à-dire correspondant aux nombres d'onde  $k \rightarrow 0$ . En réalité l'interaction de deux gros tourbillons énergétiques, qui conduit en général à un transfert direct d'énergie vers les plus grands nombres d'onde, peut conduire également par un phénomène de battement à un transfert inverse d'énergie correspondant à une interaction de triade  $k \ll p \sim q$ . Nous montrerons que ce transfert inverse, s'il est négligeable pour  $s < 4$ , devient au contraire essentiel pour  $s \geq 4$ . On retrouve en particulier pour  $s = 4$  la non invariance de l'intégrale de Loitzianskii [11], déjà connue par les travaux de Proudman et Reid [12], Batchelor et Proudman [13] et d'autres.

L'importance des interactions entre mouvements d'échelles très différentes (interactions non locales) dans la dynamique de la turbulence bidimensionnelle a été soulignée par Kraichnan [14] qui a montré que le tourbillon à petite échelle était entraîné comme un scalaire passif par le champ de vitesse à grande échelle [15]. Nous avons là un autre type d'interactions non locales correspondant à des triades  $q \ll p \sim k$  ou  $p \ll q \sim k$ . A trois dimensions, la justification de l'existence d'une zone inertielle en  $k^{-5/3}$  dans le spectre d'énergie [16] suppose que dans cette zone seuls des mouvements d'échelle voisine peuvent interagir de façon efficace (transfert local). Cependant, même dans la zone inertielle, les interactions non locales ne sont pas vraiment négligeables : seul 80 % du transfert est réalisé par des interactions où il y a moins d'une décade d'écart entre deux nombres d'onde [14]. Ce dernier résultat, obtenu sur la base de solutions stationnaires de l'équation spectrale du Test-Field-Model [17], ne concerne que la zone inertielle. Plus récemment, Kraichnan [18] a étudié certaines des interactions non locales  $k \ll p \sim q$  qui peuvent être représentées par un concept de viscosité turbulente. Dans cet article nous nous proposons de faire à l'aide de la théorie E.D.Q.N.M. une étude systématique de toutes les interactions non locales intervenant en turbulence tridimensionnelle isotrope, ceci afin d'étudier les problèmes de la dynamique des gros tourbillons et de la décroissance temporelle de l'énergie cinétique de la turbulence. Ces deux problèmes sont évidemment étroitement liés, puisque ce sont les gros et très gros tourbillons qui contiennent l'essentiel de l'énergie cinétique, et leur dynamique fait intervenir des interactions fortement non locales.

On peut enfin se demander quelle est l'influence de la viscosité sur la loi de décroissance de l'énergie. Expérimentalement, les résultats les plus précis semblent être ceux de Comte-Bellot et Corrsin [5] qui trouvent une loi de décroissance en  $t^{-1,26}$ . Mais on peut s'interroger sur la validité asymptotique de ces résultats, dans la mesure où les souffleries utilisées ne permettent guère de dépasser des temps de l'ordre de quelques temps de retournement des gros tourbillons porteurs d'énergie, alors que, comme nous le verrons, il en faudrait plusieurs dizaines pour que se manifeste un comportement asymptotique en  $t^{-\alpha}$ . Soit  $v^2 = \langle u^2(t) \rangle$  l'énergie cinétique, et  $l(t)$  une échelle caractéristique des gros tourbillons porteurs d'énergie. Les théories phénoménologiques citées ci-dessus montrent que dans la limite de viscosité nulle  $l(t)$  croît asymptotiquement suivant une loi de puissance

$$(4) \quad l(t) \approx t^{\alpha_l},$$

avec

$$(5) \quad \alpha_l = \frac{2}{s+3}.$$

En fait, la valeur de  $\alpha_l$  donnée par (5) n'est correcte que pour  $s < 4$ . On peut alors, pour une viscosité très petite mais non nulle, définir le nombre de Reynolds de la turbulence

$$(6) \quad R_l = \frac{vl}{\nu},$$

qui, pour  $s < 4$ , varie comme  $t^{-(s-1)/(s+3)}$ . Pour  $s = 1$ , le nombre de Reynolds est constant au cours du temps, et c'est le seul cas où l'énergie cinétique décroît en  $t^{-1}$  [19]. Pour  $s > 1$ , le nombre de Reynolds décroît, et au bout d'un temps  $t_{vis}$ , d'autant plus grand que la viscosité est faible, la loi de décroissance de l'énergie dépendra de la viscosité. Dans la phase finale de l'évolution, correspondant à la « mort » de la turbulence, le nombre de Reynolds tombera en dessous de 1 et les termes non linéaires des équations deviendront négligeables devant les termes visqueux. On peut alors montrer ([20], [42], [46]) que l'énergie cinétique décroît (pour  $s = 4$ ) en  $(\nu t)^{-5/2}$ .

Dans cet article, le paragraphe 2 est consacré à un rappel sur la théorie E.D.Q.N.M. Une étude complète des interactions non locales en turbulence tridimensionnelle homogène et isotrope est faite au paragraphe 3. Au

paragraphe 4 on montre que le spectre d'énergie des très gros tourbillons ne varie pas au cours du temps à condition que l'exposant  $s$  du spectre d'énergie initial soit strictement inférieur à 4. Au paragraphe 5 on montre que le spectre d'énergie tend pour  $\nu \rightarrow 0$  et  $t \rightarrow \infty$  vers une forme universelle « autosimilaire » (en  $k^{-5/3}$  aux grands  $k$  et en  $k^{\text{inf}(s, 4)}$  aux petits  $k$ ) telle que toute la dépendance temporelle soit contenue dans des facteurs d'échelle. Au paragraphe 6 on étudie la loi de décroissance de l'énergie cinétique de la turbulence. Enfin au paragraphe 7 on discute l'influence de la viscosité sur les lois de décroissance de l'énergie.

## 2. L'approximation E.D.Q.N.M.

Les méthodes de fermeture à deux points telles que la théorie E.D.Q.N.M. (Eddy-Damped Quasi-Normal Markovian : [21], [22]) ou le Test-Field-Model ([17]; voir également [23]) ont été beaucoup utilisées pour l'étude de la turbulence homogène isotrope à grand nombre de Reynolds. Elles ont permis en particulier d'acquérir une meilleure connaissance des mécanismes de transfert dans l'espace de Fourier, et à trois dimensions de vérifier la conjecture reliant l'apparition d'un spectre de Kolmogorov à la divergence de l'enstrophie  $\langle \text{rot } u^2 \rangle$  au bout d'un temps fini  $t_*$ , ceci dans la limite de viscosité nulle [4] <sup>(1)</sup>. A nombre de Reynolds plus faible, elles sont en bon accord avec les simulations numériques directes ([24], [25]); en particulier elles prédisent pour le coefficient de dissymétrie une valeur proche des résultats expérimentaux [4]. Jusqu'à maintenant ces théories avaient surtout servi à étudier des phénomènes dont la dynamique est régie par des interactions locales dans l'espace de Fourier, c'est-à-dire des interactions de triade  $k \sim p \sim q$  : en effet les techniques numériques utilisées (discrétisation logarithmique dans l'espace de Fourier) ne pouvaient traiter correctement les interactions fortement non locales. En fait les difficultés sont d'ordre purement numérique; et ces techniques de fermeture sont tout à fait appropriées pour étudier les problèmes où interviennent les interactions non locales. On ne peut pas en dire autant des théories spectrales telles que celle d'Heisenberg [26], Obukhov (voir à ce sujet Panchev [27]), ou Leith [7], qui sont par essence des théories locales et donc *a priori* inadéquates pour étudier de tels problèmes.

---

<sup>(1)</sup> Dans la référence [4] le sigle E.D.Q.N. renvoie à la théorie E.D.Q.N.M. Il faut signaler que ce résultat (divergence de l'enstrophie au bout d'un temps fini), avait été obtenu dans le cadre de l'approximation quasi-normale par Proudman et Reid [12].

On sait que l'approximation quasi normale [28] qui suppose que les moments d'ordre quatre du champ de vitesse sont reliés aux moments d'ordre deux comme si le champ était gaussien, n'est pas physiquement réalisable puisqu'elle conduit à l'apparition de spectres d'énergie négatifs [29]. Il est cependant possible de « guérir » cette approximation de la façon suivante. Considérons l'équation spectrale obtenue par cette théorie (voir par exemple [9]) :

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial t} E(k, t) + 2\nu k^2 E(k, t) = T_{\text{QN}}(k, t),$$

où  $T_{\text{QN}}(k, t)$  est donné par

$$(8) \quad T_{\text{QN}}(k, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \iint_{\Delta} \exp -\nu(k^2 + p^2 + q^2)(t - \tau) \frac{k}{pq} b(k, p, q) \\ \times [k^2 E(p, \tau) E(q, \tau) - p^2 E(q, \tau) E(k, \tau)] dp dq.$$

Dans l'expression (8), le domaine  $\Delta$  est le domaine du plan  $(p, q)$  tel que  $(k, p, q)$  soient les côtés d'un triangle. Le coefficient  $b(k, p, q)$  est donné par

$$(9) \quad b(k, p, q) = \frac{p}{k} (xy + z^3),$$

où  $x, y$  et  $z$  sont les cosinus des angles intérieurs au triangle  $(k, p, q)$ . Il est alors possible, en « markovianisant » le terme  $T_{\text{QN}}(k, t)$ , c'est-à-dire en le remplaçant par

$$(10) \quad T_{\text{QNM}}(k, t) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta} \theta_{kpq}^{(\nu)}(t) \frac{k}{pq} b(k, p, q) \\ \times [k^2 E(p, t) E(q, t) - p^2 E(q, t) E(k, t)] dp dq,$$

avec

$$(11) \quad \theta_{kpq}^{(\nu)}(t) = \frac{1 - \exp -\nu(k^2 + p^2 + q^2)t}{\nu(k^2 + p^2 + q^2)},$$

d'assurer la réalisabilité. L'expression (11) est cependant physiquement très irréaliste, puisque le temps  $\theta_{kpq}^{(\nu)}(t)$ , qui peut s'interpréter comme le temps de relaxation des corrélations triples correspondant à cette approximation, est (excepté dans la zone de dissipation) très supérieur au temps de relaxation réel : dans la zone inertielle ce dernier temps est de l'ordre

du temps de retournement local  $[k^3 E(k)]^{-1/2}$ . On est donc conduit à remplacer dans (10) le temps  $\theta_{kpq}^{(v)}(t)$  par un temps  $\theta_{kpq}(t)$  plus compatible avec la physique du problème. Dans la théorie E.D.Q.N.M. on choisit ce temps compatible avec l'existence d'une zone inertielle en  $k^{-5/3}$  :

$$(12) \quad \theta_{kpq}(t) = \frac{1 - \exp - (\mu_k + \mu_p + \mu_q)t}{(\mu_k + \mu_p + \mu_q)},$$

avec

$$(13) \quad \mu_k = \lambda \left\{ \int_0^k p^2 E(p, t) dp \right\}^{1/2} + \nu k^2,$$

où  $\lambda$  est une constante dont le choix sera précisé plus loin. Le terme de transfert  $T(k, t)$  dans l'équation spectrale de la théorie E.D.Q.N.M. est donc :

$$(14) \quad T(k, t) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta} \theta_{kpq}(t) \frac{k}{pq} b(k, p, q) \\ \times [k^2 E(p, t) E(q, t) - p^2 E(q, t) E(k, t)] dp dq.$$

Dans le Test-Field-Model, le temps  $\theta_{kpq}(t)$  n'est plus déterminé de façon phénoménologique, mais par l'étude d'un problème annexe, celui de l'advection d'un champ d'épreuves par le champ de vitesse. En fait, dans la zone inertielle, le Test-Field-Model et l'E.D.Q.N.M. coïncident à condition de prendre pour  $\lambda$  la valeur 0,355 [4]. C'est cette valeur qui a été choisie par la suite.

Il faut souligner cependant que le fait de choisir un temps  $\theta_{kpq}(t)$  compatible avec la théorie de Kolmogorov [16] exclut l'intermittence interne ([30], [31]). Cette incapacité de la théorie E.D.Q.N.M. à prendre en compte l'intermittence est sans conséquence pour l'étude qui va suivre, puisque l'on s'intéresse surtout au domaine d'énergie (gros tourbillons) et au domaine que nous appellerons des « très gros tourbillons » ( $k \rightarrow 0$ ), où les effets de l'intermittence interne sont négligeables. Ceci est d'ailleurs confirmé par l'étude qu'ont faite Forster, Nelson et Stephen [32] de certains problèmes « infrarouges » ( $k \rightarrow 0$ ) liés à la turbulence : dans des régions où le spectre est une fonction croissante du nombre d'onde, ils ont montré que les « corrections vertex » <sup>(2)</sup> sont négligeables pour  $k \rightarrow 0$ .

<sup>(2)</sup> C'est-à-dire les corrections systématiques à l'approximation d'interaction directe (D.I.A.) de Kraichnan [33] dans un développement « renormalisé » telles qu'elles sont définies par exemple dans [34] ou [35].



De plus on peut montrer ([31], [36]) que les approximations D.I.A. et E.D.Q.N.M. sont dans ce cas équivalentes à des constantes numériques près, alors qu'elles diffèrent habituellement dans leurs prédictions, par exemple pour les zones inertielles qui sont respectivement en  $k^{-3/2}$  et  $k^{-5/3}$ . Comme nous allons le voir plus précisément en étudiant la dynamique des très gros tourbillons, on s'intéressera à des spectres en loi de puissance avec des exposants positifs, ce qui justifie l'utilisation de la théorie E.D.Q.N.M. pour cette étude.

### 3. Étude des interactions non locales

Certains des résultats contenus dans ce paragraphe, notamment ceux concernant les viscosités turbulentes, ne sont pas nouveaux. On les trouvera dans [18] par exemple. Nous allons développer ici une méthode qui permet de retrouver dans le cas le plus général (aussi bien dans l'infrarouge  $k \rightarrow 0$  que dans l'ultraviolet  $k \rightarrow \infty$ ) l'expression des transferts d'énergie dus aux interactions non locales. Nous insisterons particulièrement sur les propriétés de conservation qui deviennent cruciales dès que l'on veut résoudre numériquement les équations spectrales.

Étant donné un paramètre  $a < 1$ , nous appellerons interactions non locales relatives au paramètre  $a$  les interactions de triade  $(k, p, q)$  telles que

$$(15) \quad \inf(k, p, q) / \sup(k, p, q) < a.$$

Ces interactions correspondent à la partie  $\Delta_{NL}$  de  $\Delta$  représentée sur la figure 1. Soit  $T(k, p, q)$  le terme figurant sous l'intégrale double de (14). Posant

$$(16) \quad S(k, p, q) = \frac{1}{2} [T(k, p, q) + T(k, q, p)],$$

on obtient évidemment :

$$(17) \quad T(k, i) = \iint_{\Delta} S(k, p, q) dp dq.$$

L'intérêt d'écrire (14) sous la forme symétrisée (17) est que l'énergie est conservée de façon détaillée dans chaque interaction de triade, c'est-à-dire que

$$(18) \quad S(k, p, q) + S(p, q, k) + S(q, k, p) = 0.$$

Nous définirons les transferts locaux et non locaux par

$$(19) \quad T_L(k, t) = \iint_{\Delta - \Delta_{NL}} S(k, p, q) dp dq,$$

$$(20) \quad T_{NL}(k, t) = \iint_{\Delta_{NL}} S(k, p, q) dp dq.$$

Alors que le transfert local  $T_L$  est prédominant dans la cascade d'énergie de Kolmogorov, c'est au contraire le transfert non local  $T_{NL}$  qui va gouverner

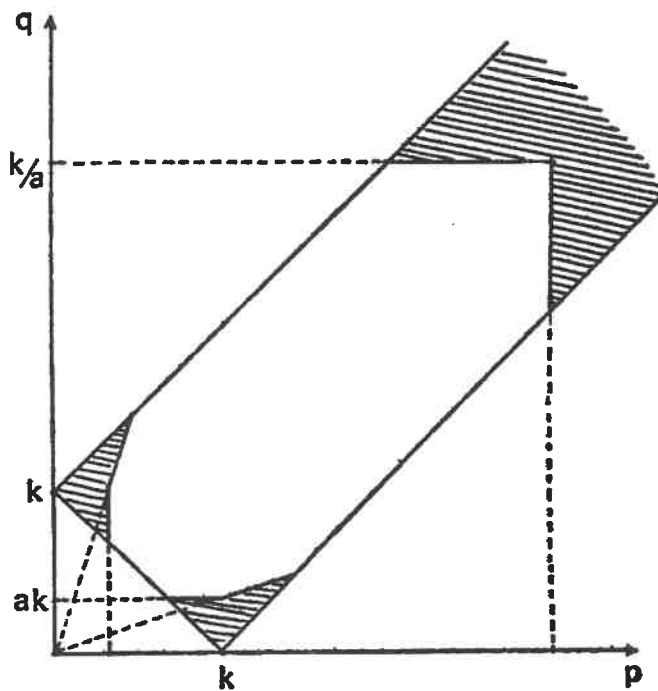


Fig. 1. — La partie hachurée correspond au domaine  $\Delta_{NL}$  du plan  $(q, p)$  tel que  $\inf(k, p, q)/\sup(k, p, q) < a$ .

la dynamique des gros et très gros tourbillons. C'est ce terme que nous allons chercher à expliciter. La méthode utilisée est analogue à la méthode de calcul des transferts non locaux en turbulence bidimensionnelle [37], et consiste à évaluer d'abord le flux non local d'énergie à travers le mode  $k$  :

$$(21) \quad \Pi_{NL}(k, t) = \int_k^\infty T_{NL}(k', t) dk',$$

en tenant compte des propriétés de conservation détaillée.  $T_{NL}$  se déduit ensuite de  $\Pi_{NL}$  par

$$(22) \quad T_{NL}(k, t) = -\frac{\partial}{\partial k} \Pi_{NL}(k, t).$$

Rappelons que la propriété de conservation détaillée (18) implique que l'intégrale  $\iiint S(k, p, q) dk dp dq$  est nulle sur tout domaine invariant par permutation circulaire de  $k, p, q$ . Ceci permet d'écrire le flux d'énergie à travers le mode  $k$  :

$$(23) \quad \Pi(k, t) = \int_k^\infty T(k', t) dk',$$

sous la forme

$$(24) \quad \Pi(k, t) = \Pi^+(k, t) - \Pi^-(k, t),$$

$$(25) \quad \Pi^+(k, t) = 2 \int_k^\infty dk' \int_0^k dp \int_0^p S(k', p, q) dq,$$

$$(26) \quad \Pi^-(k, t) = 2 \int_0^k dk' \int_k^\infty dp \int_k^p S(k', p, q) dq,$$

intégrales dans lesquelles les bornes d'intégration sont évidemment soumises à la condition que  $k', p, q$  forment un triangle. L'invariance du domaine  $\Delta_{NL}$  par permutation circulaire sur les conditions imposées à  $k', p, q$  permet d'écrire également :

$$(27) \quad \Pi_{NL}(k, t) = \Pi_{NL}^+(k, t) - \Pi_{NL}^-(k, t),$$

où  $\Pi_{NL}^+(k, t)$  et  $\Pi_{NL}^-(k, t)$  sont donnés par des relations analogues à (25) et (26), dans lesquelles les bornes d'intégration sont de plus soumises à la condition de non-localité (15). En intervertissant les bornes d'intégration, on peut mettre  $\Pi_{NL}^+$  et  $\Pi_{NL}^-$  sous la forme

$$(28) \quad \Pi_{NL}^+(k, t) = 2 \int_0^{ak} dq \int_k^{k+q} dk' \int_{k'-q}^k S(k', p, q) dp,$$

$$(29) \quad \Pi_{NL}^-(k, t) = 2 \int_0^k dk' \int_{\sup(k, k'/a)}^\infty dp \int_{p-k'}^p S(k', p, q) dq.$$

L'expression (28) est approchée, mais les termes négligés sont d'ordre inférieur en  $a$ . Le flux non local  $\Pi_{NL}^+$  représente des interactions  $q \ll p \sim k' \sim k$ . Ces interactions sont, à deux dimensions, prépondérantes dans la cascade d'entrophie ([14], [38]). Le flux non local  $\Pi_{NL}^-$  représente les interactions  $k' \ll p \sim q$ .

Pour calculer  $\Pi_{NL}^+$ , on développe  $S(k', p, q)$  en puissance de  $q/k'$  (le premier ordre suffit) et on intègre ce développement successivement en  $p, k', q$ . L'intégration en  $p$  se fait par l'intermédiaire de la variable  $y$ , et l'on a

$$(30) \quad \Pi_{NL}^+(k, t) = 2 \int_0^{ak} dq \int_k^{k+q} dk' \int_\varphi^1 S(k', p, q) \frac{k' q}{p} dy,$$

avec

$$(31) \quad \varphi = \frac{k'^2 - k^2 + q^2}{2k'q}.$$

En reportant dans (30) le développement au premier ordre en  $q/k'$  de  $S(k', p, q)$  [on trouvera dans l'annexe 1 certains développements en  $q/k$  à l'ordre deux de quantités liées au triangle  $(k, p, q)$ ], il vient :

$$(32) \quad \Pi_{NL}^+(k, t) = \frac{1}{2} \int_0^{ak} dq \int_k^{k+q} \theta_{k'k'q} dk' \times \left[ qk' E(q) \left\{ E(k') - k' \frac{\partial E}{\partial k'} \right\} + \frac{q^3}{k'} E^2(k') \right] \int_\varphi^1 y(1-y^2) dy.$$

L'intégration en  $k'$  se fait par l'intermédiaire de la variable  $\varphi$ . A l'ordre le plus bas en  $a$ , on a en effet :

$$(33) \quad \int_k^{k+q} dk' = q \int_0^1 d\varphi.$$

En outre on peut sortir de cette intégrale toutes les fonctions de  $k'$  qui varient peu avec  $k'$  sur l'intervalle  $(k, k+q)$ . Il vient finalement :

$$(34) \quad \Pi_{NL}^+(k, t) = \frac{1}{15} \left\{ \int_0^{ak} \theta_{kkq} q^2 E(q, t) dq \right\} \left[ k E(k, t) - k^2 \frac{\partial E}{\partial k} \right] + \frac{1}{15} \left\{ \int_0^{ak} q^4 \theta_{kkq} dq \right\} \frac{E^2(k, t)}{k}.$$

On peut remarquer à ce niveau que, en posant  $a=1$  et pour un spectre en loi de puissance, le premier terme de  $\Pi_{NL}^+$  redonne la théorie spectrale d'Obukhov : les interactions locales peuvent être considérées comme un cas limite d'interactions non locales où l'on a pris égal à 1 le « petit » paramètre de développement. En ce qui concerne les très gros tourbillons, le flux  $\Pi_{NL}^+$  est, comme nous allons le voir, négligeable devant  $\Pi_{NL}^-$ .

Pour calculer  $\Pi_{NL}^-$  on développe  $S(k', p, q)$  en puissances de  $k'/p$  (l'ordre 1 suffit également) et on intègre ce développement successivement en  $q, p, k'$ .

L'intégration en  $q$  se fait par l'intermédiaire de la variable  $z$ , et l'on a

$$(35) \quad \Pi_{NL}^-(k, t) = 2 \int_0^k dk' \times \int_{\sup(k, k'/a)}^{\infty} dp \int_{k'/2p}^1 S(k', p, q) \frac{k' p}{q} dz.$$

En reportant dans (35) le développement au premier ordre en  $k'/p$  de  $S(k', p, q)$  [on trouvera dans l'annexe 2 les développements à l'ordre 2 en  $k/p$  de quantités liées au triangle  $(k, p, q)$ ], il vient :

$$(36) \quad \Pi_{NL}^-(k, t) = \frac{1}{2} \int_0^k dk' \int_{\sup(k, k'/a)}^{\infty} \theta_{k'pp} dp \int_{k'/2p}^1 \left\{ -k'^2 (1-z^2) E(k') \left[ E(p) + z^2 p \frac{\partial E}{\partial p} \right] + (1-z^2)(1+2z^2) \left( \frac{k'^4}{p^2} \right) E^2(p) \right\} dz.$$

A l'ordre le plus bas, l'intégrale  $\int_{k'/2p}^1 dz$  se réduit à  $\int_0^1 dz$ . On obtient finalement :

$$(37) \quad \Pi_{NL}^-(k, t) = -\frac{1}{15} \int_0^k k'^2 E(k', t) dk' \int_{\sup(k, k'/a)}^{\infty} \theta_{k'pp} \left[ 5 E(p) + p \frac{\partial E}{\partial p} \right] dp + \frac{7}{15} \int_0^k k'^4 dk' \int_{\sup(k, k'/a)}^{\infty} \theta_{k'pp} \frac{E^2(p)}{p^2} dp.$$

Le premier terme de  $\Pi_{\text{NL}}^-(k, t)$  peut, à l'ordre du développement considéré, se mettre sous la forme

$$-2 \int_0^k v_{\text{turb}} [\text{sup}(ak, k')] k'^2 E(k', t) dk'$$

avec

$$(38) \quad v_{\text{turb}}(k) = \frac{1}{30} \int_{k/a}^{\infty} \theta_{kpp} \left[ 5E(p, t) + p \frac{\partial E}{\partial p} \right] dp$$

$$= \frac{1}{15} \int_{k/a}^{\infty} \theta_{kpp} \left[ 7U + p \frac{\partial U}{\partial p} \right] dp,$$

où

$$U = \frac{E(k, t)}{4\pi k^2}$$

est la trace du tenseur spectral.

$v_{\text{turb}}(k)$  qui exprime certaines des interactions  $k \ll p \sim q$  est la « viscosité turbulente » introduite par Kraichnan [18]. Le premier terme de  $\Pi_{\text{NL}}^-(k, t)$  correspond donc au flux d'énergie à travers  $k$  dû à l'amortissement par la turbulence petite échelle ( $p > k$ ) de l'énergie contenue dans la bande spectrale  $(0, k)$  <sup>(3)</sup>.

Le deuxième terme de  $\Pi_{\text{NL}}^-(k, t)$ , qui est positif, est le seul qui conduise à un transfert inverse d'énergie à travers  $k$ .

#### 4. Étude de la dynamique des très gros tourbillons

On peut évaluer approximativement les différents termes intervenant dans  $\Pi_{\text{NL}}^+$  et  $\Pi_{\text{NL}}^-$ , par exemple en supposant un spectre  $E(k)$  de la forme

$$(39) \quad \begin{cases} E(k) = C_s k^s & \text{pour } k \leq l^{-1} \quad (s \geq 1), \\ E(k) \approx k^{-5/3} & \text{pour } k \geq l^{-1}. \end{cases}$$

On trouve alors que, dans la zone inertielle,  $\Pi_{\text{NL}}^+$  se réduit à son premier terme qui, comme nous l'avons déjà souligné, peut être considéré comme

<sup>(3)</sup> Rappelons qu'à deux dimensions, on peut introduire de la même façon une viscosité turbulente qui est généralement négative [18].

Si l'on étudie le prolongement analytique de l'équation spectrale E.D.Q.N.M. en dimension  $d$  non entière, on trouve une viscosité turbulente qui dépend continûment de  $d$  et s'annule pour une zone inertielle en  $k^{-5/3}$  lorsque  $d = 2,208$  ([39], [36]).

une généralisation de la théorie d'Obukhov. Dans cette zone,  $\Pi_{NL}^-$  se réduit au terme de viscosité turbulente, qui est alors du même ordre de grandeur que  $\Pi_{NL}^+$ . Par contre quand  $k \rightarrow 0$ ,  $\Pi_{NL}^+$  est négligeable devant  $\Pi_{NL}^-$ .  $T_{NL}(k, t)$  est alors égal à  $-(\partial \Pi_{NL}^- / \partial k)$ , soit, à l'ordre du développement considéré

$$(40) \quad T_{NL}(k, t) = \mathcal{A} k^4 - 2 v_{\text{turb}}(k) k^2 E(k, t),$$

avec

$$(41) \quad \mathcal{A} = \frac{7}{15} \int_{k/a}^{\infty} \theta_{kpp} \frac{E^2(p)}{p^2} dp.$$

La contribution essentielle à l'intégrale figurant dans  $\mathcal{A}$  vient des nombres d'onde énergétiques  $p \sim l^{-1}$ , en sorte que  $\mathcal{A}$  ne dépend pas en fait de  $k$ . Par contre  $\mathcal{A}$  dépend de façon très sensible de la forme du spectre d'énergie au voisinage de  $l^{-1}$ , et l'on ne peut calculer  $\mathcal{A}$  en utilisant un modèle de spectre aussi simplifié que (39). Le terme  $\mathcal{A} k^4$  peut être interprété comme un terme de battement, où deux nombres d'onde énergétiques  $p \sim q \sim l^{-1}$  interagissent et produisent par transfert inverse un spectre en  $k^4$  au voisinage de  $k = 0$ . L'équation d'évolution du spectre s'écrit donc pour  $k \rightarrow 0$  :

$$(42) \quad \frac{\partial E(k, t)}{\partial t} = \mathcal{A} k^4 - 2 v_{\text{turb}}(k) k^2 E(k, t) + O(k^5) + T_L(k, t),$$

où le terme local  $T_L(k, t)$  est de l'ordre de  $[k E(k, t)]^{3/2}$ . Le terme de viscosité  $2 v k^2 E(k, t)$  a été omis dans le premier membre de (42), ce qui est tout à fait légitime dans les très gros tourbillons tant que le nombre de Reynolds de la turbulence n'est pas petit devant 1. Ce résultat en  $k^4$  pour  $s \geq 2$  est en réalité indépendant de la fermeture utilisée. Par exemple dans le formalisme de perturbations systématiques de Martin, Siggia et Rose [34], il est possible de montrer que le transfert est en  $k^4$  à tous les ordres [40]. Un résultat analogue a été obtenu par Forster, Nelson et Stephen ([32], [41]).

On peut alors chercher à quelles conditions un spectre initialement en  $k^s$  au voisinage de  $k = 0$  reste en  $k^s$ . Si nous reportons dans l'équation (42) un spectre de la forme

$$(43) \quad E(k, t) = C_s(t) k^s + O(k^{s+1}),$$

et que nous développons au voisinage de  $k = 0$ , on obtient les résultats suivants :

– pour  $1 \leq s < 4$  :

$$(44) \quad \frac{dC_s}{dt} = 0,$$

ce qui exprime l'invariance des très gros tourbillons. Dans ce cas les interactions non locales ne modifient que de façon négligeable l'énergie déjà contenue dans les très gros tourbillons;

– pour  $s = 4$  :

$$(45) \quad \frac{dC_s}{dt} = \mathcal{A}.$$

Dans ce cas, à cause du transfert inverse en  $k^4$ , il n'y a plus invariance des très gros tourbillons, mais le spectre reste en  $k^4$ ;

– pour  $s > 4$ , le développement (43) n'est pas compatible avec (42); le transfert inverse en  $k^4$  conduit instantanément à un spectre en  $k^4$  au voisinage de  $k = 0$ .

On peut remarquer, pour conclure ce paragraphe, que la quantité  $C_s$  est, dans le cas  $s = 4$ , proportionnelle à l'intégrale de Loitzianskii :

$$(46) \quad J = \langle u^2(t) \rangle \int_0^\infty r^4 f(r) dr,$$

où  $f(r)$  est la corrélation longitudinale. Loitzianskii [11] a montré que  $J$  était indépendant du temps. La justification de cette « invariance » reposait sur des hypothèses d'analyticité des cumulants qui ne sont pas valables à cause des effets à longue portée du terme de pression. Proudman et Reid [12] ont, dans le cadre de l'approximation quasi normale, montré que  $J$  n'était pas invariant<sup>(4)</sup>. En fait cette démonstration n'est pas limitée à l'approximation quasi normale : il suffit pour cela de considérer un champ

---

<sup>(4)</sup> On peut citer aussi le travail de Lin et Reid [20].



de vitesse initialement gaussien, pour lequel l'équation quasi normale est valable à l'instant  $t = 0$ , soit :

$$(47) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\nu k^2 \frac{\partial}{\partial t} \right) E(k, t) \Big|_{t=0} \\ = \frac{1}{2} \iint_{\Delta pq} \frac{k}{pq} b(k, p, q) [k^2 E(p, 0) E(q, 0) - p^2 E(q, 0) E(k, 0)] dp dq.$$

En séparant dans le second membre de (47) les interactions non locales des interactions locales comme au paragraphe 3 (il suffit de remplacer  $\theta_{kpq}$  par 1 dans les développements), on obtient au voisinage de  $k = 0$  :

$$(48) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(k, t) \Big|_{t=0} = \frac{7}{15} \left\{ \int_{k/a}^{\infty} \frac{E^2(p, 0)}{p^2} dp \right\} k^4,$$

ce qui implique que, pour un spectre initialement en  $k^4$ ,  $d^2 C_4/dt^2 \Big|_{t=0}$  est non nul, et donc que l'intégrale de Loitzianskii n'est pas un invariant.

### 5. Existence de solutions autosimilaires

L'hypothèse de Karman et Howarth [42] (à propos de laquelle on peut consulter [43]) traduite dans l'espace de Fourier, suppose que le spectre d'énergie  $E(k, t)$  garde au cours du temps la forme autosimilaire suivante :

$$(49) \quad E(k, t) = v^2 l F(kl),$$

où  $v^2(t)$  est l'énergie cinétique de la turbulence,  $l(t)$  une échelle caractéristique des gros tourbillons énergétiques égale à  $v^3/\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  étant le taux de dissipation de l'énergie cinétique

$$(50) \quad \varepsilon = - \frac{dv^2}{dt}.$$

Une telle solution, si elle existe, ne peut être valable que dans la limite de viscosité nulle, puisque la viscosité n'intervient pas dans (49). Nous verrons en fait qu'il existe une exception à cette règle dans le cas  $s = 1$ , qui correspond à une loi de décroissance en  $t^{-1}$ . En outre, ces spectres autosimilaires ne peuvent apparaître que pour des temps grands devant le temps de catastrophe : en effet, puisque pour  $t > t_*$  le spectre  $E(k, t)$

décroit en  $k^{-5/3}$  pour  $k \rightarrow \infty$ , l'expression [49] ne peut être valable pour  $t < t_*$  puisque  $E(k, t)$  est alors à décroissance rapide pour  $k \rightarrow \infty$ . On peut montrer aisément que les deux hypothèses suivantes :

(i) existence de spectres autosimilaires;

(ii) invariance des très gros tourbillons;

permettent de retrouver les lois (3) et (5) : en effet, en développant (49) au voisinage de  $k = 0$ , on trouve que  $v^2 l^{s+1}$  est indépendant du temps.

Le système

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} v^2 l^{s+1} = \text{Cte}, \\ l = \frac{v^3}{\varepsilon}, \\ \varepsilon = -\frac{dv^2}{dt}, \end{array} \right.$$

conduit pour  $v^2$  et  $l(t)$  aux solutions en loi de puissance (3) et (5). En fait, nous avons vu au paragraphe 4 à l'aide de l'approximation E.D.Q.N.M. que la propriété (ii) n'est vraie que pour  $s < 4$ . Pour  $s = 4$ , et en supposant que le coefficient  $C_4(t)$  varie comme  $t^\gamma$  (5), le raisonnement précédent conduit à

$$(52) \quad v^2 \approx t^{-(10/7)+(2/7)\gamma},$$

$$(53) \quad l(t) \approx t^{(2/7)+\gamma/7}.$$

La détermination de  $\gamma$  sera faite à l'aide d'un calcul numérique au paragraphe 6. Nous allons montrer ici que la théorie E.D.Q.N.M. est compatible avec la propriété (i).

L'énergie cinétique et la longueur caractéristique  $l(t)$  suivant des lois de puissance, on peut récrire (49) sous la forme

$$(55) \quad E(k, t) = t^n G(kt^m),$$

avec

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} v^2 \approx t^{n-m}, \\ l(t) \approx t^m. \end{array} \right.$$

(5) En fait, il est équivalent de supposer que le terme de transfert est autosimilaire :

$$(54) \quad T(k, t) = v^3 T'(kl).$$

En reportant (55) dans l'équation spectrale E.D.Q.N.M. inviscide, il vient :

$$(57) \quad \left[ n G(k') + mk' \frac{dG}{dk'} \right] t^{(3m-n-2)/2} = T^{(1)}(k'),$$

où  $T^{(1)}(k')$  est obtenu à partir de  $T(k, t)$  en remplaçant  $E(k, t)$  par  $G(k')$  et  $\theta_{kpq}(t)$  par

$$(58) \quad \theta_{k'p'q'}^{(1)} = \frac{1 - \exp[-(\mu_{k'} + \mu_{p'} + \mu_{q'})]}{\mu_{k'} + \mu_{p'} + \mu_{q'}},$$

avec

$$(59) \quad \mu_{k'} = \lambda \left[ \int_0^{k'} p'^2 G(p') dp' \right]^{1/2}.$$

L'hypothèse d'autosimilarité implique donc que  $m$ ,  $n$ , et  $G$  vérifient le système

$$(60) \quad n G(k') + mk' \frac{dG}{dk'} = T^{(1)}(k'),$$

$$(61) \quad 3m - n - 2 = 0.$$

L'équation (61) est, d'ailleurs, équivalente aux deux dernières relations de (51). Le problème de la détermination de  $m$  et  $n$  pourrait être résolu en cherchant les valeurs de  $m$  et  $n$  satisfaisant (61) et pour lesquelles l'équation (60) admet une solution. Cette question est triviale pour  $s < 4$ , où un développement au voisinage de  $k' = 0$  de (60) conduit à la relation

$$(62) \quad n + ms = 0,$$

équivalente à la première relation de (51).

On retrouve donc par (61) et (62), les valeurs  $\alpha_E = m - n$  et  $\alpha_l = m$  données par (3) et (5).

Pour  $s = 4$ , le problème demeure entier, puisque le développement de (60) conduit maintenant à

$$(63) \quad \gamma = n + ms = \lim_{k' \rightarrow 0} \frac{T^{(1)}(k')}{G(k')}$$

redonnant avec (61) les lois (52), (53). La détermination de  $\gamma$  pourrait donc être faite par la résolution du système (60) (61), mais cette étude ne sera pas

envisagée dans le cadre de cet article. L'exposant  $\gamma$  sera déterminé numériquement au paragraphe 6 en étudiant la croissance au cours du temps du coefficient  $C_4(t)$ .

On peut enfin se demander si la présence d'une viscosité non nulle permet l'existence de solutions autosimilaires. Une hypothèse d'autosimilarité conduirait alors au système

$$(64) \quad n G(k') + m k' \frac{dG}{dk'} + 2 \nu k'^2 G(k') = T^{(1)}(k'),$$

$$(65) \quad \begin{cases} 3m - n - 2 = 0, \\ m + n = 0. \end{cases}$$

Pour  $k' \rightarrow 0$ , le terme visqueux dans l'équation (64) peut être négligé. D'autre part on peut faire l'hypothèse tout à fait vraisemblable que les éventuelles solutions autosimilaires en présence de viscosité ne diffèrent des solutions autosimilaires inviscides (pour un même  $s$ ) qu'aux grands  $k'$ . En conséquence un développement au voisinage de  $k' = 0$  de (64) conduit pour  $s < 4$  à l'équation (62) qui n'est compatible avec (61) et (65) que dans le cas  $s = 1$ . On obtient alors  $m = 1/2$  et  $n = -1/2$ , soit une loi de décroissance de l'énergie en  $t^{-1}$ . C'est d'ailleurs le seul cas où cette loi de décroissance en  $t^{-1}$  est possible, car dans le cas  $s = 4$  la valeur de  $\gamma$  déterminée au paragraphe suivant n'est pas compatible avec les relations (61), (63) et (65).

## 6. Lois de décroissance de l'énergie à nombre de Reynolds infini

Nous avons déjà vu que, dans le cadre de l'approximation E.D.Q.N.M., le problème de la loi de décroissance de l'énergie était résolu pour  $s < 4$ , puisque les conditions (i) et (ii) définies au paragraphe précédent sont alors satisfaites. L'énergie décroît en  $t^{-2(s+1)/(s+3)}$ , le nombre de Reynolds varie comme  $t^{-(s-1)/(s+3)}$  et l'échelle intégrale  $l(t)$  croît en  $t^{2/(s+3)}$ . Nous avons vu également que, pour  $s > 4$ , on était immédiatement ramené au cas  $s = 4$ . La seule question qui demeure est donc la détermination du coefficient  $\gamma$  dans ce dernier cas.

Nous avons donc entrepris une résolution numérique de l'équation spectrale E.D.Q.N.M. tridimensionnelle. Ce calcul avait déjà été fait pour l'étude des cascades vers les grands nombres d'onde [4] où les interactions non locales sont faibles devant les interactions locales. La difficulté d'une

étude numérique des très gros tourbillons vient de ce que les méthodes numériques utilisées comportent une discrétisation logarithmique

$$(66) \quad k_L \sim 2^{L/F},$$

nécessaire pour pouvoir accéder à de très grands nombres de Reynolds. Cette discrétisation a pour effet de supprimer certaines des interactions non locales pour

$$(67) \quad a = 2^{1/F} - 1.$$

Le facteur  $F$ , nombre de points par octave, est généralement pris égal à 4, ce qui donne pour  $a$  la valeur de 0,19. Dans la simulation numérique, le transfert calculé se réduit donc à  $T_L(k, t)$  pour cette valeur de  $a$ , si bien qu'il est nécessaire de réintroduire les interactions non locales sous la forme

$$(68) \quad T_{NL}(k, t) = \frac{\partial}{\partial k} \Pi_{NL}^-(k, t) - \frac{\partial}{\partial k} \Pi_{NL}^+(k, t).$$

On peut remarquer que, dans (68), nous avons tenu compte de  $\Pi_{NL}^+(k, t)$  bien qu'il soit négligeable pour  $k \rightarrow 0$ . Il se trouve en effet que  $\Pi_{NL}^+(k, t)$  représente une part non négligeable des flux dans la zone inertielle, et a donc une influence sur la forme du spectre aux grands nombres d'onde. Étant donné que le coefficient  $\gamma$ , qui détermine la loi de décroissance de l'énergie, dépend de tout le spectre, il est nécessaire de considérer toutes les interactions non locales qui peuvent avoir une influence sur une partie quelconque du spectre contribuant de façon sensible à l'intégrale (41). Cette remarque vaut aussi pour le terme de viscosité turbulente qui est cependant (pour  $s > 2$ ) négligeable dans les très gros tourbillons puisque

$$(69) \quad 2 \nu_{\text{turb}} k^2 E(k) = O(k^{2+s}).$$

Étant donné qu'il n'est pas possible de mener des calculs numériques à nombre de Reynolds infini pour l'équation spectrale E.D.Q.N.M. (on est nécessairement limité à un nombre fini de modes), nous avons fait des calculs pour un nombre de Reynolds initial

$$(70) \quad \text{Re} = \frac{v_0}{\nu k_1} = 32\,800,$$

où  $v_0^2$  est l'énergie cinétique initiale et  $k_1$  un nombre d'onde unité caractéristique des gros tourbillons initiaux. Pour de tels nombres de Reynolds, la viscosité a seulement pour effet de rajouter en queue du spectre d'énergie obtenu dans le cas inviscide (spectre en  $k^{-5/3}$  s'étendant jusqu'à l'infini)

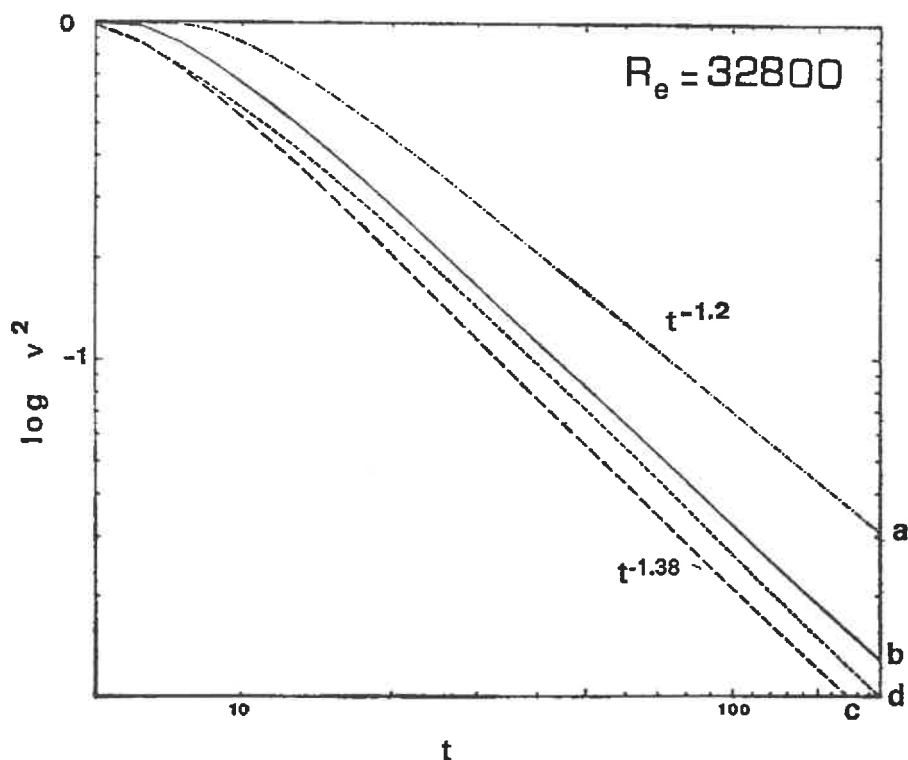


Fig. 2. — Variation de l'énergie cinétique  $v^2$  en fonction du temps pour un nombre de Reynolds initial  $Re = v_0/\nu k_1 = 32\,800$  dans les quatre cas suivants : (a)  $E(k, 0) \approx k^2$  quand  $k \rightarrow 0$ ; (b)  $E(k, 0) \approx k^4$  quand  $k \rightarrow 0$ ; (c)  $E(k, 0) \approx k^6$  quand  $k \rightarrow 0$ ; (d)  $E(k, 0) \approx k^\infty$  quand  $k \rightarrow 0$ .

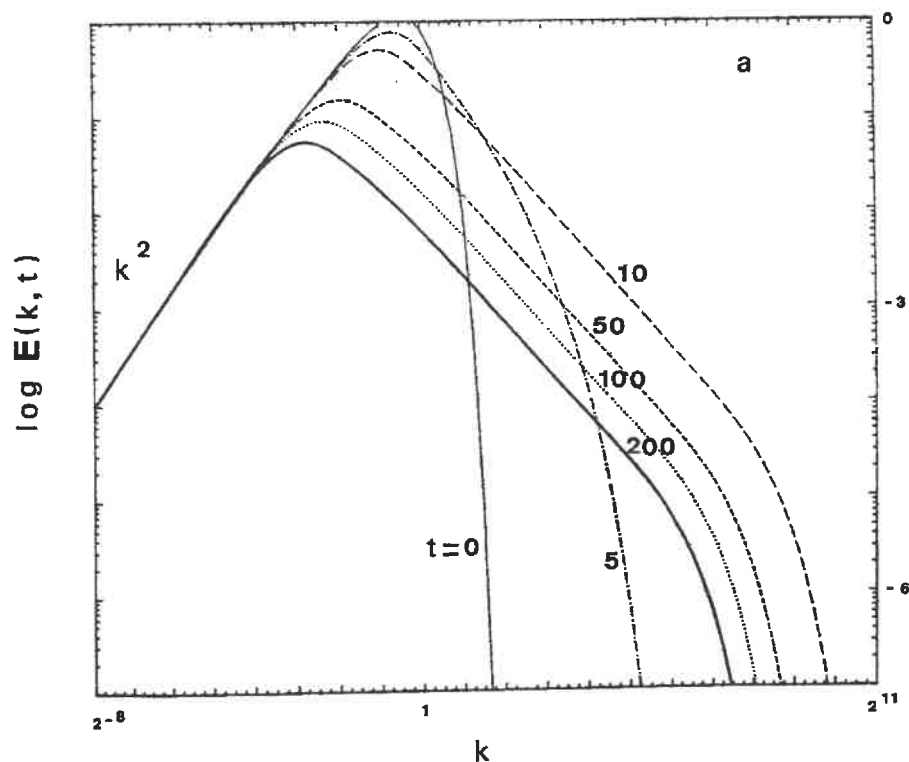


Fig. 3. — Évolution dans le temps du spectre d'énergie  $E(k, t)$  dans le cas (a) du calcul correspondant à la figure 2 et pour les temps  $t = 0, 5, 10, 50, 100, 200$ . On remarque l'absence de tout transfert inverse dans les très gros tourbillons.

une zone de dissipation. On peut vérifier numériquement d'une part que cette zone de dissipation ( $k \gg k_1$ ) n'a aucune influence sur la dynamique des gros et très gros tourbillons, d'autre part que la courbe donnant la variation de l'énergie en fonction du temps n'évolue plus si on augmente encore le nombre de Reynolds. Il est ainsi possible de déterminer de deux façons la loi de décroissance de l'énergie cinétique : soit de façon directe en traçant sur un diagramme Log-Log l'énergie  $v^2$  en fonction du temps, mais nous verrons que cette détermination est peu précise; soit en vérifiant d'une part que le spectre d'énergie a un comportement autosimilaire (excepté dans la zone de dissipation) et en déterminant le coefficient  $\gamma$  donné par

$$(71) \quad \gamma = \lim_{k \rightarrow 0} t \frac{T(k, t)}{E(k, t)}.$$

La figure 2 représente l'évolution en fonction du temps de l'énergie cinétique pour les spectres initiaux suivants (spectres normalisés à l'unité) :

$$(72) \quad (a) \quad E(k, 0) \approx k^2 \exp \left[ - \left( \frac{k}{k_1} \right)^2 \right],$$

$$(73) \quad (b) \quad E(k, 0) \approx k^4 \exp \left[ -2 \left( \frac{k}{k_1} \right)^2 \right],$$

$$(74) \quad (c) \quad E(k, 0) \approx k^6 \exp \left[ -3 \left( \frac{k}{k_1} \right)^2 \right],$$

$$(75) \quad (d) \quad E(k, 0) \approx \exp \left[ 1 - \sup \left( \frac{k}{k_1}, \frac{k_1}{k} \right) \right]^2.$$

Le facteur  $F$  a été pris égal à 4. Si la courbe correspondant au cas (a) suit bien la loi de Saffman en  $t^{-1,2}$ , il est plus difficile au vu du graphique de donner avec précision une loi exacte de décroissance dans les cas (b), (c), (d). Un calcul précis de l'exposant

$$(76) \quad \alpha_E(t) = t \frac{\varepsilon}{v^2},$$

montre qu'il se stabilise à la valeur 1,38 dans les cas (b) et (c). Dans le cas (d), la valeur à  $t = 200$  est encore de 1,41, mais  $\alpha_E$  continue de décroître car le régime asymptotique n'est pas encore atteint.

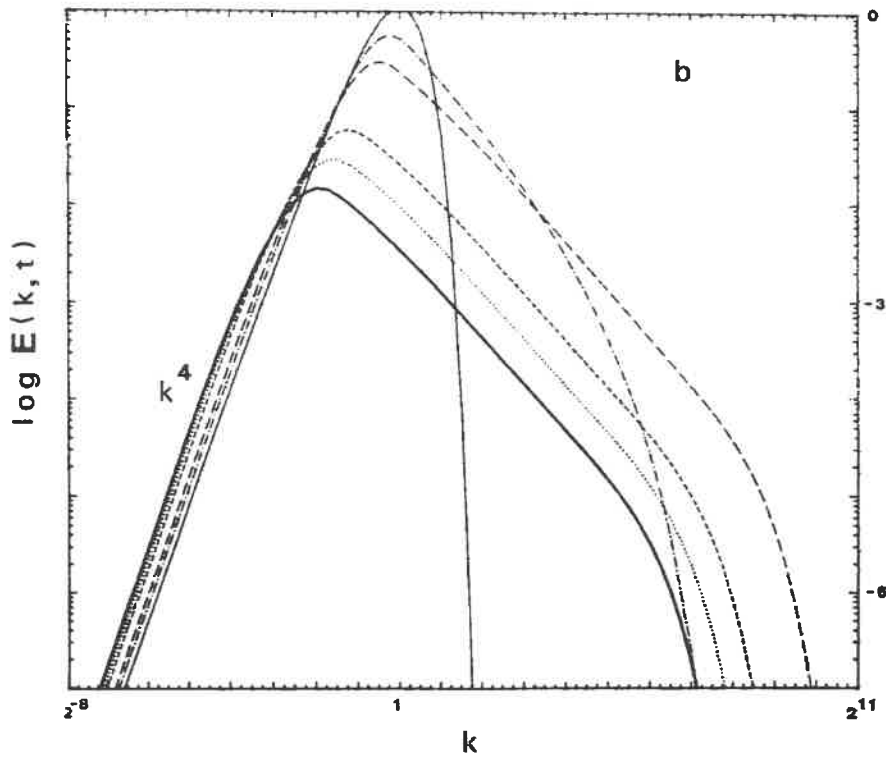


Fig. 4. — Évolution dans le temps du spectre d'énergie  $E(k, t)$  dans le cas (b) du calcul correspondant à la figure 2 et pour les temps 0, 5, 10, 50, 100 et 200. On remarque un transfert inverse significatif dans les très gros tourbillons. Il en résulte la non-invariance de l'intégrale de Loitzianskii.

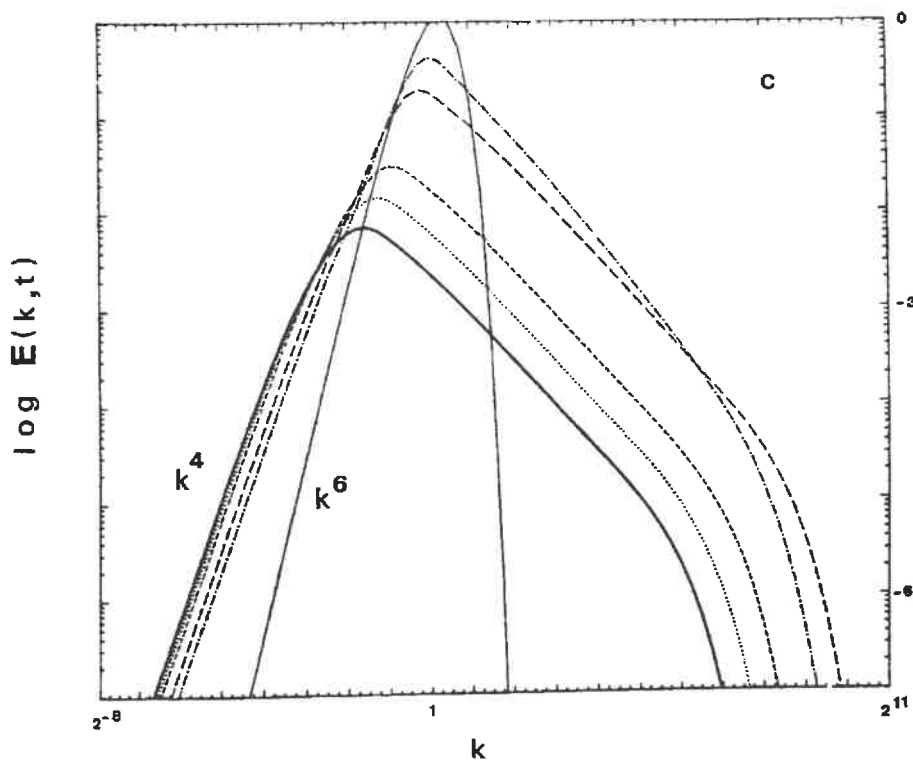


Fig. 5. — Évolution dans le temps du spectre d'énergie  $E(k, t)$  dans le cas (c) du calcul correspondant à la figure 2.



La figure 3 représente l'évolution temporelle du spectre d'énergie  $E(k, t)$  dans le cas (a), pour des temps de 0, 5, 10, 50, 100, et 200 (l'unité de temps est  $1/v_0 k_1$ , temps de retournement initial des gros tourbillons). On remarque qu'il y a bien invariance des très gros tourbillons, ce qui confirme la loi de décroissance en  $t^{-1,2}$ .

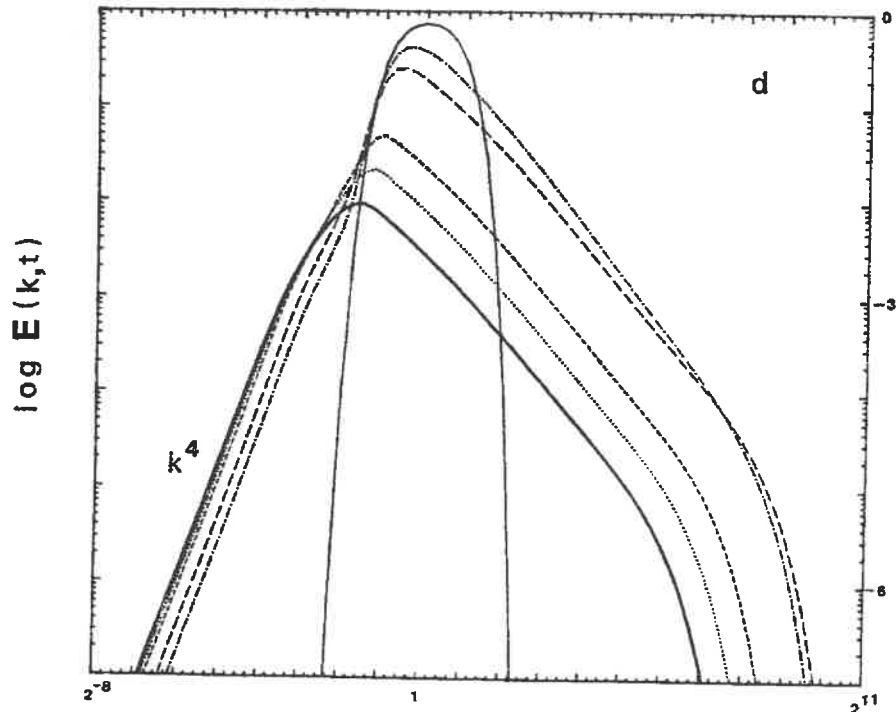


Fig. 6. — Évolution dans le temps du spectre d'énergie  $E(k, t)$  dans le cas (d) du calcul correspondant à la figure 2. On remarque comme dans le cas (c) l'importance du transfert inverse qui conduit à un spectre un  $k^4$  aux petits nombres d'onde.

La figure 4 représente l'évolution temporelle du spectre dans le cas (b) (mêmes temps que précédemment). Le spectre reste en  $k^4$  pour  $k \rightarrow 0$ , mais à la différence du cas précédent, il se produit un transfert inverse d'énergie.

Les figures 5 et 6 représentent l'évolution du spectre dans les cas (c) et (d) et confirment un transfert inverse en  $k^4$  vers les très gros tourbillons.

Nous avons ensuite vérifié que les spectres obtenus avaient le comportement autosimilaire (55), c'est-à-dire que nous avons calculé le « spectre de similitude » :

$$(77) \quad F(k_1, t) = \frac{E(k, t)}{v^2 l}$$

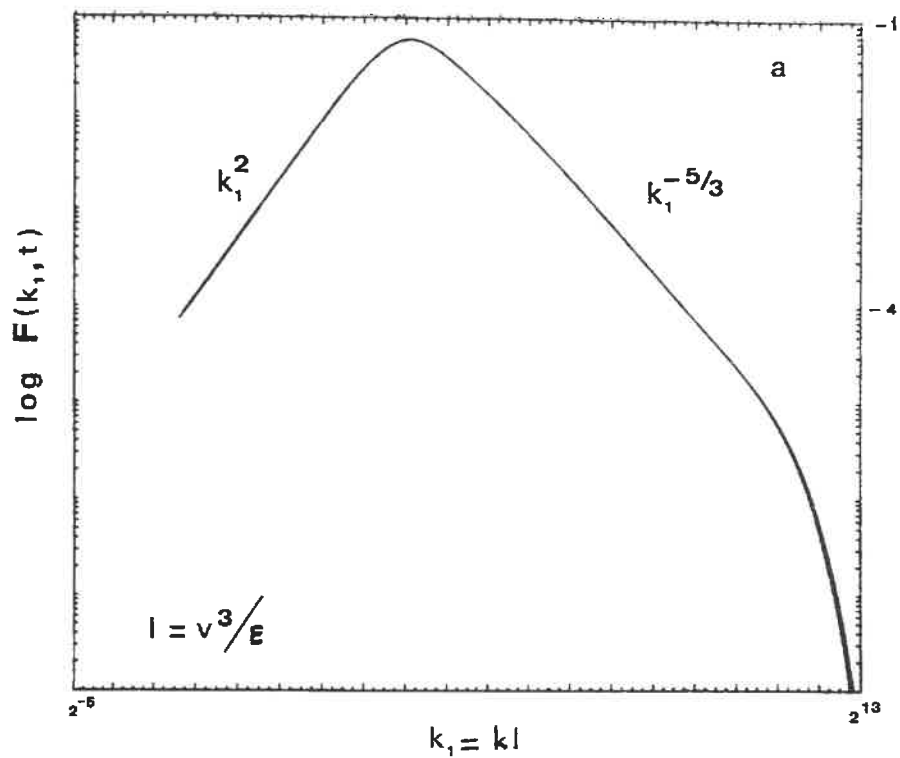


Fig. 7. — Évolution dans le temps du « spectre de similitude »  $F(k_1, t) = E(k_1 l^{-1}, t)/\nu^2 l$  dans le cas (a) et pour les temps 125, 150, 175 et 200.

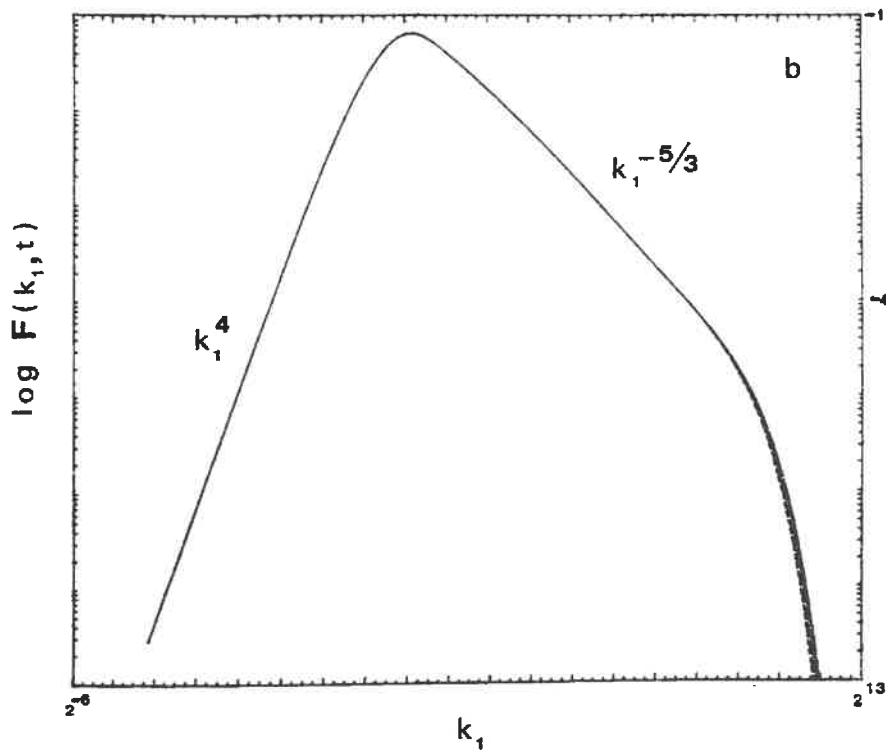


Fig. 8. — Évolution dans le temps du spectre de similitude  $F(k_1, t)$  dans le cas (b). On remarque que, comme dans le cas (a) et mise à part la zone de dissipation, on converge vers un spectre self-similaire.

avec

$$k_1 = kl \quad \text{et} \quad l = \frac{v^3}{\varepsilon}.$$

La figure 7 représente  $F(k_1, t)$  dans le cas (a) aux temps 125, 150, 175 et 200. Mise à part la zone de dissipation, qui n'a aucune raison d'avoir un comportement autosimilaire (sauf dans le cas  $s = 1$ ),  $F(k_1, t)$  converge bien vers une solution autosimilaire  $F(k_1)$  proportionnelle à  $k_1^2$  pour  $k_1 \rightarrow 0$ .

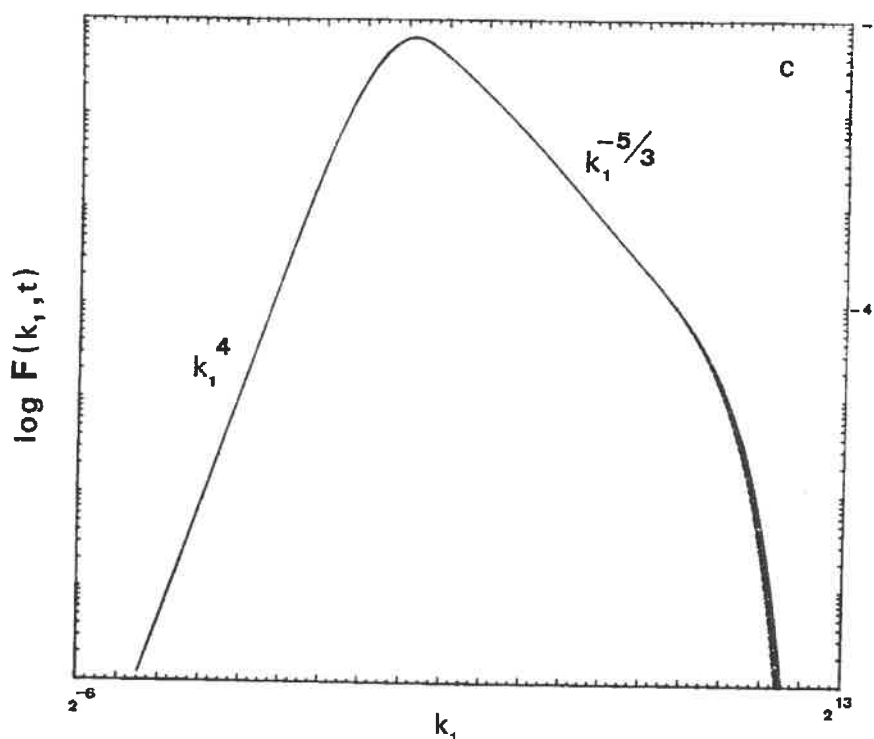


Fig. 9. — Évolution dans le temps du spectre de similitude dans le cas (c).

Les figures 8, 9, 10 représentent  $F(k_1, t)$  dans les cas (b), (c), (d) pour les mêmes temps. Là encore, en dehors de la zone de dissipation,  $F(k_1, t)$  converge vers une solution autosimilaire  $F(k_1)$  proportionnelle à  $k_1^4$  pour  $k_1 \rightarrow 0$ . La convergence vers  $F(k_1)$  est plus lente dans le cas (d), ce qui peut s'expliquer par le fait que le spectre initial n'est pas en  $k^4$  pour  $k \rightarrow 0$ . La figure 11 représente les trois spectres  $F(k_1, 200)$  dans les cas (b), (c) et (d) : ils sont rigoureusement identiques dans leur « zone inertielle ». Le léger écart qui peut être observé dans les très gros tourbillons est dû au fait que, à  $t = 200$ , la convergence vers  $F(k_1)$  dans le cas (d) n'est pas encore atteinte.

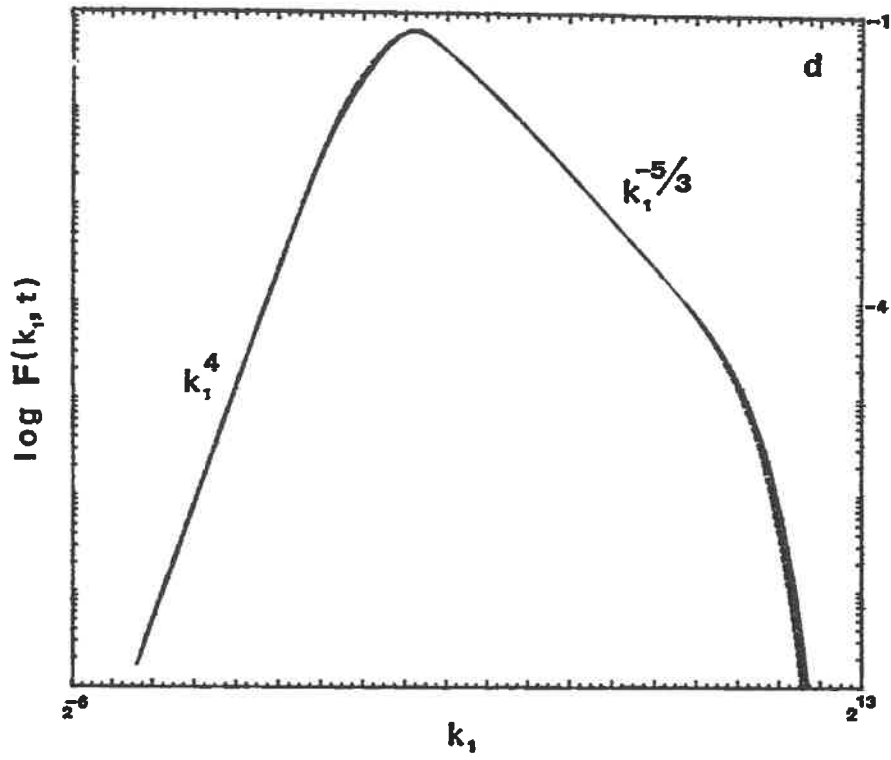


Fig. 10. — Évolution dans le temps du spectre de similitude dans le cas (d). La convergence vers un spectre self-similaire n'est pas encore obtenue à  $t = 200$  pour  $2^0 < k_1 < 2^2$ .

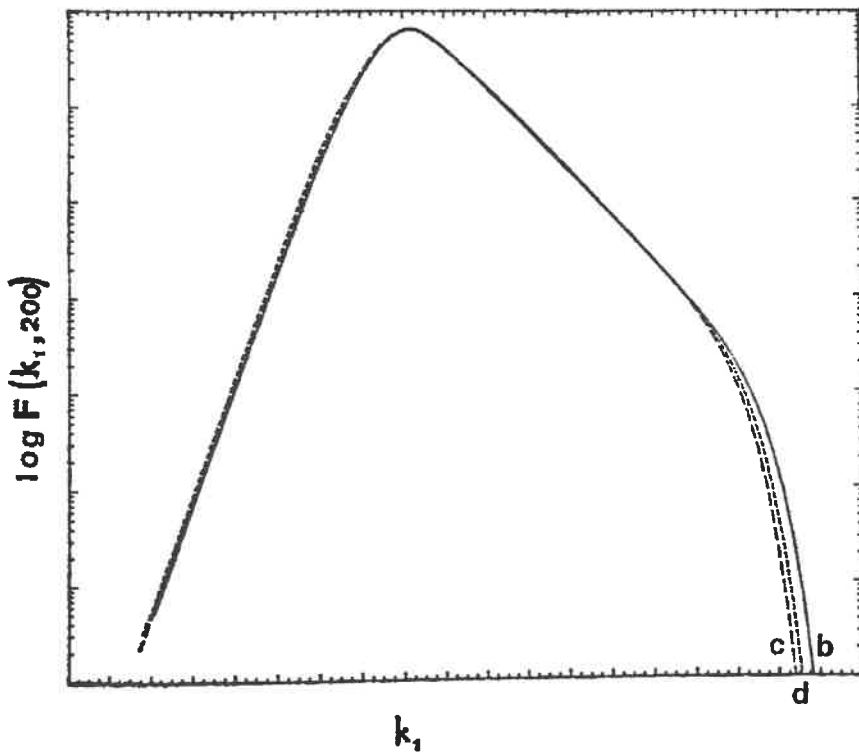


Fig. 11. — Superposition des trois spectres de similitude  $F(k_1, 200)$  obtenus dans les cas (b), (c) et (d).

Nous avons enfin, dans les cas (b), (c), (d), évalué le coefficient  $\gamma(t)$  donné par (71). La figure 12 représente dans ces trois cas la fonction

$$(78) \quad \alpha_0(t) = 10/7 - 2/7 \gamma(t).$$

Les courbes (b) et (c) se stabilisent à la valeur 1,383; la courbe (d) qui, à  $t = 200$ , donne pour  $\alpha_0$  une valeur de 1,388, continue à décroître, ce qui

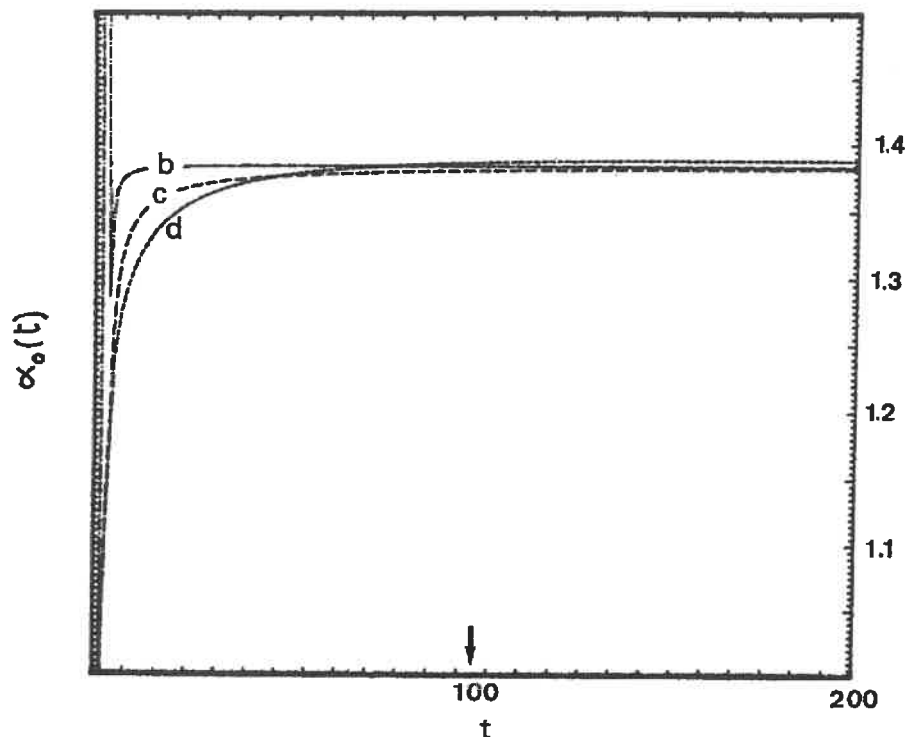


Fig. 12. — Détermination de la loi de décroissance de l'énergie par l'étude du transfert inverse dans les très gros tourbillons, dans les cas (b), (c), (d) du calcul correspondant à la figure 2.

confirme le fait que le spectre n'a pas encore convergé vers la solution autosimilaire.

Le transfert inverse d'énergie en  $k^4$  s'éteindra avec la turbulence. On peut se demander ce qu'il advient si on injecte continûment de l'énergie à un taux  $\varepsilon$  au voisinage d'un nombre d'onde  $k_1$ , en partant d'un spectre initial nul. On ne peut raisonnablement envisager que le transfert inverse d'énergie se poursuive indéfiniment comme en turbulence bi-dimensionnelle. Une hypothèse plus vraisemblable est que le transfert inverse sera tôt ou tard contrecarré par l'influence de la viscosité turbulente, en sorte que l'on atteindra un état d'équilibre stationnaire où l'énergie cascadera

vers les grands nombres d'onde à un taux  $\varepsilon$ ; le spectre d'énergie des très gros tourbillons sera alors un spectre « d'équipartition » donné par ([6], [32], [44]) :

$$(85) \quad E(k) = \frac{\mathcal{A}}{2\nu_{\text{turb}}} k^2.$$

### 7. Influence de la viscosité

Les résultats précédents, valables dans la limite de viscosité nulle, ont été cependant obtenus à l'aide de calculs numériques faits pour des nombres de Reynolds grands mais néanmoins finis. Nous avons montré comment la détermination de la loi de décroissance dans le cas inviscide pouvait

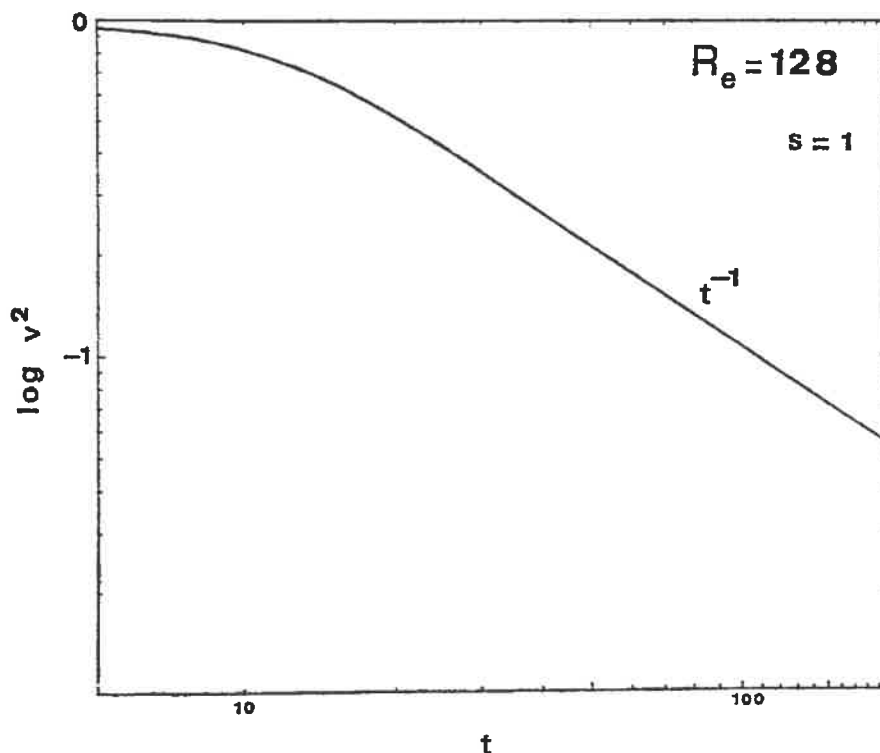


Fig. 13. — Variation de l'énergie cinétique  $v^2$  en fonction du temps pour un nombre de Reynolds initial  $Re = 128$ , et pour un spectre initial  $E(k, 0) \approx k$  quand  $k \rightarrow 0$ .

être faite uniquement à partir de la connaissance de la dynamique des très gros tourbillons, à condition que le spectre évolue de façon autosimilaire. Dans ces conditions, et tant que l'énergie cinétique totale et l'échelle des tourbillons énergétiques ne sont affectées que de façon négligeable par

l'existence d'une zone de dissipation, l'énergie cinétique totale décroît bien suivant la loi obtenue dans le cas inviscide. Pour  $s < 4$ , le nombre de Reynolds varie comme  $t^{-(s-1)/(s+3)}$ .

Un cas particulier intéressant est  $s = 1$ , qui implique un nombre de Reynolds constant au cours du temps et une loi de l'énergie en  $t^{-1}$ . C'est également, comme nous l'avons vu au paragraphe 5, le seul cas où la viscosité n'interdit pas l'existence de solutions autosimilaires.

La figure 13 illustre ce résultat et montre que pour un nombre de Reynolds initial  $Re = 128$ , la loi d'énergie en  $t^{-1}$  est très bien vérifiée. La figure 14 représente la solution autosimilaire  $F(k_1)$  obtenue alors, et montre que, contrairement aux cas  $s > 1$ , le spectre décroît de façon auto-

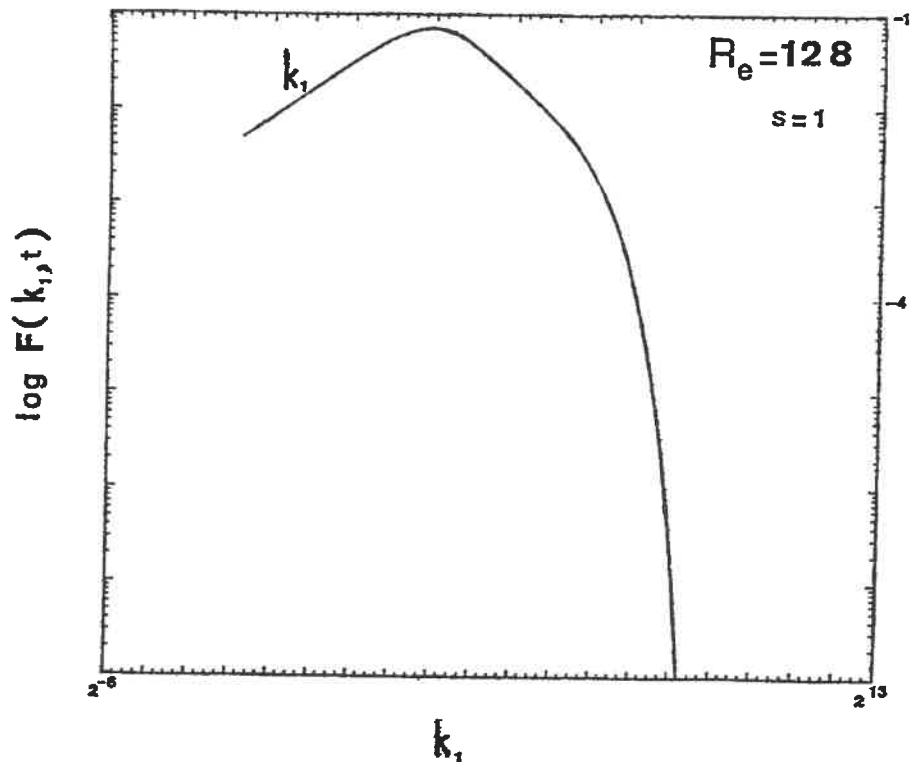


Fig. 14. — Spectres de similitude  $F(k_1, t)$  du calcul correspondant à la figure 13 et pour les temps 125, 150, 175 et 200. On constate qu'il y a superposition parfaite même dans la zone de dissipation.

similaire dans la zone de dissipation. Signalons enfin que ce sont des solutions autosimilaires en

$$(86) \quad E(k, t) = k(a + bk) \exp(-ck),$$

qui ont été utilisées par Herring [45] pour mettre en évidence l'existence d'un nombre de Reynolds critique pour la prédictabilité d'un écoulement.

On sait que le nombre de Reynolds  $R_l$  est proportionnel à  $(k_D l)^{4/3}$ , où  $k_D$  est un nombre d'onde caractéristique de la zone de dissipation. Il caractérise donc l'étendue dans le domaine spectral de la zone inertielle. Pour  $s > 1$ , ce nombre de Reynolds va décroître, et la zone de dissipation va se rapprocher du domaine d'énergie. On atteindra alors une phase où la viscosité finie, bien que n'affectant pas la dynamique des très gros tourbillons, rendra impossible l'existence d'un spectre autosimilaire, et les lois d'énergie du paragraphe 6 ne seront plus valables. Afin d'étudier l'influence de la viscosité sur la loi de décroissance dans le cas  $s = 4$ , nous avons

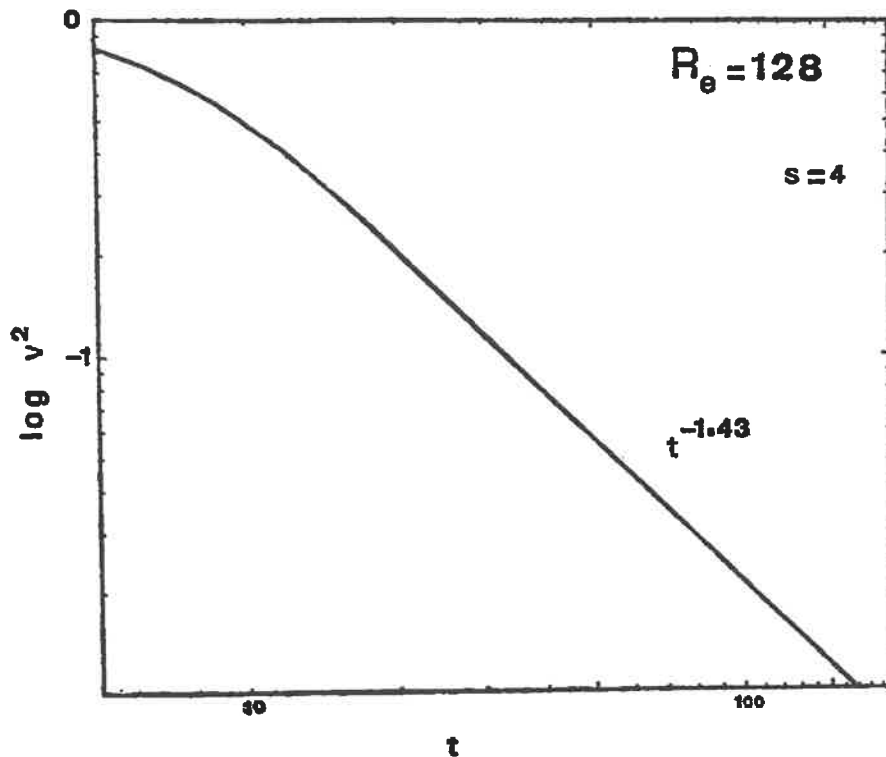


Fig. 15. — Variation de l'énergie cinétique  $v^2$  en fonction du temps pour un nombre de Reynolds initial  $Re = 128$ , et pour un spectre initial  $E(k, 0) \approx k^4$  quand  $k \rightarrow 0$ .

fait un calcul à nombre de Reynolds initial  $Re = 128$ . La figure 15 montre pour ce calcul la variation de l'énergie cinétique en fonction du temps : la loi de l'énergie se rapproche alors de  $t^{-1.43}$ . Nous avons également vérifié que le spectre  $E(k, t)$  n'était pas autosimilaire, mais que la dynamique des très gros tourbillons était très peu affectée par la viscosité : le



coefficient  $\alpha_0(t)$  [cf. (78)] a une valeur de 1,39 à  $t = 200$ , ce qui confirme bien la possibilité, à partir d'un calcul à faible nombre de Reynolds, de déterminer la loi de l'énergie dans la limite de viscosité nulle. Les résultats de ce calcul ne concordent pas avec les résultats expérimentaux de Comte-Bellot et Corrsin [5], mais ils concernent des temps beaucoup plus grands que les temps de mesure, et sont d'accès expérimental difficile. En outre, en l'absence de données sur le spectre initial de Comte-Bellot et Corrsin, il n'est pas possible de faire de comparaison entre les résultats expérimentaux et théoriques. On peut enfin douter de l'isotropie des très grosses structures (tant dans les expériences que dans les simulations numériques directes), ce qui complique encore les interprétations théoriques des expériences et des calculs.

## 8. Conclusion

Nous avons donc montré dans le cadre de la théorie E.D.Q.N.M. que la loi de décroissance de l'énergie cinétique dans la limite de viscosité nulle n'est pas une loi universelle puisqu'elle dépend du spectre d'énergie initial au voisinage de  $k = 0$ . Pour un spectre initial en  $k^s$  ( $0 < s < 4$ ), la loi de l'énergie est en  $t^{-2(s+1)/(s+3)}$ . Par contre pour  $s \geq 4$ , il y a instantanément un transfert inverse d'énergie en  $k^4$ , et la loi de décroissance est alors en  $t^{-1,38}$ . Dans tous les cas le spectre évolue de façon autosimilaire. La valeur  $-1,38$  a été déterminée numériquement.

Pour  $s = 1$ , la loi de décroissance de l'énergie en  $t^{-1}$  est indépendante de la viscosité, et le nombre de Reynolds reste constant au cours du temps. Pour  $s = 4$  au contraire, la viscosité a pour effet d'augmenter l'exposant  $\alpha_E$  intervenant dans la loi de l'énergie.

Il serait nécessaire pour préciser la loi de l'énergie en  $t^{-1,38}$  ( $s \geq 4, \nu \rightarrow 0$ ), de rechercher directement les solutions autosimilaires du système (60), (61).

Il serait également intéressant de pouvoir étudier l'influence de l'hélicité sur ces lois de décroissance : en effet, si l'hélicité a un effet négligeable aux grands nombres d'onde [4], elle pourrait avoir une influence sur la dynamique des gros et très gros tourbillons dans les cas instationnaires.

Il faudrait enfin pouvoir étudier l'influence de la fermeture utilisée sur la loi de décroissance. Des calculs numériques préliminaires faits avec une autre valeur du paramètre  $\lambda$  semblent montrer que la loi de décroissance n'est pas affectée, mais il n'existe pour le moment aucune démonstration rigoureuse de ce résultat.

Nous tenons à remercier J. R. Herring pour l'aide amicale et l'intérêt qu'il a porté à cette étude qu'il a en partie suscitée.

Nous remercions aussi J. C. André et U. Frisch pour leur aide constante au cours de ce travail.

*Note ajoutée aux épreuves.*

Une étude analogue a été réalisée depuis par Tatsumi, Kida et Mizushima [47] à l'aide de l'approximation Quasi-Normale Markovianisée (Q.N.M.) [cf. (10) et (11)]. Ce travail conduit à une loi de décroissance de l'énergie en  $t^{-1,40}$ , mais néglige toutes les interactions non locales. Des calculs récents à plus grand nombre de Reynolds et tenant compte des interactions non locales conduisent, pour l'approximation Q.N.M., à une loi de l'énergie en  $t^{-1,39}$  [48]. Cependant la précision des méthodes numériques utilisées à l'heure actuelle pour la résolution des équations spectrales à grand nombre de Reynolds demande à être améliorée avant de pouvoir se fier à ces résultats sur la valeur exacte de l'exposant intervenant dans la loi de l'énergie.

## ANNEXE 1

### Développements à l'ordre 2 en $q/k$

La variable d'intégration est alors  $y$ , et il faut tout exprimer en fonction de  $q/k$  et  $y$ . Il vient :

$$p = k \left[ 1 - \frac{q}{k} y + \frac{1}{2} (1 - y^2) \frac{q^2}{k^2} + O\left(\frac{q^3}{k^3}\right) \right],$$

$$p^{-1} = k^{-1} \left[ 1 + \frac{q}{k} y + \frac{1}{2} (3y^2 - 1) \frac{q^2}{k^2} + O\left(\frac{q^3}{k^3}\right) \right],$$

$$\frac{k^2}{p^2} = \left[ 1 + 2 \frac{q}{k} y + (4y^2 - 1) \frac{q^2}{k^2} + O\left(\frac{q^3}{k^3}\right) \right],$$

$$z = 1 - \frac{1}{2} (1 - y^2) \frac{q^2}{k^2} + O\left(\frac{q^3}{k^3}\right),$$

$$x = -y + (1 - y^2) \frac{q}{k} + \frac{3}{2} y (1 - y^2) \frac{q^2}{k^2} + O\left(\frac{q^3}{k^3}\right),$$

$$xy + z^3 = (1 - y^2) \left[ 1 + \frac{q}{k} y - \frac{3}{2} (1 - y^2) \frac{q^2}{k^2} + O\left(\frac{q^3}{k^3}\right) \right],$$

$$xz + y^3 = (1 - y^2) \left[ -y + \frac{q}{k} + 2y \frac{q^2}{k^2} + O\left(\frac{q^3}{k^3}\right) \right],$$

$$E(p) = E(k) - \frac{q}{k} y k \frac{\partial E}{\partial k} \\ + \frac{1}{2} \left[ (1 - y^2) k \frac{\partial E}{\partial k} + y^2 k^2 \frac{\partial^2 E}{\partial k^2} \right] \frac{q^2}{k^2} + E(k) O\left(\frac{q^3}{k^3}\right),$$

$$S(k, p, q) \frac{kq}{p} = \frac{1}{4} \theta_{kkq} (1 - y^2) \\ \times \left[ \frac{q^3}{k} E^2(k) y - \frac{q^4}{k^2} E(k) \left\{ (1 - 2y^2) E(k) + y^2 k \frac{\partial E}{\partial k} \right\} \right. \\ \left. + O\left(\frac{q^5}{k^3}\right) E^2(k) + qky E(q) \left\{ E(k) - k \frac{\partial E}{\partial k} \right\} \right. \\ \left. + q^2 E(q) \left\{ 2y^2 E(k) + \frac{(1 - 3y^2)}{2} k \frac{\partial E}{\partial k} + \frac{y^2}{2} k^2 \frac{\partial^2 E}{\partial k^2} \right\} \right. \\ \left. + O\left(\frac{q^3}{k}\right) E(q) E(k) \right].$$

## ANNEXE 2

Développement à l'ordre 2 en  $k/p$ 

La variable d'intégration est  $z$ . Il faut tout exprimer en fonction de  $k/p$  et  $z$  :

$$q = p \left[ 1 - \frac{k}{p} z + \frac{1}{2} (1 - z^2) \frac{k^2}{p^2} + O\left(\frac{k^3}{p^3}\right) \right],$$

$$q^{-1} = p^{-1} \left[ 1 + \frac{k}{p} z + \frac{1}{2} (3z^2 - 1) \frac{k^2}{p^2} + O\left(\frac{k^3}{p^3}\right) \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{p^2} &= 1 - 2\frac{k}{p}z + \frac{k^2}{p^2} + O\left(\frac{k^3}{p^3}\right), \\ x &= 1 - \frac{1}{2}(1-z^2)\frac{k^2}{p^2} + O\left(\frac{k^3}{p^3}\right), \\ y &= -z + \frac{k}{p}(1-z^2) + \frac{3}{2}z(1-z^2)\frac{k^2}{p^2} + O\left(\frac{k^3}{p^3}\right), \\ xy + z^3 &= (1-z^2)\left[-z + \frac{k}{p} + 2z\frac{k^2}{p^2} + O\left(\frac{k^3}{p^3}\right)\right], \\ xz + y^3 &= z(1-z^2)\left[1 + 3\frac{k}{p}z + \frac{1}{2}(15z^2 - 7)\frac{k^2}{p^2} + O\left(\frac{k^3}{p^3}\right)\right], \\ E(q) &= E(p) - \frac{k}{p}z p \frac{\partial E}{\partial p} \\ &\quad + \frac{k^2}{2p^2}\left[(1-z^2)p \frac{\partial E}{\partial p} + z^2 p^2 \frac{\partial^2 E}{\partial p^2}\right] + O\left(\frac{k^3}{p^3}\right)E(p), \\ S(k, p, q) \frac{kp}{q} &= \frac{1}{4}\theta_{kpp}(1-z^2) \\ &\quad \times \left[\frac{k^4}{p^2}(1+2z^2)E^2(p) + O\left(\frac{k^5}{p^3}\right)E^2(p)\right. \\ &\quad \left. - k^2 E(k) \left\{ E(p) + z^2 p \frac{\partial E}{\partial p} \right\} + O\left(\frac{k^3}{p}\right)E(k)E(p)\right]. \end{aligned}$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRISAUD A., FRISCH U., LEORAT J., LESIEUR M., MAZURE A., POUQUET A., SADOURNY R. et SULEM P. L., *Catastrophe énergétique et nature de la turbulence* (*Ann. Geophys.*, vol. 29, 1973, p. 539-546).
- [2] PENEL P., *Sur une équation d'évolution non linéaire liée à la théorie de la turbulence* (*Thèse d'État*, 1975, Université de Paris-Sud, Orsay).
- [3] LESIEUR M. et SULEM P. L., *Les équations spectrales en turbulence homogène et isotrope. Quelques résultats théoriques et numériques*, in *Turbulence and Navier-Stokes Equation*, Springer-Verlag, Berlin, 1976, p. 113-120.

- [4] ANDRÉ J. C. et LESIEUR M., *Influence of Helicity on the Evolution of Isotropic Turbulence at High Reynolds Number* (*J. Fluid Mech.*, vol. 81, 1977, p. 187-207).
- [5] COMTE-BELLOT G. et CORRISIN S., *The Use of a Contraction to Improve the Isotropy of Grid-Generated Turbulence* (*J. Fluid Mech.*, vol. 24, 1966, p. 656-682).
- [6] SAFFMAN P. G., *Note on Decay of Homogeneous Turbulence* (*Phys. Fluids*, vol. 10, 1967, p. 1349).
- [7] LEITH C. E., *Diffusion Approximation to Inertial Energy Transfer in Isotropic Turbulence* (*Phys. Fluids*, vol. 10, 1967, p. 1409-1416).
- [8] PANCHEV S., *On the Spectrum of Decaying Turbulence at Large Reynolds Number* (*E. R. Acad. Bulgare des Sciences*, vol. 22, n° 6, 1969, p. 631-633).
- [9] ORSZAG S. A., *Lectures on Statistical Theory of Turbulence*, in *Fluid Dynamics*, Gordon and Breach, Londres, 1976.
- [10] KOLMOGOROV A. N., *On Degeneration of Isotropic Turbulence in an Incompressible Viscous Liquid* (*C. R. Acad. Sc. U.R.S.S.*, vol. 31, 1941, p. 538-540).
- [11] LOITZIANSKII L. G., *Some Basic Laws of Isotropic Turbulent Flow* (*Rep. Cent. Aero. Hydrodyn. Inst.*, Moscow, vol. 440, 1939, p. 3-23).
- [12] PROUDMAN I. et REID W. H., *On the Decay of a Normally Distributed and Homogeneous Turbulent Velocity Field* (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. A 247, 1954, p. 163-189).
- [13] BATCHELOR G. K. et PROUDMAN I., *The Large-scale Structure of Homogeneous Turbulence* (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. A 248, 1956, p. 369-405).
- [14] KRAICHNAN R. H., *Inertial-Range Transfer in Two-and Three-Dimensional Turbulence* (*J. Fluid Mech.*, vol. 47, 1971, p. 513-525).
- [15] KRAICHNAN R. G., *Statistical Dynamics of Two-Dimensional Flows* (*J. Fluid Mech.*, vol. 67, 1975, p. 155-175).
- [16] KOLMOGOROV A. N., *The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers* (*C. R. Acad. Sc. U.R.S.S.*, vol. 30, 1941, p. 301-305).
- [17] KRAICHNAN R. H., *An almost-Markovian Galilean-Invariant Turbulence Model* (*J. Fluid Mech.*, vol. 47, 1971, p. 525-535).
- [18] KRAICHNAN R. H., *Eddy Viscosity in Two and Three Dimensions* (*J. Atm. Sc.*, vol. 33, 1976, p. 1521-1536).
- [19] BATCHELOR G. R., *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge University Press, 1953, p. 133-168.
- [20] LIN C. C. et REID W. H., *Turbulent Flow, Theoretical Aspects* in *Handbuch der Physik (Fluid Dynamics)*, vol. II, Springer-Verlag, Berlin, vol. VIII/2, 1963, p. 438-523).
- [21] ORSZAG S. A., *Analytical Theories of Turbulence* (*J. Fluid Mech.*, vol. 41, 1970, p. 363-386).
- [22] LEITH C. E., *Atmospheric Predictability and Two-Dimensional Turbulence* (*J. Atmos. Sc.*, vol. 28, 1971, p. 145-161).
- [23] SULEM P. L., LESIEUR M. et FRISCH U., *Le "Test Field Model" interprété comme méthode de fermeture des équations de la turbulence* (*Ann. Geophys.*, vol. 31, 1975, p. 487-495).

- [24] ORSZAG S. A. et PATTERSON G. S., *Numerical Simulations of Turbulence in Statistical Models and Turbulence*, Springer-Verlag, Berlin, 1972, p. 127-147.
- [25] HERRING J. R. et KRAICHNAN R. H., *Comparison of some Approximations for Isotropic Turbulence in Statistical Models and Turbulence*, Springer-Verlag, Berlin, 1972, p. 148-191.
- [26] HEISENBERG W., *Zur statistischen Theorie der Turbulenz* (*Z. Phys.*, vol. 124, 1948, p. 628-657).
- [27] PANCHEV S., *Random Functions and Turbulence*, Pergamon Press, Oxford, 1971, p. 233-241.
- [28] MILLIONSHTCHIKOV M., *On the Theory of Homogeneous Isotropic Turbulence* (*C. R. Acad. Sc. U.R.S.S.*, vol. 32, 1941, p. 615-618).
- [29] OGURA Y., *A Consequence of the Zero-Fourth-Cumulant Approximation in the Decay of Isotropic Turbulence* (*J. Fluid Mech.*, vol. 16, 1963, p. 33-40).
- [30] FRISCH U., SULEM P. L. et NELKIN M., *A Simple Dynamical Model of Intermittent Fully-Developed Turbulence* (*J. Fluid Mech.*, 1978, to be published).
- [31] ROSE H. A. et SULEM P. L., *Fully Developed Turbulence and Statistical Mechanics* (*J. Phys.*, vol. 39, 1978 p. 441-484).
- [32] FORSTER D., NELSON D. R. et STEPHEN M. J., *Long Time Tail and the Large Eddy Behavior of a Randomly Stirred Fluid* (*Phys. Rev. Lett.*, vol. 36, 1976, p. 867-).
- [33] KRAICHNAN R. H., *The Structure of Isotropic Turbulence at Very High Reynolds Numbers* (*J. Fluid Mech.*, vol. 5, 1959, p. 497-543).
- [34] MARTIN P. C., SIGGIA E. D. et ROSE H. A., *Statistical Dynamics of Classical Systems* (*Phys. Rev.*, vol. A 8, 1974, p. 423-437).
- [35] KRAICHNAN R. H., *Eulerian and Lagrangian Renormalization in Turbulence Theory* (*J. Fluid Mech.*, vol. 83, 1977, p. 349).
- [36] FOURNIER J. D. et FRISCH U., *d-Dimensional Fully Developed Turbulence* (*Phys. Rev.*, vol. A 17, 1978, p. 747).
- [37] BASDEVANT C., LESIEUR M. et SADOURNY R., *Subgrid-Scale Modelling of Enstrophy Transfer in Two-Dimensional Turbulence* (*J. Atm. Sci.*, vol. 35, 1978, p. 1028-1042).
- [38] POUQUET A., LESIEUR M., ANDRÉ J. C. et BASDEVANT C., *Evolution of High Reynolds Number Two-Dimensional Turbulence* (*J. Fluid Mech.*, vol. 72, 1975, p. 305-319).
- [39] FRISCH U., LESIEUR M. et SULEM P. L., *Crossover Dimensions for Fully Developed Turbulence* (*Phys. Rev. Lett.*, vol. 37, 1976, p. 895-897).
- [40] ROSE H. A., *An Analogy Between Non-Equilibrium Critical Phenomena and the Inverse Energy Cascade in Two-Dimensional Turbulence*, prépublication, Observatoire de Nice, 1977.
- [41] FORSTER D., NELSON D. R. et STEPHEN M. T., *Large Distance and Long Time Properties of a Randomly stirred Fluid* (*Phys. Rev.*, vol. A 16, 1977, p. 732-760).
- [42] KARMAN T. et HOWARTH, *On the Statistical Theory of Isotropic Turbulence* (*Proc. Roy. Soc.*, vol. A 164, n° 917, 1938, p. 192-215).
- [43] MONIN A. S. et YAGLOM A. M., *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*, M.I.T. Press, Cambridge, vol. 2, 1975, p. 177-196.

- [44] HERRING J. R., communication privée, 1974.
- [45] HERRING J. R., *Statistical Theory of Strong Turbulence (Proc. Symp. on Turbulence in Fluid and Plasmas, 1977, Culham Laboratory, Berkshire)*.
- [46] BATCHELOR G. K. et TOWNSEND A. A., *Decay of Turbulence in the Final Period (Proc. Roy. Soc., vol. A 194, 1948, p. 527-543)*.
- [47] TATSUMI T., KIDA S. et MIZUSHIMA J., *The multiple-scale cumulant expansion for isotropic turbulence (J. Fluid Mech., vol. 85, 1978, p. 97-142)*.
- [48] FRISCH U., LESIEUR M. et SCHERTZER D., *Comment on the Quasi-Normal Markovian approximation for fully developed turbulence (Submitted to J. Fluid Mech., 1978)*.

(Manuscrit reçu le 19 octobre 1977.)