



**HAL**  
open science

## Pertes de symétrie lors de la propagation de fissures à l'interface entre la matrice et une inclusion circulaire

Vinh Hoang Tan Le, Sébastien Brisard, Amade Pouya

### ► To cite this version:

Vinh Hoang Tan Le, Sébastien Brisard, Amade Pouya. Pertes de symétrie lors de la propagation de fissures à l'interface entre la matrice et une inclusion circulaire. CFM 2019 - 24ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2019, Brest, France. hal-02560373

**HAL Id: hal-02560373**

**<https://enpc.hal.science/hal-02560373>**

Submitted on 1 May 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Pertes de symétrie lors de la propagation de fissures à l'interface entre la matrice et une inclusion circulaire

V. H. T. Le<sup>a</sup>, S. Brisard<sup>a</sup>, A. Pouya<sup>a</sup>

a. Laboratoire Navier, UMR 8205, CNRS, ENPC, IFSTTAR, F-77455 Marne-la-Vallée  
vinh-hoang-tan.le@enpc.fr

## Résumé :

*Nous considérons le problème de deux fissures de longueurs différents, soumises à une contrainte uniforme à l'infini, situées à l'interface entre une inclusion circulaire et la matrice infinie. En utilisant la méthode des potentiels complexes de Muskhelishvili, nous obtenons l'expression semi-analytique des facteurs d'intensité de contrainte et du taux restitution d'énergie à l'extrémité des fissures. Finalement, la discussion sur le mode de propagation de la fissure est étudiée par le critère d'énergie de Griffith dans le cadre de la mécanique linéaire élastique de la rupture. Notre analyse montre la possibilité d'une propagation dissymétrique de fissure, même si la configuration initiale et le chargement sont symétriques.*

## Abstract :

*We consider the problem of two cracks of different lengths, subjected to a uniform stress at infinity, located at the interface between a circular inclusion and the infinite matrix. Using Muskhelishvili's method of complex potentials, we obtain the semi-analytical expression of stress intensity factors and the energy release rate at the crack-tip. Finally, the discussion of the crack propagation mode is studied by the Griffith's energy criterion in the framework of linear elastic fracture mechanics. Our analysis shows the possibility of asymmetric crack propagation, even if both the initial configuration and the loading are symmetric.*

**Mots clefs : Méthode des potentiels complexes ; Mécanique linéaire élastique de la rupture ; Interface inclusion-matrice ; Facteur d'intensité de contrainte ; Taux de restitution d'énergie**

## 1 Introduction

Le décollement à l'interface constitue l'un des principaux modes de ruine pour les composites de type matrice-inclusion. Du point de vue de la modélisation, il est donc essentiel de décrire le comportement de tels composites comportant des interfaces partiellement fissurées.

Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture (en élasticité plane), ce travail concerne l'analyse de fissures interfaciales situées à la frontière d'une inclusion circulaire, immergée dans une matrice

infinie. La solution générique d'un tel problème, s'appuyant sur la méthode des potentiels complexes de Muskhelishvili [1], a été proposée par Perlman et Sih [2]. Cette solution générale a été appliquée successivement aux cas d'une fissure unique et de deux fissures symétriques par Toya [3] et Prasad et Simha [4, 5], respectivement.

Nous utilisons ici la méthodologie de Perlman et Sih [2] pour calculer la solution au problème de deux fissures d'interface de longueurs différentes, mais partageant le même axe de symétrie. Sur la base de la solution obtenue, nous analysons la propagation de deux fissures initialement symétriques. Nous montrons que la propagation peut être asymétrique : la longueur de l'une des fissures croît, tandis que celle de l'autre reste constante.

Dans cet exposé, nous présenterons tout d'abord la formulation et la solution du problème pour deux fissures dissymétriques à l'interface entre une inclusion élastique circulaire et une matrice infinie soumise à l'infini à une contrainte uniforme. Puis nous montrerons quelques résultats concernant les facteurs d'intensité de contrainte et le taux de restitution d'énergie pour différentes configurations des deux fissures. Finalement, nous discuterons la propagation symétrique ou dissymétrique de deux fissures d'interface initialement symétriques.

## 2 Problématique : Deux fissures dissymétriques à l'interface

Considérons le problème de deux fissures de longueurs différentes situées le long de l'interface entre une hétérogénéité élastique circulaire de rayon  $a$  et une matrice infinie soumise à une contrainte uniforme à l'infini (voir figure 1). Les deux fissures  $L_1$  et  $L_2$  sont symétriques par rapport à l'axe horizontal, chacune sous-tend un angle de  $2\beta_i$  ( $i = 1, 2$ ). Nous représentons l'inclusion (resp. la matrice) par le domaine  $S^+$  (reps.  $S^-$ ). Le module d'Young et le coefficient de Poisson de l'inclusion (resp. la matrice) sont notés  $E_1$  et  $\nu_1$  (resp.  $E_2$  et  $\nu_2$ ). La partie collée de l'interface est représentée par  $L_c$ .

Pour ce problème, la traction est libre sur  $L_1 \cup L_2$ , alors que la continuité des contraintes et des déplacements est requise sur  $L_b$ . Ces conditions impliquent que :

$$(\sigma_{rr})_1 + (\sigma_{r\theta})_1 = 0 \quad \text{sur } L_1 \cup L_2 \quad (1)$$

$$(\sigma_{rr})_2 + (\sigma_{r\theta})_2 = 0 \quad \text{sur } L_1 \cup L_2 \quad (2)$$

$$(\sigma_{rr})_1 + i(\sigma_{r\theta})_1 = (\sigma_{rr})_2 + i(\sigma_{r\theta})_2 \quad \text{sur } L_b \quad (3)$$

$$(u_x)_1 + i(u_y)_1 = (u_x)_2 + i(u_y)_2 \quad \text{sur } L_b \quad (4)$$

dans lesquelles  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\theta}$  désignent des composantes (en coordonnées polaires) de contrainte et  $u_x$ ,  $u_y$  indiquent les composantes (en coordonnées cartésiennes) de déplacement.

Suivant Prasad et Simha [4], qui ont étudié le cas de deux fissures identiques, nous avons utilisé la méthode des potentiels complexes [1, 7]. Selon la notation de Milne-Thomson [7], les composantes de déplacement  $\mathbf{u}$  et de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  dans  $S^+$  (ou  $S^-$ ) peuvent être exprimées sous la forme de deux fonctions analytiques  $W$  et  $w$  :

$$(\sigma_{rr})_j + (\sigma_{r\theta})_j = W_j(z) + \overline{W}_j(\bar{z}), \quad (5)$$

$$2[(\sigma_{rr})_j + i(\sigma_{r\theta})_j] = W_j(z) + \overline{W}_j(\bar{z}) - \bar{z}\overline{W}'_j(\bar{z}) - (\bar{z}/z)\overline{w}_j(\bar{z}), \quad (6)$$

$$4\mu_j \frac{\partial}{\partial \theta} [(u_x)_j + i(u_y)_j] = iz[\kappa_j W_j(z) - \overline{W}_j(\bar{z}) + \bar{z}\overline{W}'_j(\bar{z}) + (\bar{z}/z)\overline{w}_j(\bar{z})], \quad (7)$$

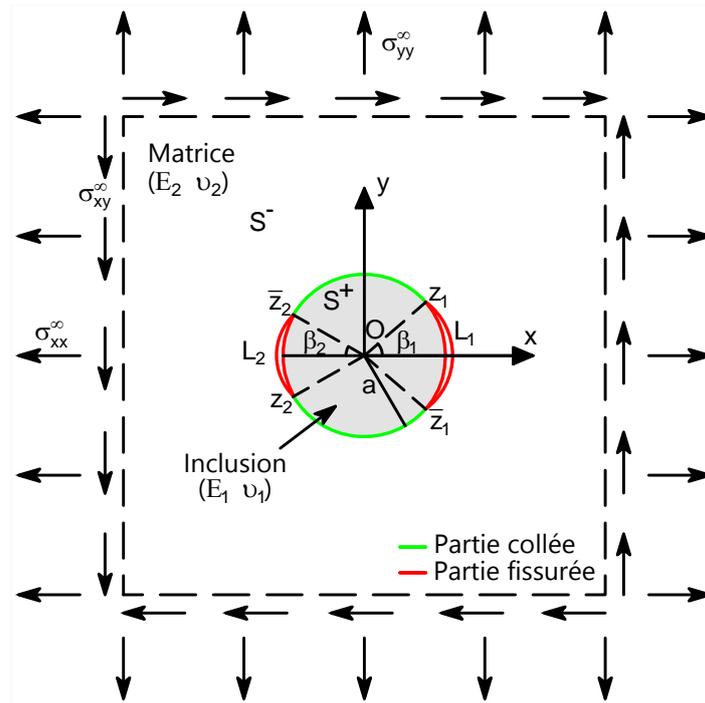


FIGURE 1 – Deux fissures dissymétriques à l’interface inclusion-matrice sous contrainte uniforme à l’infini

avec  $j = 1$  pour  $z \in S^+$  (l’inclusion) et  $j = 2$  pour  $z \in S^-$  (la matrice) et

$$\kappa_j, \text{ contraintes planes} = \frac{3 - \nu_j}{1 + \nu_j} \quad \text{et} \quad \kappa_j, \text{ déformations planes} = 3 - 4\nu_j. \quad (8)$$

Nous utilisons également les constantes suivantes :

$$\alpha = \frac{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}{\mu_2 + \kappa_2 \mu_1}, \quad m = \frac{\mu_1(1 + \kappa_2)}{\mu_2(1 + \kappa_1)} \quad \text{et} \quad \epsilon = \frac{\ln \alpha}{2\pi}, \quad (9)$$

où  $\mu_j = E_j/[2(1 + \nu_j)]$ ,  $j = 1, 2$  dénote le module de cisaillement.

Pour les fissures circulaires, il est commode d’introduire les fonctions  $\Omega_j$  définies comme suit [2, 4]

$$\Omega_j(z) = -\overline{W}_j\left(\frac{a^2}{z}\right) + \frac{a^2}{z}\overline{W}'_j\left(\frac{a^2}{z}\right) + \frac{a^2}{z^2}\overline{w}_j\left(\frac{a^2}{z}\right). \quad (10)$$

En prenant le complexe conjugué de (10) et remplaçant  $a^2/\overline{z}$  par  $z$ , nous obtenons :

$$w_j(z) = \frac{a^2}{z^2} \left[ \overline{\Omega}_j\left(\frac{a^2}{z}\right) + W_j(z) - zW'_j(z) \right] \quad (11)$$

Puis, en substituant (11) dans les équations (6) et (7), nous trouvons :

$$2[(\sigma_{rr})_j + i(\sigma_{r\theta})_j] = W_j(z) - \Omega_j\left(\frac{a^2}{\overline{z}}\right) + \left(\frac{\overline{z}^2}{a^2} - \frac{\overline{z}}{z}\right)\overline{W}_j(\overline{z}), \quad (12)$$

$$4\mu_j \frac{\partial}{\partial \theta} [(u_x)_j + i(u_y)_j] = iz \left[ \kappa_j W_j(z) + \Omega_j\left(\frac{a^2}{\overline{z}}\right) - \left(\frac{\overline{z}^2}{a^2} - \frac{\overline{z}}{z}\right)\overline{W}_j(\overline{z}) \right], \quad (13)$$

En laissant  $z$  tend vers un point  $ae^{i\theta}$  de l'interface, les conditions (1), (2), (3) et (4) du problème deviennent :

$$W_1^+(ae^{i\theta}) - \Omega_1^-(ae^{i\theta}) = 0 \quad \text{sur } L_1 \cup L_2 \quad (14)$$

$$W_2^-(ae^{i\theta}) - \Omega_2^+(ae^{i\theta}) = 0 \quad \text{sur } L_1 \cup L_2 \quad (15)$$

$$\frac{1}{\mu_1}[\kappa_1 W_1^+(ae^{i\theta}) + \Omega_1^-(ae^{i\theta})] = \frac{1}{\mu_2}[\kappa_2 W_2^-(ae^{i\theta}) + \Omega_2^+(ae^{i\theta})] \quad \text{sur } L_b \quad (16)$$

$$W_1^+(ae^{i\theta}) - \Omega_1^-(ae^{i\theta}) = W_2^-(ae^{i\theta}) - \Omega_2^+(ae^{i\theta}) \quad \text{sur } L_b \quad (17)$$

Les exposants + et - dans les fonctions  $W_j$  et  $\Omega_j$ ,  $j = 1, 2$  désignent les valeurs limites lorsque  $z \rightarrow ae^{i\theta}$  depuis  $z \in S^+$  (l'inclusion) et  $z \in S^-$  (la matrice), respectivement.

D'après Perlman et Sih [2], nous obtenons la solution du problème ci-dessus comme suit :

$$(1 + \alpha)W_1(z) = mQ(z) + \chi(z)P(z), \quad (18)$$

$$(1 + \alpha)\Omega_1(z) = mQ(z) - \alpha\chi(z)P(z), \quad (19)$$

$$(1 + \alpha)W_2(z) = Q(z) + \alpha\chi(z)P(z), \quad (20)$$

$$(1 + \alpha)\Omega_2(z) = Q(z) - \chi(z)P(z), \quad (21)$$

où nous introduisons la fonction de Plemeji  $\chi(z_1 = ae^{i\beta_1}, z_2 = ae^{i(\beta_2 - \pi)})$

$$\chi(z) = (z - \bar{z}_1)^{-\frac{1}{2} + i\epsilon} (z - z_1)^{-\frac{1}{2} - i\epsilon} (z - \bar{z}_2)^{-\frac{1}{2} + i\epsilon} (z - z_2)^{-\frac{1}{2} - i\epsilon}, \quad (22)$$

et

$$Q(z) = e_0 + \frac{t_1}{z} + \frac{t_2}{z^2}, \quad P(z) = P_2 z^2 + P_1 z + P_0 + \frac{P_{-1}}{z} + \frac{P_{-2}}{z^2}, \quad (23)$$

Les huit constantes d'intégration  $e_0, t_1, t_2, P_{-2}, \dots, P_2$  se trouvent depuis : *i.* Le comportement à l'infini de  $W_2$  et de  $w_2$  (4 équations), *ii.* L'analyticité de  $W_1$  et  $w_1$  en  $z = 0$  (3 équations) et *iii.* La condition d'uniformité des déplacements (1 équation).

Dans la section suivante, les résultats ci-dessus sont utilisés pour exprimer les facteurs d'intensité de contrainte et le taux de restitution d'énergie. Ce dernier est finalement utilisé dans la section 4 pour analyser la propagation des fissures.

### 3 Facteur d'intensité de contrainte complexe et taux de restitution d'énergie

#### 3.1 Facteur d'intensité de contrainte complexe

Suivant Williams [8], nous définissons le facteur d'intensité de contrainte complexe  $\mathcal{K} = K_1 + iK_2$  à la pointe  $z_1 = ae^{i\beta_1}$  de la fissure  $L_1$  :

$$\mathcal{K} = \sqrt{2\pi} |ae^{i\theta} - z_1|^{1/2 - i\epsilon} [(\sigma_{rr})_1 - i(\sigma_{r\theta})_1](ae^{i\theta}) \quad \text{quand } \theta \xrightarrow{>} \beta_1 \quad (24)$$

où  $[(\sigma_{rr})_1 - i(\sigma_{r\theta})_1](ae^{i\theta})$  exprime l'expression de contraintes le long de la partie collée de l'interface ( $\beta_1 < \theta < \pi - \beta_2$ ). Cette expression est dérivée à partir de (6) lorsque  $z \rightarrow ae^{i\theta}$  depuis  $z \in S^+$  (l'inclusion).

### 3.2 Taux de restitution d'énergie

Dans ce travail, nous acceptons un critère de propagation de la fissure basé sur le taux de restitution d'énergie à l'extrémité de la fissure (Griffith [6]). Le taux de restitution d'énergie  $G$  à la pointe  $z_1 = ae^{i\beta_1}$  peut être lié au facteur d'intensité de contrainte complexe  $\mathcal{K}$  par la formule suivante [9] :

$$G = \frac{1}{E^*} \frac{\mathcal{K}\bar{\mathcal{K}}}{\cosh^2(\pi\epsilon)}. \quad (25)$$

dans laquelle  $2/E^* = 1/E_1^* + 1/E_2^*$  ( $E_j^* = E_j$  en contraintes planes,  $E_j^* = E_j/(1-\nu_j^2)$  en déformations planes).

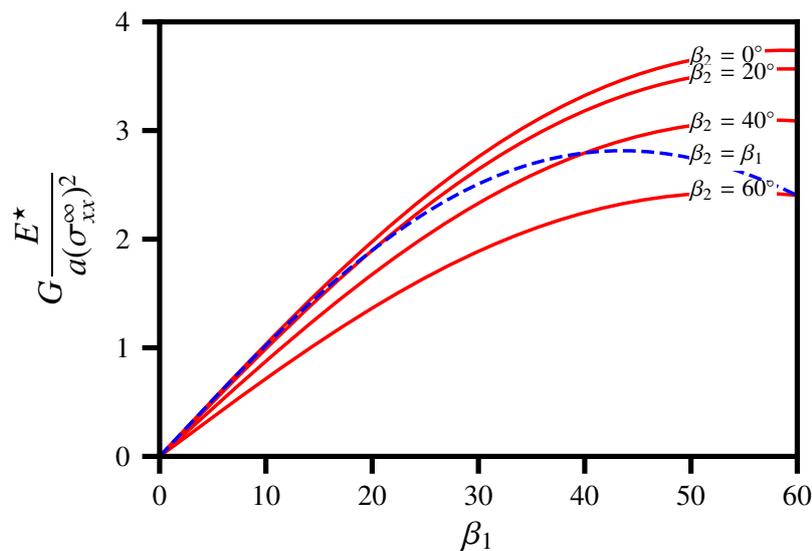


FIGURE 2 – Taux de restitution d'énergie  $G$  à la pointe  $z_1 = ae^{i\beta_1}$

La figure 2 montre, pour le cas d'une inclusion dure ( $E_1 = 10E_2$ ,  $\nu_1 = 0.2$  et  $\nu_2 = 0.3$ ) sous la contrainte uniaxiale à l'infini  $\sigma_{xx}^\infty$ , le taux de restitution d'énergie  $G$  à la pointe  $z_1 = ae^{i\beta_1}$ . Pour chaque courbe rouge en trait plein sur cette figure,  $\beta_2$  étant fixé, alors que  $\beta_1$  varie de  $0^\circ$  à  $60^\circ$ . La ligne en pointillée indique le taux de restitution d'énergie pour le cas symétrique  $\beta_1 = \beta_2$ .

L'observation de la figure 2 montre que le taux de restitution d'énergie est une fonction décroissante de  $\beta_2$  ( $\beta_1$  étant fixé). Ceci s'explique par le fait que, pour la même contrainte  $\sigma_{xx}^\infty$ , une valeur plus grande de  $\beta_2$  diminue l'intensité de contraintes à la pointe  $z_1$ .

## 4 Discussion : propagation symétrique ou dissymétrique

Dans cette section, nous discutons de la propagation infinitésimale de deux fissures initialement identiques ( $\beta_1 = \beta_2 = \beta_0 > 0$ ) soumises à une tension uniaxiale à l'infini  $\sigma_{xx}^\infty$  dans la direction  $0x$  (Figure 3). Lorsque le chargement  $\sigma_{xx}^\infty$  atteint une valeur critique  $\sigma_c$ , les fissures  $L_1$  et  $L_2$  commencent à se propager. En introduisant les deux incréments des angles  $\delta\beta_1$  et  $\delta\beta_2$ , deux résultats possibles après le démarrage : la propagation symétrique (les deux fissures se propagent à l'identique,  $\delta\beta_1 = \delta\beta_2$ ) et la propagation dissymétrique (une fissure se propage pendant que l'autre est arrêtée,  $\delta\beta_1 > 0$  et  $\delta\beta_2 = 0$  ou  $\delta\beta_2 > 0$  et  $\delta\beta_1 = 0$ ).

Notre discussion est basée sur des arguments énergiques, sous les hypothèses suivantes :

- H<sub>1</sub> Le mode de propagation sélectionné minimise l'énergie totale nécessaire pour créer une unité de longueur d'avancement de fissure [6, 10].
- H<sub>2</sub> Le branchement des fissures dans la matrice ou l'inclusion n'est pas prise en compte.
- H<sub>3</sub> Les deux fissures se propagent symétriquement par rapport à l'axe  $0x$ .
- H<sub>4</sub> La valeur critique  $G_c$  est supposée constante.

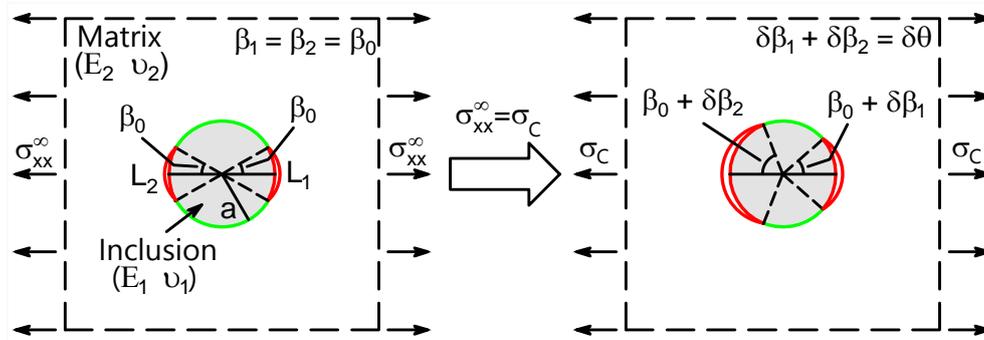


FIGURE 3 – Discussion sur le mode de propagation des fissures

Notre analyse montre que le mode de propagation sélectionné dépend du signe de  $\Psi(\beta_0)$  : (Pour plus de détails, voir [11])

$$\Psi(\beta_0) = \left. \frac{\partial G}{\partial \beta_1} \right|_{\beta_1=\beta_2=\beta_0} - \left. \frac{\partial G}{\partial \beta_2} \right|_{\beta_1=\beta_2=\beta_0}. \quad (26)$$

- Si  $\Psi(\beta_0) < 0$  : la propagation est symétrique,
- Si  $\Psi(\beta_0) > 0$  : la propagation est dissymétrique.

## 5 Conclusion

Dans cette étude, nous avons établi la solution semi-analytique pour deux fissures dissymétriques à l'interface entre une matrice homogène et une inclusion circulaire. Cette solution nous permet d'analyser la propagation d'une paire de fissures sous tension uniaxiale à l'infini.

Dans les travaux futurs, cette solution sera combinée à des méthodes micromécaniques pour construire une loi de comportement macroscopique d'endommagement. Une autre perspective intéressante consisterait à étudier la propagation des fissures avec un critère plus réaliste (Hutchinson et Suo [12]).

## Remerciements

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Etat gérée par l'ANR au titre du programme des Investissements d'Avenir ANR-11-LABX-022-01.

## Références

- [1] N. I. Muskhelishvili, Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Springer Science & Business Media, 1953.
- [2] A. B. Perlman, G. C. Sih, Elastostatic problems of curvilinear cracks in bonded dissimilar materials, International Journal of Engineering Science, 5(11) (1967) 845–867.

- [3] M. Toya, A crack along the interface of a circular inclusion embedded in an infinite solid. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 22(5) (1974) 325–348.
- [4] P. B. N. Prasad et K. R. Y. Simha, Interactions of interfacial arc cracks, *International journal of fracture*, 117(1) (2002) 39–62.
- [5] P. B. N. Prasad et K. R. Y. Simha, Interface crack around circular inclusion : SIF, kinking, debonding energetics, *Engineering Fracture Mechanics*, 70(2) (2003) 285–307.
- [6] A. A. Griffith, M. Eng, VI. The phenomena of rupture and flow in solids, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 221(582–593) (1921) 163–198.
- [7] L. M. Milne-Thomson, *Plane elastic systems*, Vol. 6. Springer, 1968.
- [8] M. Williams, The stresses around a fault or crack in dissimilar media, *Bulletin of the seismological society of America*, 49(2) (1959) 199–204.
- [9] B. Malyshev, R. Salganik, The strength of adhesive joints using the theory of cracks, *International Journal of Fracture*, 1(2) (1965) 114–128.
- [10] F. Erdogan, G. Sih, On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear, *Journal of basic engineering*, 85(4) (1963) 519–525.
- [11] V. H. T. Le, S. Brisard, A. Pouya, Debonding of a circular inclusion : Asymmetric propagation of a pair of cracks, *International Journal of Solids and Structures*, 2019.
- [12] J. W. Hutchinson, Z. Suo, Mixed mode cracking in layered materials., *Advances in applied mechanics*, 29 (1991) 63–191.