



**HAL**  
open science

# Méthodes numériques pour le calcul à la rupture des structures de génie civil

Jeremy Bleyer

► **To cite this version:**

Jeremy Bleyer. Méthodes numériques pour le calcul à la rupture des structures de génie civil. 2015.  
hal-01306140

**HAL Id: hal-01306140**

**<https://enpc.hal.science/hal-01306140>**

Submitted on 22 Apr 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Méthodes numériques pour le calcul à la rupture des structures de génie civil

Jérémy Bleyer

*Université Paris-Est, Laboratoire Navier,  
Ecole des Ponts ParisTech-IFSTTAR-CNRS*



IFSTTAR



Directeur de thèse : Patrick de Buhan

17 juillet 2015

# Sommaire

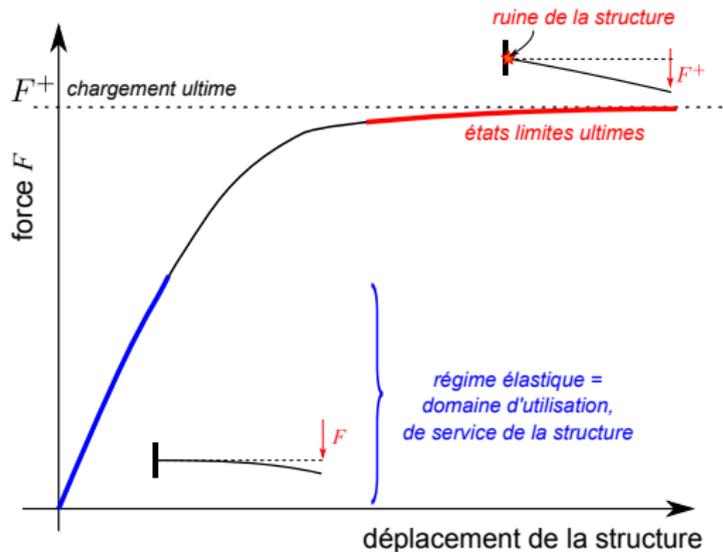
- 1 Contexte et objectifs
- 2 Calcul par éléments finis des structures de coque
- 3 Changement d'échelle en calcul à la rupture
- 4 Exemples d'application sur des structures complexes
- 5 Conclusions et perspectives

# Sommaire

- 1 **Contexte et objectifs**
- 2 Calcul par éléments finis des structures de coque
- 3 Changement d'échelle en calcul à la rupture
- 4 Exemples d'application sur des structures complexes
- 5 Conclusions et perspectives

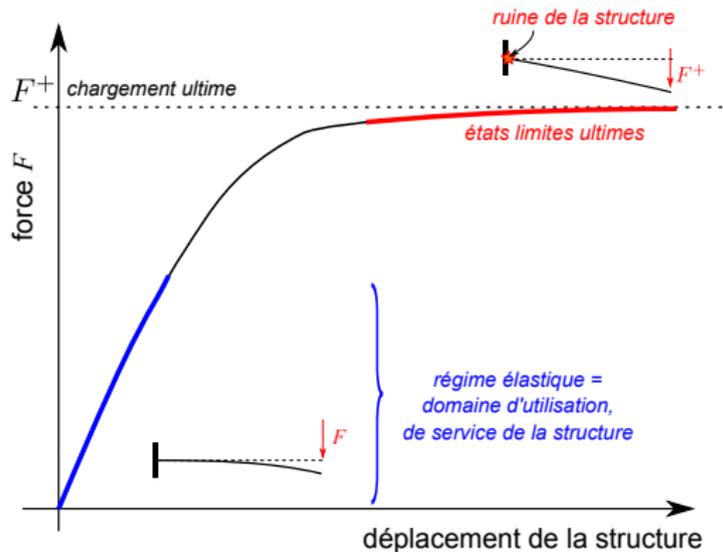
# Méthodes actuelles de dimensionnement des structures

## Dimensionnement des structures aux états limites ultimes (ELU)



# Méthodes actuelles de dimensionnement des structures

## Dimensionnement des structures aux états limites ultimes (ELU)

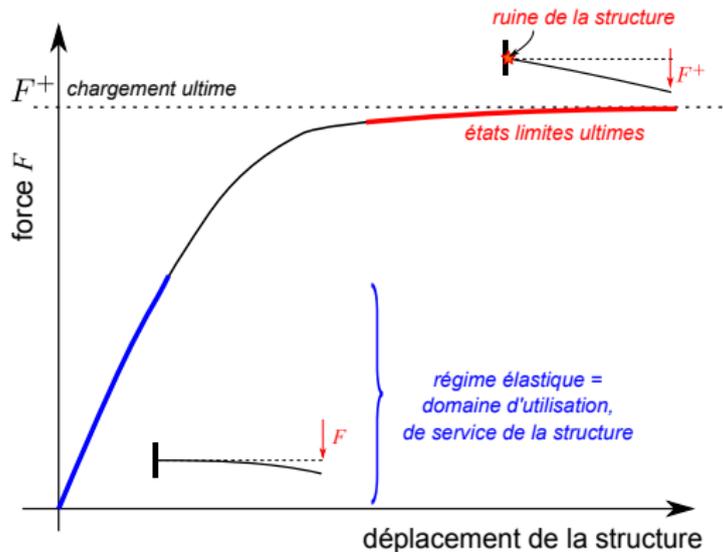


### Limites des méthodes actuelles

- réglementation (Eurocodes) : approche "semi-empirique", coefficients de sécurité, marge de sécurité non quantifiable

# Méthodes actuelles de dimensionnement des structures

## Dimensionnement des structures aux états limites ultimes (ELU)



### Limites des méthodes actuelles

- réglementation (Eurocodes) : approche "semi-empirique", coefficients de sécurité, marge de sécurité non quantifiable
- calcul complet pas-à-pas : temps de calcul très longs, convergence

# Besoins d'un outil de dimensionnement fiable et performant

- **évolution du génie civil**

- ▶ structures plus complexes : géométrie (coques), matériaux (composites)...
- ▶ situations non prévues dans les normes
- ▶ dimensionnement rapide en avant-projet



Fondation Louis Vuitton, Paris



Rolex Learning Center, EPFL

- **gestion du patrimoine bâti**

# Besoins d'un outil de dimensionnement fiable et performant

- évolution du génie civil
- **gestion du patrimoine bâti**
  - ▶ renforcement d'ouvrages existant
  - ▶ évaluation de la marge de sécurité
  - ▶ évolution des réglementations



Tunnel du Chambon, Isère

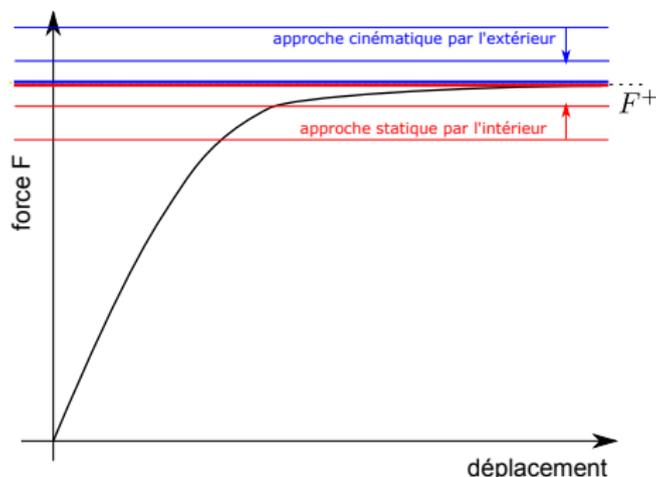


Pont de chemin de fer, Loiret

# Théorie du calcul à la rupture<sup>1</sup>

## Une alternative aux approches traditionnelles du calcul des ouvrages

- approche directe rigoureuse : compatibilité **équilibre** + **critère de résistance**
- encadrement de la charge de ruine : bornes inférieure et supérieure
- visualisation des mécanismes de ruine
- **milieux continus généralisés** (poutres, plaques, coques)



<sup>1</sup>[J. Salençon, 1983]

# Théorie du calcul à la rupture

Chargement proportionnel :  $\lambda F \Rightarrow$  charge ultime  $\lambda^+ F$  ?

# Théorie du calcul à la rupture

Chargement proportionnel :  $\lambda F \Rightarrow$  charge ultime  $\lambda^+ F$  ?

## Approche statique par l'intérieur

$$\lambda^+ \geq \lambda_s = \max_{\lambda, \sigma} \lambda$$

t.q.  $\sigma$  S.A. avec  $\lambda F$  (équilibre)

$\sigma \in G(x) \quad \forall x \in \Omega$  (critère de résistance)

## Théorie du calcul à la rupture

Chargement proportionnel :  $\lambda F \Rightarrow$  charge ultime  $\lambda^+ F$  ?

### Approche statique par l'intérieur

$$\lambda^+ \geq \lambda_s = \max_{\lambda, \sigma} \lambda$$

t.q.  $\sigma$  S.A. avec  $\lambda F$  (équilibre)  
 $\sigma \in G(x) \quad \forall x \in \Omega$  (critère de résistance)

### Approche cinématique par l'extérieur

Principe des puissances virtuelles + fonction d'appui du critère de résistance :

$$\pi(d) = \sup_{\sigma \in G} \sigma \cdot d$$

$$\lambda^+ \leq \lambda_k = \min_{U \text{ C.A.}} P_{rm}(U) = \int_{\Omega} \pi(\nabla^s U) d\Omega + \int_{\Gamma} \pi(\underline{n}; \llbracket U \rrbracket) dS$$

t.q.  $P_{ext}(U) = F \cdot U = 1$

# Théorie du calcul à la rupture

Chargement proportionnel :  $\lambda F \Rightarrow$  charge ultime  $\lambda^+ F$  ?

## Approche statique par l'intérieur

$$\lambda^+ \geq \lambda_s = \max_{\lambda, \sigma} \lambda$$

t.q.  $\sigma$  S.A. avec  $\lambda F$  (équilibre)  
 $\sigma \in G(x) \quad \forall x \in \Omega$  (critère de résistance)

## Approche cinématique par l'extérieur

Principe des puissances virtuelles + fonction d'appui du critère de résistance :

$$\pi(d) = \sup_{\sigma \in G} \sigma \cdot d$$

$$\lambda^+ \leq \lambda_k = \min_{U \text{ C.A.}} P_{rm}(U) = \int_{\Omega} \pi(\nabla^s U) d\Omega + \int_{\Gamma} \pi(\underline{n}; \llbracket U \rrbracket) dS$$

t.q.  $P_{ext}(U) = F \cdot U = 1$

$$\lambda_s \leq \lambda^+ \leq \lambda_k$$

# Domaines d'application du calcul à la rupture

Stabilité de pentes

Structures de poutres

Bielles et tirants

Voûtes en maçonnerie

# Domaines d'application du calcul à la rupture

Stabilité de pentes

Structures de poutres

Bielles et tirants

Voûtes en maçonnerie

Le développement à plus grande échelle a, notamment, souffert de certains **verrous sur le plan numérique**.

# Aspects numériques du calcul à la rupture

## Problématiques

- **optimisation numérique** : convexe, non-régulier, contraintes non-linéaires, taille importante
- discrétisation : **éléments finis** adaptés ?
- conservation du statut de borne (**sécurité**)
- différents modèles mécaniques (**poutres, plaques, coques**)
- critères de résistance pour les **matériaux hétérogènes** (béton armé, composites)

# Aspects numériques du calcul à la rupture

## Problématiques

- **optimisation numérique** : convexe, non-régulier, contraintes non-linéaires, taille importante
- discrétisation : **éléments finis** adaptés ?
- conservation du statut de borne (**sécurité**)
- différents modèles mécaniques (**poutres, plaques, coques**)
- critères de résistance pour les **matériaux hétérogènes** (béton armé, composites)

## Outils numériques

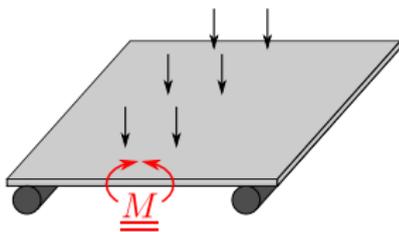


- solveurs de **programmation conique** <http://www.mosek.com>
- **EF non traditionnels** (en contraintes, discontinuités de vitesse)
- **approches multi-échelle** : théorie de l'homogénéisation

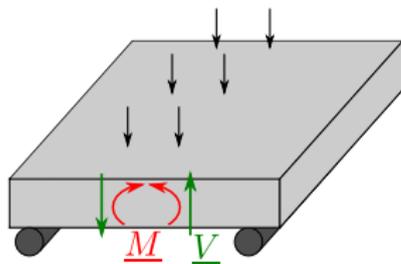
# Sommaire

- 1 Contexte et objectifs
- 2 Calcul par éléments finis des structures de coque**
- 3 Changement d'échelle en calcul à la rupture
- 4 Exemples d'application sur des structures complexes
- 5 Conclusions et perspectives

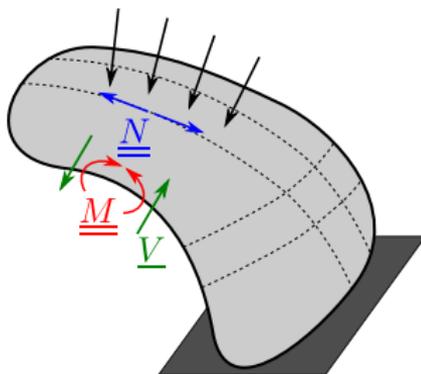
# Modèle de coque



plaques minces  
(flexion)

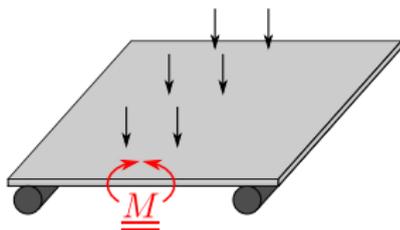


plaques épaisses  
(flexion/effort tranchant)

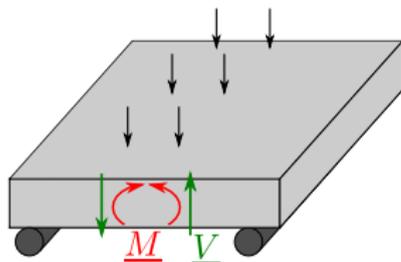


coques  
(membrane/flexion/  
effort tranchant)

# Modèle de coque

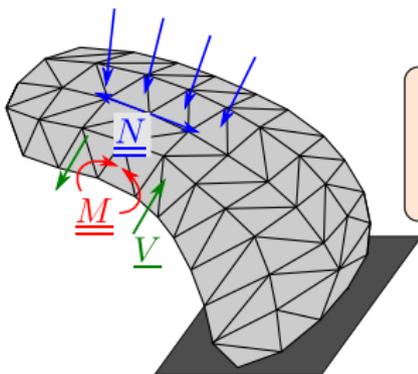


plaques minces  
(flexion)



plaques épaisses  
(flexion/effort tranchant)

approximation de la  
géométrie  
en facettes planes



coques  
(membrane/flexion/  
effort tranchant)

découplage

membrane

flexion

effort

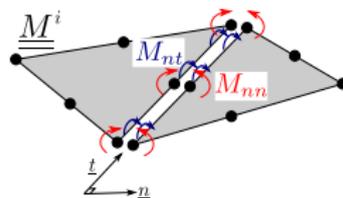
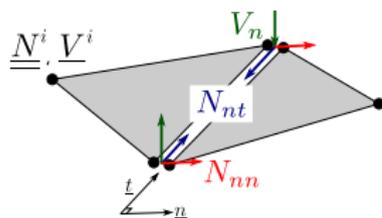
tranchant

## Approche statique par éléments finis

Discrétisation par **facettes planes** :

élément fini de plaque épaisse<sup>2</sup> :  $\underline{\underline{M}}$  quadratique,  $\underline{V}$  linéaire

+ élément fini de membrane :  $\underline{\underline{N}}$  linéaire



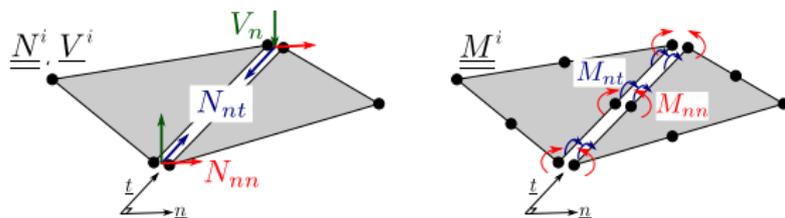
<sup>2</sup>[Bleyer et de Buhan, IJNME, 2014a]

## Approche statique par éléments finis

Discrétisation par **facettes planes** :

élément fini de plaque épaisse<sup>2</sup> :  $\underline{\underline{M}}$  quadratique,  $\underline{V}$  linéaire

+ élément fini de membrane :  $\underline{\underline{N}}$  linéaire



**couplage membrane/flexion** aux arêtes des facettes non-coplanaires

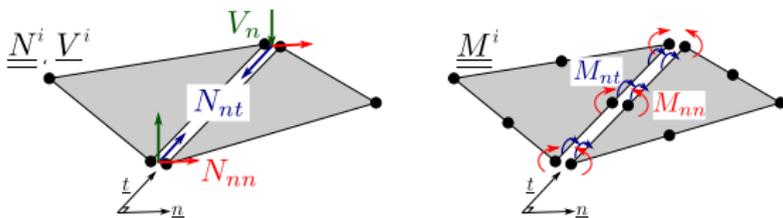
<sup>2</sup>[Bleyer et de Buhan, IJNME, 2014a]

## Approche statique par éléments finis

Discrétisation par **facettes planes** :

élément fini de plaque épaisse<sup>2</sup> :  $\underline{\underline{M}}$  quadratique,  $\underline{V}$  linéaire

+ élément fini de membrane :  $\underline{\underline{N}}$  linéaire



**couplage membrane/flexion** aux arêtes des facettes non-coplanaires

Inconnues statiques :  $\underline{\Sigma} = \{\dots, N_{ij}^e, M_{ij}^e, V_i^e, \dots\}^T$

équilibre local :  $\mathbf{H}\underline{\Sigma} + \lambda \mathbf{F} = \mathbf{0}$

continuité + C.L. :  $\mathbf{C}\underline{\Sigma} = \mathbf{0}$

critère de résistance :  $f(\underline{\underline{N}}^e, \underline{\underline{M}}^e, \underline{V}^e) \leq 0$

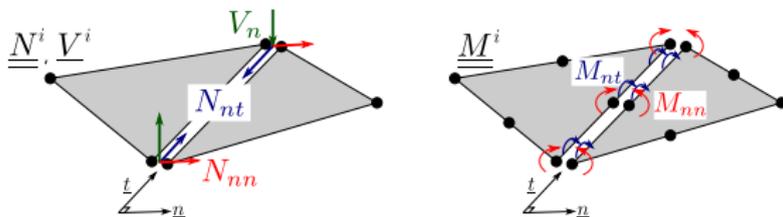
<sup>2</sup>[Bleyer et de Buhan, *IJNME*, 2014a]

## Approche statique par éléments finis

Discrétisation par **facettes planes** :

élément fini de plaque épaisse<sup>2</sup> :  $\underline{\underline{M}}$  quadratique,  $\underline{V}$  linéaire

+ élément fini de membrane :  $\underline{\underline{N}}$  linéaire



**couplage membrane/flexion** aux arêtes des facettes non-coplanaires

Inconnues statiques :  $\underline{\Sigma} = \{\dots, N_{ij}^e, M_{ij}^e, V_i^e, \dots\}^T$

équilibre local :  $\mathbf{H}\underline{\Sigma} + \lambda \mathbf{F} = \mathbf{0}$

continuité + C.L. :  $\mathbf{C}\underline{\Sigma} = \mathbf{0}$

critère de résistance :  $f(\underline{\underline{N}}^e, \underline{\underline{M}}^e, \cancel{\underline{V}}^e) \leq 0$  **coque mince**

<sup>2</sup>[Bleyer et de Buhan, IJNME, 2014a]

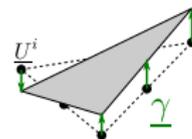
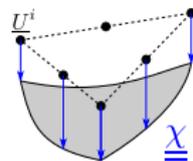
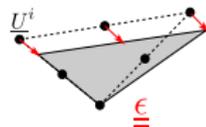
# Approche cinématique par éléments finis

Discrétisation par **facettes planes** :

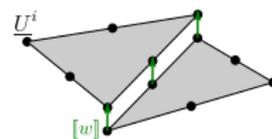
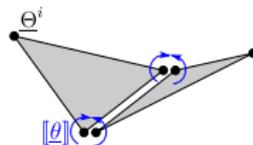
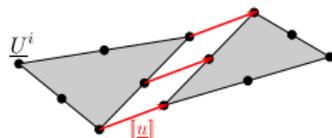
élément fini de plaque épaisse<sup>3</sup> : vitesse hors-plan  $w$  quadratique,  $\theta$  linéaire

+ élément fini de membrane : vitesse dans le plan  $\underline{u}$  quadratique

Taux de déformations  
virtuelles



Discontinuités de  
vitesse virtuelle



**membrane**

**flexion**

**cisaillement transverse**

<sup>3</sup>[Bleyer et de Buhan, IJNME, 2014b]

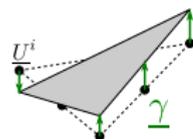
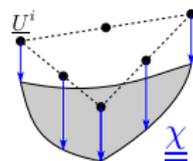
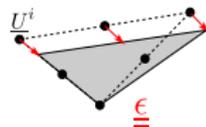
# Approche cinématique par éléments finis

Discrétisation par **facettes planes** :

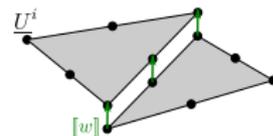
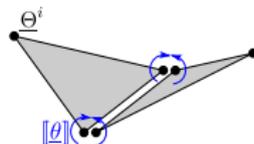
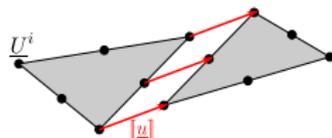
élément fini de plaque épaisse<sup>3</sup> : vitesse hors-plan  $w$  quadratique,  $\theta$  linéaire

+ élément fini de membrane : vitesse dans le plan  $\underline{u}$  quadratique

Taux de déformations  
virtuelles



Discontinuités de  
vitesse virtuelle



membrane

flexion

cisaillement transverse

$$P_{rm} = \int_{\Omega} \pi(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{\chi}}, \underline{\underline{\gamma}}) d\Omega + \int_{\Gamma} \pi(\underline{n}; \underline{\underline{u}}, \underline{\underline{\theta}}, \underline{\underline{w}}) dl$$

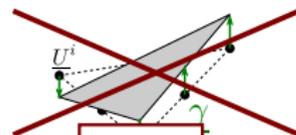
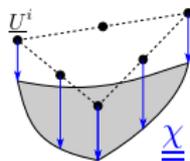
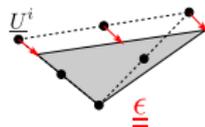
<sup>3</sup>[Bleyer et de Buhan, IJNME, 2014b]

# Approche cinématique par éléments finis

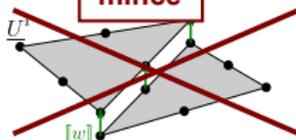
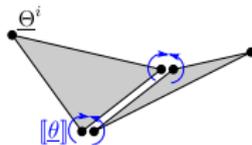
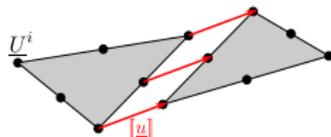
Discrétisation par **facettes planes** :

- élément fini de plaque épaisse<sup>3</sup> : vitesse hors-plan  $w$  quadratique,  $\underline{\theta}$  linéaire
- + élément fini de membrane : vitesse dans le plan  $\underline{u}$  quadratique

Taux de déformations virtuelles



Discontinuités de vitesse virtuelle



membrane

flexion

cisaillement transverse

$$P_{rm} = \int_{\Omega} \pi(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{\chi}}, \underline{\underline{\gamma}}) d\Omega + \int_{\Gamma} \pi(\underline{n}; \underline{\underline{u}}, \underline{\underline{\theta}}, \underline{\underline{w}}) dl$$

$$\underline{\underline{\gamma}} = \underline{0} \quad \underline{\underline{w}} = 0 \quad (\text{condition de pertinence})$$

<sup>3</sup>[Bleyer et de Buhan, IJNME, 2014b]

## Critères de résistance généralisés

Formulation d'un critère de résistance dans l'espace à 6 dimensions ( $\underline{N}, \underline{M}$ ) ?

- expressions approchées (von Mises) : [*Ilyushin, 1956*], [*Hodge, 1959*]...

## Critères de résistance généralisés

Formulation d'un critère de résistance dans l'espace à 6 dimensions  $(\underline{N}, \underline{M})$  ?

- expressions approchées (von Mises) : [Ilyushin, 1956], [Hodge, 1959]...
- changement d'échelle implicite à partir du critère local en contraintes planes  $\mathcal{C}$

$$f(\underline{N}, \underline{M}) \leq 0 \Leftrightarrow (\underline{N}, \underline{M}) \in G \Leftrightarrow \exists \underline{\underline{\sigma}}(z) \text{ avec } \sigma_{iz} = 0$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(z) \in \mathcal{C}(z) \quad z \in [-h/2; h/2]$$

$$\underline{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\underline{\sigma}}(z) dz \text{ et } \underline{M} = \int_{-h/2}^{h/2} -z \underline{\underline{\sigma}}(z) dz$$

## Critères de résistance généralisés

Formulation d'un critère de résistance dans l'espace à 6 dimensions ( $\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{M}}$ ) ?

- expressions approchées (von Mises) : [Ilyushin, 1956], [Hodge, 1959]...
- changement d'échelle implicite à partir du critère local en contraintes planes  $\mathcal{C}$

$$f(\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{M}}) \leq 0 \Leftrightarrow (\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{M}}) \in G \Leftrightarrow \exists \underline{\underline{\sigma}}(z) \text{ avec } \sigma_{iz} = 0$$

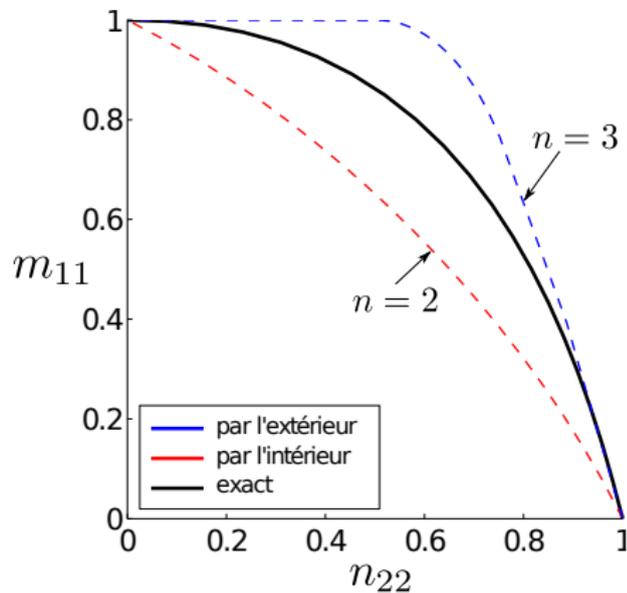
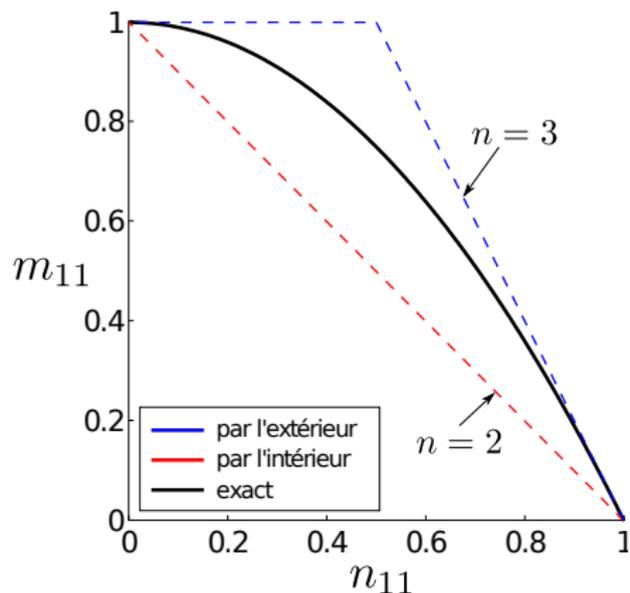
$$\underline{\underline{\sigma}}(z) \in \mathcal{C}(z) \quad z \in [-h/2; h/2]$$

$$\underline{\underline{N}} = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\underline{\sigma}}(z) dz \text{ et } \underline{\underline{M}} = \int_{-h/2}^{h/2} -z \underline{\underline{\sigma}}(z) dz$$

- ▶ **approximations numériques** ("multicouches") par l'intérieur et par l'extérieur
- ▶ valables **quel que soit le critère local**  $\mathcal{C}$
- ▶ **formulation conique** pour  $\mathcal{C} \implies$  **formulation conique** pour  $G$

# Critères de résistance généralisés

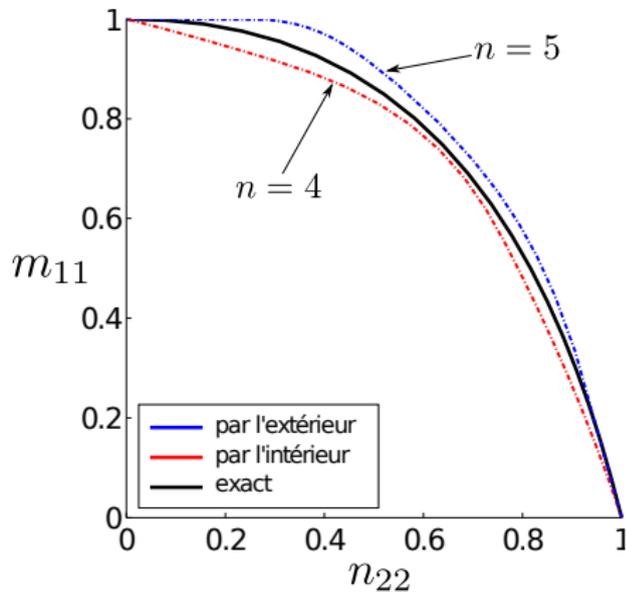
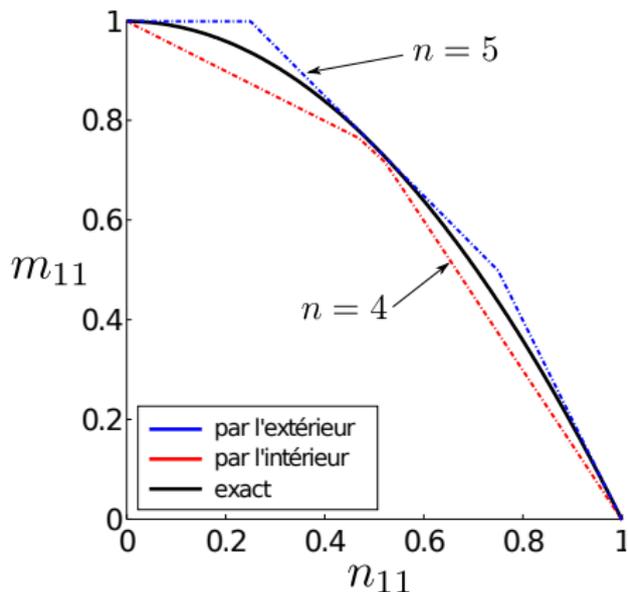
Diagrammes d'interaction d'une coque homogène de von Mises



Encadrement maximal  
-15% (par défaut) ; +20% (par excès)

# Critères de résistance généralisés

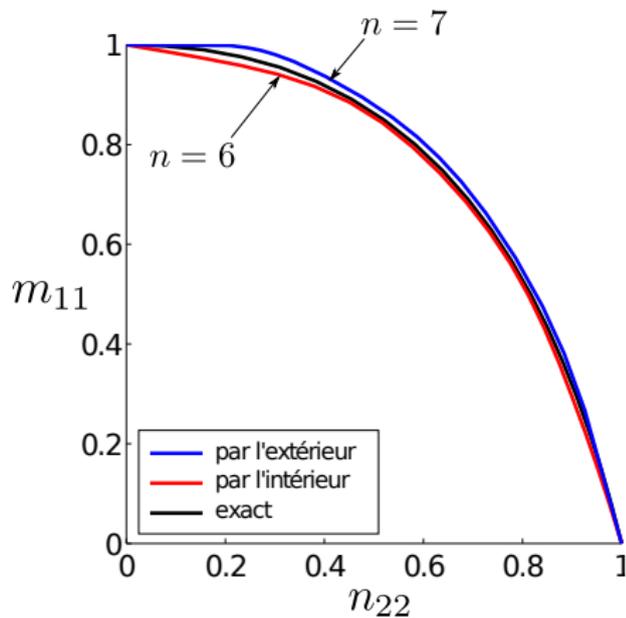
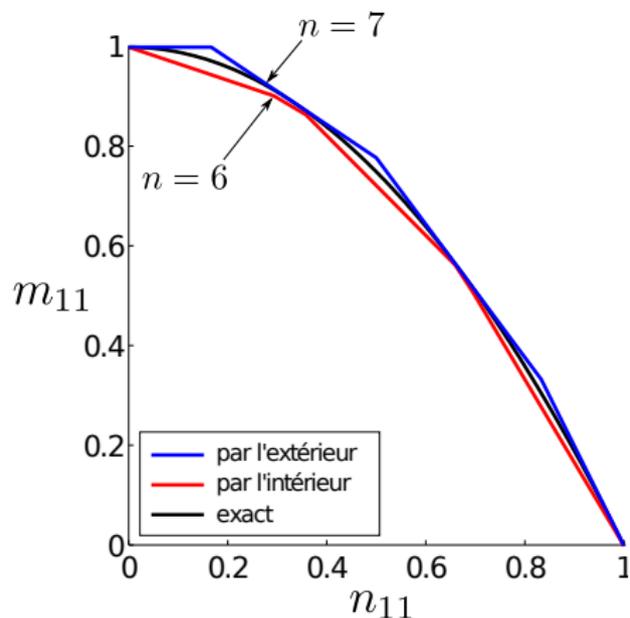
Diagrammes d'interaction d'une coque homogène de von Mises



Encadrement **maximal**  
-10% (par défaut) ; +11% (par excès)

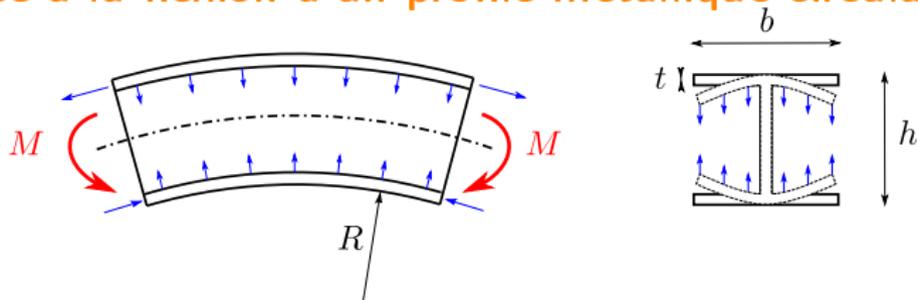
# Critères de résistance généralisés

Diagrammes d'interaction d'une coque homogène de von Mises

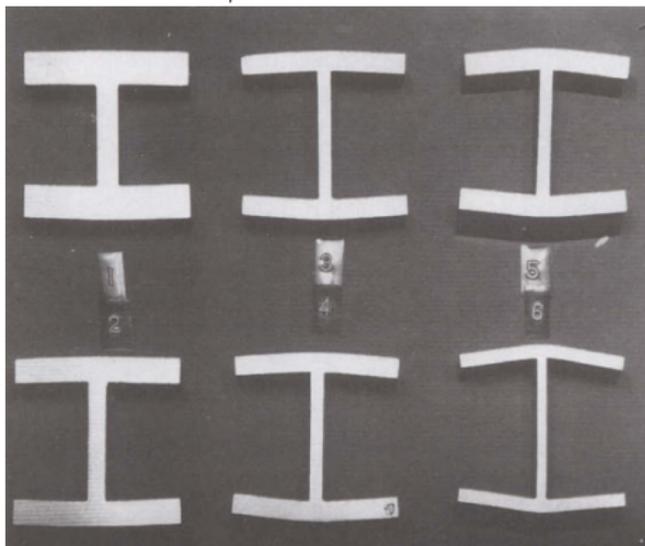
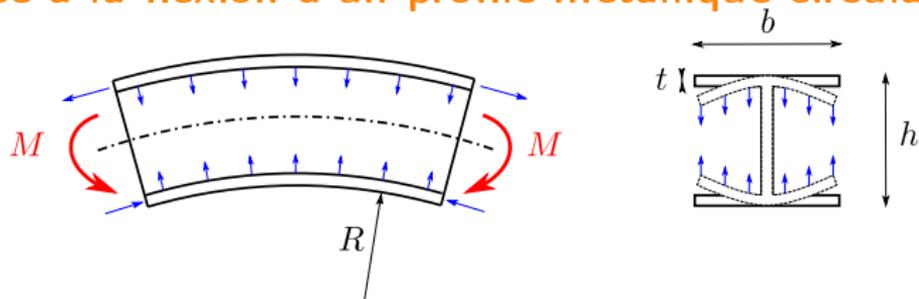


Encadrement **maximal**  
-5% (par défaut) ; +6% (par excès)

## Résistance à la flexion d'un profilé métallique circulaire



# Résistance à la flexion d'un profilé métallique circulaire



[Massonnet et Save, 1964]

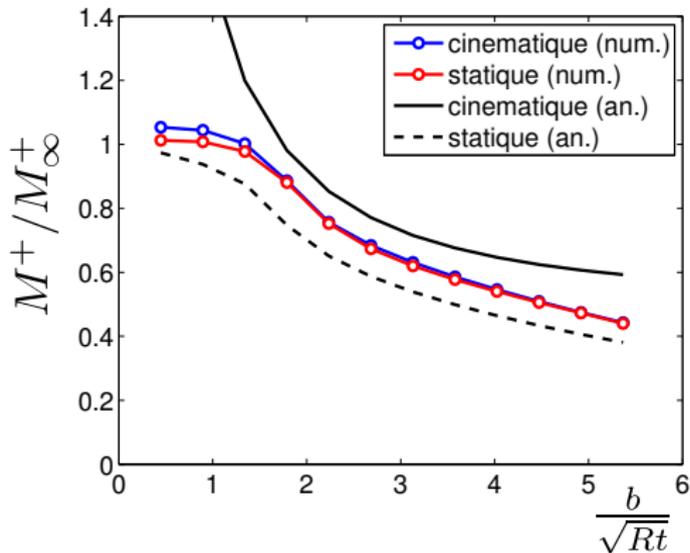
# Résistance à la flexion d'un profilé métallique circulaire

modélisation d'une portion de la poutre courbe par éléments finis de coque

# Résistance à la flexion d'un profilé métallique circulaire

**Efficacité de la section** :  $M^+ / M_\infty^+$  où  $M_\infty^+$  moment limite de la poutre droite

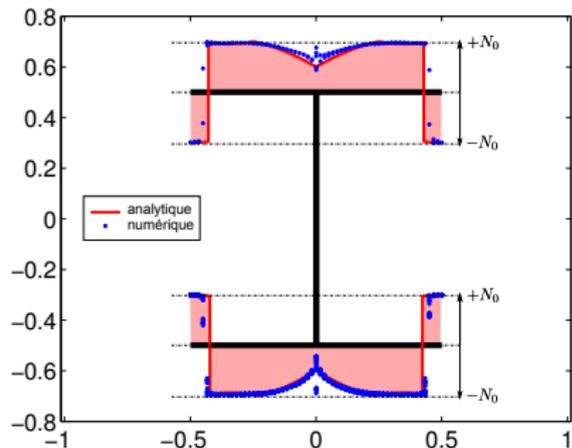
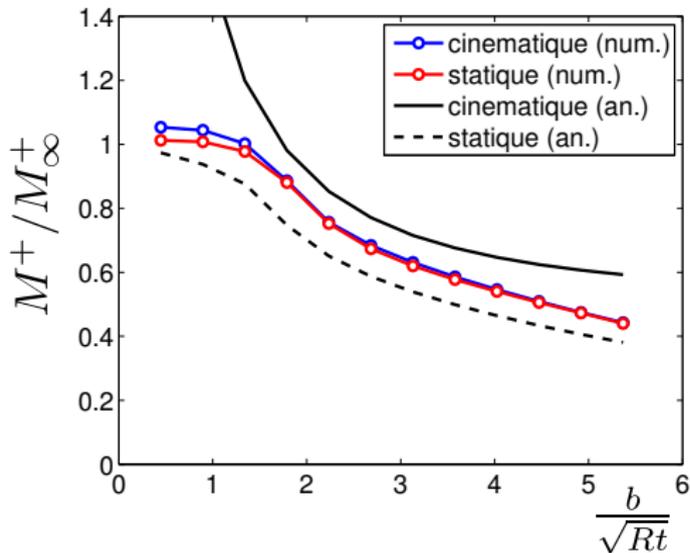
Approches (**statique et cinématique**) analytiques [Massonnet et Save, 1964]



# Résistance à la flexion d'un profilé métallique circulaire

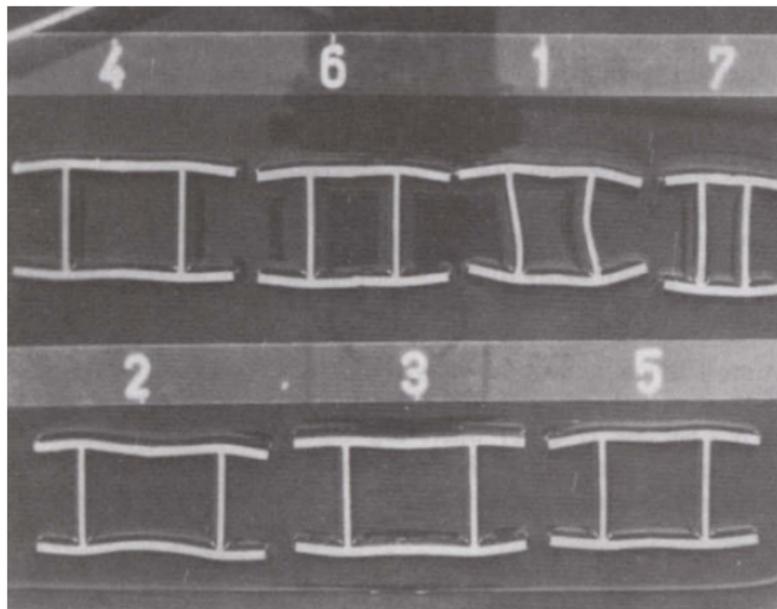
Efficacité de la section :  $M^+ / M_\infty^+$  où  $M_\infty^+$  moment limite de la poutre droite

Approches (**statique et cinématique**) analytiques [Massonnet et Save, 1964]



Effort membranaire de traction/compression dans les semelles

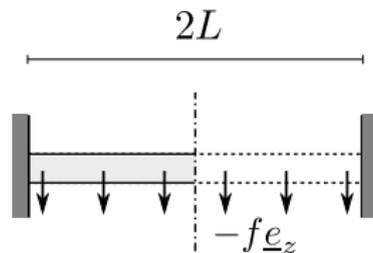
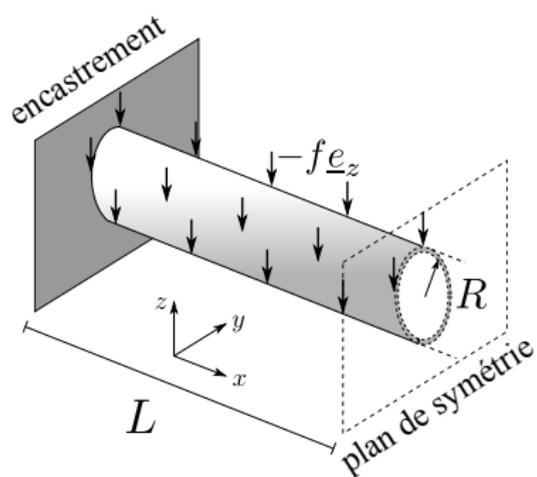
# Résistance à la flexion d'un profilé métallique circulaire



# Résistance à la flexion d'un profilé métallique circulaire

## Coque cylindrique en flexion

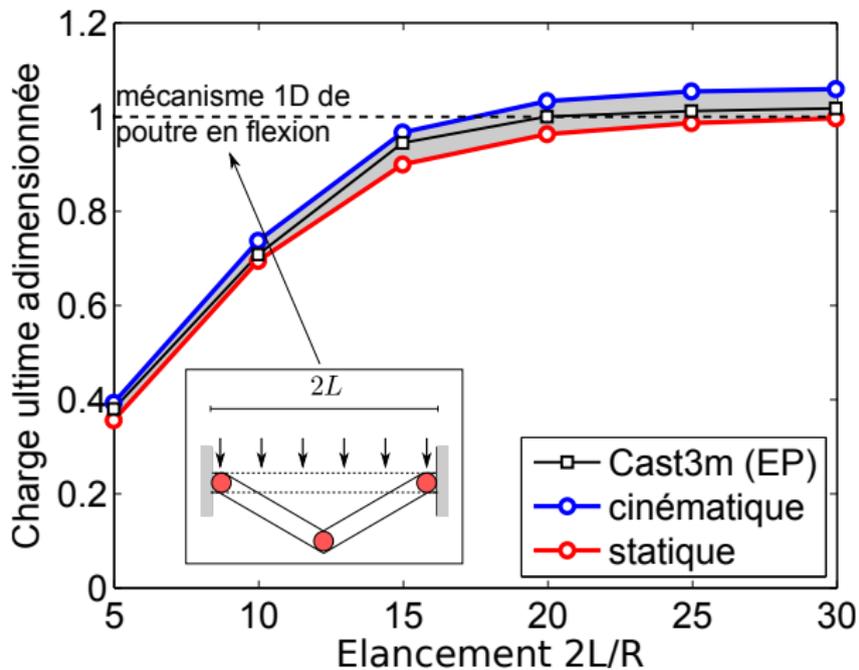
Coque cylindrique : longueur  $2L$ , rayon  $R$ , épaisseur  $t = 0.01R$   
 bi-encastée, sous chargement vertical uniforme  $-f\mathbf{e}_z$ , critère de von Mises



charge extrême dans un modèle de poutre en flexion (mécanisme à 3 rotules) :

$$f_{poutre}^+ = \frac{32}{\pi} \sigma_0 t \left( \frac{R}{2L} \right)^2$$

## Coque cylindrique en flexion



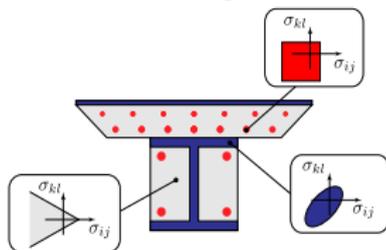
# Coque cylindrique en flexion

# Sommaire

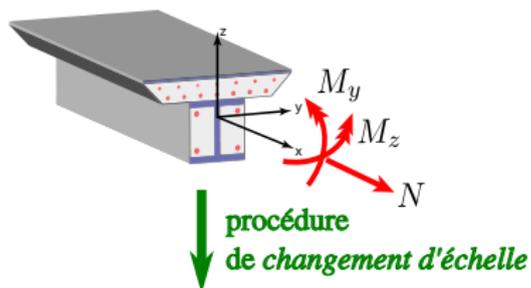
- 1 Contexte et objectifs
- 2 Calcul par éléments finis des structures de coque
- 3 Changement d'échelle en calcul à la rupture**
- 4 Exemples d'application sur des structures complexes
- 5 Conclusions et perspectives

## Changement d'échelle en calcul à la rupture

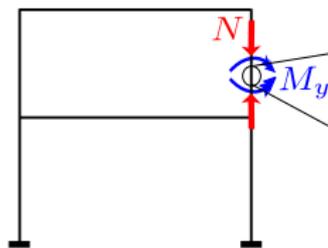
modèle hétérogène 3D



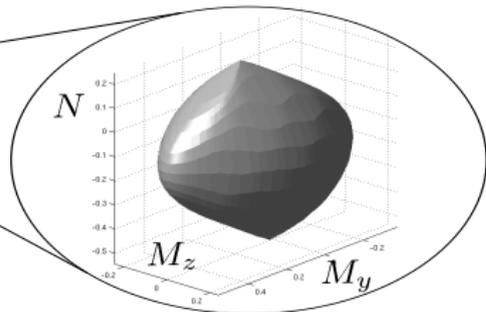
problème auxiliaire



modèle de poutre équivalent



critère de résistance macroscopique

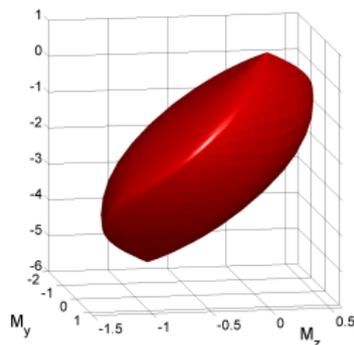
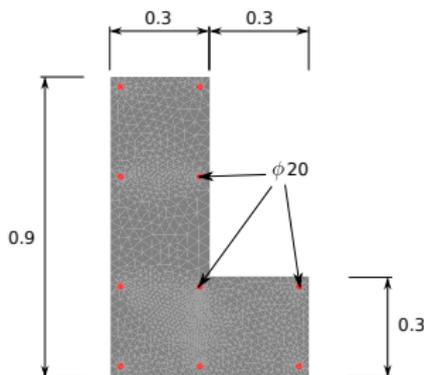


[Bleyer et de Buhan, C&amp;S, 2013]

## Approximation numérique des critères de résistance

Diagrammes d'interaction ( $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ) déterminés **numériquement**  
 => **approximation** nécessaire pour effectuer un calcul de structure

algorithme d'approximation par union convexe d'ellipsoïdes  
 [Bleyer et de Buhan, CRAS, 2013]

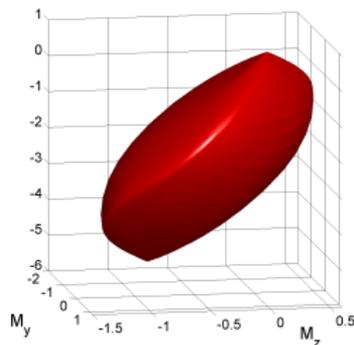
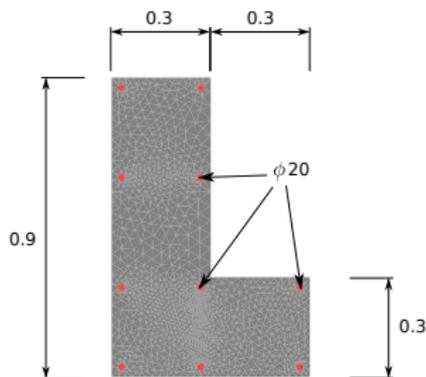


Critère initial

## Approximation numérique des critères de résistance

Diagrammes d'interaction ( $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ) déterminés **numériquement**  
 => **approximation** nécessaire pour effectuer un calcul de structure

algorithme d'approximation par union convexe d'ellipsoïdes  
 [Bleyer et de Buhan, CRAS, 2013]



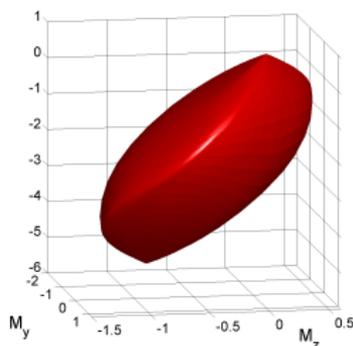
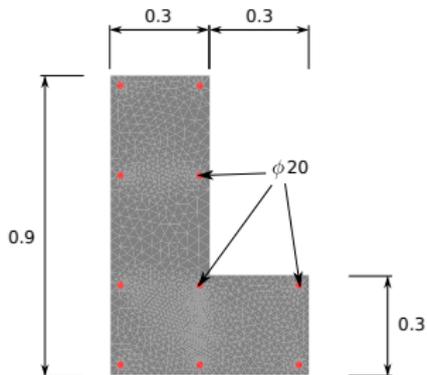
Critère initial

Critère approché

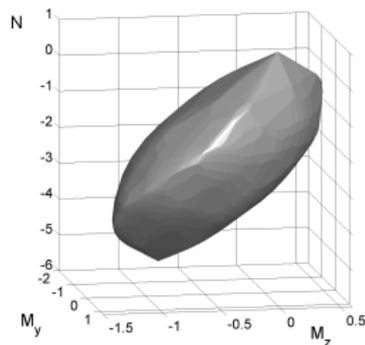
# Approximation numérique des critères de résistance

Diagrammes d'interaction  $(N, M_y, M_z)$  déterminés **numériquement**  
 => **approximation** nécessaire pour effectuer un calcul de structure

algorithme d'approximation par union convexe d'ellipsoïdes  
 [Bleyer et de Buhan, CRAS, 2013]

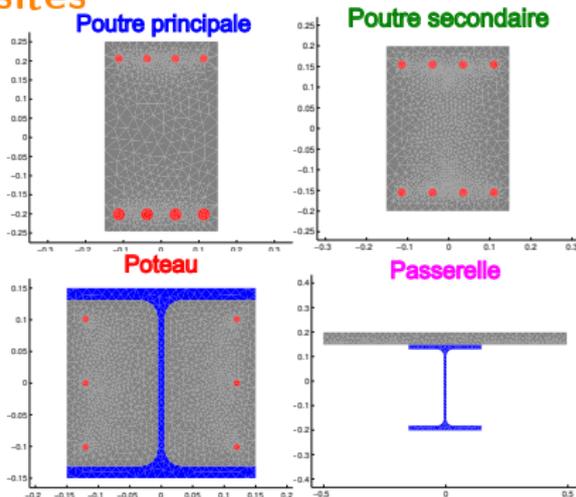
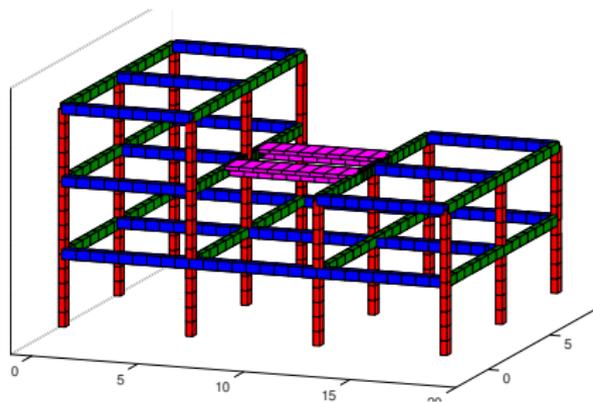


Critère initial

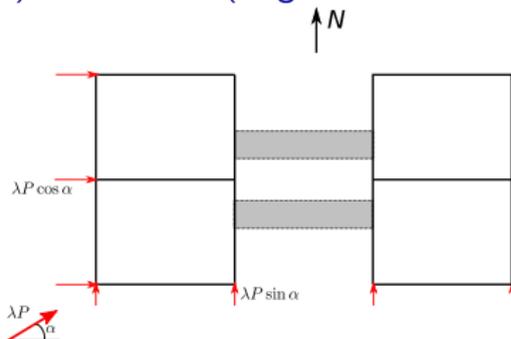
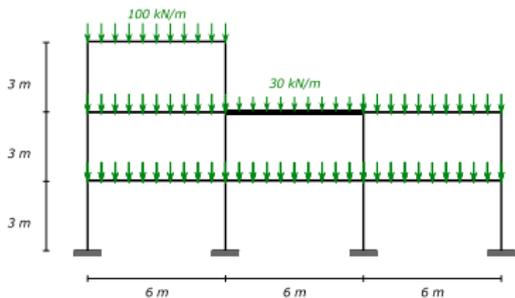


Critère approché

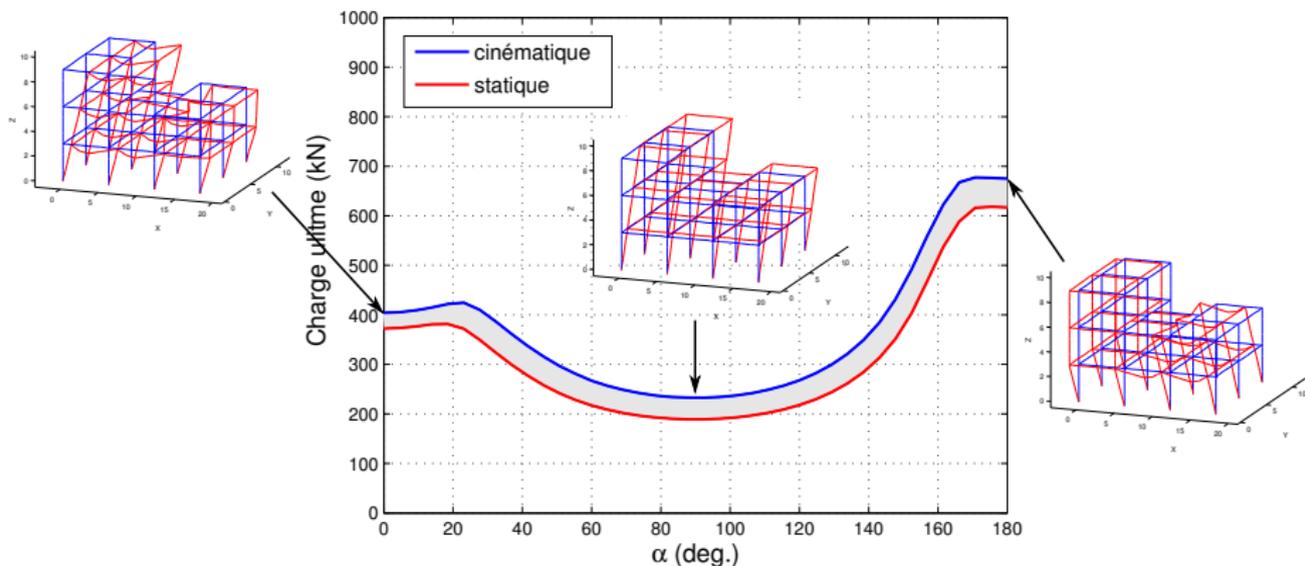
# Structure 3D de poutres composites



Poids propre (fixe) + chargement (variable) dû au vent (angle d'incidence  $\alpha$ )

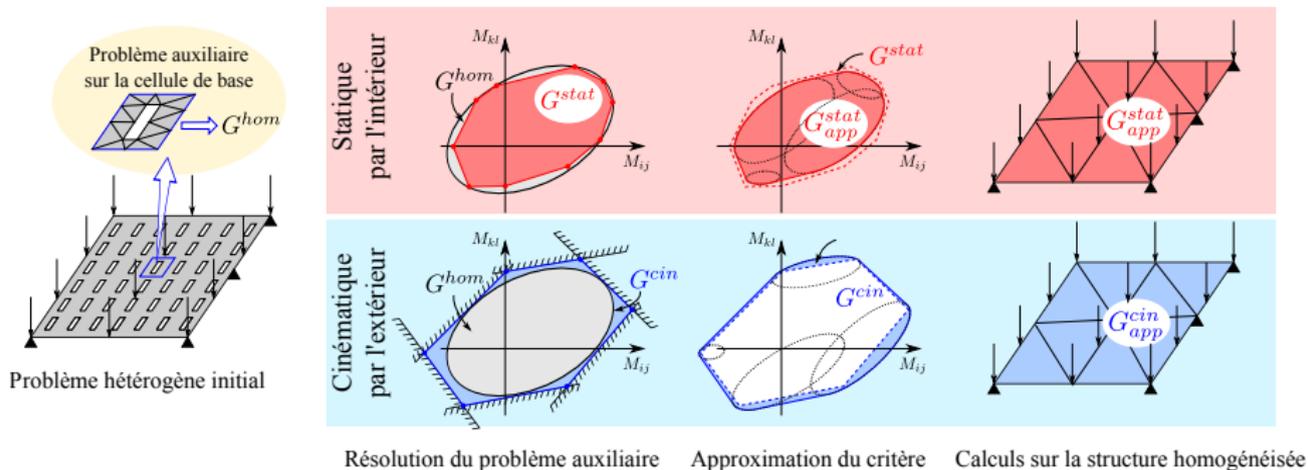


# Structure 3D de poutres composites



- **encadrement** à moins de 15% de la charge ultime
- visualisation des **mécanismes de ruine**
- **efficacité** : 1 cas de charge = 2s de calcul

# Application au cas des plaques hétérogènes périodiques



- formulation d'un problème auxiliaire (plaque/3D)
- résolution numérique par éléments finis  $\rightarrow G^{hom}$
- approximation par l'intérieur et par l'extérieur
- résolution du problème à l'échelle de la structure

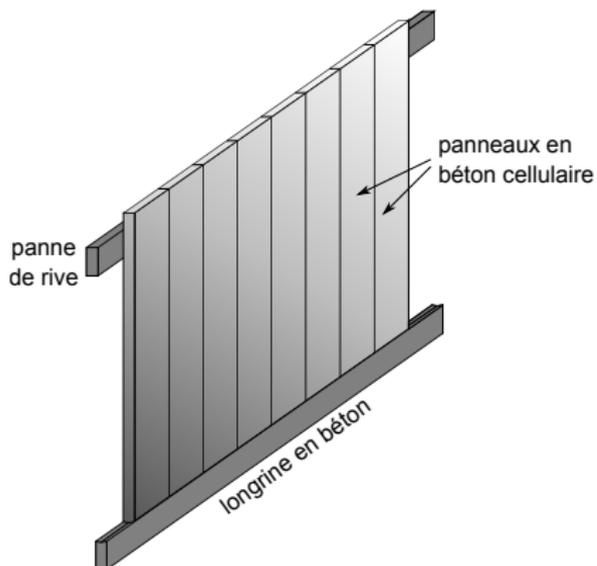
# Sommaire

- 1 Contexte et objectifs
- 2 Calcul par éléments finis des structures de coque
- 3 Changement d'échelle en calcul à la rupture
- 4 Exemples d'application sur des structures complexes**
- 5 Conclusions et perspectives

# Sommaire

- 1 Contexte et objectifs
- 2 Calcul par éléments finis des structures de coque
- 3 Changement d'échelle en calcul à la rupture
- 4 Exemples d'application sur des structures complexes**
  - Stabilité au feu de panneaux en béton armé de grande hauteur
  - Dimensionnement à la rupture de la marquise de la gare d'Austerlitz
- 5 Conclusions et perspectives

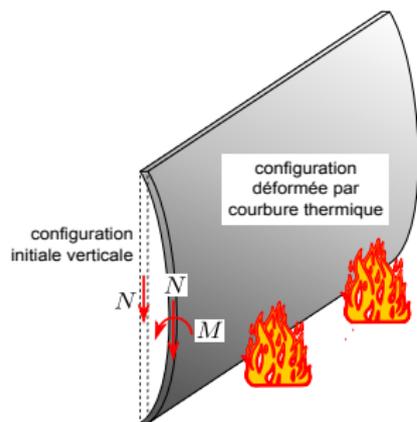
# Stabilité au feu de panneaux en béton de grande hauteur



utilisation comme murs coupe-feu  
approches traditionnelles pour les panneaux de petites dimensions pas adaptées

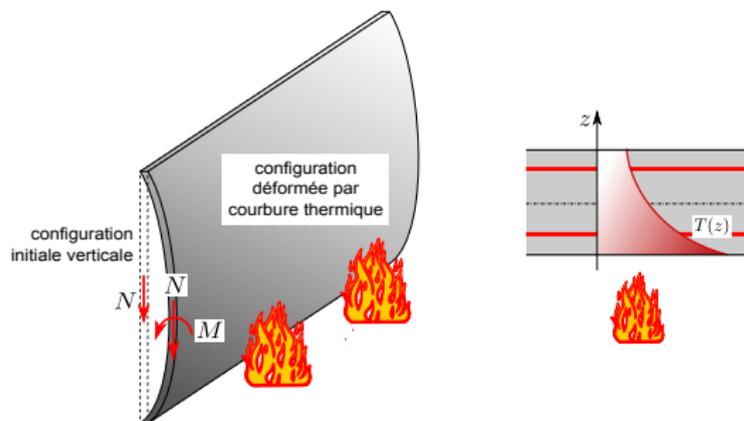
# Stabilité au feu de panneaux en béton de grande hauteur

- changements de géométrie dus à la déformation thermique



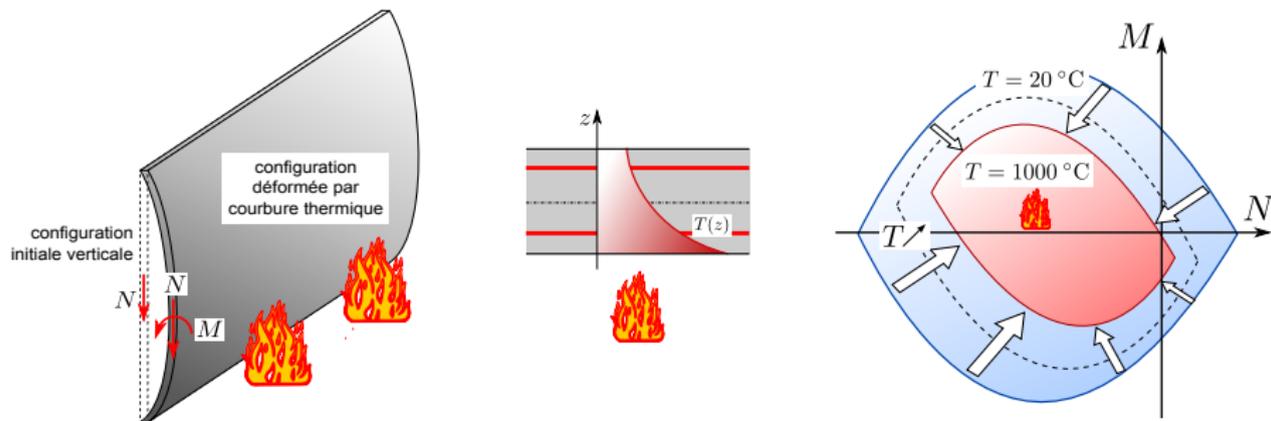
# Stabilité au feu de panneaux en béton de grande hauteur

- **changements de géométrie** dus à la déformation thermique
- **gradient thermique** dans l'épaisseur du panneau



# Stabilité au feu de panneaux en béton de grande hauteur

- **changements de géométrie** dus à la déformation thermique
- **gradient thermique** dans l'épaisseur du panneau
- **dégradation des propriétés de résistance** des matériaux



## Proposition d'une démarche simplifiée

### Un problème complexe à modéliser

- configuration d'équilibre courbe
- gradient de propriétés de résistance dans l'épaisseur
- ruine pilotée par ces deux aspects

## Proposition d'une démarche simplifiée

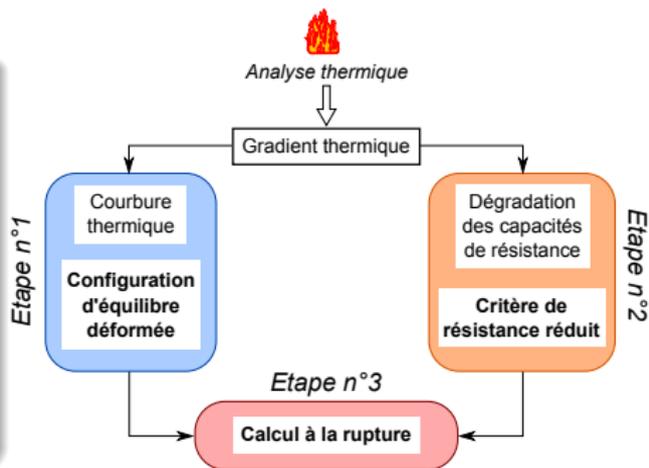
### Un problème complexe à modéliser

- configuration d'équilibre courbe
- gradient de propriétés de résistance dans l'épaisseur
- ruine pilotée par ces deux aspects

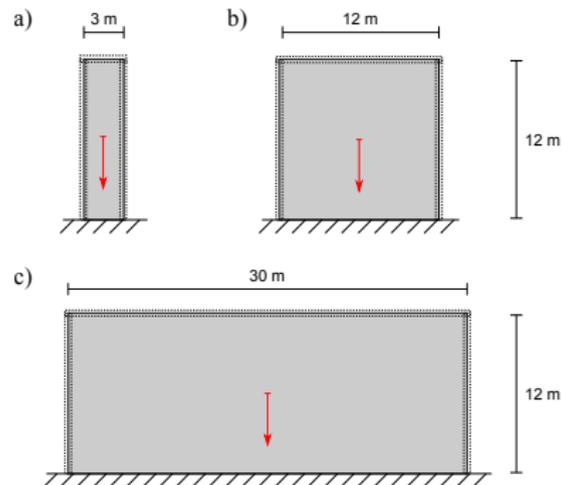
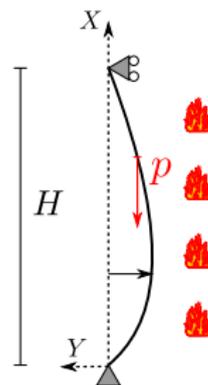
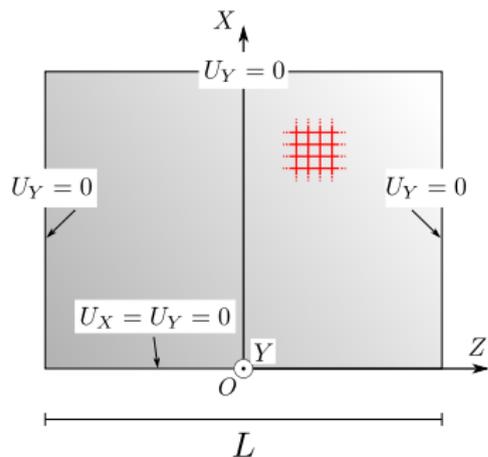
### Analyse en 3 étapes :

- 1 Détermination de la configuration d'équilibre déformée
- 2 Détermination d'un critère de résistance dépendant de la température [Eurocode 2]
- 3 Calcul à la rupture sur la configuration déformée

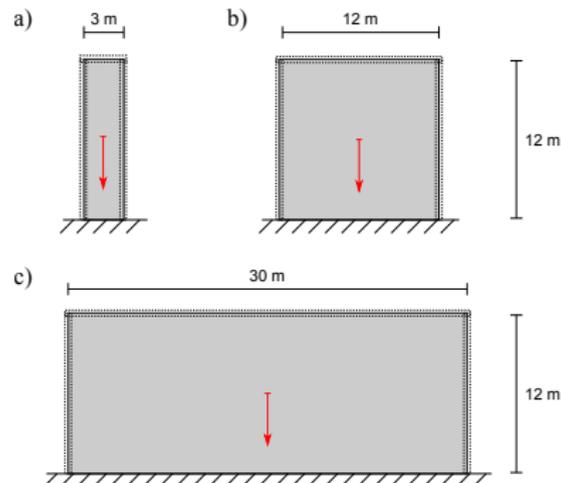
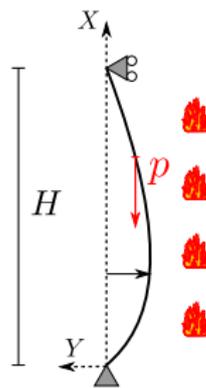
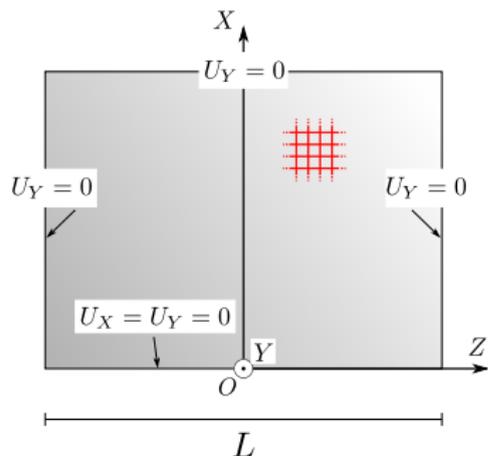
[Bleyer et al., ECAM, 2015]



# Modélisation



# Modélisation



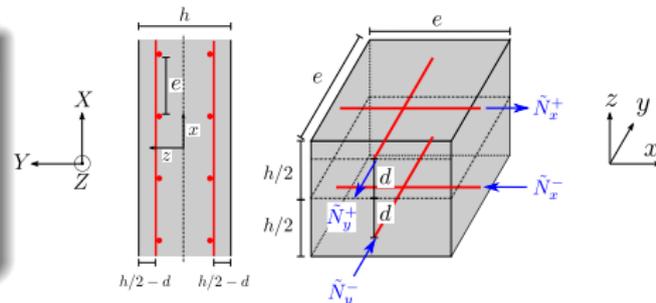
## Paramètres

Panneau :  $h = 15 \text{ cm}$ ,  $p = 3.7 \text{ kN/m}^2$

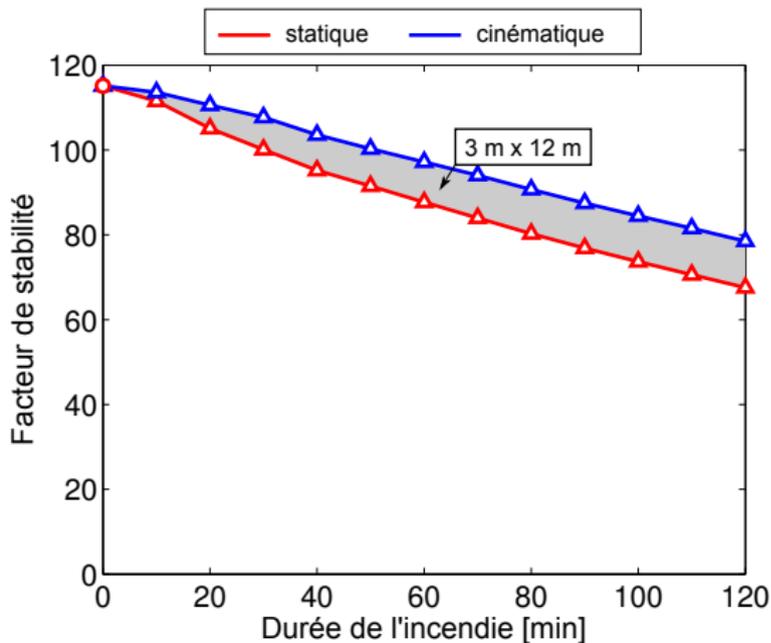
Béton :  $f_{c,amb} = 32 \text{ MPa}$

Acier :  $f_{y,amb} = 500 \text{ MPa}$

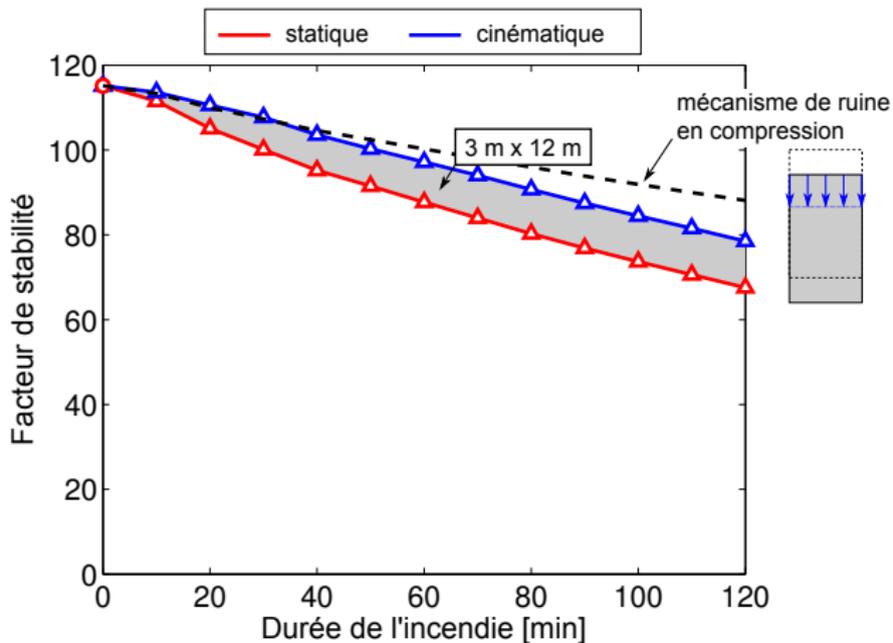
$e = 10 \text{ cm}$ ,  $d = 4.5 \text{ cm}$ ,  $\phi = 6 \text{ mm}$



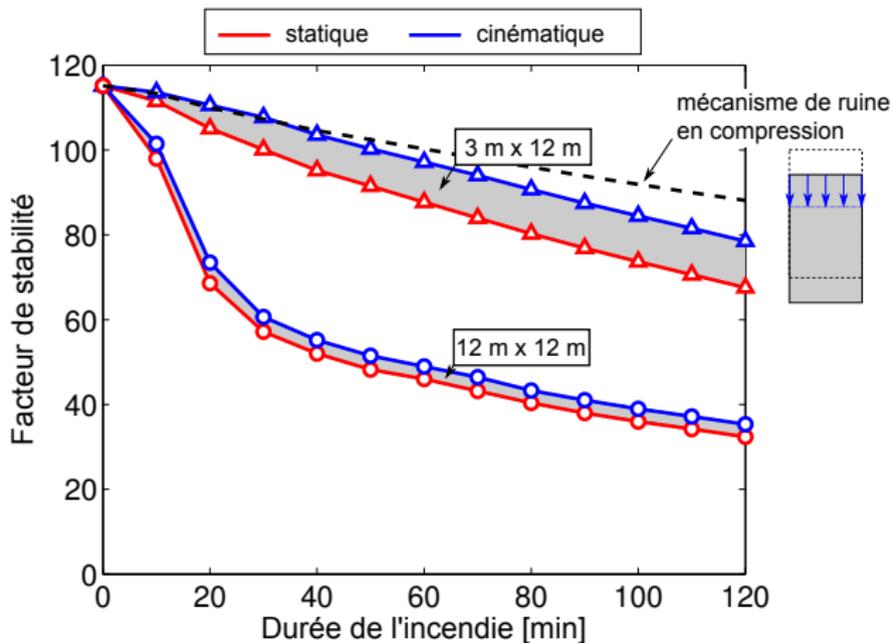
# Résultats



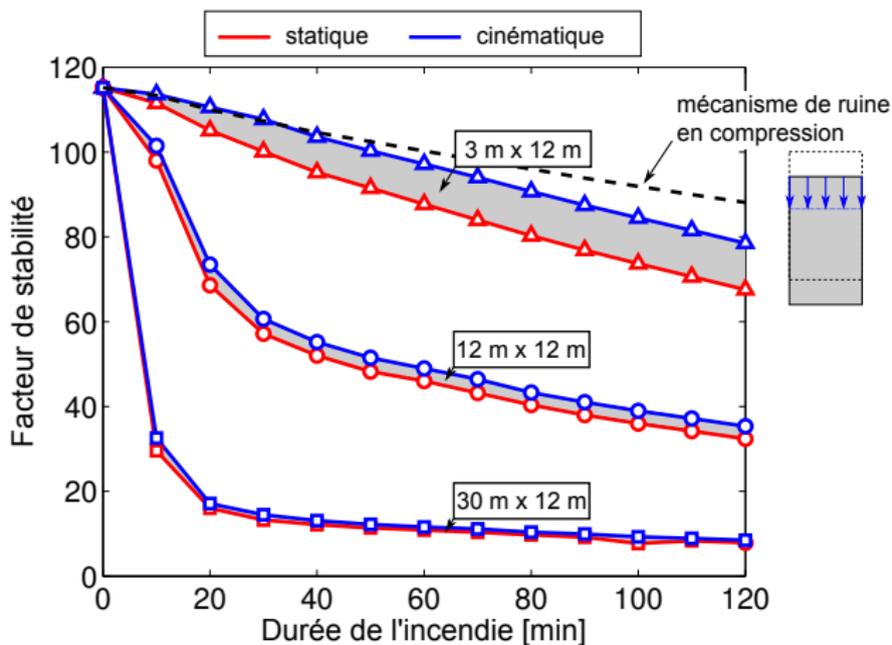
# Résultats



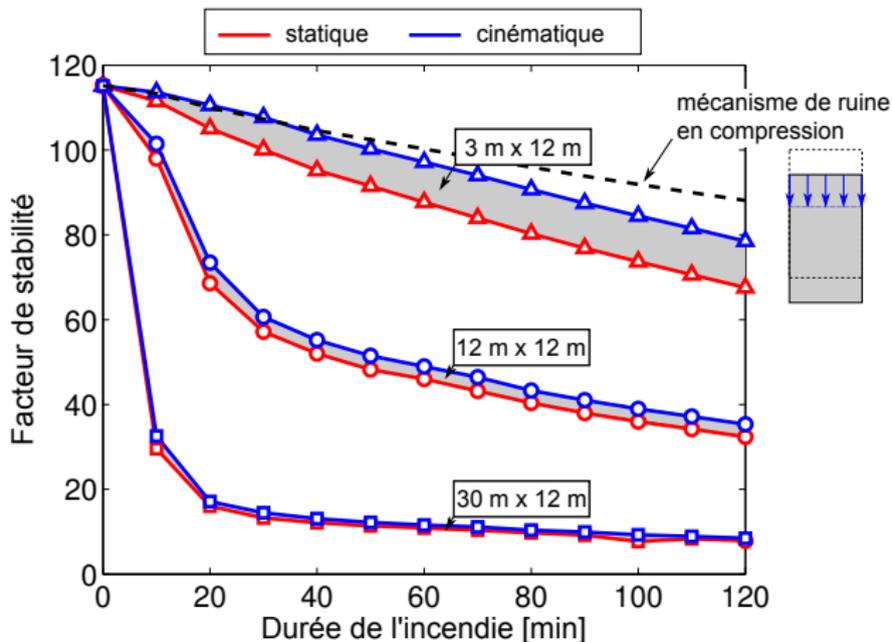
# Résultats



# Résultats



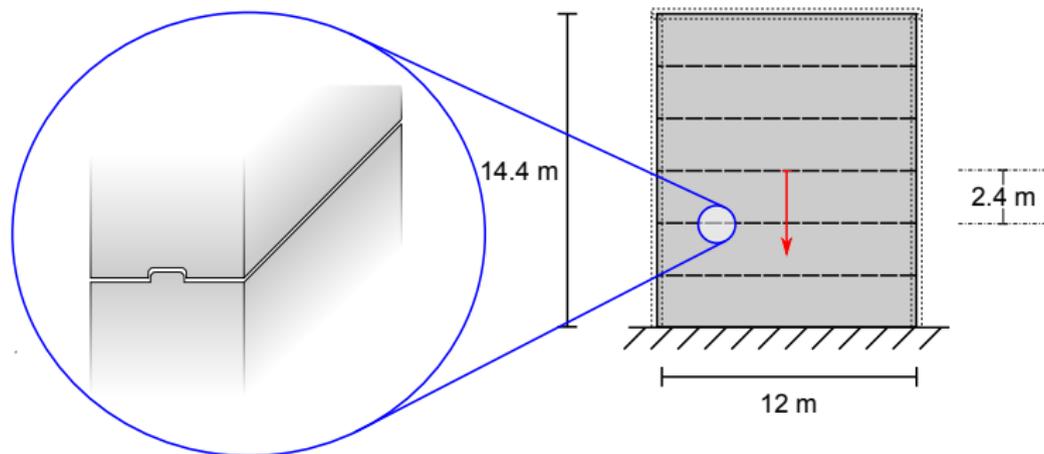
# Résultats



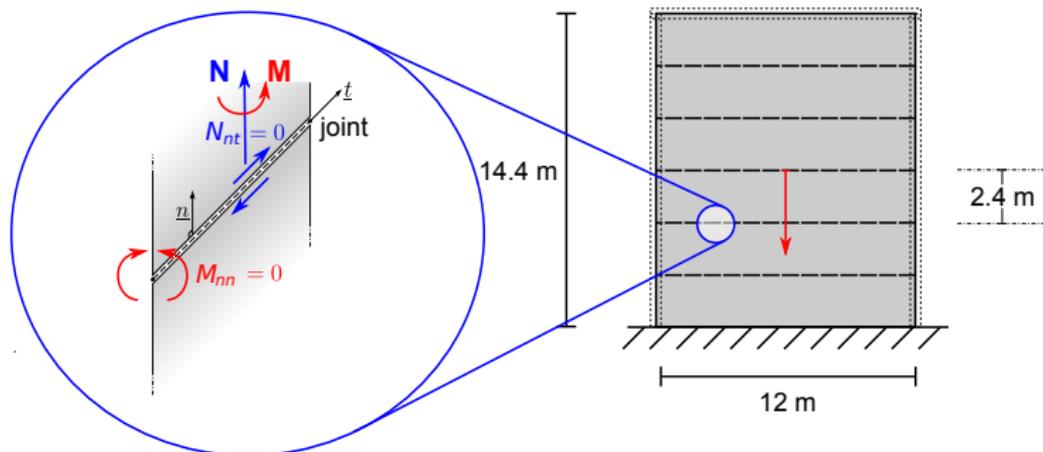
- diminution importante du facteur de stabilité en configuration déformée
- ruine en flexion pour les panneaux larges
- rôle prépondérant des aciers (85% de la résistance pour  $L = 30$  m)

# Résultats (mécanismes de ruine)

## Prise en compte de connexions imparfaites



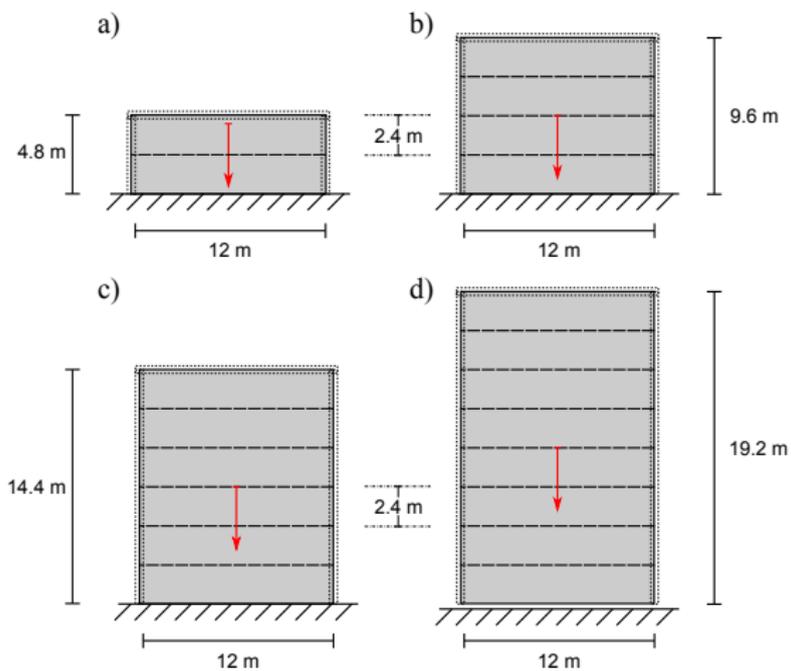
## Prise en compte de connexions imparfaites



Critère de résistance du joint lisse :

$$(\underline{\mathbf{N}}, \underline{\mathbf{M}}) \in \mathbf{G} \iff \begin{cases} \exists(\underline{\mathbf{N}}, \underline{\mathbf{M}}) & \text{tels que} \\ N_{nn} = \underline{\mathbf{N}}, & N_{nt} = 0 \\ M_{nn} = 0, & M_{nt} = \underline{\mathbf{M}} \\ (\underline{\mathbf{N}}, \underline{\mathbf{M}}) \in G \end{cases}$$

# Prise en compte de connexions imparfaites



## Prise en compte de connexions imparfaites (mécanismes)

Reduction de 60% du facteur de stabilité par rapport à une connexion parfaite

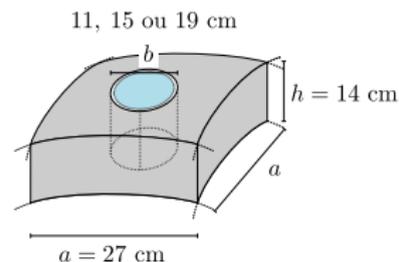
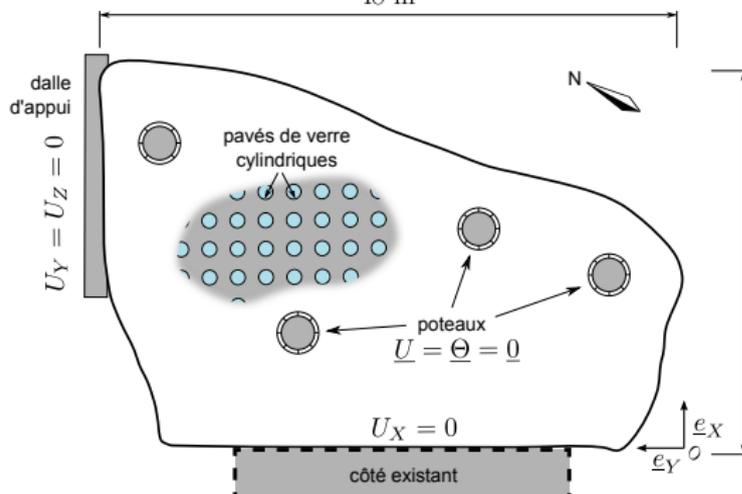
# Sommaire

- 1 Contexte et objectifs
- 2 Calcul par éléments finis des structures de coque
- 3 Changement d'échelle en calcul à la rupture
- 4 Exemples d'application sur des structures complexes**
  - Stabilité au feu de panneaux en béton armé de grande hauteur
  - Dimensionnement à la rupture de la marquise de la gare d'Austerlitz
- 5 Conclusions et perspectives

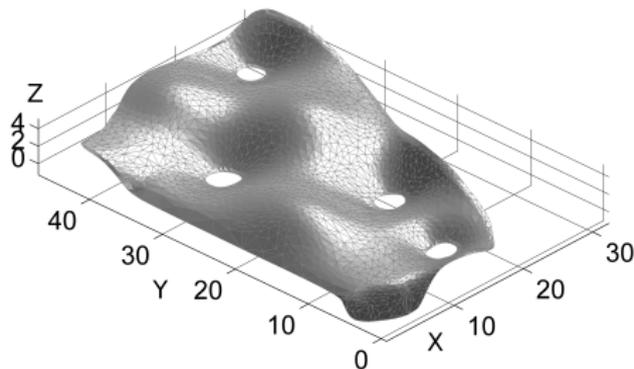
# Projet de réaménagement de la gare d'Austerlitz (2012-2020)



48 m



## Modélisation

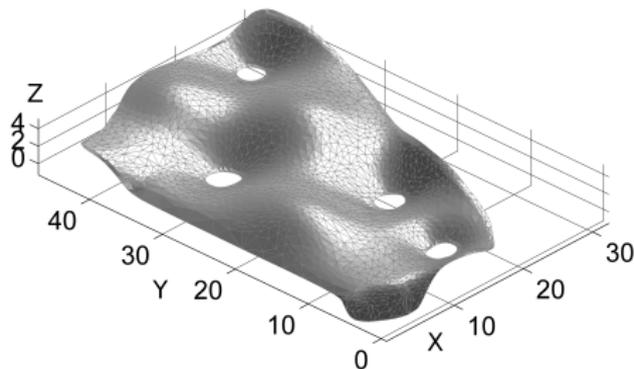


### 3 géométries de pavés (de 3 à 8 HA8)

#### Matériaux

- Béton :  $f_{c,k} = 50$  MPa,  $\gamma_c = 1.5$
- Acier :  $f_{y,k} = 500$  MPa,  $\gamma_s = 1.15$
- Verre : non résistant

## Modélisation



### 3 géométries de pavés (de 3 à 8 HA8)

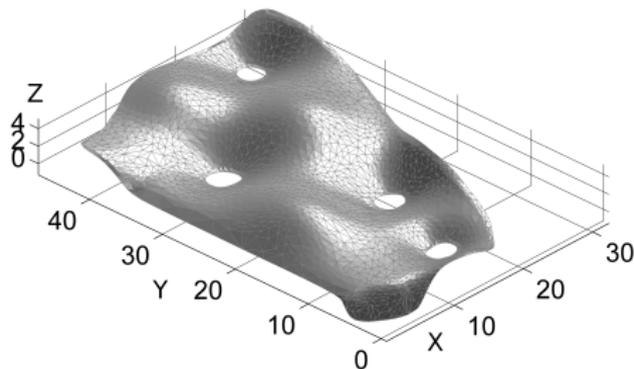
#### Matériaux

- Béton :  $f_{c,k} = 50$  MPa,  $\gamma_c = 1.5$
- Acier :  $f_{y,k} = 500$  MPa,  $\gamma_s = 1.15$
- Verre : non résistant

#### Homogénéisation périodique

critère de résistance anisotrope

## Modélisation



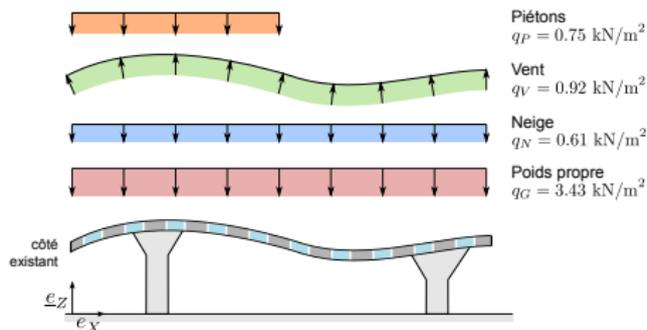
### 3 géométries de pavés (de 3 à 8 HA8)

#### Matériaux

- Béton :  $f_{c,k} = 50 \text{ MPa}$ ,  $\gamma_c = 1.5$
- Acier :  $f_{y,k} = 500 \text{ MPa}$ ,  $\gamma_s = 1.15$
- Verre : non résistant

#### Homogénéisation périodique

critère de résistance anisotrope



Combinaisons de cas de charge typiques d'un dimensionnement aux ELU

#### Combinaisons

- 1 poids propre + neige :  
 $\underline{q}_1 = 1.35\underline{q}_G + 1.5\underline{q}_N$
- 2 soulèvement :  $\underline{q}_2 = \underline{q}_G + 1.5\underline{q}_V$
- 3 asymétrique (piétons + vent) :  
 $\underline{q}_3 = 1.35\underline{q}_G + 1.5\underline{q}_P + 0.9\underline{q}'_V$

## Résultats

**Facteur de sécurité** (encadrement à 25% près)

Géométrie de pavés	Poids + neige	Soulèvement	Asymétrique
110 mm	~ 4	~ 9	~ 5.5
150 mm	~ 3	~ 6.5	~ 4
190 mm	~ 1.6	~ 3.7	~ 2.2

## Résultats

### Facteur de sécurité (encadrement à 25% près)

Géométrie de pavés	Poids + neige	Soulèvement	Asymétrique
110 mm	~ 4	~ 9	~ 5.5
150 mm	~ 3	~ 6.5	~ 4
190 mm	~ 1.6	~ 3.7	~ 2.2

- combinaison n°1 (poids propre + neige) la plus critique
- marge de sécurité (très) importante
- 15 à 20 min d'optimisation par calcul

## Résultats (mécanismes de ruine)

Poids propre + neige

Asymétrique (pavés 110 mm)

Asymétrique (pavés 190 mm)

# Sommaire

- 1 Contexte et objectifs
- 2 Calcul par éléments finis des structures de coque
- 3 Changement d'échelle en calcul à la rupture
- 4 Exemples d'application sur des structures complexes
- 5 Conclusions et perspectives**

# Conclusions

## Outils pour le calcul des structures homogènes

- efficacité des solveurs de programmation conique
- éléments finis pour les plaques minces, épaisses et coques
- formulation générale du critère de résistance pour les coques : applicable aux coques métalliques, en béton armé,...

# Conclusions

## Outils pour le calcul des structures homogènes

- efficacité des solveurs de programmation conique
- éléments finis pour les plaques minces, épaisses et coques
- formulation générale du critère de résistance pour les coques : applicable aux coques métalliques, en béton armé,...

## Outils pour le calcul des structures hétérogènes

- calcul de critères de résistance macroscopiques (poutres composites, plaques perforées,...)
- algorithme d'approximation des critères macroscopiques par ellipsoïdes
- mise en œuvre à l'échelle de la structure (conservation du caractère de borne)

# Conclusions

## Outils pour le calcul des structures homogènes

- efficacité des solveurs de programmation conique
- éléments finis pour les plaques minces, épaisses et coques
- formulation générale du critère de résistance pour les coques : applicable aux coques métalliques, en béton armé,...

## Outils pour le calcul des structures hétérogènes

- calcul de critères de résistance macroscopiques (poutres composites, plaques perforées,...)
- algorithme d'approximation des critères macroscopiques par ellipsoïdes
- mise en œuvre à l'échelle de la structure (conservation du caractère de borne)

## Illustration sur des problèmes complexes d'ingénierie

- quantification de la marge de sécurité disponible
- identification des mécanismes de ruine

# Perspectives

## Outil de calcul pour les plaques et coques

- procédure de remaillage adaptatif
- couplage avec des poutres, joints,...
- éléments de coque courbes

# Perspectives

## Outil de calcul pour les plaques et coques

- procédure de remaillage adaptatif
- couplage avec des poutres, joints,...
- éléments de coque courbes

## Dimensionnement des structures massives

- calculs 3D sur des éléments en béton armé (bielles et tirants)
- modélisation des armatures : approches par changement d'échelle

# Perspectives

## Outil de calcul pour les plaques et coques

- procédure de remaillage adaptatif
- couplage avec des poutres, joints,...
- éléments de coque courbes

## Dimensionnement des structures massives

- calculs 3D sur des éléments en béton armé (bielles et tirants)
- modélisation des armatures : approches par changement d'échelle

## Prise en compte des changements de géométrie

- influence des changements de géométrie sur la charge de ruine
- approche séquentielle du calcul à la rupture

# Perspectives

## Outil de calcul pour les plaques et coques

- procédure de remaillage adaptatif
- couplage avec des poutres, joints,...
- éléments de coque courbes

## Dimensionnement des structures massives

- calculs 3D sur des éléments en béton armé (bielles et tirants)
- modélisation des armatures : approches par changement d'échelle

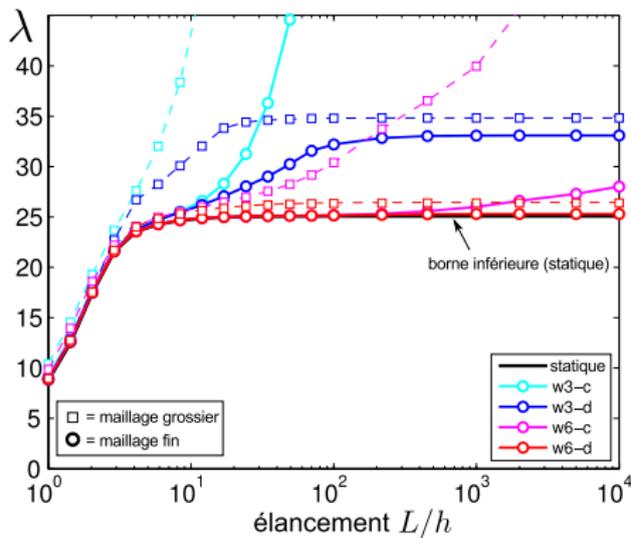
## Prise en compte des changements de géométrie

- influence des changements de géométrie sur la charge de ruine
- approche séquentielle du calcul à la rupture

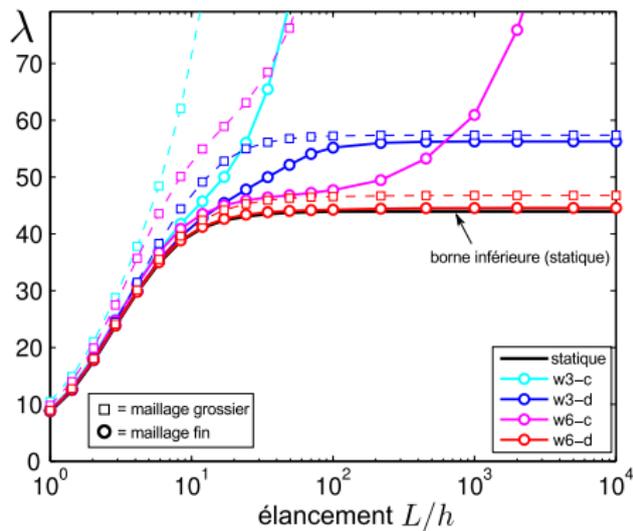
Merci de votre attention !

# Éléments finis de plaque épaisse

Plaque carrée sous chargement uniforme (EF continu/discontinus)



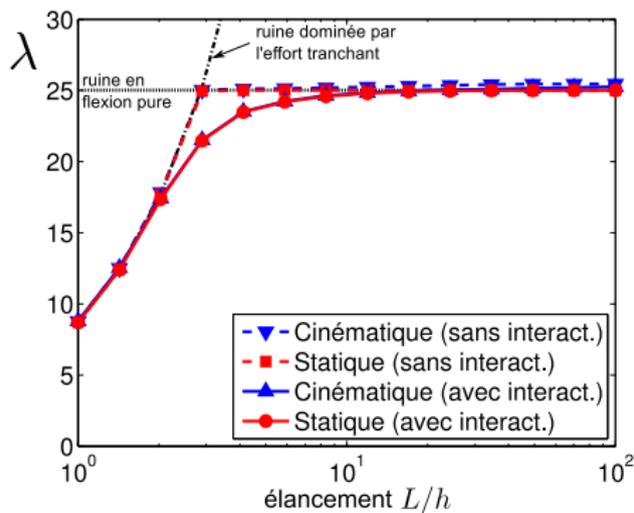
en appuis simples



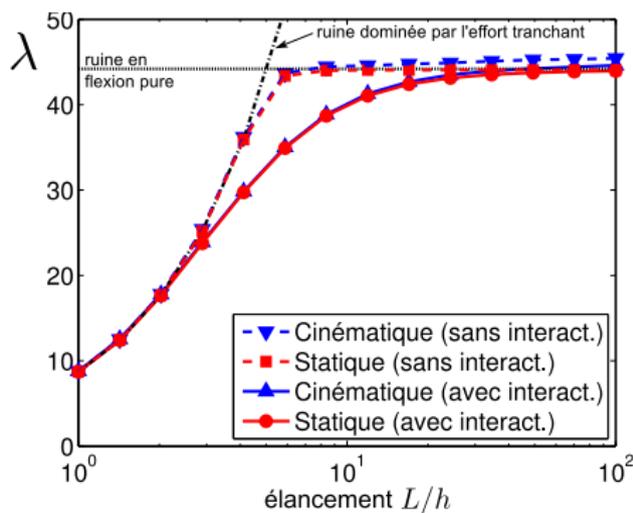
encastrée

# Éléments finis de plaque épaisse

Plaque carrée sous chargement uniforme (critère avec/sans interaction)

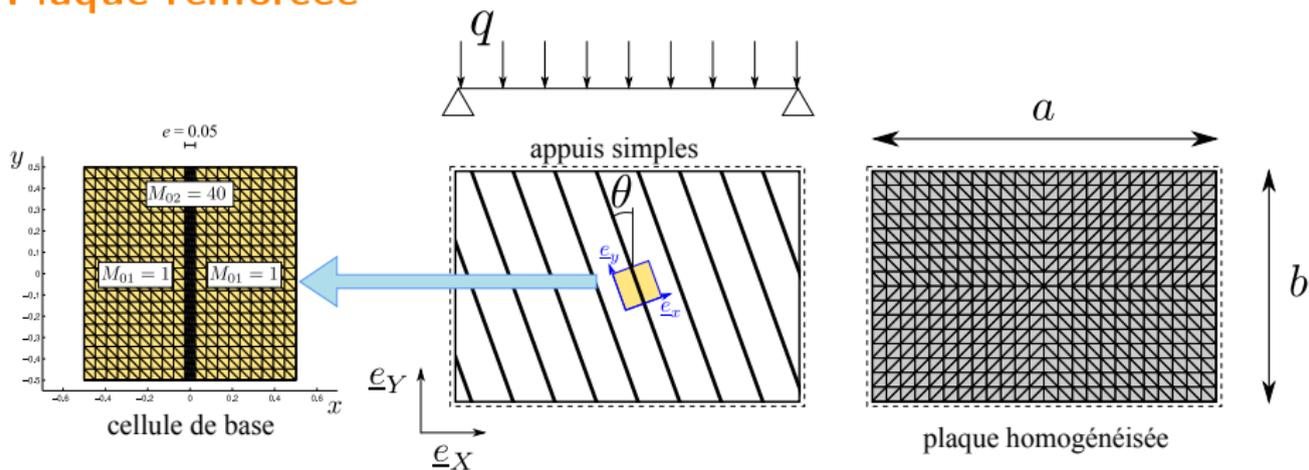


en appuis simples



encastrée

# Plaque renforcée

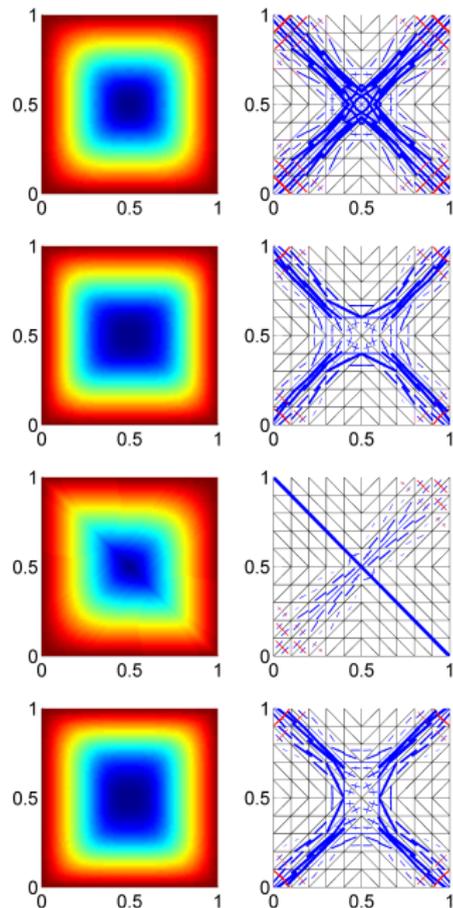
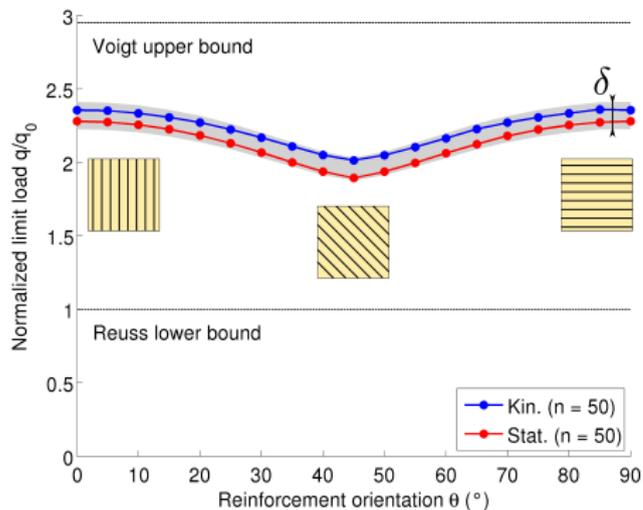


- calcul de  $G^{hom}$  écart stat./cin.:  $\epsilon_0 = 2.2\%$
- approximation avec  $n = 10, 30$  ou  $50$  ellipsoïdes
- calcul de structure :  $\epsilon_h^s + \epsilon_h^k \approx 1\%$

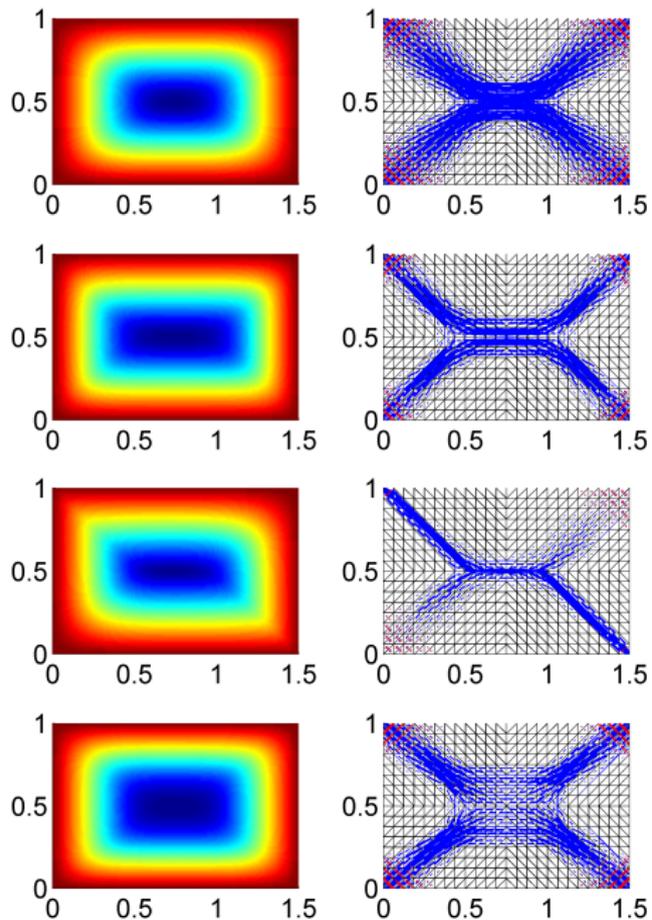
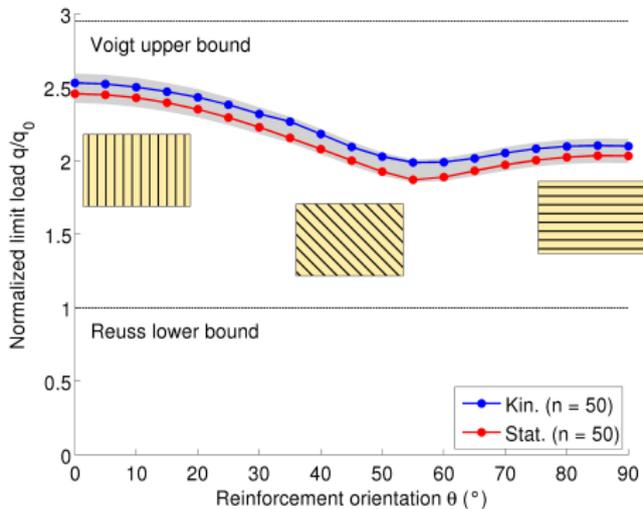
Erreurs	$\epsilon_{(n)}^s$	$\epsilon_{(n)}^k$
10 ell.	17.4%	18.0%
30 ell.	5.2%	4.5%
50 ell.	3.1%	2.5%

Estimation de l'écart relatif pour 50 ell.  $\delta \approx 9\%$

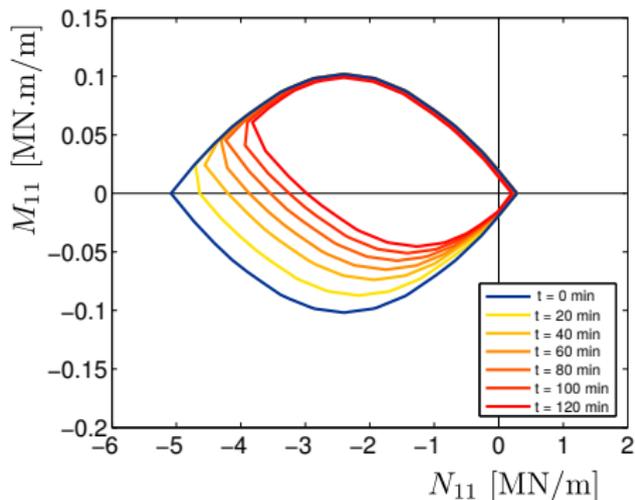
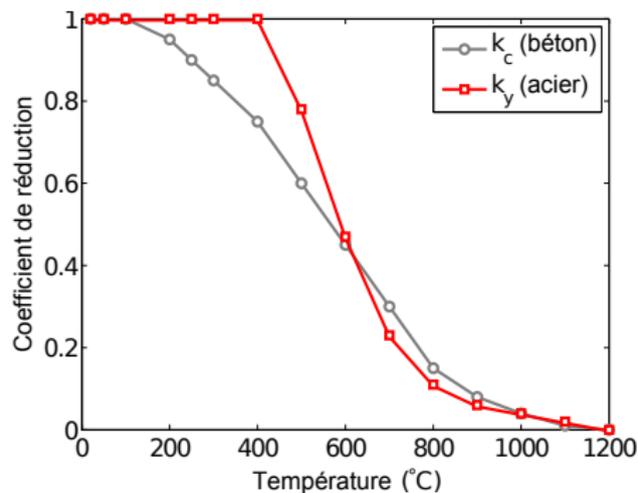
# Plaque carrée $a = b$



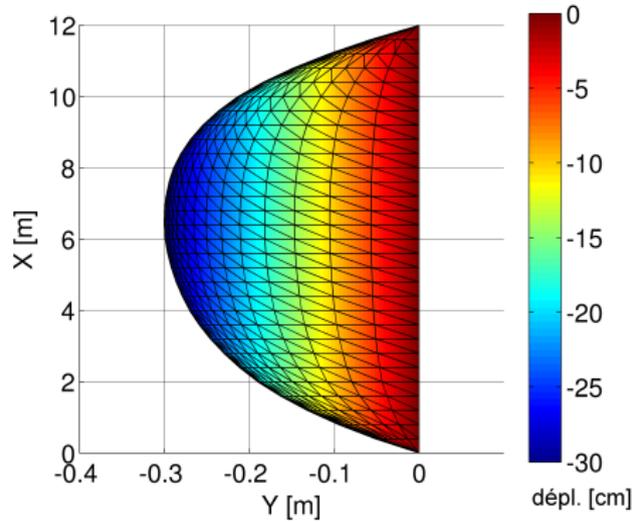
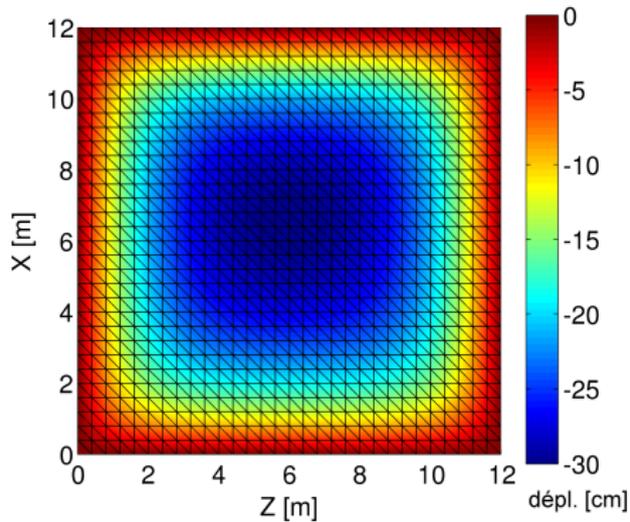
# Plaque rectangulaire $a = 1.5b$



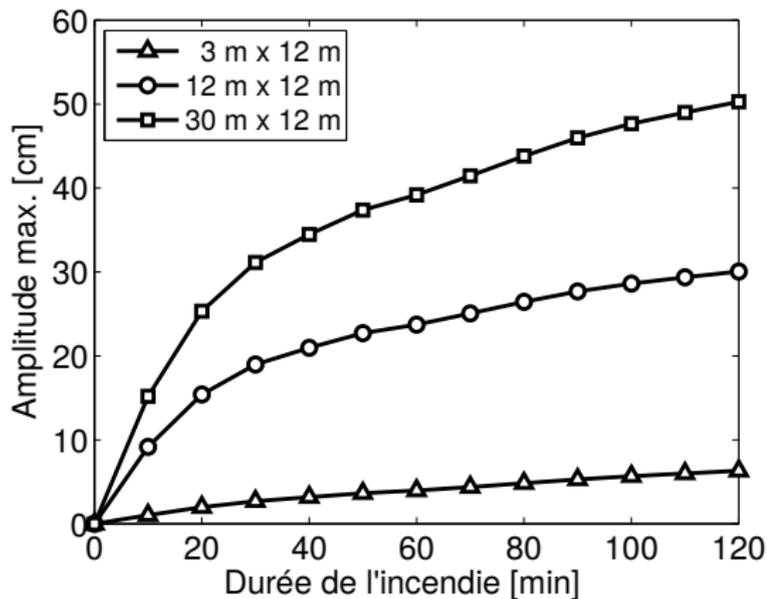
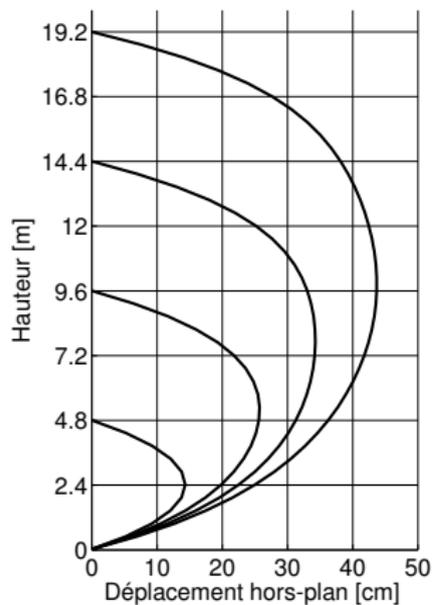
## Facteurs de réduction [Eurocode 2]



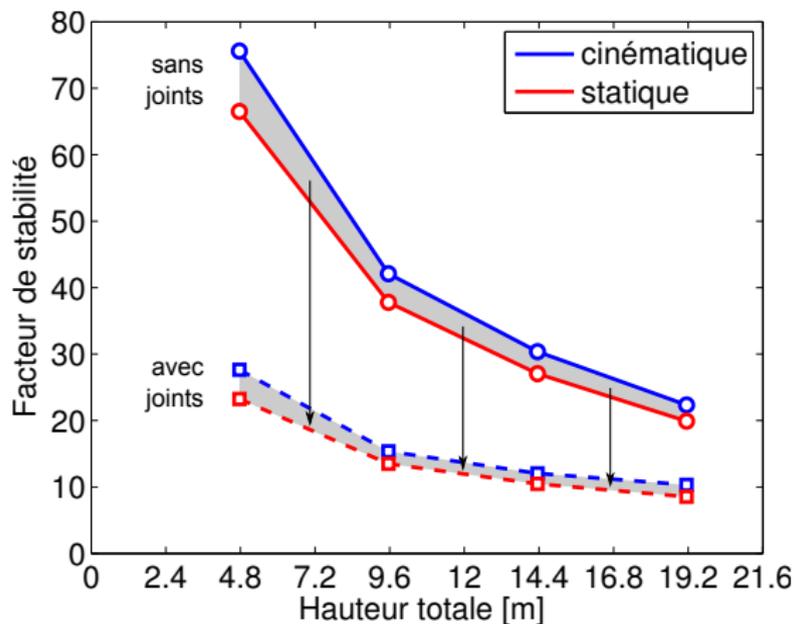
# Déformées thermiques



# Déformées thermiques



## Prise en compte de connexions imparfaites



## Approche cinématique mixte $\Leftrightarrow$ statique par l'extérieur

$$\begin{aligned} \max \quad & P_{\text{ext}} \\ \text{t.q.} \quad & \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{\underline{T}} \cdot \llbracket \underline{\underline{U}} \rrbracket dS = P_{\text{ext}} \quad \forall \underline{\underline{U}} \text{ C.A.} \\ & f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0, \quad f'(\underline{\underline{T}}) \leq 0 \end{aligned}$$

→ discrétisation de  $\underline{\underline{U}}$  bien choisie assurant le statut de borne supérieure



discrétisation de l'approche cinématique par l'extérieur

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_e \omega_e t_e \\ \text{t.q.} \quad & \mathbf{d} = \mathbf{B} \mathbf{U} \\ & \pi(\mathbf{d}_e) \leq t_e \\ & \mathbf{F}^T \mathbf{U} = P_{\text{ext}} \end{aligned}$$

puis résolution du dual "mathématique" avec Mosek :

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} & \max \quad & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{t.q.} \quad & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} & \Leftrightarrow \quad & \text{t.q.} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c} \\ & \mathbf{x} \in \mathcal{K} & & \mathbf{s} \in \mathcal{K}^* \end{aligned}$$